GAL, Potok 2. EGZAMIN 12.06.2001. Temat B

1. Niech $\varphi : R^4 \to R^4$ będzie endomorfizmem, który w bazie standardowej ma macierz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ.

b) Znaleźć macierz Jordana podobną do macierzy A.

c) Dla jakich wartości parametru $t \in R$ macierz $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \text{[illegible]} \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & t & 0 & 2 \end{pmatrix}$ jest podobna do A?

2. W R^3 zadany jest standardowy iloczyn skalarny.
a) Znaleźć przekształcenie afiniczne $f : R^3 \to R^3$ będące symetrią prostopadłą względem płaszczyzny $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.
b) Znaleźć na krzywej $P = \{(3s, s^2, s) \mid s \in R\}$ punkt leżący najbliżej płaszczyzny $x_1 + 6x_2 - x_3 = -4$.
c) Dla jakich wartości parametru $t \in R$ przekształcenie $\varphi : R^3 \to R^3$ zadane wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = \tfrac{1}{3}(2x_1 + tx_2 + 2x_3, -x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3)$$

(i) jest izometrią? (ii) zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów? (iii) zachowuje orientację?

3. Niech X, Y_t, Z będą hiperpowierchniami w R^3 zadanymi równaniami:
$X \ : \ 3x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_2 + 4x_3 + 8 = 0,$
$Y_t \ : \ x_1^2 - x_2^2 + (t+3)x_3^2 - 2x_2 - 2 = 0,$
$Z \ : \ x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 + 1 = 0.$
a) Znaleźć typ afiniczny hiperpowierzchni X.
b) Dla jakich wartości parametru $t \in R$ hiperpowierchnie X i Y_t są afinicznie izomorficzne?
c) Dla jakich wartości parametru $t \in R$ hiperpowierchnie Z i Y_t są izometryczne?

4. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad R z iloczynem skalarnym $< \, , \, >: V \times V \to R$. Niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym spełniającym warunek

$$\forall \alpha, \beta \in V \quad < \varphi(\alpha), \beta > \; = \; < \alpha, \varphi(\beta) >.$$

a) Wykazać, że jeśli $\gamma_1, \gamma_2 \in V$ są wektorami własnymi endomorfizmu φ odpowiadającymi różnym watościom własnym, to γ_1, γ_2 są prostopadłe.
b) Wykazać, że jeśli $\mathcal{A} = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej $(V, < \, , \, >)$, to macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest symetryczna.
c) Wykazać, że jeśli $G : V \to V^*$ jest izomorfizmem zadanym warunkiem:

$$G(\alpha) = \psi \iff \forall_{\beta \in V} \ \psi(\beta) = < \alpha, \beta >$$

to $\quad G \circ \varphi = \varphi^* \circ G.$