GAL II, Egzamin, Zestaw A

21 czerwca 2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE)
podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 1.

Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym mającym w bazie standardowej macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć taka bazę $\mathbb{R}^3$ w której ϕ ma macierz w postaci Jordana.

b) Znaleźć wartości własne macierzy $(A-2I)^{10}$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz A jest podobna do macierzy

$$\begin{bmatrix} 2 & t & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2.

Prosta $L \subset \mathbb{R}^3$ jest opisana układem równań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

oraz $p = (1,1,0)$ i $q = (1,0,1)$.

a) Znaleźć równanie płaszczyzny $P \subset \mathbb{R}^3$ takiej, że $P \supset L$ i $p \in P$.

b) Znaleźć obraz punktu q w rzucie prostopadłym na L.

c) Znaleźć parametryzację płaszczyzny $M \subset \mathbb{R}^3$ takiej, że $M \supset L$ i $\varrho(p,M) = \varrho(q,M)$, gdzie $\varrho(p,M)$ i $\varrho(q,M)$ oznaczają odpowiednio odległości punktu p od M oraz punktu q od M.

Zadanie 3.

Pokazać, że rzeczywista macierz symetryczna $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest macierzą iloczynu skalarnego wtedy i tylko wtedy gdy macierz A^7 jest macierzą iloczynu skalarnego.

GAL II, Egzamin, Zestaw A

21 czerwca 2014

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach. Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE)
podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego, numer zadania i literę zestawu.

Zadanie 4.

Rozpatrzmy przestrzeń dwuliniową $(\mathbb{R}^3, h)$, gdzie $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest zadane wzorem

$$h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + 4x_3y_3.$$

a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$ i podać macierz formy dwuliniowej h w otrzymanej bazie.

b) Niech $A_t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{bmatrix}$. Znaleźć sygnaturę macierzy A_t w zależności od $t \in \mathbb{R}$.

c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $G(h; \mathcal{B}) = A_t$.

Zadanie 5.

Dana jest forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

a) Znaleźć postać diagonalną formy kwadratowej q i podać bazę $\mathbb{R}^3$ w której q ma otrzymaną postać diagonalną.

b) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_3 - 4 = 0\}.$$

Wykonać szkicowy rysunek.

c) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ hiperpowierzchnia X oraz

$$Y_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad | \quad (1 - t)x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = t\}$$

są afinicznie równoważne.