Kolokwium nr 2 z GAL-u w semestrze letnim 2003/04

1. Niech $f_1 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie symetrią względem $H : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3$ wzdłuż $L = (1,0,1) + lin((1,1,1))$, niech $f_2 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie przesunięciem o wektor $(5,6,7)$ i niech $f_3 : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie jednokładnością o środku (6,6,6) i skali 2.
a) Znaleźć $f_1((1,3,0))$.
b) Znaleźć parametryzację przestrzeni $g(M)$, gdzie $g = f_3 \circ f_2$ oraz M jest płaszczyzną opisaną równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 5$.

2. Niech $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(1,2,0),(0,1,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$.
a) Niech $\psi \in (\mathbf{R}^3)^*$ będzie funkcjonałem mającym w bazie dualnej do $\mathcal{A}$ współrzędne 1,2,3. Znaleźć wzór na ψ i znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie dualnej do $\mathcal{B}$.
b) Niech $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ funkcjonał $\psi_r((x_1, x_2, x_3)) = x_1 + x_2 + rx_3$ należy do $\operatorname{im}(\varphi^*)$?

3. Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0$ oraz niech $\alpha = (1,1,1,0)$.
a) W $\mathbf{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni W, bazę ortonormalną przestrzeni $W^\perp$ oraz znaleźć rzuty prostopadłe wektora α na W i na $W^\perp$.
b) Niech $< (x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4) >= x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$. Czy $< , >$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni $\mathbf{R}^4$? Czy $< , > |_W$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni W?

4. Niech $p_0 = (1,2,0)$, $p_1 = (1,1,1)$, $p_2 = (0,1,2)$, $q = (1,1,2)$, $w_t = (4,t,t^2)$. W $\mathbf{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Znaleźć odległość punktu q od $\mathrm{af}(p_0,p_1)$, znaleźć odległość punktu q od $\mathrm{af}(p_0,p_1,p_2)$ oraz znaleźć pole trójkąta $\mathrm{conv}(p_0,p_1,p_2)$.
b) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ czworościan $\mathrm{conv}(p_0,p_1,p_2,w_t)$ ma najmniejszą objętość?

5. Niech $p = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, niech $L = (b_1, \ldots, b_n) + lin((a_1, \ldots, a_n))$ będzie prostą w $\mathbf{R}^n$ i niech $r_1, \ldots, r_k$ będzie ciągiem k liczb rzeczywistych

dodatnich, gdzie $1 \leq k \leq n$. W $\mathbf{R}^n$ dany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Wykazać, że rzutem prostopadłym punktu p na prostą L jest punkt $q = (z_1, \ldots, z_n)$, gdzie $z_i = b_i + ca_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ oraz $c = \frac{\sum_{i=1}^n a_i(y_i - b_i)}{\sum_{i=1}^n (a_i)^2}$.
b) Wykazać, że spośród wszystkich k-wymiarowych równoległościanów $R(p_0; \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ w $\mathbf{R}^n$ takich, że $||\alpha_i|| = r_i$ dla $i = 1, \ldots, k$ największą k-wymiarową objętość μ_k mają te, w których $\alpha_i \perp \alpha_j$ dla wszystkich $i \neq j$. Obliczyć tę największą objętość.