A

EGZAMIN Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR LETNI 2003

CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. Niech $f\colon \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$ będzie homomorfizmem o macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ w bazie standardowej.
   (a) Znaleźć macierz Jordana A_J przekształcenia f oraz bazę w której macierz f ma postać Jordana
   (b) Czy istnieje baza w $\mathbb{C}^3$ w której f ma macierz $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

2. Niech $E = E(\mathbb{R}^3)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym i $K =$ af$\{[1, 1, -1], [3, 2, -3]\} \subseteq E$.
   (a) Znaleźć układ równań opisujący K.
   (b) Znaleźć równanie płaszczyzny P prostopadłej do K i przechodzącej przez punkt $[2, 2, 2]$.
   (c) Znaleźć rzut prostopadły prostej $L = [1, 1, -1] + lin\{(1, 0, 1)\}$ na płaszczyznę P.

3. Dana jest przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^3, \xi)$ z formą 2-liniową ξ mającą w bazie standardowej macierz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$
   (a) Sprawdzić czy przestrzeń ta jest przestrzenią euklidesową.
   (b) Znaleźć bazę prostopadłą na wpół unormowaną.
   (c) Sprawdzić czy lin$\{(1, 1, 1)\} \perp M$, gdzie M jest podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
   (d) Podać przykład wektora izotropowego.

4. Niech $E = E(\mathbb{R}^3)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym. Podać przykład izometrii (=przekształcenia ortogonalnego) $T\colon E \to E$ takiej, że $T(M_1) = M_2$, gdzie M_1, M_2 są płaszczyznami opisanymi równaniami $x_1 + x_3 = 1$ i $x_1 + x_2 = 1$, odpowiednio.

5. Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ niech $A_t \subseteq \mathbb{R}^3$ oznacza zbiór algebraiczny opisany równaniem $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + tx_3 + 4 = 0$. Sprawdzić czy A_1 i A_{-4} mają ten sam typ afiniczny. Naszkicować te zbiory.

CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Podaj przykłady trzech punktów w $\mathbb{R}^3$ które są w położeniu ogólnym oraz trzech różnych punktów w położeniu szczególnym. Odpowiedź uzasadnij.

2. Podaj definicję przekształcenia samosprzeżonego i jego macierzową charakteryzację.

3. Niech $f : E \to E$ będzie automorfizmem afinicznym n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej i A n-wymiarowym równoległościanem w E o objętości $o(A)$. Jaka jest objętość równoległościanu $f(A)$?

4. Korzystając z wyznacznika Gramma, podaj wzór na odległość punktu od podprzestrzeni afinicznej w przestrzeni euklidesowej.

Każde zadanie należy pisać na oddzielnej kartce.
Część II należy traktować jako jedno zadanie.

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 5 p.
Razem 70 p.