Granice nasyconych ideałów punktów z zastosowaniami do rozmaitości siecznych

Autoreferat

Tomasz Mańdziuk

14 czerwca 2021

Wprowadzenie

Głównym obiektem badań niniejszej rozprawy jest klasa schematów Hilberta z wielogradacją związana z funkcją Hilberta punktów w położeniu ogólnym na gładkiej rzutowej rozmaitości torycznej X.

Schematy Hilberta z wielogradacją zostały wprowadzone przez Haimana i Sturmfelsa [12] jako wspólne uogólnienie różnych znanych pojęć schematów Hilberta. Mając dane ciało $\Bbbk$, pierścień wielomianów $S = \Bbbk[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ zgradowany przez grupę abelową A oraz funkcję $h\colon A \to \mathbb{Z}$ istnieje $\Bbbk$-schemat kwazirzutowy Hilb_S^h parametryzujący ideały jednorodne w S takie, że algebra ilorazowa ma funkcję Hilberta h [12, Thm. 1.1]. Co więcej, przy pewnych założeniach odnośnie gradacji, schemat Hilb_S^h jest rzutowy [12, Cor. 1.2].

W dalszym ciągu zakładamy, że $\Bbbk$ jest ciałem algebraicznie domkniętym.

Szczególnie interesującym przykładem schematu Hilberta z wielogradacją jest klasyczny schemat Hilberta $\mathcal{H}ilb_P(\mathbb{P}^n)$ parametryzujący wszystkie domknięte podschematy $\mathbb{P}^n$ o wielomianie Hilberta P. Został on skonstruowany przez Grothendiecka [11]. Załóżmy, że P jest stały, równy r. Istnieje blisko związany z $\mathcal{H}ilb_r(\mathbb{P}^n)$ schemat Hilberta z wielogradacją odpowiadający punktom w położeniu ogólnym. Niech $S = S[\mathbb{P}^n] = \Bbbk[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ będzie pierścieniem współrzędnych jednorodnych przestrzeni rzutowej $\mathbb{P}^n$. Pierścień ten ma naturalną gradację w $\mathbb{Z}$ daną przez $\deg(\alpha_0) = \ldots = \deg(\alpha_n) = 1$. Niech $\mathfrak{m} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$. Definiujemy funkcję $h_{r,n}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ przez

$$h_{r,n}(a) = \min\{\dim_\Bbbk S_a, r\}$$

i rozważamy schemat Hilberta z wielogradacją $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$. Buczyńska i Buczyński [4, Prop. 3.13] pokazali, że $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ ma wyróżnioną składową nieprzywiedlną $\mathrm{Slip}_{r,n}$ będącą domknięciem zbioru punktów odpowiadających ideałom radykalnym. Pokazali także związek między punktami $\mathrm{Slip}_{r,n}$ a rangami brzegowymi wielomianów jednorodnych. Omawiamy to poniżej bardziej szczegółowo. Co więcej, ich wyniki działają ogólniej dla gładkiej rzutowej rozmaitości torycznej

X. Ten związek jest główną motywacją do badania składowej nieprzywiedlnej $\mathrm{Slip}_{r,n}$ (i ogólniej, $\mathrm{Slip}_{r,X}$).

Niech F będzie wielomianem jednorodnym stopnia d w pierścieniu wielomianów $S^* = \Bbbk[x_0, \ldots, x_n]$. Mówimy, że F ma *rangę* r jeżeli r jest najmniejszą liczbą całkowitą taką, że $F = \sum_{i=1}^{r} \ell_i^d$ dla pewnych form liniowych $\ell_i \in S_1^*$. Rozważamy również *rangę brzegową* F która jest najmniejszą liczbą całkowitą r taką, że $[F] \in \mathbb{P}S_d^*$ należy do domknięcia zbioru wielomianów o randze co najwyżej r. Obliczanie rangi brzegowej danego wielomianu jest klasycznym problemem w geometrii algebraicznej i jest mocno związane z badaniem rozmaitości siecznych rozmaitości Veronese. Lemat o brzegowej abiegunowości [4, Thm. 3.15] mówi, że F ma rangę brzegową co najwyżej r dla dodatniej liczby całkowitej r wtedy i tylko wtedy gdy istnieje punkt $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,n}$ taki, że I jest abiegunowy do F. Zatem, im więcej warunków (zarówno koniecznych jak i wystarczających) na to aby punkt z $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ należał do składowej nieprzywiedlnej $\mathrm{Slip}_{r,n}$ mamy do dyspozycji, tym większy potencjał do zastosowań lematu o brzegowej abiegunowości.

Klasyczny schemat Hilberta $\mathcal{H}ilb_P(\mathbb{P}^n)$ jest szeroko badany. W szczególności wiadomo, że zawsze jest spójny [13]. Jest gładki gdy $n = 2$ [8] ale na ogół nie jest nieprzywiedlny [16] oraz jest niezredukowany [23] [18]. Z drugiej strony, schemat Hilberta z wielogradacją Hilb_S^h jest gładki i nieprzywiedlny gdy pierścień wielomianów S ma dwie zmienne [20] ale na ogół nie jest nawet spójny [24].

Główne wyniki

Nasza pierwsza obserwacja bazuje na metodzie małej przestrzeni stycznej: jeżeli wymiar przestrzeni stycznej do $\Bbbk$-schematu X w punkcie x jest mniejszy niż wymiar domkniętego, nieprzywiedlnego podzbioru Z w X to $x \notin Z$.

Ograniczamy maksymalny stopień minimalnego generatora jednorodnego ideału odpowiadającego ogólnemu punktowi $\mathrm{Slip}_{r,n}$. W konsekwencji pokazujemy, że naturalne odwzorowanie $[I] \mapsto [I + \mathfrak{m}^d]$ dla dużych d odwzorowuje $\mathrm{Slip}_{r,n}$ na rn-wymiarowy podzbiór schematu Hilberta z wielogradacją stowarzyszonego z funkcją Hilberta $S/(I + \mathfrak{m}^d)$. Dostajemy następujący warunek konieczny do tego by $[I] \in \mathrm{Hilb}_{S[\mathbb{P}^n]}^{h_{r,n}}$ należał do $\mathrm{Slip}_{r,n}$.

Stwierdzenie 1. *Niech r, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi oraz niech $I \subseteq S = \Bbbk[\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ będzie ideałem jednorodnym takim, że S/I ma funkcję Hilberta $h_{r,n}$. Niech $e = \min\{a \in \mathbb{Z} \mid h_{r,n}(a) = r\}$ oraz $d \geq e + 2$. Jeżeli $\dim_\Bbbk \mathrm{Hom}_S\left(I + \mathfrak{m}^d, S/(I + \mathfrak{m}^d)\right)_0 < rn$, to $[I] \notin \mathrm{Slip}_{r,n}$.*

Drugie kryterium bazuje na obliczeniu funkcji Hilberta potęgi ideału odpowiadającego ogólnemu punktowi $\mathrm{Slip}_{r,n}$. Dokładniej, liczymy wielomian Hilberta S/I^k gdzie $[I] \in \mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ odpowiada ideałowi radykalnemu i uzyskujemy ograniczenie na stopień, od którego zgadza się on z funkcją Hilberta. Następnie, używając półciągłości $H_{S/I^k}(d)$ na $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ dostajemy następujący warunek konieczny do tego by $[I] \in \mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ należał do $\mathrm{Slip}_{r,n}$.

Twierdzenie 2. *Niech $n, r \geq 1$ będą liczbami całkowitymi oraz niech $I \subseteq S = \Bbbk[\alpha_0, \dots, \alpha_n]$ będzie ideałem jednorodnym takim, że S/I ma funkcję Hilberta $h_{r,n}$. Niech $e = \min\{a \in \mathbb{Z} \mid h_{r,n}(a) = r\}$. Jeżeli $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,n}$, to $H_{S/I^k}(d) \geq r \cdot \dim_{\Bbbk} S_{k-1}$ dla każdej dodatniej liczby całkowitej k oraz dla każdego $d \geq ke+k$.*

Następny wynik jest warunkiem wystarczającym w przypadku gdy $n = 2$.

Twierdzenie 3. *Niech r będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz $S = \Bbbk[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2]$ będzie pierścieniem wielomianów. Niech $[I]$ będzie punktem domkniętym $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,2}}$. Jeżeli $(I : \mathfrak{m}^\infty)_d \neq I_d$ dla dokładnie jednej liczby całkowitej d, to $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,2}$.*

W celu udowodnienia Twierdzenia 3 pokazujemy, że jeśli $[I] \in \mathrm{Hilb}_S^{h_{r,2}}$ jest taki, że funkcja Hilberta f algebry $S/(I\colon \mathfrak{m}^\infty)$ różni się od $h_{r,2}$ w jednej gradacji to zbiór U_f tych punktów $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,2}}$ które odpowiadają ideałom J takim, że $S/(J\colon \mathfrak{m}^\infty)$ ma funkcję Hilberta f jest nieprzywiedlny. W rezultacie, wystarczy wskazać dla każdej takiej funkcji Hilberta f jeden ideał I_f taki, że $[I_f] \in U_f \cap \mathrm{Slip}_{r,2}$ oraz przestrzeń styczna w $[I_f]$ jest wymiaru $2r$. W celu pokazania, że $[I_f]$ należy do $\mathrm{Slip}_{r,n}$ konstruujemy I_f w taki sposób, że jest ideałem początkowym ideału nasyconego K_f.

Co interesujące, istnieją dwa naturalne uogólnienia sformułowania Twierdzenia 3 dla $n \geq 3$ ale oba są niepoprawne. Po pierwsze, można naiwnie zastąpić 2 przez n. Bardziej subtelnie, można spróbować zmienić także konkluzję na taką, że $[I]$ jest w domknięciu zbioru punktów odpowiadających ideałom nasyconym gdyż $\mathcal{H}ilb_r(\mathbb{P}^n)$ na ogół jest przywiedlny. Kontrprzykładem na obie te hipotezy jest ideał

$$I = (\alpha_0^2\alpha_1, \alpha_0\alpha_1^2, \alpha_0\alpha_2, \alpha_0\alpha_3, \alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_2^4) \subseteq S[\mathbb{P}^3] = \Bbbk[\alpha_0, \dots, \alpha_3].$$

Jako zastosowanie Twierdzenia 3 pokazujemy przykład osobliwego punktu we wnętrzu $\mathrm{Slip}_{8,2}$:

$$J = (\alpha_1^3, \alpha_1^2\alpha_2, \alpha_0^2\alpha_1^2, \alpha_1\alpha_2^3, \alpha_2^5) \subseteq S[\mathbb{P}^2] = \Bbbk[\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2].$$

Dowodzimy następującego ogólnego warunku koniecznego do tego by $[I] \in \mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ należał do $\mathrm{Slip}_{r,n}$.

Twierdzenie 4. *Niech $r, n \geq 1$ będą liczbami całkowitymi, $S = \Bbbk[\alpha_0, \dots, \alpha_n]$ będzie pierścieniem wielomianów oraz niech $[I] \in \mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ będzie punktem domkniętym. Załóżmy, że $I \neq (I : \mathfrak{m}^\infty)$ oraz niech d będzie takie, że $I_d \neq (I : \mathfrak{m}^\infty)_d$. Niech $J = \mathfrak{m}^d \cap (I : \mathfrak{m}^\infty)$ oraz $K = \mathfrak{m}^d \cap I$. Załóżmy, że zachodzą następujące warunki:*

1. *naturalne odwzorowanie $\mathrm{Hom}_S(J, S/J)_0 \to \mathrm{Hom}_S(K, S/J)_0$ jest surjekcją;*
2. *$[J] \in \mathrm{Hilb}_S^h$ jest punktem gładkim gdzie h jest funkcją Hilberta S/J;*
3. *naturalne odwzorowanie $\mathrm{Hom}_S(K, S/K)_0 \to \mathrm{Hom}_S(K, S/J)_0$ jest surjekcją.*

Wtedy nie istnieje $[I'] \in \mathrm{Slip}_{r,n}$ *taki, że* $I'_{\geq d} = I_{\geq d}$. *W szczególności,* $[I] \notin \mathrm{Slip}_{r,n}$.

Idea dowodu polega na rozpatrywaniu pary $[K \subseteq J]$ jako punktu flagowego schematu Hilberta z wielogradacją $\mathrm{Hilb}_S^{k,h}$ i na pokazaniu, że naturalne odwzorowanie $\pi_k \colon \mathrm{Hilb}_S^{k,h} \to \mathrm{Hilb}_S^{k}$ jest étale w $[K \subseteq J]$. Wówczas $[K] = [I_{\geq d}]$ nie może być w obrazie $\mathrm{Slip}_{r,n}$ gdyż dla każdego punktu $[K']$ w pewnym otoczeniu $[K]$ istnieje punkt $[J']$ taki, że $[K' \subseteq J'] \in \mathrm{Hilb}_S^{k,h}$. W konsekwencji $\overline{K'}_d \neq K'_d$.

Warunek 3. jest technicznym założeniem potrzebnym do opisu przestrzeni przeszkód flagowego schematu Hilberta z wielogradacją bazującego na [17]. Warunki 1. i 2. są używane do pokazania, że π_k jest étale w $[K \subseteq J]$.

Badamy pewne sytuacje, w których warunki 1.-3. zachodzą. Następnie prezentujemy dwa zastosowania Twierdzenia 4. Pierwsze z nich dotyczy ideałów definiujących schematy zawarte w prostej.

Twierdzenie 5. *Niech* $[I] \in \mathrm{Hilb}_S^{h_{r,n}}$ *będzie punktem domkniętym odpowiadającym ideałowi* I *takiemu, że* $S/(I \colon \mathfrak{m}^\infty)$ *ma funkcję Hilberta* $h_{r,1}$. *Wtedy istnieje* $[I'] \in \mathrm{Slip}_{r,n}$ *taki, że* $I_{\geq r-2} = I'_{\geq r-2}$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $((I \colon \mathfrak{m}^\infty)^2)_{r-2} \subseteq I_{r-2}$.

Ten wynik pojawił się w [22] w oparciu o Twierdzenie 2. W rozprawie przedstawiamy dowód używający Twierdzenia 4.

Drugie zastosowanie Twierdzenia 4 jest związane z podschematami $\mathbb{P}^2$, których funkcja Hilberta ma stały wzrost. Bardziej formalnie, rozważamy funkcje Hilberta postaci

$$f(a) = \begin{cases} \dim_{\Bbbk} S_a & \text{dla } a < m \\ r - (e+1-a)t & \text{dla } a \in \{m, m+1, \dots, e\} \\ r & \text{dla } a \geq e+1 \end{cases} \tag{1}$$

dla pewnych dodatnich liczb całkowitych $m < e$ oraz t.

Mamy następujący wynik.

Twierdzenie 6. *W notacji z Twierdzenia 4 załóżmy dodatkowo, że* $n = 2$. *Niech* $m = \min\{a \in \mathbb{Z} \mid (I \colon \mathfrak{m}^\infty)_a \neq 0\}$ *oraz* $e = \max\{a \in \mathbb{Z} \mid (I \colon \mathfrak{m}^\infty)_a \neq I_a\}$. *Załóżmy, że* $e > m$ *oraz, że istnieje dodatnia liczba całkowita* t *taka, że* $S/(I \colon \mathfrak{m}^\infty)$ *ma funkcję Hilberta* f *taką jak w Równaniu* (1). *Wtedy:*

(i) Istnieje $\theta \in S_t$ *taka, że* $(I \colon \mathfrak{m}^\infty)_e \subseteq (\theta)_e$;

(ii) Niech θ *będzie jak w części (i). Jeżeli* $(I \colon \mathfrak{m}^\infty)_e = I_e + (\theta \cdot (I \colon \mathfrak{m}^\infty))_e$ *to nie istnieje* $[I'] \in \mathrm{Slip}_{r,2}$ *taki, że* $I'_{\geq e} = I_{\geq e}$. *W szczególności,* $[I] \notin \mathrm{Slip}_{r,2}$;

(iii) Jeżeli $t = 1$ *oraz* $\theta \in S_1$ *jest jak w części (i), to istnieje* $[I'] \in \mathrm{Slip}_{r,2}$ *taki, że* $I'_{\geq e} = I_{\geq e}$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $(\theta \cdot (I \colon \mathfrak{m}^\infty))_e \subseteq I_e$.

Uzyskujemy także całkowity opis punktów z $\mathrm{Slip}_{r,2}$ dla $r \leq 6$. Można się spodziewać, przez analogię z wynikiem Fogarty'ego [8] dotyczącym gładkości

$\mathcal{H}ilb_r(\mathbb{P}^2)$, że $\mathrm{Hilb}_S^{h_{r,2}}$ nie jest bardzo skomplikowany. Jednakże, analizowane przykłady pokazują, że jest to skomplikowany schemat nawet dla małych wartości r. Na przykład, $\mathrm{Hilb}_S^{h_{6,2}}$ ma 4 składowe nieprzywiedlne.

Przechodzimy do ogólniejszych gładkich rzutowych rozmaitości torycznych, za to będziemy zakładać, że $\Bbbk = \mathbb{C}$ jest ciałem liczb zespolonych. Ponownie, można rozpatrywać schemat Hilberta z wielogradacją $\mathrm{Hilb}_{S[X]}^{h_{r,X}}$ gdzie $S[X]$ jest pierścieniem Coxa X a $h_{r,X}$ jest funkcją Hilberta r punktów w położeniu ogólnym na X. Przypominamy, że $S[X] = \mathbb{C}[\alpha_\rho | \rho \in \Sigma_X(1)]$ gdzie zmienne α_ρ odpowiadają dywizorom pierwszym D_ρ niezmienniczym ze względu na działanie torusa. Co więcej, $S[X]$ ma gradację w grupie Picarda $\mathrm{Pic}(X)$ daną przez $\deg(\alpha_\rho) = [D_\rho]$. Funkcja $h_{r,X} \colon \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$ jest zadana przez

$$h_{r,X}([D]) = \min\{\dim_{\mathbb{C}} S[X]_{[D]}, r\}.$$

Ponownie, istnieje składowa nieprzywiedlna $\mathrm{Slip}_{r,X}$, która jest domknięciem zbioru punktów odpowiadających ideałom radykalnym i nasyconym ze względu na ideał nieistotny $S[X]$.

Niech X będzie gładką, rzutową rozmaitością toryczną. Przez $\overline{X}$ oznaczamy $\mathrm{Spec}\, S[X]$ a przez $\widehat{X}$ oznaczamy $\overline{X} \setminus V(B(\Sigma_X))$ gdzie $B(\Sigma_X)$ jest ideałem nieistotnym X. Rozmaitość X jest ilorazem $\widehat{X}$ przez $\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\mathrm{Pic}(X)]$ [6, Prop. 5.1.11]. Odwzorowanie $\widehat{X} \to X$ oznaczamy przez π_X. Tej notacji używamy w poniższej definicji.

Definicja 1. Załóżmy, że $f\colon X \to Y$ jest morfizmem gładkich, rzutowych rozmaitości torycznych oraz niech $f^*\colon \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X)$ będzie odwzorowaniem cofania wiązek liniowych. Załóżmy, że istnieje homomorfizm $\mathbb{C}$-algebr $\overline{f}^{\#}\colon S[Y] \to S[X]$ takim, że:

1. $\overline{f}^{\#}(S[Y]_{[D]}) \subseteq S[X]_{f^*([D])}$ dla każdego $[D] \in \mathrm{Pic}(Y)$;
2. odpowiadający mu morfizm $\overline{f}\colon \overline{X} \to \overline{Y}$ obcina się do morfizmu $\widehat{f}\colon \widehat{X} \to \widehat{Y}$;
3. $\pi_Y \circ \widehat{f} = f \circ \pi_X$.

Wówczas nazywamy $\overline{f}^{\#}$ *podniesieniem* f.

Podniesienie f takie jak w Definicji 1 zawsze istnieje [7]. Analogiczne zagadnienia dla wymiernych odwzorowań rozmaitości torycznych oraz dla regularnych i wymiernych odwzorowań pomiędzy tak zwanymi wymarzonymi przestrzeniami Mori'ego są szeroko badane [1][5][14]. Możemy teraz zaprezentować nasz wynik.

Twierdzenie 7 opisuje związek między $\mathrm{Slip}_{r,X}$ a $\mathrm{Slip}_{r,Y}$ gdy $f\colon X \to Y$ jest odwzorowaniem gładkich, rzutowych rozmaitości torycznych takim, że $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$. Wynik bazuje na możliwości podniesienia f do homomorfizmu pierścieni Coxa X i Y.

Twierdzenie 7. *Niech $f\colon X \to Y$ będzie morfizmem gładkich, rzutowych rozmaitości torycznych takim, że $f_*\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_Y$. Niech r będzie dodatnią liczbą całkowitą oraz niech $[I] \in \mathrm{Hilb}_{S[X]}^{h_{r,X}}$ będzie punktem domkniętym. Niech $\overline{f}^{\#}\colon S[Y] \to S[X]$ będzie podniesieniem f jak w Definicji 1. Wówczas:*

(i) $\overline{f}^{\#}$ *indukuje morfizm* $\pi\colon \mathrm{Hilb}^{h_{r,X}}_{S[X]} \to \mathrm{Hilb}^{h_{r,Y}}_{S[Y]}$ *dany na punktach domkniętych przez* $[I] \mapsto [(\overline{f}^{\#})^{-1}(I)]$*;*

(ii) Morfizm $\pi\colon \mathrm{Hilb}^{h_{r,X}}_{S[X]} \to \mathrm{Hilb}^{h_{r,Y}}_{S[Y]}$ *z części (i) indukuje surjekcję* $\mathrm{Slip}_{r,X} \to \mathrm{Slip}_{r,Y}$*.*

Technicznym narzędziem w dowodzie Twierdzenia 7 jest [21, Thm. 3.5]. Opisujemy tam w terminach podniesienia jak w Definicji1, popchnięcie snopa kwazikoherentnego przez morfizm gładkich, rzutowych rozmaitości torycznych.

Twierdzenie 8 daje kolejny warunek konieczny do tego by $[I] \in \mathrm{Hilb}^{h_{r,X}}_{S[X]}$ należał do składowej nieprzywiedlnej $\mathrm{Slip}_{r,X}$, w przypadku gdy X jest produktem $k \geq 2$ przestrzeni rzutowych. Dowód twierdzenia bazuje na prostych własnościach funkcji Hilberta nasyconych ideałów punktów w X.

Twierdzenie 8. *Niech* $k \geq 2$ *oraz* $n_1, \ldots, n_k$ *będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Niech* $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_k}$ *oraz dla* $i \in \{1, \ldots, k\}$ *niech* $B(\Sigma_i) \subseteq S[X]$ *będzie rozszerzeniem ideału nieistotnego* $\mathbb{P}^{n_i}$ *przy naturalnym włożeniu* $S[\mathbb{P}^{n_i}] \to S[X]$*. Jeżeli* $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,X}$ *dla pewnej liczby dodatniej całkowitej* r*, to*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{S[X]} \Big(I + B(\Sigma_i)^2, S[X]/\big(I + B(\Sigma_i)^2\big) \Big)_0 \geq r(n_1 + \ldots + n_k)$$

dla $i \in \{1, \ldots, k\}$*.*

Prezentujemy także pewne zastosowania lematu o brzegowej abiegunowości do badania rozmaitości siecznych. Badamy dzikie wielomiany, czyli takie wielomiany jednorodne, które mają rangę brzegową mniejszą od rangi wygładzalnej. Wiadomo, że takie wielomiany istnieją [3], [15]. Pokazujemy, że w trzech zmiennych dziki wielomian stopnia d ma rangę brzegową co najmniej $d+3$. Co więcej, pokazujemy, że w czterech zmiennych nie ma dzikich kwartyk o randze brzegowej 6 ale istnieje dzika kwintyka o randze brzegowej 7.

W [10] badamy zagadnienie rozróżniania rozmaitości siecznej od rozmaitości kaktusowej. Rozmaitość sieczna jest klasycznym przedmiotem badań ale okazuje się, że różne klasy znanych równań znikają na większej rozmaitości - rozmaitości kaktusowej. Jest to omówione w [2], [9] oraz [19, §10.2]. Wyniki z [10] bazują na brzegowej abiegunowości ale nie wymagają żadnych kryteriów identyfikujących punkty z $\mathrm{Slip}_{r,n}$. Dlatego w rozprawie prezentujemy jedynie niektóre wyniki oraz w szczególnych przypadkach gdzie dowody są mniej techniczne.

Literatura

[1] Gavin Brown and Jarosław Buczyński. Maps of toric varieties in Cox coordinates. *Fundamenta Mathematicae*, 222(3):213–267, 2013.

[2] Weronika Buczyńska and Jarosław Buczyński. Secant varieties to high degree Veronese reembeddings, catalecticant matrices and smoothable Gorenstein schemes. *Journal of Algebraic Geometry*, 23, Jan 2014.

[3] Weronika Buczyńska and Jarosław Buczyński. On differences between the border rank and the smoothable rank of a polynomial. *Glasgow Mathematical Journal*, 57(02):401–413, May 2015.

[4] Weronika Buczyńska and Jarosław Buczyński. Apolarity, border rank and multigraded Hilbert scheme. arXiv:1910.01944 [math.AG], to appear in *Duke Mathematical Journal*, 2019.

[5] Jarosław Buczyński and Oskar Kędzierski. Maps of Mori Dream Spaces in Cox coordinates Part I: existence of descriptions. *Mathematische Nachrichten*, 291(4):576–592, 2018.

[6] D. A. Cox, J. B. Little, and H. K. Schenck. *Toric Varieties*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Soc., 2011.

[7] David A. Cox. The functor of a smooth toric variety. *Tohoku Mathematical Journal*, 47(2):251 – 262, 1995.

[8] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *American Journal of Mathematics*, 90(2):511–521, 1968.

[9] Maciej Gałązka. Vector bundles give equations of cactus varieties. *Linear Algebra and its Applications*, 521, May 2016.

[10] Maciej Gałązka, Tomasz Mańdziuk, and Filip Rupniewski. Distinguishing secant from cactus varieties. arXiv:2007.16203 [math.AG], 2020.

[11] Alexander Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique iv : les schémas de Hilbert. In *Séminaire Bourbaki : années 1960/61, exposés 205-222*, number 6 in Séminaire Bourbaki. Société mathématique de France, 1961. talk:221.

[12] Mark Haiman and Bernd Sturmfels. Multigraded Hilbert schemes. *Journal of Algebraic Geometry*, 13:725–769, Mar 2004.

[13] Robin Hartshorne. Connectedness of the Hilbert scheme. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 29:5–48, 1966.

[14] Andreas Hochenegger and Elena Martinengo. Maps of Mori dream spaces. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 222(6):1287–1305, 2018.

[15] Hang Huang, Mateusz Michałek, and Emanuele Ventura. Vanishing Hessian, wild forms and their border VSP. *Mathematische Annalen*, 378(3):1505–1532, Dec 2020.

[16] A. Iarrobino. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Inventiones mathematicae*, 15(1):72–77, Mar 1972.

[17] Joachim Jelisiejew. Elementary components of Hilbert schemes of points. *Journal of the London Mathematical Society*, 100(1):249–272, 2019.

[18] Joachim Jelisiejew. Pathologies on the Hilbert scheme of points. *Inventiones mathematicae*, 220(2):581–610, May 2020.

[19] J. M. Landsberg. *Geometry and Complexity Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2017.

[20] Diane Maclagan and Gregory G. Smith. Smooth and irreducible multigraded Hilbert schemes. *Advances in Mathematics*, 223(5):1608–1631, 2010.

[21] Tomasz Mańdziuk. Cox rings and algebraic maps. *Mathematische Nachrichten*, 03 2017.

[22] Tomasz Mańdziuk. Identifying limits of ideals of points in the case of projective space. arXiv:2011.14692 [math.AG], 2020.

[23] David Mumford. Further pathologies in algebraic geometry. *American Journal of Mathematics*, 84(4):642–648, Oct 1962.

[24] Francisco Santos. Non-connected toric Hilbert schemes. *Mathematische Annalen*, 332(3):645–665, May 2005.