RECENZJA PRACY DOKTORSKIEJ "GENERALIZED BIAŁYNICKI-BIRULA DECOMPOSITIONS" MGR. ŁUKASZA SIENKIEWICZA.

Tematem rozprawy jest uogólnienie klasycznych rezultatow prof. Białynickiego-Biruli o działaniach grupy multyplikatywnej na inne grupy algebraiczne.

Klasyczne twierdzenie Białynickiego-Biruli dotyczy sytuacji gdy grupa multyplikatywna $\mathbb{C}^*$ działa na gładkiej rozmaitości rzutowej X. Wiadomo wówczas, że zbiór punktów stałych $X^{\mathbb{C}^*}$ działania rozkłada się na sumę rozłączną

$$X^{\mathbb{C}^*} = F_1 \cup \ldots \cup F_s$$

gdzie F_i są domkniętymi gładkimi podrozmaitościami X.

Dla każdego i Białynicki definiuje

$$X_i^+ = \{x \in X \,|lim_{t\to 0} t{\cdot}x \in F_i\}$$

i dowodzi, że włożenia $X_i \mapsto X$ są lokalnie domkniętymi immersjami rozmaitości algebraicznych. Kanoniczne odwzorowania

$$X_i^+ \to F_i$$

odwzorowujące x na $lim_{t\to 0} t{\cdot}x$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem z włóknem $\mathbb{C}^{n_i}$ dla pewnego $n_i \in \mathbb{N}$.

Twierdzenie to znalazło wiele zastosowań. W konkretnych sytuacjach gdy X jest np. rozmaitością reprezentacji algebry lub składową schematu Hilberta, twierdzenie to daje rozkład komórkowy X co prowadzi do możliwości opisu homologii X i innych niezmienników topologicznych.

W 2013 Twierdzenie Białynickiego-Biruli zostało uogólnione prze Drinfelda. Niech X będzie schematem nad ciałem K z działaniem grupy multyplikatywnej $\mathbb{G}_m$. Rozważał on funktor $\mathcal{D}_X$ dany przez

$$\mathcal{D}_X(Y) = \{\gamma : \mathbb{A}^1_K \times Y \to X \mid \gamma \text{ jest } \mathbb{G}_m - \text{ ekwiwariantne}\}.$$

Mamy wówczas kanoniczne morfizmy funktorów

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D}_X & \xrightarrow{i_X} & X \\ r_X \downarrow\uparrow\ s_X & & \\ X^{\mathbb{G}_m} & & \end{array}$$

gdzie dla $\gamma \in \mathcal{D}_X$ kładziemy

$$i_X(\gamma) = \gamma_{\{1\}\times X}, r_X(\gamma) = \gamma_{\{0\}\times X}.$$

Dla odwzorowania $f : Y \to X$ faktoryzującego się przez $X^{\mathbb{G}_m}$ kładziemy

$$s_X(f) = f{\cdot}pr_Y.$$

Drinfeld dowodzi, że funktor $\mathcal{D}_X$ jest reprezentowalny przez przestrzeń algebraiczną skończonego typu nad K, i że odwzorowanie r_X jest afiniczne.

Tematem obecnej rozprawy jest uogólnienie tego rezultatu na dowolne grupy algebraiczne. Kontekst tego uogólnienia jest następujący. Niech $\mathbb{M}$ będzie monoidem algebraicznym, a $\mathbb{G}$ grupą algebraiczną elementów odwracalnych w $\mathbb{M}$.

Zakładamy, że $\mathbb{M}$ jest monoidem Kempfa, t.j. że istnieje element $0 \in \mathbb{M}$ i podtorus centralny $\mathbb{T}$ w $\mathbb{G}$ taki, że 0 jest w domknięciu $\mathbb{T}$.

Wówczas główne twierdzenie pracy (Twierdzenie A) mówi, że Twierdzenie Drinfelda uogó lnia się na tą sytuację.

Klasa monoidów Kempfa jest właściwym kontekstem ponieważ zawiera ona naturalną klasę monoidów reduktywnych z zerem.

Autor dowodzi też Twierdzenia B które opisuje strukturę lokalną odwzorowania r_X w punktach x gdzie r_X jest gładki w $s_X(x)$. Okazuje się ż e dla grup liniowo reduktywnych istnieje otoczenie otwarte V punktu x w $X^{\mathbb{G}}$ i izomorfizm $\phi : Y \to \mathbb{A}^n_K$ taki, że trójkąt

$$\begin{array}{ccc} r_X^{-1}(V) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{A}^n_K \\ & r_X \searrow \quad \swarrow pr_V & \\ & V & \end{array}$$

jest przemienny. Ponadto ϕ jest ekwiwariantny dla pewnego działania $\mathbb{G}$ na $\mathbb{A}^n_K$.

Trzeba powiedzieć, że pierwsze wersje tych twierdzeń zostały udowodnione we współpracy autora z J. Jelisiejewem. Głównym tematem rozprawy jest więc nowe podejście do dowodu tych twierdzeń które pozwala na ich dalsze uogólnienie. Tak więc istotnie nowe rezultaty tego doktoratu to nowe podejście do dowodów twierdzenia A i B. Nowe podejście pozwala na większą ogólność, twierdzenie A jest prawdziwe dla schematów lokalnie Noetherowskich, bez warunku quasi-zwartości. Nowe podejście jest też zupełnie różne od poprzedniego. Więc według mnie, doktorat jest oparty na całkowicie samodzielnych badaniach. Aby uzyskać te rezultaty autor musiał opanować wiele skomplikowanych technik geometrii algebraicznej, pod tym względem rozprawa jest imponująca.

Nowe podejście jest oryginalne, oparte na zupełności koherentnej i formaliźmie Tannaki. W tym ujęciu otrzymujemy spójną teorię, i trudno sobie wyobrazić dalsze istotne ulepszenia.

Rozprawa jest napisana bardzo dobrze, zawiera wstęp do stosowanych pojęć i technik, np. rozdział o pojęciu monoidów algebraicznych i monoidów Kempfa. Na jej podstawie można byłoby poprowadzić wykład monograficzny z tej dziedziny.

Podsumowując, rezultaty doktoratu są ważne dla zrozumienia topologii przestrzeni z działaniem grup reduktywnych i liniowo reduktywnych. Można oczekiwać wielu takich zastosowań, dla działań torusów wielowymiarowych i, co może być nawet bardziej interesujące, dla bardziej skomplikowanych grup reduktywnych. Myślę, że praca napisana na podstawie rozprawy ma dobre szanse na publikację w bardzo dobrym czasopiśmie. Można by też pomyśleć o publikacji np. w Memoirs of the AMS np. po uzupełnieniu o dalsze przykłady.

Rozprawa spełnia więc według mnie wszystkie warunki art. 13 ust. 1 Ustawy z dn. 14 marca 2003 roku o stopniach naukowych i tytule naukowym. Uznaję ją za bardzo dobrą. Uznałbym ją za wybitną, gdyby nie to, że pierwotne wersje twierdzeń były uzyskane we współpracy z J. Jelisiejewem.

Jerzy Weyman 14.05.2021

Jerzy Weyman