GAL, Egzamin 20 czerwca 2013, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1. Niech

$$A_{(a,b,c)} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 & a \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ a & 0 & c & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Dla jakich wartości $b \in \mathbb{R}$ endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadany własnością $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A_{(0,b,1)}$ jest diagonalizowalny?
b) Dla $a = 2$ podać przykład wartości $b, c \in \mathbb{R}$ takich, że istnieje macierz odwracalna $C \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ taka, że iloczyn $CA_{(a,b,c)}C^{-1}$ jest macierzą diagonalną. (Uzasadnić, że C istnieje; nie potrzeba jej obliczać).

Zadanie 2. Niech $p_0 = (1, 1, -2)$, $p_1 = (2, 0, -2)$, $p_2 = (2, 1, -3)$, $p_3 = (1, 3, -3)$. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym zadanym przez warunki

$$\begin{aligned} f(p_0) &= p_0, \\ f(p_1) &= p_1, \\ f(p_2) &= 2p_2 - p_0, \\ f(p_3) &= p_0. \end{aligned}$$

a) Udowodnić, że nie istnieją podprzestrzenie afiniczne E_1, E_2 takie, że f jest rzutem na E_1 wzdłuż E_2.
b) Niech $T = S(p_0, p_1, p_2)$. Wyznaczyć pole powierzchni (tzn. 2-wymiarową objętość) sympleksów T oraz $f(T)$.

Zadanie 3. Niech $(\mathbb{R}^4, \xi)$ będzie przestrzenią z symetryczną formą dwuliniową, która w bazie standardowej zadana jest przez macierz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć bazy podprzestrzeni $\mathrm{lin}\{e_2, e_3\}^\perp$ oraz $\mathrm{lin}\{e_1, e_2\}^\perp$.
b) Znaleźć bazę, w której macierz ξ jest diagonalna z 1, -1 lub 0 na przekątnej.
c) Udowodnić, że wymiar maksymalnej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej dla ξ wynosi 2.

Zadanie 4. Niech $4x_1x_3+4x_1+8x_3+7 = 0$ będzie równaniem hiperpowierzchni K w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ w standardowym układzie bazowym (tj. punkt $(0, 0, 0)$ i baza e_1, e_2, e_3). Niech $H = (1, 0, 0)+\mathrm{lin}\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$.

a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni K (podać nazwę i naszkicować).
b) Zbadać, czy K posiada środki symetrii i znaleźć je, jeśli istnieją.
c) Znaleźć równanie krzywej $K \cap H$ w układzie bazowym $(1, 0, 0)$ i $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)$ płaszczyzny H.

Zadanie 5.
a) Dane są dwie płaszczyzny

$$H = (1, 0, 0, 0, 0) + \mathrm{lin}\{(0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\} \quad \text{oraz} \quad K = (0, 1, 0, 0, 1) + \mathrm{lin}\{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

w euklidesowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wskazać prostą prostopadłą do obu płaszczyzn i mającą z nimi punkt wspólny. Czy prosta ta jest wyznaczona jednoznacznie? Odpowiedź uzasadnić.
b) Dane są dwie podprzestrzenie H i K afinicznej przestrzeni euklidesowej takie, że $H \cap K = \emptyset$. Udowodnić, że istnieje prosta L prostopadła do H i do K i taka, że $H \cap L \neq \emptyset$ i $K \cap L \neq \emptyset$.

GAL, Egzamin 20 czerwca 2013, Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1. Niech

$$A_{(a,b,c)} = \begin{bmatrix} 1 & b & 0 & a \\ 0 & 2 & a & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ a & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Dla jakich wartości $c \in \mathbb{R}$ endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadany własnością $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A_{(0,1,c)}$ jest diagonalizowalny?
b) Dla $a = 3$ podać przykład wartości $b, c \in \mathbb{R}$ takich, że istnieje macierz odwracalna $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ taka, że iloczyn $CA_{(a,b,c)}C^{-1}$ jest macierzą diagonalną. (Uzasadnić, że C istnieje; nie potrzeba jej obliczać).

Zadanie 2. Niech $p_0 = (1, 2, 1)$, $p_1 = (0, 2, 2)$, $p_2 = (1, 1, 2)$, $p_3 = (3, 1, 1)$. Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem afinicznym zadanym przez warunki

$$\begin{aligned} f(p_0) &= p_0, \\ f(p_1) &= 3p_1 - 2p_0, \\ f(p_2) &= p_2, \\ f(p_3) &= p_0. \end{aligned}$$

a) Udowodnić, że nie istnieją podprzestrzenie afiniczne E_1, E_2 takie, że f jest rzutem na E_1 wzdłuż E_2.
b) Niech $T = S(p_0, p_1, p_2)$. Wyznaczyć pole powierzchni (tzn. 2-wymiarową objętość) sympleksów T oraz $f(T)$.

Zadanie 3. Niech $(\mathbb{R}^4, \xi)$ będzie przestrzenią z symetryczną formą dwuliniową, która w bazie standardowej zadana jest przez macierz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć bazy podprzestrzeni $\mathrm{lin}\{e_2, e_3\}^\perp$ oraz $\mathrm{lin}\{e_1, e_2\}^\perp$.
b) Znaleźć bazę, w której macierz ξ jest diagonalna z 1, -1 lub 0 na przekątnej.
c) Udowodnić, że wymiar maksymalnej podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanej dla ξ wynosi 2.

Zadanie 4. Niech $4x_2x_3+8x_2+4x_3+7 = 0$ będzie równaniem hiperpowierzchni K w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ w standardowym układzie bazowym (tj. punkt $(0, 0, 0)$ i baza e_1, e_2, e_3). Niech $H = (1, 0, 0)+\mathrm{lin}\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$.

a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni K (podać nazwę i naszkicować).
b) Zbadać, czy K posiada środki symetrii i znaleźć je, jeśli istnieją.
c) Znaleźć równanie krzywej $K\cap H$ w układzie bazowym $(1, 0, 0)$ i $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -1)$ płaszczyzny H.

Zadanie 5.
a) Dane są dwie płaszczyzny

$$H = (0, 1, 0, 0, 0) + \mathrm{lin}\{(1, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1, 0)\} \text{ i } K = (1, 0, 0, 0, 1) + \mathrm{lin}\{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$$

w euklidesowej przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^5$ ze standardowym iloczynem skalarnym. Wskazać prostą prostopadłą do obu płaszczyzn i mającą z nimi punkt wspólny. Czy prosta ta jest wyznaczona jednoznacznie? Odpowiedź uzasadnić.
b) Dane są dwie podprzestrzenie H i K afinicznej przestrzeni euklidesowej takie, że $H \cap K = \emptyset$. Udowodnić, że istnieje prosta L prostopadła do H i do K i taka, że $H \cap L \neq \emptyset$ i $K \cap L \neq \emptyset$.