dr hab. Jan Otop, prof. UWr
Instytut Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 31 stycznia 2022

Recenzja rozprawy doktorskiej
Equivalence problem of transductions: algorithms based on commutative algebra
magistra Janusza Schmude

Tematyka rozprawy

Głównym obiektem badań przedstawionej Rozprawy są *transduktory*, czyli (w najprostszym wariancie) automaty skończone, które poza czytaniem słowa wejściowego wypisują również w każdym przejściu litery tworzące słowo wyjściowe. Tak jak w przypadku automatów skończonych, transduktory mogą być niedeterministyczne, t.j. mogą mieć więcej niż jeden przebieg (akceptujący) na słowie wejściowym. (Niedeterministyczny) transduktor jest *funkcyjny*, jeśli dla każdego słowa wejściowego, w każdym przebiegu akceptującym transduktor produkuje takie samo słowo wyjściowe, czyli definiuje funkcję (częściową) ze słów w słowa.

Transduktory wczytujące oraz wypisujące słowa są podstawowym modelem, stanowiący bazę dla licznych rozszerzeń. W Rozprawie rozważane są transduktory uogólniające model podstawowy w następujących trzech aspektach:

(1) Transduktory działają na drzewach skończonych (od liści do korzenia drzewa), podobnie jak automaty skończone na drzewach.

(2) Wyjście transduktora to elementy struktury algebraicznej $\mathbb{A}$ (np. pierścień liczb całkowitych lub wolny monoid, czyli słowa z konkatenacją). Struktura algebraiczna $\mathbb{A}$, lub krócej algebra, jest parametrem klasy transduktorów.

(3) Transduktory posiadają rejestry, w których przechowują wartości z algebry $\mathbb{A}$. Z każdym przejściem transduktora jest związane wyrażenie funkcyjne w algebrze $\mathbb{A}$ (wielomian w $\mathbb{A}$), które jest używane do obliczenia wartości rejestrów w węźle drzewa na podstawie wartości rejestrów w następnikach rozważanego węzła. Co ważne, przejścia transduktora nie zależą od wartości rejestrów (co by natychmiast prowadziło do nierozstrzygalności podstawowych problemów decyzyjnych). Bez straty ogólności, wyjściem transduktora jest wartość wyróżnionego rejestru.

Rozważany w Rozprawie model transduktorów jest bardzo ogólny. Przykładami funkcji obliczanych przez rozważane transduktory są: (a) funkcja zwracająca wektor krotności wystąpień poszczególnych etykiet w drzewie wejściowym, (b) selekcja najbardziej lewej gałęzi w drzewie wejściowym oraz (c) funkcja przekształcająca drzewo z symbolami o nieograniczonej arności do odpowiadającego mu drzewa binarnego. Ogólność modelu sprawia, że podstawowe problemy decyzyjny stają się trudne do rozwiązania algorytmicznie.

Głównym problemem badanym w Rozprawie jest równoważność transduktorów funkcyjnych, czyli pytanie, czy dane dwa transduktory funkcyjne definiują tę samą funkcję. Sam problem sprawdzania, czy dany transduktor jest funkcyjny jest równie trudny co równoważność transduktorów funkcyjnych; w Rozprawie zostały pokazane redukcje w obie strony. Ograniczenie do transduktorów funkcyjnych jest konieczne; problem równoważności niedeterministycznych transduktorów (bez zakładania funkcyjności) jest nierozstrzygalny już dla podstawowego modelu transduktorów działających na słowach.

Ocena rozprawy

Wyniki. Centralnym wynikiem Rozprawy jest rozstrzygalność problemu równoważności dla transduktorów (na drzewach z rejestrami), których wyjście oraz wartości rejestrów należą do pierścienia bez dzielników zera (Twierdzenie 4). Inne wyniki z Rozprawy są otrzymane przez odpowiednie (nietrywialne) redukcje do Twierdzenia 4; redukcje bazują na pojęciu *symulacji* algebr.

Algebra $\mathbb{A}$ jest *symulowana* przez algebrę $\mathbb{B}$, gdy istnieje funkcja z $\mathbb{A}$ w $\mathbb{B}^m$, która jest (1) różnowartościowa oraz (2) kompatybilna z operatorami algebry $\mathbb{A}$. Wtedy (funkcyjny) transduktor z wyjściem w $\mathbb{A}$ można przekształcić w (funkcyjny) transduktor z wyjściem w $\mathbb{B}^m$ symulując operacje na rejestrach z $\mathbb{A}$ w $\mathbb{B}^m$. Ponadto, równoważność transduktorów jest zachowywana przez to przekształcenie, więc problem równoważności transduktorów z wyjściem w $\mathbb{A}$ redukuje się do problemu równoważności transduktorów z wyjściem w (podalgebrze) $\mathbb{B}^m$. W przypadku $\mathbb{A}$ jest symulowana przez $\mathbb{B}$ oraz obraz $\mathbb{A}$ w $\mathbb{B}^m$ to pierścień bez dzielników zera, Twierdzenie 4 implikuje, że problem równoważności dla (funkcyjnych) transduktorów z wyjściem w $\mathbb{A}$ jest rozstrzygalny.

W ten sposób zostały otrzymane następujące wyniki:

- Rozstrzygalność problemu równoważności dla funkcyjnych transduktorów w wyjściem w wolnej algebrze lasów (Twierdzenie 7) etykietowanych skończonym alfabetem Σ. Takie transduktory zwracają zbiory składające się z drzew nieuporządkowanych nad Σ oraz kontekstów, czyli drzew nieuporządkowanych z „dziurami" w które można wstawić inne drzewa. Przykładem takiej transdukcji jest zmiana drzew z symbolami o nieustalonej arności na odpowiadające im drzewa binarne.

- Rozstrzygalność problemu (słabej) równoważności dla funkcyjnych transdukcji MSO_2 (Twierdzenie 8). Takie transdukcje są zdefiniowane jako złożenie następujących przekształceń grafów: (a) kopiowanie struktur, (b) kolorowanie (etykietowanie zmiennymi drugiego rzędu), oraz (c) interpretacje przez formuły logiki monadycznej drugiego rzędu (MSO). W Rozprawie skoncentrowano się na przekształceniach pomiędzy grafami o ograniczonej szerokości drzewiastej. Ponadto, funkcyjność oraz równoważność transdukcji były rozważane przy utożsamieniu grafów spełniających "walk-equivalence", t.j. takich które dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mają takie same krotności włożeń ścieżek długości n. Przy zliczaniu włożeń dowolnych grafów otrzymalibyśmy zwykły izomorfizm grafów.

- Rozstrzygalność problemu równoważności dla funkcyjnych transduktorów wypisujących słowa, gdzie dodatkowo w każdym kroku do wszystkich rejestrów jest aplikowane to samo różnowartościowe podstawienie słów za litery (Twierdzenie 11). W tym wyniku konieczne było pokazanie analogu Twierdzenia 4 dla ciał, gdzie w każdym kroku transduktora, wartości rejestrów są przekształcane przez (ten sam) automorfizm.

- Schemat dowodu rozstrzygalności problemu równoważności dla funkcyjnych transduktorów z wyjściem w monoidach o skończonej prezentacji (Lemat 5.7, Twierdzenie 10), czyli transduktory wypisujące słowa, które są utożsamiane względem kongruencji generowanej przez skończony zbiór równości na słowach.

Dodatkowo, stosując metody algebraiczne, podobne do tych zastosowanych w dowodzie Twierdzenia 4 pokazano:

- Rozstrzygalność problemu, czy dla gramatyk wielomianowych G, H (odpowiadających transduktorom) z wyjściem w algebrze wielomianów, zachodzi $L(G) \circ L(H) = 0$ (Twierdzenie 10), czyli czy dla dowolnych wielomianów $\vec{f} \in L(G), \vec{g} \in L(H)$ ich złożenie $\vec{f} \circ \vec{g}$ jest równe 0?

- Kryterium implikujące zwartość układów równań w danym monoidzie o skończonej prezentacji (Twierdzenie 12).

Znaczenie. Pojęcie symulacji transduktorów pojawiło się już wcześniej (w szczególności w [Seidl et al. 2018]). Ogólny schemat dowodu Twierdzenia 4 jest podobny do dowodu analogicznego, lecz słabszego, twierdzenia z [Seidl et al. 2018] (co jest napisane w Rozprawie).

Pomimo podobieństwa, w pracy [Seidl et al. 2018] rozważne były transduktory przetwarzające drzewa od korzenia do liści, podczas gdy w Rozprawie od liści do korzenia. Ponadto, w Rozprawie wyjściem jest (dowolny) pierścień bez dzielników 0 w odróżnieniu od [Seidl et al. 2018] gdzie wyjściem jest pierścień liczb całkowitych. Z tych powodów, ogólny schemat dowodowy musiał zostać twórczo dostosowany.

Ogólniejsze twierdzenie pozwoliło na użycie innych symulacji (np. w pierścieniu wielomianów) i otrzymanie powyższych wyników. W szczególności, praca [Seidl et al. 2018] kończy się stwierdzeniem, że problem równoważności transduktorów funkcyjnych wypisujących drzewa pozostaje otwarty. Ten problem jest rozwiązany w Rozprawie (Twierdzenie 6). Co więcej, rozwiązany jest nawet problem ogólniejszy, w którym transduktory mogą zwracać konteksty (Twierdzenie 7). Warto dodać, że drobne modyfikacje transduktorów z wyjściem w pierścieniu bez dzielników 0 sprawiają, że problem równoważności staje się nierozstrzygalny (Twierdzenie 9).

Wyniki z Rozdziału 3, dotyczące transdukcji MSO są równie ciekawe jak te z Rozdziału 2. Rozważanie transdukcji względem przybliżenia izomorfizmu jest konieczne, gdyż problem równoważności transdukcji MSO (względem izomorfizmu) jest otwarty nawet dla drzew. Wynik z Rozprawy jest zatem krokiem w stronę rozwiązania ważnego i trudnego problemu.

W Rozdziale 4 rozważane są uogólnia transduktorów z nierozstrzygalnym problemem równoważności oraz ograniczenia pozwalające zachować rozstrzygalność równoważności. Wyniki przedstawione w tym rozdziale są moim zdaniem nieco mniej ciekawe niż te z Rozdziałów 2-3, choć wynika to z (algorytmicznej) trudności rozważanego problemu.

Mam wrażenie, że Rozdział 5 przedstawia pracę w toku. Zaprezentowane tam wyniki są słabsze od wyników z poprzednich rozdziałów, ale Doktorant przedstawia plan na dalszą pracę.

Podsumowując, uważam że wyniki przedstawione w Rozprawie są ważne i oryginalne.

Zakres tematyczny. W Rozprawie zostało przedstawionych wiele pojęć z matematyki oraz informatyki teoretycznej: bazy Gröbnera, systemy przepisywania termów, automaty oraz transduktory na drzewach, logika MSO, algebry wielosortowe, pojęcie szerokości drzewiastej, systemy dodawania wektorów, oraz równania na słowach. Taki szeroki zakres użytych pojęć i narzędzi świadczy o szerokiej wiedzy Doktoranta.

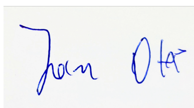
Samodzielność. Część wyników przedstawionych w Rozprawie zostało wcześniej opublikowanych w 3 artykułach. Dwa artykuły zostały przedstawione konferencjach FSTTCS (pokrywający część Rozdziału 2) oraz MFCS (pokrywający Rozdział 3); Doktorant jest jedynym wspólnym autorem obu prac. Trzeci artykuł, pokrywający większość Rozdziału 4 rozprawy jest dostępny w repozytorium arXiv a Doktorant jest jedynym autorem. Uważam, że to świadczy o dużej samodzielności naukowej Doktorant.

Jakość redakcyjna. Rozprawa jest napisana bardzo dobrze. Doktorant dobrał właściwy poziom abstrakcji, dzięki czemu dowody są jasne i zwarte. Rozprawa stanowi zamkniętą całość — można ją przeczytać bez sięgania do zewnętrznych źródeł a wprowadzane pojęcia oraz argumenty są ilustrowane licznymi przykładami. Recenzję Rozprawy znacznie ułatwiają podsumowania każdego rozdziału, które dodatkowo zawierają informację o źródłach prezentowanych wyników. Dodatkowo, bardzo podobają mi się zabiegi typograficzne zastosowane w Rozprawie, które ułatwiają czytanie oraz powrót do ważnych pojęć przy czytaniu kolejnych rozdziałów Rozprawy.

Podsumowując, Rozprawę tę czytałem z przyjemnością i może być ona wzorem dla jakości redakcyjnej. Listę drobnych poprawek zamieszczam w suplemencie do recenzji.

Konkluzja

Uważam, że wyniki przedstawione w pracy są ważne i oryginalne a Doktorant wykazał się szeroką wiedzą ze swojej dziedziny. Rozprawa jest również bardzo dobrze zredagowana. Dlatego uważam, że Rozprawa magistra Janusza Schmude **spełnia wymagania ustawowe stawiane rozprawom doktorskim** i wnoszę o dopuszczenie go do dalszych etapów przewodu doktorskiego.



Signed by / Podpisano przez:

Jan Otop

Date / Data: 2022-01-31 18:50

dr hab. Jan Otop, prof. UWr
Instytut Informatyki
Uniwersytet Wrocławski

Wrocław, 31 stycznia 2022

Suplement do recenzji rozprawy
Equivalence problem of transductions: algorithms based on commutative algebra.

- Str. 14. l-4 "$I \setminus G$" $\rightarrow$ "$I \setminus \langle G \rangle$"
- Str. 16. Końcówka dowodu Lematu 1.18. Przedostatnia równość wynika z $d_1 + ... + d_s = 0$ a nie 1.5.
- Str. 22. Przykład 2.4 W opisie a oraz b są zamienione. W przejściach transduktora zamiast identyczności powinna być suma. Nie jestem pewien, czy transduktor zwraca dobrą odpowiedź jeśli jedyne a w drzewie jest w jego korzeniu.
- Str. 31. "unary alphabet Σ" $\rightarrow$ "singleton alphabet Σ". Unary sugeruje, że jest wiele symboli unarnych.
- Str. 38. Twierdzenie 7. "equivalence of functional OF register transducers".
- Str. 46. " We assume all relational structureS to be finite."
- Str. 54-55 $A_G X \rightarrow A_H X$.
- Str. 89. Zastanawiam się, czy usunięcie pojęcia "reduced" i zastąpienie go "I is radical" nie uprościłoby prezentacji?
- Str. 91 l. 14 $\tilde{v} - \sigma \bar{v_1} = \tilde{v_1} \rightarrow \tilde{v} - \tilde{\sigma} \bar{v_1} = \tilde{v_1}$