# GAL II, Kolokwium nr 2, Temat B

**19 maja 2006**

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

**Zadanie 1**

(a) Niech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie jednokładnością o środku (1,1,0) oraz skali 2 i niech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przesunięciem o wektor (1,-1,2). Wyznaczyć $f \circ g((1,1,1))$.

(b) W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć wzór na izometrię afiniczną $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ taką, że $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3)$ dla każdego $(x_1, x_2, x_3) \in \operatorname{af}((-1,-1,0)(-1,-1,1))$ oraz $f((0,1,2)) = (-3,0,2)$.

**Zadanie 2**

Niech $<\ ,\ >: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ będzie dane wzorem

$$< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= \frac{1}{2} s x_1 y_1 + x_1 y_4 + 2x_2 y_2 + \frac{1}{2} s x_3 y_3 + x_4 y_1 + 2x_4 y_4.$$

(a) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ funkcja $<\ ,\ >$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^4$

(b) Dla jakich $s \in \mathbb{R}$ funkcja $<\ ,\ >|_W : W \times W \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym na $W = \operatorname{lin}(\varepsilon_3, \varepsilon_4)$

(c) Dla $s = 2$ znaleźć bazę prostopadła przestrzeni opisanej układem rónań

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

**Zadanie 3**

(a) Wyznaczyć obrazy punktu (-2,0,0) przy rzucie prostopadłym na płaszczyznę $P$ opisana równaniem $4x_2 - 3x_3 + 25 = 0$ oraz symetrii prostopadłej względem $P$.

(b) Dla jakiego punktu $p$ prostej $L = (0,-1,7) + \operatorname{lin}((0,3,4))$ pole trójkąta o wierzchołkach (2,0,0), (4,0,0) oraz $p$ jest najmniejsze.

**Zadanie 4**

Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą symetryczną. Pokazać, że:

(a) każda wartość własna $A$ jest rzeczywista.

(b) istnieje baza ortonormalna $\mathbb{R}^n$ złozona z wektorów własnych $A$.

**Zadanie 5** liniowymi przestrzeniami euklidesowymi,

Niech $\phi : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym, gdzie $V$ i $W$ są [redacted]. Pokazać, że:

(a) istnieje $C \in \mathbb{R}$ takie, że $\|\phi(\alpha)\| \leqslant C\|\alpha\|$ dla każdego $\alpha \in V$.

(b) jeżeli $\phi(V) = W = V$, to istnieje $D \in \mathbb{R}$ takie, że $\|\alpha\| \leqslant D\|\phi(\alpha)\|$ dla każdego $\alpha \in V$.