

GAL, Kolokwium, Temat B

20 marca 2001

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie takim endomorfizmem, że $M(\varphi)_{st}^{st} = A$.

- Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz A jest podobna do B_t . Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ .
- Zbadać czy macierz A jest diagonalizowalna nad \mathbb{R} . Jeśli tak, to wyznaczyć macierz odwrotną $P \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ taką, że $P^{-1}AP$ jest diagonalna.
- Znaleźć wartość własną i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ^{-1} .

Zadanie 2

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

- Znaleźć macierz Jordana podobną do A .
- Czy macierz B jest podobna do A ?
- Czy macierz B^3 jest podobna do A ?

Zadanie 3

Niech $H = \text{af}((1, 0, 2), (2, 0, 1), (-1, -1, 2), (1, 1, 4))$ i $L_a : (2, 1, 1) + t(a, a, -1)$.

- Znaleźć układ równań opisujący H .
- Znaleźć część wspólną $H \cap L_a$ przestrzeni afinicznej H i prostej L_a dla $a = -3$.
- Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ prosta L_a jest równoległa do H ? Dla każdego takiego a znaleźć równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej prostą L_a .

Zadanie 4

Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą rzędu n taką, że A ma niezerową wartość własną.

- Wykazać, że A jest diagonalizowalna.
- Wykazać, że jeśli $AB = BA$, to endomorfizm $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ taki, że $M(\psi)_{st}^{st} = B$, ma wektor własny.
- Wykazać, że jeśli ψ jest takie jak w (b), a n jest parzyste, to ψ ma co najmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.