Rozwiązania zadań z drugiego kolokwium z GALu II, 28 maja 2020 r.

Zadanie 1. *Które z poniższych czterech macierzy są kongruentne nad $\mathbb{R}$?*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnić.

Rozwiązanie. Macierz D nie jest kongruentna do żadnej z macierzy A, B, C, ponieważ $r(D) = 1$ oraz $r(A) = r(B) = r(C) = 2$. Macierz A nie może być kongruentna do żadnej z macierzy B, C (choć są to macierze podobne, co łatwo sprawdzić – wszystkie trzy mają wielomian charakterystyczny równy $(3 - \lambda)(2 - \lambda)$), ponieważ macierz symetryczna nie może być kongruentna z macierzą niesymetryczną (w przeciwnym razie pewna forma dwuliniowa miałaby w jednej bazie macierz symetryczną, a w drugiej niesymetryczną, co jest niemożliwe). Macierze B oraz C są natomiast kongruentne. W istocie, jeśli B jest macierzą pewnej formy dwuliniowej $h : V \times V \to \mathbb{R}$ w bazie (α, β) przestrzeni V, to C jest macierzą formy h w bazie (β, α). Inaczej mówiąc:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}.$$

■

Zadanie 2. *Niech h będzie formą dwuliniową na przestrzeni liniowej $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ zadaną wzorem $h(A, B) = 2 \cdot \operatorname{tr}(AB) - \operatorname{tr}(A) \cdot \operatorname{tr}(B)$, dla każdych $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Wykazać, że forma h jest osobliwa. Pokazać, że istnieje podprzestrzeń $W \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ wymiaru 3 taka, że forma $h|_{W\times W}$ jest nieosobliwa.*

Rozwiązanie. Zauważmy, że biorąc macierz identycznościową $I \in M_{2\times 2}(K)$ i dowolną macierz $X \in M_{2\times 2}(K)$ mamy $h(I, X) = 2 \cdot \operatorname{tr}(I \cdot K) - \operatorname{tr}(I) \cdot \operatorname{tr}(K) = 2 \cdot \operatorname{tr}(K) - 2 \cdot \operatorname{tr}(K) = 0$. A zatem na mocy uwagi z wykładu forma h jest osobliwa. Można to również zobaczyć wyznaczając macierz formy h w bazie $\mathcal{E} = (e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22})$ przestrzeni $M_{2\times 2}(K)$, przy czym:

$$e_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nietrudno sprawdzić, że macierz ta ma postać

$$G(h; \mathcal{E}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nie jest ona odwracalna (czyli h jest osobliwa), bo pierwszy wiersz jest przeciwny czwartemu. Widać też, że macierz formy h ograniczonej do podprzestrzeni $W = \operatorname{lin}((e_{11}, e_{12}, e_{21}))$ jest nieosobliwa. ■

Zadanie 3. *Dla każdego $t \in \mathbb{R}$ rozważmy formę kwadratową $q_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taką, że:*

$$q_t(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + tx_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2.$$

W zależności od parametru t znaleźć rząd i sygnaturę formy q_t. Dla jakich wartości parametru t forma q_t jest nieokreślona? Niech $t = 1$. Znaleźć bazę $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taką, że macierz $G(q_1, \mathcal{A})$ jest diagonalna.

Rozwiązanie. Formie kwadratowej q_t odpowiada forma dwuliniowa symetryczna $h_t : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ spełniająca warunek $h_t(\alpha, \alpha) = q_t(\alpha)$, dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}^3$. W bazie standardowej forma h_t ma macierz postaci:

$$G(h_t; st) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczymy bazę prostopadłą przestrzeni $(\mathbb{R}^3, h_t)$. Weźmy dowolny niezerowy wektor, np. $\alpha_1 = (1, 0, 0)$. Mamy $h_t(\alpha_1, \alpha_1) = 1$, zatem $\mathbb{R}^3 = \operatorname{lin}(\alpha_1) \oplus \operatorname{lin}(\alpha_1)^\perp$. Wektor $v = (x_1, x_2, x_3)$ należy do $\operatorname{lin}(\alpha_1)^\perp$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$h_t(\alpha_1, v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Weźmy $\alpha_2 = (1,0,-1) \in \operatorname{lin}(\alpha_1)^\perp$. Mamy $h_t(\alpha_2,\alpha_2) = 1$, a zatem $\mathbb{R}^3 = \operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_2) \oplus \operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp$. Wyznaczymy teraz wszystkie wektory $w = (x_1,x_2,x_3) \in \operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp$. Współrzędne tych wektorów muszą spełniać równanie $x_1+x_2+x_3 = 0$ oraz równanie:

$$h_t(\alpha_2,w) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = -x_3 = 0.$$

Przestrzeń $\operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp$ jest zatem opisana układem równań liniowych postaci $x_1+x_2+x_3 = 0$, $x_3 = 0$. Niech $\alpha_3 = (1,-1,0) \in \operatorname{lin}(\alpha_1,\alpha_2)^\perp$. Układ $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ jest bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^3,h)$. Mamy też $h_t(\alpha_3,\alpha_3) = t-1$. A zatem forma h_t w bazie $\mathcal{A} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ma postać:

$$G(h;\mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}.$$

Stąd:

$$r(h_t) = r(q_t) = \begin{cases} 2, & \text{dla } t = 1 \\ 3, & \text{dla } t \neq 1. \end{cases}, \quad s(q_t) = \begin{cases} 1, & \text{dla } t < 1 \\ 2, & \text{dla } t = 1 \\ 3, & \text{dla } t > 1. \end{cases}.$$

Forma q_t jest nieokreślona dla $t < 1$, zgodnie z twierdzeniem z wykładu. Bazą $(\mathbb{R}^3, q_1)$, w której forma q_1 jest diagonalna jest zatem $((1,0,0),(1,0,-1),(1,-1,0))$.

Uwaga. Można zastosować także dwie inne metody poznane na wykładzie i na ćwiczeniach. Można przyjąć, że macierz $M(G,h_t)$ jest macierzą pewnego endomorfizmu samosprzężonego ϕ przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle_{st})$ w bazie standardowej. Wówczas istnieje baza złożona z wektorów ortonormalnych w $(\mathbb{R}^3, \langle\,,\,\rangle_{st})$, będących wektorami własnymi ϕ. Można również stosować metodę dopełniania do kwadratów. ■

Zadanie 4. *Pokazać, że macierze* $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *oraz* $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *są kongruentne nad* $\mathbb{R}$ *i znaleźć macierz odwracalną* $C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *taką, że* $A_2 = C^T A_1 C$.

Rozwiązanie. Niech $h_1,h_2 : \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będą formami dwuliniowymi o tej własności, że $A_1 = G(h_1,st)$ oraz $A_2 = G(h_2,st)$. Znajdziemy bazy prostopadłe przestrzeni $(\mathbb{R}^3,h_1)$ oraz $(\mathbb{R}^3,h_2)$.

- Niech $\alpha_1 = (1,0,0)$. Mamy $h_1((1,0,0),(1,0,0)) = -2$ oraz $\operatorname{lin}((1,0,0))^\perp : -2x_1+2x_3 = 0$. Weźmy $\alpha_2 = (0,1,0) \in \operatorname{lin}((1,0,0))^\perp$. Wówczas $h_2((0,1,0),0,1,0)) = 1$. $\operatorname{lin}((1,0,1))^\perp : x_2 = 0$. A zatem biorąc $\alpha_3 = (1,0,1)$ dostajemy $h(\alpha_1,\alpha_2) = h(\alpha_1,\alpha_3) = 0$ oraz $h(\alpha_3,\alpha_3) = 3$. W szczególności forma h_1 ma rząd 3 i sygnaturę 1 oraz biorąc za C_1 macierz mającą w kolumnach wektory $\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_1, \alpha_2, \frac{1}{\sqrt{3}}\alpha_3$ mamy $C_1^T A_1 C = D = diag(-1,1,1)$, czyli:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Niech $\beta_1 = (1,0,0)$. Mamy: $h_2((1,0,0),(1,0,0)) = 1$ oraz $\operatorname{lin}(\beta_1)^\perp : x_1+x_3 = 0$. Niech $\beta_2 = (0,1,0) \in \operatorname{lin}(\beta_1))^\perp$. Wówczas $h_2((0,1,0),(0,1,0)) = 1$. Mamy też $\operatorname{lin}(\beta_2)^\perp : x_2 = 0$. A zatem biorąc $\beta_3 = (1,0,-1)$ mamy $h_2(\beta_1,\beta_3) = h_2(\beta_2,\beta_3) = 0$ oraz $h(\beta_3,\beta_3) = -1$. W szczególności forma h_2 ma rząd 3 i sygnaturę 1, podobnie jak h_1. Co więcej biorąc za C_2 macierz mającą w kolumnach wektory β_3,β_2,β_1 dostajemy $C_2^T A_2 C_2 = D = \operatorname{diag}(-1,1,1)$, czyli:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie powyższych rachunków widzimy, że macierze A_1 oraz A_2 są kongruentne do identycznej macierzy kongruentnej, czyli są kongruentne. Używając powyższych oznaczeń widzimy, że szukana macierz odwracalna C taka, że $C^T A_1 C = A_2$ równa jest $C_1 C_2^{-1}$, bo $C_1^T A_1 C_1 = D$ oraz $(C_2^{-1})^T D C_2^{-1} = A_2$.

■

Zadanie 5. *Dana jest przestrzeń dwuliniowa* $(\mathbb{R}^4, h)$*, gdzie* $h : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ *dana jest w bazie standardowej macierzą:*

$$G(h; st) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znaleźć bazę prostopadłą $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ *przestrzeni* $(\mathbb{R}^4, h)$ *taką, że* $h(\alpha_i, \alpha_i) \in \{1, -1\}$*, dla* $i = 1, 2, 3, 4$*. Znaleźć bazę przestrzeni* $(\mathbb{R}^4, h)$ *złożoną z wektorów izotropowych.*

Rozwiązanie. Wyznaczmy warunek opisujący wszystkie wektory izotropowe. Mamy:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_2x_4 - x_3^2 + x_4^2 = 0.$$

Widać zatem natychmiast, że wektory $\alpha_1 = (1, 0, 1, 0)$, $\alpha_2 = (-1, 0, 1, 0)$, $\alpha_3 = (0, 0, 1, 1)$ oraz $\alpha_4 = (2, 1, 2, -2)$ są liniowo niezależne i izotropowe. Pierwszą część zadania robimy jak w poprzednich rozwiązaniach lub po prostu zauważamy, że zachodzą równości $h((1, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0)) = 1$, $h((0, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0)) = -1$, $h((0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)) = 1$ oraz $h((1, 1, 0, 0), (1, 1, 0, 0)) = -1$. ∎

Zadanie 6. *Niech* V *będzie przestrzenią liniową wymiaru* n *nad* K*, zaś* V^* *przestrzenią sprzężoną do* V*. Na przestrzeni liniowej* $W = \{(v, f), v \in V, f \in V^*\}$ *(z operacjami* $(v_1, f_1) + (v_2, f_2) = (v_1 + v_2, f_1 + f_2)$ *oraz* $a(v, f) = (av, af)$*, dla dowolnych* $v_1, v_2, v \in V, f_1, f_2, f \in V^*, a \in K$*) rozważamy symetryczną formę dwuliniową* $h : W \times W \to K$ *postaci* $h((v, f), (w, g)) = f(w) + g(v)$*. Wykazać, że forma* h *jest nieosobliwa oraz, że* W *można przedstawić w postaci sumy prostej dwóch podprzestrzeni całkowicie zdegenerowanych.*

Rozwiązanie. Aby pokazać, że forma jest nieosobliwa wystarczy pokazać, że dla każdej niezerowej pary $(v, f) \in W$ istnieje element $(v', f') \in W$, że $h((v, f), (v', f')) \neq 0$. Rozważamy dwa przypadki:

- Jeśli $v \neq 0$, to v można dopełnić do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V i wziąć element v^* z bazy dualnej V^*, spełniający $v^*(v) = 1$. Weźmy więc $(0, v^*) \in W$. Mamy $h((v, f), (0, v^*)) = f(0) + v^*(v) = 0 + 1 = 1$.
- Jeśli $f \neq 0$, to istnieje niezerowy wektor $w \in V$ taki, że $f(w) \neq 0$. Weźmy $(w, 0) \in W$ (na drugiej współrzędnej jest przekształcenie zerowe). Wówczas $h((v, f), (w, 0)) = f(w) + 0(v) = f(w) \neq 0$.

A zatem forma h jest nieosobliwa. Można to również zobaczyć rozważając macierz tej formy w bazie W złożonej z elementów postaci $(\alpha_i, 0)$ oraz $(0, \alpha_i^*)$, dla $i = 1, \ldots, n$, gdzie $\mathcal{A} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ jest dowolną bazą V, zaś $\mathcal{A}^* = (\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$ jest bazą dualną do $\mathcal{A}$. Szukane podprzestrzenie całkowicie zdegenerowane to chociażby podprzestrzenie postaci $V_1 = \{(v, 0), v \in V\}$ oraz $V_2 = \{(0, f), f \in V^*\}$.

∎

Zadanie 7. *W* $\mathbb{R}^3$ *dane są: płaszczyzna* $H : x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$*, prosta* $L = (-2, 4, -3) + \mathrm{lin}(0, 1, -2)$ *oraz punkt* $p = (1, 1, 0)$*. Niech* M *będzie taką prostą, która przechodzi przez punkt* p*, przecina prostą* L *i nie przecina płaszczyzny* H*. Znaleźć punkt* $L \cap M$*.*

Rozwiązanie. Płaszczyzna H ma układ bazowy postaci $(1, 0, 0); (1, 1, -1), (-2, 0, 1)$. Niech M będzie postaci $p + \mathrm{lin}(\alpha)$, dla pewnego $\alpha \in \mathbb{R}^3$. Prosta M nie przetnie się z H jeśli układ postaci $(1, 1, 0) + a\alpha = (1, 0, 0) + b(1, 1, -1) + c(-2, 0, 1)$ nie będzie miał rozwiązania. Zauważmy jednak, że układ ten równoważny jest układowi $(0, 1, 0) = -a\alpha + b(1, 1, -1) + c(-2, 0, 1)$. Macierz rozszerzona tego układu ma rząd 3, a więc ma on zawsze rozwiązanie chyba, że wektory $\alpha, (1, 1, -1), (-2, 0, 1)$ są liniowo zależne. Skoro wiec prosta M nie przecina płaszczyzny H, to musimy mieć $\alpha \in \mathrm{lin}((1, 1, -1), (-2, 0, 1))$. Co więcej, prosta M przecina prostą L, a zatem istnieją $x, y, z \in \mathbb{R}$, że $\underbrace{(1, 1, 0) + x(1, 1, -1) + y(-2, 0, 1)}_{\text{element } M} = \underbrace{(-2, 4, -3) + z(0, 1, -2)}_{\text{element } L}$.

A zatem dostajemy do rozwiązania układ:

$$\begin{cases} x - 2y & = -3 \\ x - z & = 3 \\ -x + y + 2z & = -3 \end{cases}.$$

Jedynym rozwiązaniem powyższego układu jest trójka $(x, y, z) = (1, 2, -2)$. A zatem szukany punkt przecięcia M oraz L to $(-2, 4, -3) + z(0, 1, -2) = (-2, 4, -3) - 2(0, 1, -2) = (-2, 2, 1)$. ∎

Zadanie 8. *Niech K będzie ciałem charakterystyki różnej od 2 oraz niech p, q, r, s będą niewspółliniowymi elementami przestrzeni afinicznej H nad K. Pokazać, że następujące trzy warunki są równoważne:*
(1) $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$,
(2) $\mathrm{af}(p, r) \cap \mathrm{af}(q, s) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}s$,
(3) istnieją punkty $a, b, c, d \in H$ takie, że p, s, r, q są odpowiednio środkami odcinków ab, bc, cd, da.

Rozwiązanie. Dowodzimy (1) $\Rightarrow$ (2). Mamy $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{qr}$, czyli $s - p = r - q$, czyli $s + q = r + p$, a więc także $\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r$. Mamy zatem równość dwóch kombinacji afinicznych, z których jedna pochodzi z $\mathrm{af}(p, r)$, a druga pochodzi z $\mathrm{af}(q, s)$. Niech $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}q$. Mamy zatem $\mathrm{af}(p, r) = x + \mathrm{lin}(\alpha)$ oraz $\mathrm{af}(q, s) = x + \mathrm{lin}(\beta)$, dla pewnych $\alpha, \beta \in T(H)$. Jeżeli jednak α, β nie są liniowo zależne, to przestrzenie podprzestrzenie te nie mają więcej punktów wspólnych. Gdyby α i β były liniowo zależne, wówczas punkty p, q, r, s byłyby współliniowe. A zatem mamy (2).

Dowodzimy (2) $\Rightarrow$ (3). Niech $x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}q$ będzie punktem wspólnym $\mathrm{af}(p, r) \cap \mathrm{af}(q, s)$. Weźmy $a = p + \overrightarrow{xq}$, $b = p - \overrightarrow{xq}$, $c = r - \overrightarrow{xq}$ oraz $d = r + \overrightarrow{xq}$. Jest jasne, że $p = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ oraz $r = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}d$. Wyznaczmy środek odcinka bc. Jest to $\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c = \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\overrightarrow{xq} + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}\overrightarrow{xq} = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r - \overrightarrow{xq} = x + \overrightarrow{xs} = s$. Podobnie pokazujemy, że q jest środkiem odcinka ad, dostając (3).

Dowodzimy (3) $\Rightarrow$ (1). Rozważmy różnicę $\overrightarrow{ps} - \overrightarrow{qr}$. Wynosi ona

$$s - p - r + q = \underbrace{\left(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c\right)}_{s} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b\right)}_{p} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}c - \frac{1}{2}d\right)}_{r} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}d + \frac{1}{2}a\right)}_{q} = 0.$$

■

Zadanie 9. *Niech $s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie symetrią względem płaszczyzny $H : x_1 + x_2 - x_3 = 2$ wzdłuż prostej $L = (0, 1, 0) + \mathrm{lin}((2, 1, 2))$. Znaleźć obraz $s(p)$ punktu $p = (1, 0, 1)$ przy symetrii s. Znaleźć bazę punktową obrazu $s(M)$ przestrzeni $M = \mathrm{af}(p, p_1, p_2)$, gdzie $p_1 = (1, 2, 2), p_2 = (1, 6, 4)$, przy symetrii s.*

Rozwiązanie. Płaszczyzna H opisana jest układem bazowym $(1, 1, 0); (1, 0, 1), (0, 1, 1)$. Wiadomo zatem, że obraz punktu $r = (1, 1, 0) \in H$ w tej symetrii równy jest $s(r) = (1, 1, 0)$. Rozważmy wektor $\overrightarrow{pr}$ równy $(0, 1, -1)$. Znajdźmy współrzędne tego wektora w bazie $(1, 0, 1), (0, 1, 1), (2, 1, 2)$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (pierwsze dwa wektory rozpinają $T(H)$, a ostatni $T(L)$). Mamy:

$$(0, 1, -1) = -4(1, 0, 1) - 1(0, 1, 1) + 2(2, 1, 2).$$

A zatem z definicji symetrii liniowej s':

$$s'(0, 1, -1) = -4s'(1, 0, 1) - 1s'(0, 1, 1) + 2s'(2, 1, 2) = -4(1, 0, 1) - 1(0, 1, 1) - 2(2, 1, 2) = (-8, -3, -9).$$

Zatem

$$s(p) = s(r) + s'(\overrightarrow{rp}) = (1, 1, 0) + (8, 3, 9) = (9, 4, 9).$$

Zauważmy dalej, że M jest prostą afiniczną, ponieważ $\overrightarrow{pp_1} = (0, 2, 1)$ oraz $\overrightarrow{pp_2} = (0, 6, 3)$. A zatem $M = \mathrm{af}(p, p_1)$. Znajdziemy więc obraz p_1 przy s. Mamy

$$\overrightarrow{rp_1} = (0, 1, 2) = 2(1, 0, 1) + 2(0, 1, 1) - (2, 1, 2).$$

A zatem $s'(\overrightarrow{rp_1}) = 2(1, 0, 1) + 2(0, 1, 1) + (2, 1, 2) = (4, 3, 6)$. Zatem $s(p_1) = (1, 1, 0) + (4, 3, 6) = (5, 4, 6)$. Obrazy $s(p)$ oraz $s(p_1)$ są oczywiście afiniczne niezależne, czyli stanowią bazę punktową $s(M)$. ■

Zadanie 10. *Znaleźć wzór na symetrię $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ względem prostej $K = (2, 1, 0) + \mathrm{lin}((1, -1, -1))$ wzdłuż płaszczyzny $H = (1, 0, 0) + \mathrm{lin}((1, 1, -2), (0, 1, -1))$*

Rozwiązanie. Wyznaczmy najpierw wzór na pochodną f'. Mamy

$$f'((1, -1, -1)) = (1, -1, -1), \quad f'((1, 1, -2)) = (-1, -1, 2), \quad f'(0, 1, -1)) = (0, -1, 1)).$$

A zatem:

$$f'(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 2x_2 - 2x_3, 2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 + x_3).$$

Wiemy też, że punkty z K przechodzą przy f na siebie, a wiec: $f(2, 1, 0) = (2, 1, 0)$. Zatem:

$$f(0, 0, 0) = f(2, 1, 0) + f'(-2, -1, 0) = (2, 1, 0) + (8, -5, -6) = (10, -4, -6).$$

Zatem wzór na f to:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 10, 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 4, 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 6).$$

■