Imię i nazwisko **numer indeksu** **grupa lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia**

Egzamin GAL 21 czerwca 2014

Zadanie 6. Proszę poniżej odpowiedzieć z uzasadnieniem na następujące pytania:

1. Niech φ będzie endomorfizmem 3-wymiarowej rzeczywistej przestrzeni liniowej V. Niech α, β będą liniowo niezależnymi wektorami w V dla których $\varphi(\alpha) = 2\alpha$, $\varphi(\beta) = 2\beta$. Czy istnieją liniowe niezależne wektory $\gamma, \delta \in V$ dla których $\varphi(\gamma) = 5\gamma$, $\varphi(\delta) = 5\delta$?

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Wypisać wszystkie macierze diagonalne podobne do A. Uzasadnić, że to te i tylko te.

3.Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ i niech $\mathcal{A}$ będzie bazą V. Przypuśćmy, że $G(h; \mathcal{A})$ jest kongruentna nad $\mathbb{R}$ do macierzy jednostkowej I. Czy h jest iloczynem skalarnym?

4. Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{R}$ i $\dim V \geqslant 2$. Czy dla każdych niezerowych wektorów $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ istnieje taki zachowujący orientację izomorfizm $\varphi : V \to V$, że $\varphi(\alpha_1) = \alpha_2$?

5. Niech $(H, <\,,\,>)$ będzie przestrzenią euklidesową, $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_2\}$ bazą przestrzeni $T(H)$ i f izomorfizmem afinicznym takim, że $f'(\alpha_i) = \epsilon_i \alpha_i$ dla każdego $i = 1, ..., n$, gdzie $\epsilon_i \in \{1, -1\}$. Czy dla każdego n-wymiarowego równoległościanu $R \subset H$ zachodzi $\mu_n(R) = \mu_n(f(R))$?

6. Niech (V, h) będzie trójwymiarową rzeczywistą przestrzenią dwuliniową, $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ bazą V taką, że $\det(G(h; \mathcal{A})) < 0$. Czy istnieje baza prostopadła $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ przestrzeni (V, h) taka, że $h(\beta_1, \beta_1) = h(\beta_2, \beta_2) = -1$, $h(\beta_3, \beta_3) = 1$?

7. Niech (V, h) będzie nieosobliwą przestrzenią dwuliniowa. Czy istnieje taki niezerowy wektor $\alpha \in V$, że $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdego $\beta \in V$?

8. Niech H będzie przestrzenią afiniczną nad K i niech $p_0; \alpha_1, ..., \alpha_n$ oraz $q_0; \beta_1, ..., \beta_n$ będą układami bazowymi przestrzeni H. Niech $F(x_1, ..., x_n) \in K[x_1, ..., x_n]$ będzie wielomianem wielomianem zmiennych $x_1, \ldots, x_n$ o współczynnikach z ciała K i niech

$$X = \{p_0 + \sum_{i=1}^{n} t_i \alpha_i \,|\, F(t_1, ..., t_n) = 0\}, \qquad Y = \{q_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i \beta_i \,|\, F(s_1, ..., s_n) = 0\}.$$

Czy istnieje izomorfizm afiniczny $f : H \to H$ taki, że $f(X) = Y$?