GAL, Kolokwium 4 TEMAT **A** 18.05.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dana jest forma dwuliniowa $h_{(a,b)}: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ wzorem $h_{(a,b)}((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 4x_2y_2 + 2x_3y_3 + bx_3y_4 + x_4y_3 + ax_4y_4$.
   (a) Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ forma $h_{(a,b)}$ jest iloczynem skalarnym? Odpowiedź uzasadnić.
   (b) Niech $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)\colon\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$. W przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^4, h_{(1,1)})$ znaleźć bazę przestrzeni $T(M)^\perp$ oraz znaleźć odległość punktu $p = (3, 0, 0, 0)$ od hiperpłaszczyzny M.

2. W przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3)\colon\ x_1 + x_2 - x_3 = -3\}$ i prosta $L = (-2, 1, 2) + lin((1, 0, 1))$.
   (a) Ile jest izometrii f przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ takich, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in L$ i $f(q) \in M$ dla każdego $q \in M$? Odpowiedź uzasadnić.
   (b) Podać wzór na różną od identyczności izometrię przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ spełniającą warunek: $f(p) = p$ dla każdego $p \in M$.

3. W przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ ze standardowym iloczynem skalarnym dany jest endomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 - x_2, -x_1 + 4x_2, 3x_3)$.
   (a) Czy φ jest przekształceniem samosprzężonym? Jeśli tak, to podać przykład bazy ortonormalnej przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ złożonej z wektorów własnych endomorfizmu φ oraz podać przykład macierzy ortogonalnej C takiej, że macierz C^TAC jest diagonalna, gdzie $A = M(\varphi)_{St}$.
   (b) Czy istnieje baza ortonormalna $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ i w której $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$? Jeśli tak, to policzyć ile jest takich baz i podać przykład jednej z nich.

4. Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, a W jej podprzestrzenią. Pokazać, że
   (a) $V = W \oplus W^\perp$.
   (b) V ma bazę prostopadłą.

5. Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową.
   (a) Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będzie układem ortonormalnym wektorów przestrzeni $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wektora $\beta \in V$ zachodzi: $||\langle\beta, \alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle\beta, \alpha_2\rangle\alpha_2 + \ldots + \langle\beta, \alpha_k\rangle\alpha_k|| = ||\beta||$.
   (b) Wykazać, że izometria φ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jest endomorfizmem diagonalizowalnym przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest symetrią prostopadłą.

GAL, Kolokwium 4 TEMAT **B** 18.05.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. W przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ dana jest forma dwuliniowa $h_{(a,b)}: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ wzorem $h_{(a,b)}((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)) = 3x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 3x_2y_2 + ax_3y_3 + x_3y_4 + bx_4y_3 + 3x_4y_4$.
   (a) Dla jakich wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ forma $h_{(a,b)}$ jest iloczynem skalarnym? Odpowiedź uzasadnić.
   (b) Niech $M = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10\}$. W przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^4, h_{(1,1)})$ znaleźć bazę przestrzeni $T(M)^\perp$ oraz znaleźć odległość punktu $p = (2,0,0,0)$ od hiperpłaszczyzny M.

2. W przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1,x_2,x_3)\colon\ x_1 - x_2 + x_3 = 3\}$ i prosta $L = (2,1,2) + lin((1,1,0))$.
   (a) Ile jest izometrii f przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ takich, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in L$ i $f(q) \in M$ dla każdego $q \in M$? Odpowiedź uzasadnić.
   (b) Podać wzór na różną od identyczności izometrię przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ spełniającą warunek: $f(p) = p$ dla każdego $p \in M$.

3. W przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ ze standardowym iloczynem skalarnym dany jest endomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1, 3x_2 - x_3, -x_2 + 3x_3)$.
   (a) Czy φ jest przekształceniem samosprzężonym? Jeśli tak, to podać przykład bazy ortonormalnej przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ złożonej z wektorów własnych endomorfizmu φ oraz podać przykład macierzy ortogonalnej C takiej, że macierz C^TAC jest diagonalna, gdzie $A = M(\varphi)_{St}$.
   (b) Czy istnieje baza ortonormalna $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\ \rangle_{St})$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ i w której $\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$? Jeśli tak, to policzyć ile jest takich baz i podać przykład jednej z nich.

4. Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową, a W jej podprzestrzenią. Pokazać, że
   (a) $V = W \oplus W^\perp$.
   (b) V ma bazę prostopadłą.

5. Niech $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ będzie przestrzenią euklidesową liniową.
   (a) Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będzie układem ortonormalnym wektorów przestrzeni $(V, \langle\ ,\ \rangle)$. Wykazać, że $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest bazą przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego wektora $\beta \in V$ zachodzi: $||\langle\beta,\alpha_1\rangle\alpha_1 + \langle\beta,\alpha_2\rangle\alpha_2 + \ldots + \langle\beta,\alpha_k\rangle\alpha_k|| = ||\beta||$.
   (b) Wykazać, że izometria φ przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jest endomorfizmem diagonalizowalnym przestrzeni V wtedy i tylko wtedy, gdy φ jest symetrią prostopadłą.