Sprawdzian 4
17 maja 2013

Zadanie 1 *Niech* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *będzie określone wzorem:*
$f(x_1, x_2, x_3) = (-x_2,\ -x_3 + 1,\ x_1 + 1)$.
a) Wykaż, że pochodna f' *jest izometrią liniową.*
b) Sprawdź, że f *jest obrotem - znajdź oś obrotu i kąt.*
c) Zbadaj, czy istnieje taka symetria S*, że* $S \circ f$ *jest obrotem wokół osi* $\overrightarrow{x_3}$.

Zadanie 2 *Niech* $l = (0,3,0,1) + lin\,\{(2,0,0,1)\}$
i $\pi = af\{(3,1,0,0),(3,2,0,-1),(3,0,1,1)\}$ *będą podprzestrzeniami przestrzeni afinicznej euklidesowej* $\mathbb{R}^4$.
a) Znajdź odległość między prostą l *a płaszczyzną* π.
($\rho(l,\pi) = min\,\{\rho(p,q)\,|\,p \in l, q \in \pi\}$)
b) Opisz obraz l *w symetrii prostopadłej* S *względem płaszczyzny* π.
c) Oblicz macierz symetrii prostopadłej S *względem płaszczyzny* π*, w standardowym układzie bazowym i napisz wzór analityczny.*

Zadanie 3 *Niech funkcjonał dwuliniowy* $\xi_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *będzie określone macierzą* $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.
a) Opisz i uzasadnij, dla jakich wartości parametrów $a, b, c \in \mathbb{R}$ *funkcjonał* $\xi_{a,b,c}$ *jest iloczynem skalarnym.*
b) Znajdź bazę ortonormalną względem iloczynu skalarnego $\xi_{2,2,1}$.
c) Udowodnij, że dla każdego b *istnieje dwuwymiarowa podprzestrzeń* $W \subset \mathbb{R}^3$*, na której* $\xi_{2,b,1}$ *jest iloczynem skalarnym.*

Zadanie 4 *Niech* $\alpha, \beta \in R^3$ *będą takimi wektorami, że* $\|\alpha\| = 1$, $\|\beta\| = 2$ *i cosinus kąta między nimi wynosi* $\frac{4}{5}$.
a) Oblicz długość wektora $(2\alpha - 3\beta) \times (3\alpha - 4\beta)$.
b) Oblicz objętość równoległościanu $\mu_3(R(\alpha, \beta, \alpha \times \beta))$.
c) Zbadaj czy wektory α, $\alpha \times \beta$ *i* $(\beta \times \alpha) \times \alpha$ *tworzą bazę ortonormalną.*

Zadanie 5 *Niech* M *będzie macierzą izometrii liniowej* f *przestrzeni* E^3 *w bazie standardowej.*
a) Udowodnij, że f *jest symetrią wtedy i tylko wtedy, gdy* M *jest macierzą symetryczną.*
b) Udowodnij, że f *jest obrotem wtedy i tylko wtedy, gdy* $\det M = 1$.

c) Opisz jakie własności ma f *gdy* $\det M = 1$ *i* $M = M^T$.