GAL II, Kolokwium nr 1, Temat A

7 kwietnia 2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała, lub nazwisko osoby prowadzącej ćwiczenia.
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & r \end{bmatrix}$

(a) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ macierz A jest odwracalna?

(b) Dla $r = -1$ znaleźć A^{100}.

Zadanie 2

Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ będzie dany wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, -3x_1 - 4x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4, 2x_1 + x_4)$.

(a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych φ.

(b) Znaleźć postać Jordana macierzy φ. Czy $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ może być macierzą φ w jakiejś bazie przestrzeni $\mathbb{R}^4$?

Zadanie 3

Niech $H = \mathrm{af}((1, 0, 2), (-1, 1, 1), (2, 0, 3))$.

(a) Znaleźć równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej punkt $(1, 1, 1)$.

(b) Niech $L : (-1, -1, -1) + t(1, -2, 0)$. Wyznaczyć obrazy punktu $(0, 1, 1)$ przy rzucie na P wzdłuż L oraz przy symetrii względem P wzdłuż L.

Zadanie 4

Niech $\dim V < \infty$ i niech $a_1, a_2, ..., a_k$ będą parami różnymi wartościami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \to V$.

(a) Pokazać, że jeżeli $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ są wektorami własnymi φ o wartościach własnych $a_1, a_2, ..., a_k$ (odpowiednio), to układ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

(b) Pokazać, że jeżeli $a_1, a_2, ..., a_k$ są wszystkimi wartościami własnymi φ, to endomorfizm φ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\dim V_{(a_1)} + \dim V_{(a_2)} + \ldots + \dim V_{(a_k)} = \dim V$.

Zadanie 5

Załóżmy, że macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ spełniają warunki $AB = BA$, rząd macierzy A jest równy 1 oraz $A^2 \neq 0$. Pokazać, że:

(a) A jest diagonalizowalna.

(b) Dla każdego n macierz B ma przynajmniej jeden wektor własny oraz przynajmniej dwa liniowo niezależne wektory własne dla n parzystych.