**GAL potok 1, kolokwium nr 1, 30.03.2007**

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

**1.** Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (3x_1 + x_4, x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4, -x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4, 3x_4)$.
a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu $\varphi$.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ macierz $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}}$ jest podobna do macierzy $A_t = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

**2.** Dane jest przekształcenie $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_1 + 2x_3)$ oraz funkcjonał liniowy $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $\psi((y_1, y_2)) = 2y_1 + 3y_2$.
a) Znaleźć współrzędne funkcjonału $\psi$ w bazie dualnej do bazy $(1,2), (3,-1)$ oraz znaleźć współrzędne funkcjonału $\varphi^*(\psi)$ w bazie dualnej do bazy $(1,1,1), (1,0,1), (1,0,0)$.
b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbf{R}$ funkcjonał $\psi_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ $\psi_i((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + tx_2 + 2x_3$ należy do $\mathrm{im}(\varphi^*)$ ?

**3.** W $\mathbf{R}^3$ dane są płaszczyzny $H_1 = (3,0,0) + \mathrm{lin}((2,-1,0), (1,0,-1))$ i $H_2 : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$, prosta $L = (-2,3,-1) + \mathrm{lin}((0,1,-2))$ oraz punkt $p = (1,1,0)$.
a) Znaleźć równanie płaszczyzny $H_1$ oraz parametryzację prostej $H_1 \cap H_2$.
b) Niech $M$ będzie taką prostą, która przechodzi przez punkt $p$, przecina prostą $L$ i nie przecina płaszczyzny $H_2$. Znaleźć punkt $L \cap M$.

**4.**
a) Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Wykazać, że następujące warunki są równoważne:
(i) istnieje macierz $C \in M_{n\times n}(K)$ taka, że $B = C^{-1}AC$,
(ii) istnieje $\varphi \in End(K^n)$ i bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ przestrzeni $K^n$ takie, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = A, M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = B$.

b) Niech $\varphi \in End(V)$, niech $a_1, \ldots, a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi$ i niech $\alpha_i \in V_{(a_i)}$ dla $i = 1, \ldots, k$. Wykazać, że jeśli $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$, to $\alpha_i = 0$ dla $i = 1, \ldots, k$.

**5.** Niech $V$ będzie $n$ wymiarową przestrzenią liniową nad $K$ i niech $\varphi \in End(V)$.
a) Niech $n = 2$. Wykazać, że $\varphi$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego niezerowego wektora $\alpha \in V$ istnieje wektor własny $\beta \in V$ taki, że $V = \mathrm{lin}(\alpha) \oplus \mathrm{lin}(\beta)$.
b) $n$ dowolne. Wykazać, że $\varphi$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ istnieje $\varphi$-niezmiennicza podprzestrzeń $Z$ taka, że $V = W \oplus Z$.