GAL, egzamin, 09.09.2004

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech $\varphi_t : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie endomorfizmem danym wzorem $\varphi_t((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + 6x_2 - x_3, x_2 + 2x_3, -x_2 + 4x_3)$.
a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ_2. Czy φ jest diagonalizowalny? Dlaczego?
b) Czy istnieje taka baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$? Uzasadnij.

2 W przestrzeni afinicznej $\mathbf{R}^3$ niech $L_1 = (1, 0, -1) + \mathrm{lin}((1, 2, 1)), \mathrm{L}_2 = \mathrm{af}((1, 1, 1), (3, 5, 4))$, $H : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4$ i niech $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie rzutem na H wzdłuż L_2, a $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie jednokładnością o środku $(5, 5, 5)$ i skali 3.
a) Znaleźć równanie płaszczyzny M złożonej ze wszystkich prostych, które przecinają L_1 i są równoległe do L_2.
b) Znaleźć obraz q punktu $p = (0, 1, 1)$ w przekształceniu $g \circ f$ oraz przeciwobraz tego punktu q w przekształceniu $g \circ f$.

3. W $\mathbf{R}^3$ zadany jest standardowy iloczyn skalarny. Niech $p_1 = (1, 0, 1), p_2 = (0, 3, 5), p_3 = (2, 2, 2)$.
a) Znaleźć wzór na przekształcenie $h : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będące symetrią prostopadłą względem $\mathrm{af}(p_1, p_2, p_3)$.
b) Na krzywej $S = \{(t^2, -7, 2t) \mid t \in \mathbf{R}\}$ znaleźć taki punkt p_0, dla którego objętość czworościanu $\mathrm{conv}(p_0, p_1, p_2, p_3)$ jest najmniejsza.

4. Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3 - 2x_2 - 1 = 0\}$.
a) Podać typ afiniczny hiperpowierzchni X i znaleźć jej środki symetrii.
c) Znaleźć wzór na taki izomorfizm afiniczny $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, przy którym zachodzi: $f(X) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + d = 0\}$ dla pewnych $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, d \in \{0, 1, -1\}$.

5. Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $h : V \times V \to K$ będzie formą dwuliniową symetryczną, która w pewnej bazie przestrzeni V ma macierz A. Załóżmy, że r(A)=r. Wykazać, że:
a) V zawiera nieosobliwą podprzestrzeń wymiaru r.
b) Jeśli W_1, W_2 są r-wymiarowymi, nieosobliwymi podprzestrzeniami w V, to istnieje taki izomorfizm $\varphi : V \to V$, że $\varphi(W_1) = W_2$ oraz dla każdych $\alpha, \beta \in V$ zachodzi $h(\alpha, \beta) = h(\varphi(\alpha), \varphi(\beta))$.