Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Tomasza Mańdziuka "Limits of saturated ideals of points with applications to secant varieties"

Uogólnieniem klasycznego schematu Hilberta $\mathrm{Hilb}_{H,X}$ parametryzującego podschematy X z zadanym wielomianem Hilberta H jest, rozważany w pracy, schemat Hilberta z wielogradacją $\mathrm{Hilb}^h_{S[X]}$, parametryzujący podschematy X z zadaną funkcją Hilberta h. W rozprawie przede wszystkim rozważany jest przypadek $X = \mathbb{P}^n$ oraz funkcji $h = h_{r,n}$ odpowiadającej r punktom w położeniu ogólnym. W schemacie $\mathrm{Hilb}^{h_{r,n}}_{S[\mathbb{P}^n]}$ można wyróżnić zbiór domkniętych punktów odpowiadających wysyconym ideałom r różnych punktów. Domknięcie tego zbioru (w $\mathrm{Hilb}^{h_{r,n}}_{S[\mathbb{P}^n]}$), oznaczane przez $\mathrm{Slip}_{r,n}$, stanowi główny przedmiot badań.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. Rozdział pierwszy zawiera wstęp oraz zaprezentowanie i podsumowanie najważniejszych wyników.

W rozdziale drugim doktorant przedstawia materiał niezbędny do zrozumienia wypowiedzi twierdzeń i dowodów w kolejnych, głównych rozdziałach. W większości polega to na przytoczeniu twierdzeń i dowodów z prac naukowych (które doktorant cytuje we właściwy sposób), niemniej w rozprawie doktorskiej — z założenia pełniącej nieco inną funkcję, niż artykuł naukowy — obecność takiego rozdziału jest zrozumiała. Nie widzę większego sensu w przytaczaniu zawartości tego rozdziału w recenzji, natomiast warto zauważyć, że ten rozdział zdecydowanie ułatwia czytanie pracy, wymagał od doktoranta znajomości wielu pozycji literatury, jest bardzo dobrze zredagowany. Odnotować też należy, że niektóre dowody, choć "standardowe", trudno namierzyć w literaturze (wiadomo, że pewne fakty zachodzą i specjaliści dobrze wiedzą, jak przeprowadzić dowód, niemniej w pracach naukowych zwykle nie pojawiają się te dowody — bywają pozostawione jako ćwiczenie). Spisanie dowodów tego rodzaju podwyższa jakość rozprawy doktorskiej.

Rozdział trzeci, zatytułowany "Criteria for projective space", jest, w mojej opinii, głównym rozdziałem pracy doktorskiej. Zawiera on oryginalne wyniki w postaci częściowego rozwiązania dobrze umotywowanego i postawionego problemu badawczego. Przeprowadzone rozumowania nie budzą wątpliwości, wymagają zaawansowanych metod algebry i geometrii algebraicznej oraz dobrej znajomości literatury, zilustrowane są dobrze dobranymi przykładami. W mojej opinii, wyniki tego rozdziału wystarczałyby do uzasadnienia, że mgr Mańdziuk zasługuje na stopień doktora nauk matematycznych.

Przechodząc do konkretów, naturalnym problemem badawczym jest pytanie, czy zadany ideał jednorodny $I \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ opisuje schemat będący granicą schematów r zwykłych punktów, czyli czy punkt $[I]$ należy do składowej $\mathrm{Slip}_{r,n}$ schematu Hilberta z wielogradacja. Związek z apolarnością i wyliczaniem rangi (zwykłej, brzegowej, kaktusowej) pewnych podprzestrzeni został wyjaśniony w rozdziałach drugim i piątym. Doktorant prezentuje kilka kryteriów, które pozwalają wykluczyć lub potwierdzić należenie $[I]$ do składowej $\mathrm{Slip}_{r,n}$. Poniższe omówienie w żadnym razie nie wyczerpuje zawartości rozdziału 3 (niektóre wyniki pomijam).

Twierdzenie 1 (Proposition 3.1). *Niech I będzie jednorodnym ideałem o funkcji Hilberta $h_{r,n}$. Definiujemy $e := \min\{a \in \mathbb{Z} : h_{r,n}(a) = r\}$, niech $d \geqslant e + 2$. Jeśli $\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_S(I + M^d, S/(I + M^d))_0 < rn$, to $[I] \notin \mathrm{Slip}_{r,n}$.*

Kolejne kryterium zostało w pracy zaprezentowane w bardziej ogólnej formie (dla schematu Hilberta z wielogradacją parametryzującego ideały z funkcją Hilberta h odpowiadającą pewnemu schematowi długości r). W przypadku $\mathrm{Slip}_{r,n}$ miałoby ono postać:

Twierdzenie 2 (Theorem 3.5). *Niech I oraz e będzie zdefiniowane jak wyżej. Jeśli* $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,n}$*, to* $H_{S/I^k}(d) \geqslant r \cdot \dim_{\mathbb{K}} S_{k-1}$ *dla wszystkich dodatnich k oraz $d \geqslant ke + k$.*

Dla ideałów niewysyconych podane jest następujące kryterium:

Twierdzenie 3. *Dla ideału niewysyconego I niech d będzie takie, że $I_d \neq \mathrm{sat}(I)_d$. Niech $J = sat(I) \cap M^d$, niech $K = I \cap M^d$. Jeśli*

(1) odwzorowanie $\mathrm{Hom}_S(J, S/J)_0 \to \mathrm{Hom}_S(K, S/J)_0$ *jest surjektywne,*

(2) $[J] \in \mathrm{Hilb}^h_S$ *jest punktem gładkim, dla funkcji Hilberta h ideału J,*

(3) odwzorowanie $\mathrm{Hom}_S(K, S/K)_0 \to \mathrm{Hom}_S(K, S/J)_0$ *jest surjektywne,*

to $[I] \notin \mathrm{Slip}_{r,n}$.

Kolejne kryterium (dla płaszczyzny rzutowej) uważam za jeden z naciekawszych wyników w pracy. Również dowód, wykorzystujący geometryczne własności pewnego podzbioru schematu Hilberta z gradacją (nierozkładalność, wymiar) oraz pewien specjalnie dobrany punkt schematu Hilberta uważam za interesujący (mimo, że trudny). Naturalnym zagadnieniem badawczym byłaby próba znalezienia krótszego dowodu (oryginalny liczy ok. 4 stron), który jednocześnie wyjaśnia, co tak naprawdę wymusza należenie do $\mathrm{Slip}_{r,2}$ (z możliwością uogólnienia). Kryterium (którego dodatkową zaletą jest to, że łatwo może być testowane w programie komputerowym) wygląda następująco:

Twierdzenie 4 (Theorem 3.12). *Niech I będzie ideałem o "generycznej" funkcji Hilberta. Jeśli funkcja Hilberta ideału* $\mathrm{sat}(I)$ *różni się od "generycznej" funkcji Hilberta w co najwyżej jednym stopniu, to* $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,2}$.

Kolejne kryteria rozstrzygają przynależność do $\mathrm{Slip}_{r,2}$ w przypadku $r \leqslant 6$. Dla $r = 1, 2, 3$ wiadomo, że $\mathrm{Slip}_{r,2}$ jest całym schematem Hilberta z gradacją. W poniższych twierdzeniach opuszczam oczywiste założenie, że ideał I ma "generyczną" funkcję Hilberta dla r punktów.

Twierdzenie 5 (Proposition 3.77). $[I] \in \mathrm{Slip}_{4,n}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{sat}^2(I)_2 \subset I_2$.

Twierdzenie 6 (Proposition 3.89). $[I] \in \mathrm{Slip}_{5,2}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathrm{sat}^2(I)_3 \subset I_3$.

Twierdzenie 7 (Proposition 3.105). $[I] \in \mathrm{Slip}_{6,2}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi jedno z poniższych:*

(1) I jest wysycony,

(2) I ma funkcję Hilberta $(1, 3, 5, 6, 6, \dots)$,

(3) I ma funkcję Hilberta $(1, 3, 4, 5, 6, 6, \dots)$ *oraz* $(t \cdot \mathrm{sat}(I))_3 \subset I_3$*, gdzie t jest wspólnym dzielnikiem (stopnia 1) dwóch generatorów* $\mathrm{sat}(I)$ *stopnia 2,*

(4) I ma funkcję Hilberta $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, \dots)$ *oraz* $(\mathrm{sat}(I_{\leqslant d+1}) \cdot \mathrm{sat}(I))_d \subset I_d$.

Moim zdaniem w pracy powinien się pojawić (wprost przytoczony i opisany) przykład ideału w $U'_5 \setminus U''_5$. Wyjaśniałoby to "zniknięcie" narzucającego się warunku $\mathrm{sat}^2(I)_4 \subset I_4$.

Na koniec warto zauważyć, że ta część pracy jest znacznie rozbudowaną wersją artykułu (umieszczonego na arxiv) "Identifying limits of ideals of points in the case of projective space", którego autorem (jedynym!) jest doktorant. Podsumowując tę część recenzji, uważam, że podana lista kryteriów jest istotnym, oryginalnym wkładem doktoranta w teorię schematów Hilberta i ich zastosowań.

W rozdziale czwartym doktorant zajmuje się schematem Slip w przypadku rozmaitości torycznych. Ogólna teoria zostaje zastosowana do iloczynu przestrzeni rzutowych. W tym rozdziale można wyróżnić dwa wyniki. Pierwszym z nich jest kryterium uogólniające Proposition 3.1 (jedno z poprzednich kryteriów):

Twierdzenie 8 (Theorem 4.25). *Niech* $X = \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_k}$, *niech* M_i *oznacza ideał maksymalny pierścienia odpowiadającego i-tej składowej (rozpatrywany w pierścieniu współrzędnych* X*). Jeśli* $[I] \in \mathrm{Slip}_{r,X}$, *to*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{S[X]} \left(I + M_i^2, S[X]/(I + M_i^2) \right)_0 \geqslant r(n_1 + \ldots + n_k)$$

dla wszystkich $i = 1, \ldots, k$.

Drugi wynik dotyczy rozkładalności schematu Hilberta z wielogradacją — pokazano, że nawet dla $r = 2$ schematy $\mathrm{Hilb}^{h_{2,X}}_{S[X]}$ są rozkładalne w przypadku X będącym iloczynem $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ oraz dla powierzchni Hirzebrucha.

W rozdziale piątym autor pokazuje zastosowanie wyników (kryteriów przynależności do składowej Slip) do wyliczania rang pewnych wielomianów. Nie będę przytaczał ani omawiał wyników, natomiast warto zauważyć, że rozmaite rodzaje rang (zwykła, brzegowa, kaktusowa) są intensywnie badane i metody, opracowane przez doktoranta, są tutaj pomocne. Rozdział ten zawiera częściowo wyniki otrzymane i opublikowane przez doktoranta wspólnie z dwoma współautorami, natomiast nieistotna byłaby próba rozróżnienia, jaki był wkład doktoranta — pozostałe części pracy, w szczególności rozdział 3, w zupełności wystarcza do stwierdzenia, że są w pracy zawarte oryginalne wyniki osiągnięte przez doktoranta. Rozdział piąty jest naturalnym podsumowaniem pracy, ze wskazaniem zastosowań i odniesień do nieco innej klasy probemów.

Konkluzja

Przedstawiona rozprawa spełnia, z nadmiarem, wszelkie ustawowe i zwyczajowe wymagania stawiane rozprawom doktorskim. Doktorant udowodnił, że swobodnie stosuje zaawansowane metody algebry przemiennej i geometrii algebraicznej (co wypełnia ustawowe kryterium zaprezentowania wiedzy teoretycznej kandydata) i przy ich pomocy potrafi rozwiązać oryginalny problem badawczy przynależności do składowej Slip — co spełnia ustawowe kryterium umiejętności prowadzenia samodzielnych badań jak i uzasadnia, że prezentowana rozprawa jest rozprawą w rozumieniu Ustawy. Pewne fragmenty pracy już zostały opublikowane bądź są zawarte w preprincie, jednakże rozprawa nie jest zestawieniem już opublikowanych prac, lecz znacznym rozwinięciem pewnych wcześniejszych wyników doktoranta. W mojej opinii podnosi to rangę rozprawy (doktorant osiąga wyniki, które nadają się do publikacji) i dobrze rokuje na przyszłość. W szczególności uważam, że główna część nowych wyników powinna zostać zredagowana i opublikowana w formie artykułów naukowych w dobrych czasopismach.

Rozprawa jest bardzo starannie zredagowana, układ rozdziałów jest czytelny, nie znalazłem praktycznie żadnych błędów (jedynie na stronie 44 użyte zostało słowo "necessary" zamiast "sufficient", ale jest to najwyraźniej omyłka redakcyjna, a nie brak zrozumienia różnicy między warunkiem koniecznym a wystarczającym). Na uwagę zasługuje bogata literatura.

Z uwagi na zaprezentowane w rozprawie ciekawe, oryginalne i trudne wyniki, wykorzystanie bardzo szerokich i zaawansowanych metod dowodowych i staranną redakcję (mogącą stanowić wzór) wnioskuję o wyróżnienie rozprawy.

M. Dumnicki

dr hab. Marcin Dumnicki