GAL, kolokwium nr 2, 29.04.2005, Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Dana jest baza $\mathcal{A} = \{(1,2,4),(0,0,1),(0,1,3)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
Niech $\mathcal{A}^* = \{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ będzie bazą dualną do $\mathcal{A}$.
a) Znaleźć wzory na funkcjonały Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3.
b) Niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym zadanym warunkiem
$M(\varphi)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$. Znaleźć wymiar i bazę przestrzeni $\ker(\varphi^*)$.
(funkcjonały otrzymanej bazy przestrzeni $\ker(\varphi^*)$ podać wzorami).

2. Rozpatrzmy funkcję $< , >: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ daną wzorem $< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >=$
$= (4-r)x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + rx_3y_3$.
a) Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ funkcja $< , >$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbb{R}^3$?
Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ funkcja $< , > |W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $W = \mathrm{lin}(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$?
b) Dla $r = 2$ znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

3. W $\mathbb{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Znaleźć wzór na przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będace rzutem prostopadłym na prostą $L = (0,1,1) + \mathrm{lin}((1,0,1))$.
b) Niech $p = (0,2,2)$ oraz $K = \mathrm{af}((2,1,2),(3,1,1))$. Dla każdej izometrii $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ spełniającej warunki $g(p) = p$ oraz $g(K) = K$ obliczyć $g((3,-1,-1))$.

4. Niech $< , >$ będzie iloczynem skalarnym na skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V.
a) Wykazać, że V ma bazę prostopadłą.
b) Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą ortonormalną przestrzeni V. Wykazać, że φ zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $M(\varphi)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}$ jest ortogonalna.

5. Niech $< , >$ bedzie iloczynem skalarnym na przestrzeni V i niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ będzie bazą przestrzeni V.
a) Wykazać, że w V istnieje dokładnie jeden układ wektorów $\beta_1, \ldots, \beta_n$ taki, że dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$ zachodzi

$$< \alpha_i, \beta_j >= \begin{cases} 1 \text{ gdy } i = j \\ 0 \text{ gdy } i \neq j \end{cases}$$

b) Wykazać, że układ $\beta_1, \ldots, \beta_n$ z punktu a) jest bazą przestrzeni V oraz że dla każdego wektora $\gamma \in V$ zachodzi: $||\gamma||^2 = \sum_{i=1}^{n} < \alpha_i, \gamma > \cdot < \beta_i, \gamma >$.