GAL, kolokwium nr 2, 21.04.2004, Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie symetrią względem $H : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$ wzdłuż $L = (1,1,0) + lin((1,1,1))$, niech $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie przesunięciem o wektor $(3,5,4)$ i niech $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie jednokładnością o środku (5,5,5) i skali 2.
a) Znaleźć $f_1((1,0,3))$.
b) Znaleźć parametryzację przestrzeni $g(M)$, gdzie $g = f_3 \circ f_2$ oraz M jest płaszczyzną opisaną równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

2. Niech $\mathcal{A} = \{(0,1,1),(1,0,3),(0,1,0)\}, \mathcal{B} = \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$.
a) Niech $\psi \in (\mathbf{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem mającym w bazie dualnej do $\mathcal{A}$ współrzędne 2,3,1. Znaleźć wzór na ψ i znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie dualnej do $\mathcal{B}$.
b) Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.
Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ funkcjonał $\psi_r((x_1,x_2,x_3)) = rx_1 + x_2 + x_3$ należy do $\mathrm{im}(\varphi^*)$?

3. Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$ oraz niech $\alpha = (0,1,1,1)$.
a) W $\mathbf{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni W, bazę ortonormalną przestrzeni $W^\perp$ oraz znaleźć rzuty prostopadłe wektora α na W i na $W^\perp$.
b) Niech $< (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4) >= x_1y_1 + x_3y_3 + x_4y_4$. Czy $< , >$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbf{R}^4$? Czy $< , > |_W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni W?

4. Niech $p_0 = (0,1,3)$, $p_1 = (1,1,2)$, $p_2 = (1,3,0)$, $q = (0,1,-2)$, $w_t = (t^2,7,3t)$. W $\mathbf{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Znaleźć odległość punktu q od $\mathrm{af}(p_0,p_1)$, znaleźć odległość punktu q od $\mathrm{af}(p_0,p_1,p_2)$ oraz znaleźć pole trójkąta $\mathrm{conv}(p_0,p_1,p_2)$.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ czworościan $\mathrm{conv}(p_0,p_1,p_2,w_t)$ ma najmniejszą objętość?

5. Niech $p = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbf{R}^n$, niech $L = (b_1,\ldots,b_n) + lin((a_1,\ldots,a_n))$ będzie prostą w $\mathbf{R}^n$ i niech $r_1,\ldots,r_k$ będzie ciągiem k liczb rzeczywistych dodatnich, gdzie $1 \le k \le n$. W $\mathbf{R}^n$ dany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Wykazać, że rzutem prostopadłym punktu p na prostą L jest punkt $q = (z_1,\ldots,z_n)$, gdzie $z_i = b_i + ca_i$ dla $i = 1,\ldots,n$ oraz $c = \frac{\Sigma_{i=1}^n a_i(y_i - b_i)}{\Sigma_{i=1}^n (a_i)^2}$.
b) Wykazać, że spośród wszystkich k-wymiarowych równoległościanów $R(p_0;\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ w $\mathbf{R}^n$ takich, że $||\alpha_i|| = r_i$ dla $i = 1,\ldots,k$ największą k-wymiarową objętość μ_k mają te, w których $\alpha_i \perp \alpha_j$ dla wszystkich $i \neq j$. Obliczyć tę największą objętość.