

GAL, potok I

egzamin, 3 września 2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.

Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być imię i nazwisko osoby zdającej, jej numer indeksu oraz numer rozwiązywanego zadania.

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

- Znaleźć wartości własne macierzy A i odpowiadające im wektory własne.
- Znaleźć postać Jordana macierzy A oraz macierzy A^5 .
- Obliczyć A^{111} .

Zadanie 2

W \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalarnym dane są płaszczyzna M opisana równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ oraz prosta $L : (0, 1, 1) + \text{lin}((-1, 1, 0))$.

- Znaleźć parametryzację płaszczyzny M oraz układ równań opisujący prostą L .
- Znaleźć rzut prostopadły prostej L na płaszczyznę M .
- Znaleźć parametryzację płaszczyzny prostopadłej do M i zawierającej L .

Zadanie 3

Niech $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową na \mathbb{R}^3 , która w bazie standardowej \mathbb{R}^3 ma macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$ i niech $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową na \mathbb{R}^3 odpowiadającą formie dwuliniowej h .

- Policzyć sygnaturę formy h w zależności od wartości parametru t .
- Dla jakich wartości parametru t forma h jest iloczynem skalarnym?
- Określić typ afiniczny hiperpowierzchni opisanej równaniem $q(x_1, x_2, x_3) = 2$ w zależności od wartości parametru t . Dla każdego otrzymanego typu zrobić rysunek.

Zadanie 4

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową, gdzie $h : V \times V \rightarrow K$ jest formą dwuliniową symetryczną i V jest przestrzenią liniową nad ciałem K o charakterystyce $\neq 2$.

- Pokazać, że jeżeli α i β są wektorami izotropowymi to dla każdej pary skalarów $a, b \in K$ wektory $a\alpha + b\beta$ i $a\alpha - b\beta$ są prostopadłe.
- Pokazać, że zbiór wektorów izotropowych przestrzeni V jest podprzestrzenią liniową V wtedy i tylko wtedy gdy każdy wektor izotropowy należy do V^\perp .
- Pokazać, że jeśli h jest nieosobliwa i $\dim V = 2$, to istnienie izotropowego wektora $\alpha \neq 0$ jest równoważne istnieniu takiej bazy przestrzeni V , że macierz formy h ma w tej bazie postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$