GAL, egzamin poprawkowy 04.09.2012

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej i numer rozwiązywanego zadania.

1. (20pkt) Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Zbadać diagonalizowalność macierzy A nad $\mathbb{R}$ i nad $\mathbb{C}$. Jeśli A jest diagonalizowalna nad K ($K = \mathbb{R}$ lub $K = \mathbb{C}$), to podać przykład takiej macierzy $C \in M_{4\times 4}(K)$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
   (b) Czy istnieje $2-$wymiarowa podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ taka, że każdy wektor $\alpha \in W$ jest wektorem własnym endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{\mathrm{st}} = A$? Odpowiedź uzasadnić.
2. (20pkt) Niech $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie rzutem na płaszczyznę $M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 - x_3 = 1\}$ wzdłuż prostej $L = (-1, 2, -3) + lin((1, -1, 1))$.
   (a) Znaleźć parametryzację obrazu $f(T)$ prostej $T = (1, 0, 1) + lin((2, 1, 0))$.
   (b) Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ obraz prostej $K = (3, 1, 1) + lin((2, r, 2))$ przy przekształceniu f nie jest prostą? Odpowiedź uzasadnić. Dla każdego takiego r znaleźć $f(K)$.
3. (20pkt) W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\ \rangle$ dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 2x_3 = -2\}$ i prosta $L = (1, 1, 2) + \mathrm{lin}\,((1, 1, 1))$.
   (a) Niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie taką izometrią, że $g((1, 1, -1)) = (-1, -1, 3)$ oraz $g(p) = p$ dla każdego $p \in M$. Obliczyć $g((3, 1, 0))$.
   (b) Ile jest izometrii afinicznych $f \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takich, że $f(p) = p$ dla każdego $p \in L$ oraz $f(q) \in M$ dla każdego $q \in M$. Odpowiedź uzasadnić.
4. (20pkt) Forma dwuliniowa $h \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$.
   (a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3, h)$.
   (b) Podać przykład takiej niezerowej podprzestrzeni W przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$, że każdy wektor $\alpha \in W$ jest izotropowy. Czy istnieje taka $2-$wymiarowa podprzestrzeń W przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h)$, że każdy wektor $\alpha \in W$ jest izotropowy? Odpowiedź uzasadnić.
5. (20pkt) W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dana jest hiperpowierzchnia $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0\}$.
   (a) Znaleźć typ afiniczny X (podać nazwę i naszkicować).
   (b) Znaleźć typ afiniczny krzywej $M \cap X$ otrzymanej z przecięcia hiperpowierzchni X płaszczyzną $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = -1\}$. Czy istnieje płaszczyzna N taka, że $N \cap X$ jest afinicznie izomorficzna z parabolą? Odpowiedź uzasadnić.
6. (15pkt) Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem samosprzężonym przestrzeni euklidesowej liniowej V. Udowodnić,że jeśli $\alpha, \beta \in V$ są wektorami własnymi przekształcenia φ odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to wektory α, β są prostopadłe.
7. (15pkt) Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K oraz W jej podprzestrzenią. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) $V = W \oplus W^{\perp}$.
   (b) W jest podprzestrzenią nieosobliwą.

8. (20pkt) Niech $A \in M_n(\mathbb{C})$ będzie macierzą o współczynnikach zespolonych. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Istnieje liczba naturalna $m \in \mathbb{N}$ taka, że A^m jest macierzą zerową.

   (b) $tr(A^k) = 0$ dla każdego $k = 1, 2, \ldots, n$.