Sprawdzian 3 zestaw A 22 marca 2013

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego i numer zadania.

Zadanie 1 *Niech* $A = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 8 & 8 \end{bmatrix}$ *zaś* $B_t = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & t & 8 \end{bmatrix}$

a) Znajdź taką macierz C*, że macierz* $C^{-1}AC$ *jest w postaci Jordana.*

b) Zbadaj, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ *macierze* A *i* B_t *są podobne.*

Zadanie 2 *Niech* $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ *będzie opisane macierzą*

$$A = M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Znajdź postać Jordana macierzy A*.*

(b) Czy jest prawdą, że istnieje taka baza $\mathcal{B}$*, że* $M(f^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$*. Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 3 *Niech* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *zadanym wzorem*

$\phi(x_1, x_2, x_3) = (7x_1 - 4x_2 + 9x_3,\ 12x_1 - 7x_2 - 6x_3,\ 8x_3)$ *i niech* $A = M(\phi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$.

(a) Zbadaj, czy endomorfizm ϕ *jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podaj przykład takiej bazy przestrzeni* $\mathbb{R}^3$*, w której* ϕ *ma macierz diagonalną.*

(b) Znajdź taką macierz B *by* $B^3 = A$*.*

Zadanie 4 *Niech* $L_2 = (2, 2, 2) + lin\{(2, 3, 2)\}$ *i niech* L_1 *będzie prostą w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *opisaną układem:*

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ \qquad 2x_2 - x_3 &= -1 \end{cases}$$

a) Znajdź przedstawienie parametryczne prostej L_1*.*

b) Znajdź równanie płaszczyzny π *zawierającej prostą* L_2*, do której* L_1 *jest równoległa.* ($T(L_1) \subset T(\pi)$).

Zadanie 5 *Niech* $\mathcal{A}$ *będzie niepustym zbiorem punktów w położeniu ogólnym, zawartym w przestrzeni afinicznej* $H \subset K^n$*.*

a) Niech $q \in H \setminus \mathcal{A}$*. Udowodnij, że zbiór* $\mathcal{A} \cup \{q\}$ *jest w położeniu ogólnym wtedy i tylko wtedy, gdy* $q \notin \mathrm{af}(\mathcal{A})$*.*

b) Niech $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, ..., p_t\}$ *będzie bazą punktową przestrzeni afinicznej* H*. Udowodnij, że zbiór* $\mathcal{A}$ *można uzupełnić do bazy punktowej przestrzeni* H *punktami z* $\mathcal{B}$*.*

Sprawdzian 3 zestaw B 22 marca 2013

• Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić.
• Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce lub kartkach.
• Na każdej kartce proszę (CZYTELNIE) podać: imię, nazwisko, numer indeksu osoby zdającej, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko prowadzącego i numer zadania.

Zadanie 1 *Niech* $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & 8 & -8 \end{bmatrix}$ *zaś* $B_t = \begin{bmatrix} 6 & 6 & -6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 8 & t & -8 \end{bmatrix}$

a) Znajdź taką macierz C, *że macierz* $C^{-1}AC$ *jest w postaci Jordana.*

b) Zbadaj, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ *macierze* A *i* B_t *są podobne.*

Zadanie 2 *Niech* $f \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ *będzie opisane macierzą*

$$A = M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & -2 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Znajdź postać Jordana macierzy A.

b) Czy jest prawdą, że istnieje taka baza $\mathcal{B}$, *że* $M(f^{-1})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = A$. *Odpowiedź uzasadnij.*

Zadanie 3 *Niech* $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *zadanym wzorem*

$\phi(x_1, x_2, x_3) = (-7x_1 - 12x_2 - 15x_3,\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3,\ 8x_3)$ *i niech* $A = M(\phi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$.

a) Zbadaj, czy endomorfizm ϕ *jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podaj przykład takiej bazy przestrzeni* $\mathbb{R}^3$, *w której* ϕ *ma macierz diagonalną.*

b) Znajdź taką macierz B *by* $B^3 = A$.

Zadanie 4 *Niech* $L_2 = (2, 2, 3) + lin\{(2, 3, 2)\}$ *i niech* L_1 *będzie prostą w przestrzeni* $\mathbb{R}^3$ *opisaną układem:*

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 &= -2 \\ \qquad x_1 - 4x_3 &= -5 \end{cases}$$

a) Znajdź przedstawienie parametryczne prostej L_1.

b) Znajdź równanie płaszczyzny π *zawierającej prostą* L_2, *do której* L_1 *jest równoległa.* ($T(L_1) \subset T(\pi)$).

Zadanie 5 *Niech* $\mathcal{A}$ *będzie niepustym zbiorem punktów w położeniu ogólnym, zawartym w przestrzeni afinicznej* $H \subset K^n$.

a) Niech $q \in H \setminus \mathcal{A}$. *Udowodnij, że zbiór* $\mathcal{A} \cup \{q\}$ *jest w położeniu ogólnym wtedy i tylko wtedy, gdy* $q \notin \mathrm{af}(\mathcal{A})$.

b) Niech $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, ..., p_t\}$ *będzie bazą punktową przestrzeni afinicznej* H. *Udowodnij, że zbiór* $\mathcal{A}$ *można uzupełnić do bazy punktowej przestrzeni* H *punktami z* $\mathcal{B}$.