

GAL II, Egzamin, Temat B

12 czerwca 2006

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być imię i nazwisko osoby zdającej, jej numer indeksu, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1

Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie zadany wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3x_1, x_1 + 3x_2, -x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4) \text{ oraz } B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Uzasadnić.
- (b) Znaleźć postać Jordana macierzy B .
- (c) Czy istnieje taka baza \mathcal{A} przestrzeni \mathbb{R}^4 , że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = B$.

Zadanie 2

Niech $L : (1, 0, 0) + t(1, 1, 1) \subset \mathbb{R}^3$. W \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć równanie płaszczyzny P takiej, że:

- (a) $P \supset L$ oraz $(3, 1, 0) \in P$.
- (b) $P \supset L$ oraz P zawiera prostą równoległą do K , która jest opisana przez układ równań

$$\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \end{cases}.$$

- (c) $P \supset L$ oraz P jest równoodległa od punktów $(0,1,0)$ i $(0,0,1)$.

Zadanie 3

Niech P oznacza płaszczyznę w \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalarnym, opisaną równaniem $x_2 - x_3 = 2$. Znaleźć wzór na przekształcenie afiniczne $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że:

- (a) $f(P) = \{(1, 2, 0)\}$ oraz $f((1, 3, -1)) = (1, 0, 2)$.
- (b) f jest rzutem prostokątnym na prostą $L : (1, 1, 1) + t(0, 1, -1)$.
- (c) f jest izometrią zmieniającą orientację przestrzeni oraz $f|_P = \text{id}_P$.

Zadanie 4

Niech $q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową zadną wzorem

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

- (a) Znaleźć bazę przestrzeni \mathbb{R}^3 w której forma q ma postać diagonalną.
- (b) Znaleźć rząd i sygnaturę formy q .
- (c) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni w \mathbb{R}^3 określonej równaniem

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3 + 2x_1 - 2 = 0.$$

Wykonać rysunek.

Zadanie 5

Niech V będzie przestrzenią liniową wymiaru skończonego nad ciałem K . Endomorfizm $\varphi \in \text{End}(V)$ nazywamy półprostym jeżeli dla każdej niezmienniczej podprzestrzeni V_1 endomorfizmu φ istnieje podprzestrzeń niezmiennicza V_2 taka, że $V = V_1 \oplus V_2$. Pokazać, że:

- (a) każda liniowa izometria przestrzeni euklidesowej jest endomorfizmem półprostym.
- (b) każdy diagonalizowalny endomorfizm jest półprostym endomorfizmem.
- (c) jeżeli K jest ciałem algebraicznie domkniętym i φ jest półprostym, to φ jest diagonalizowalny.