

GAL potok 1, kolokwium nr 2, 18.05.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.

Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat B

1. Niech $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1\}$. W przestrzeni $(\mathbf{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$

a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $T(H)$ i bazę ortonormalną przestrzeni $T(H)$.

b) Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (4, 0, 0, 2)$ na przestrzeń H .

2. Niech $p_0 = (0, 1, 1), p_1 = (1, 1, 2), p_2 = (2, 2, 1)$. W przestrzeni $(\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$

a) Znaleźć odległość punktu $p = (2, 1, 2)$ od płaszczyzny $M = \text{af}(p_0, p_1, p_2)$.

b) Na krzywej $S = \{(r^2 - 5, r, 2r^2) \mid r \in \mathbf{R}\}$ znaleźć taki punkt q , że objętość czworościanu $\text{conv}(p_0, p_1, p_2, q)$ jest najmniejsza. Obliczyć tę najmniejszą objętość.

3. a) Ile jest izometrii f przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$ spełniających warunki: $f((2, 0, 0)) = (1, -1, -1)$ oraz $f'(\alpha) = \alpha$ dla każdego $\alpha \in \text{lin}((1, 2, 1), (1, 2, 0))$? Dla każdej takiej izometrii f obliczyć $f((8, 2, 1))$.

b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ przekształcenie $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + sx_2)$ jest izometrią przestrzeni euklidesowej liniowej $(\mathbf{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, gdzie $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$?

4. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie n -wymiarową przestrzenią euklidesową liniową.

a) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest układem prostopadłym niezerowych wektorów przestrzeni $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, to układ ten jest liniowo niezależny.

b) Wykazać, że każda izometria przestrzeni $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ jest złożeniem pewnej liczby symetrii prostopadłych względem podprzestrzeni wymiaru $n - 1$.

5. W przestrzeni $(\mathbf{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$ rozpatrzmy układ wektorów $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, gdzie $\alpha_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ dla $j = 1, \dots, k$ i rozpatrzmy odpowiadającą im macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times k}(\mathbf{R})$. Niech $\varphi : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ będzie rzutem prostopadłym na $W = \text{lin}(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

a) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest układem ortonormalnym, to $M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = AA^T$.

b) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jest układem liniowo niezależnym, to $M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} = A(A^T A)^{-1} A^T$.