Recenzja rozprawy doktorskiej pana Mateusza Rapickiego

Rozprawa doktorska Pana Mateusza Rapickiego poświęcona jest zastosowaniom metody funkcji Bellmana. Wykorzystując tą metodę autor dowodzi kilku analitycznych nierówności. Wszystkie te nierówności są oryginalne i opublikowane - część z nich wspólnie z promotorem, a część samodzielnie. Metoda funkcji Bellmana, wprowadzona do analizy przez Burkholdera przy okazji pięknego dowodu bezwarunkowości bazy Haara, na trwałe zagościła w analizie dzięki pracom Nazarova, Treila i Volberga z lat dziewięćdziesiątych. Od tego czasu jest wykorzystywana z powodzeniem przez wielu autorów. Jej niepodważalną zaletą jest możliwość znajdowania optymalnych stałych w wielu dowodzonych nierównościach. Pisząc w wielkim skrócie, sprowadza ona dowód nierówności do skonstruowania specjalnej funkcji kilku zmiennych, spełniającej kilka aksjomatycznych własności, majoryzującej funkcję kodującą szukaną nierówność. Znajdywanie takiej funkcji, zwanej funkcją Bellmana jest niejednokrotnie dość skomplikowanym wyzwaniem, dalekim od algorytmicznego rozwiązania. Wymaga zwykle dużej biegłości i połączenia wielu tricków biorących się zwykle z dużego doświadczenia w tego rodzaju konstrukcjach. Pokreślić należy, że promotor pana Rapickiego jest w tym temacie światowej klasy specjalistą.

Nierówności którym poświęcona jest rozprawa to nierówności typu maksymalnego. To bardzo ważna klasa oszacowań, które np. kontrolują normy operatorów singularnych. W pracy udowodnionych jest pięć takich nierówności i każda z nich jest ciekawa. Kolejne rozdziały dotyczą kolejnych nierówności i w zasadzie można je czytać niezależnie.

Niezaprzeczalnym walorem rozprawy jest rozdział drugi poświęcony opisowi metody funkcji Bellmana w którym autor dokładnie wyjaśnia tę technikę. Napisany jest w bardzo przystępny sposób co jest specjalnie pożyteczne dla czytelnika nie obcującego z tą metodą na co dzień. Dodatkowym jego walorem jest odniesienie do dwóch cech które dotyczą nierówności objętych pracą. Pierwszą z nich jest to, że większość nierówności to nierówności z wagami - a jedna z nich nawet z dwoma wagami. Niejednokrotnie wprowadzenie do nierówności wagi powoduje, że potrzebny jest całkiem nowy, dużo subtelniejszy dowód, a nie jakieś proste uogólnienie. Drugą jest fakt, że rozpatrywane są tak zwane diadyczne funkcje maksymalne, czyli takie które, w swej największej ogólności, do swojej definicji wykorzystują uśrednianie po zbiorach z ustalonej wstępującej rodziny σ-ciał tworzących kombinatoryczną strukturę drzewa. Opis z drugiego rozdziału bierze pod uwagę obie te rzeczy. Z całą pewnością bez tego wstępnego rozdziału rozprawa, zachowując te same wyniki, straciła by jednak wiele na swojej przystępności.

Przejdźmy teraz do omówienia poszczególnych rezultatów. Pierwszy z nich to uogólnienie znanej nierówności maksymalnej Kołmogorowa która majoryzuje p-tą normę funkcji maksymalnej dla $0 < p < 1$ przez pierwszą normę funkcji ze stałą $(1-p)^{-1/p}$. Podstawową trudnością tego uogólnienia na przypadek z wagą jest już samo znalezienie odpowiedniej nierówności, gdyż proste przepisanie okazuje się być fałszywe. Autor proponuje tu dodanie specjalnego członu opisującego "błąd" zawierającego w sobie całkowanie funkcji względem potęgi funkcji maksymalnej wagi. Okazuje się, że dla tak zmodyfikowanej nierówność można pokazać - co autor czyni - że zachodzi ona z optymalnymi stałymi: tą z oryginalnej nierówności bez wagi, oraz nową pojawiającą się przy członie z błędem. Autor podaje algebraicznym wzorem funkcję Bellmana dla tej nierówności dowodząc wszystkich jej potrzebnych własności. Dodatkowo autor opisuje jak doszedł do tej konkretnej funkcji, nie ukrywając że została odnaleziona w drodze eksperymentu. Praca z tym wynikiem została opublikowana w Anal. Math. w roku 2018.

Kolejny rozdział poświęcony jest "transferencji" nierówności bez wagi do odpowiadającej jej nierówności z wagą. Przykładami takich konkretnych nierówności są nierówność Feffermana - Steina oraz pewna logarytmiczna nierówność udowodniona przez Osękowskiego. Autor wyłuskał z tych przykładów bardzo ogólny abstrakcyjny schemat który ma rozliczne zastosowania. Konkretnie rezultat wygląda następująco: jeśli dla pewnych dwóch niemalejących nieujemnych funkcji Φ i Ψ określonych na dodatniej półosi z których pierwsza jest wypukła druga półciągła z lewej zachodzi nierówność $\|\Psi(Mf)\|_{L^1(I)} \leq \|\Phi(|f|)\|_{L^1(I)}$, wówczas nierówność $\|\Psi(\mathcal{M}f)\|_{L^1(w)} \leq \|\Phi(|f|)\|_{L^1(\mathcal{M}w)}$ zachodzi dla w dowolnej przestrzeni probabilistycznej z dowolną strukturą drzewa i z dowolną wagą w. Pierwsza nierówność jest najprostszym możliwym przypadkiem z miarą Lebesgue'a na odcinku i zwykłą filtracją diadyczną. Na uwagę zasługuje że jest to transferencja dokładna - z identyczną stałą. Idea dowodu polega na "odzyskaniu" funkcji Bellmana (zadanej implicite) odpowiadającej pierwszej, prostej nierówności i zdefiniowaniu przy jej pomocy funkcji Bellmana dla nierówności drugiej. Cały dowód jest bardzo elegancki, a na koniec autor podaje przykłady jego zastosowań - między innymi do "geometrycznego" operatora maksymalnego, oraz do odpowiedniej optymalnej nierówności wagowej dla przestrzeni Lorentza $L^{p,\infty}$. Praca z tymi wynikami została opublikowana w Arch. Math. w roku 2019.

Kolejny rozdział rozprawy poświęcony jest wagowym nierównościom słabego typu $(1,1)$. O wagach zakłada się tu iż spełniają warunek Muckenhoupta A_p. Taka nierówność dla wagi z klasy A_1 była udowodniona przez Lernera, Ombrosi'ego i Pereza, i ma postać $w\{\mathcal{M}f > w\} \leq [w]_{A_1}\|f\|_1$. Okazuje się, że warunek by waga należała do A_1 można zamienić na należenie do A_p, $1 < p < \infty$ i wówczas otrzymuje się stałą $2e[w]_{A_p}$. Nie jest to stała optymalna, jakkolwiek optymalna jest liniowa zależność od normy A_p. Tutaj dowód jest dosyć chytry. Najprzód używa się optymalnej nierówności dla normy operatora maksymalnego w przestrzeni $L^p(w)$ dla wagi z klasy A_p, udowodnionej przez Osękowskiego aby "odzyskać" z niej nierówność całkową dla odpowiadającej jej funkcji. Następnie, wykorzystując tą nierówność definiuje się funkcję Bellmana implicite. To podejście umożliwia przeprowadzenie relatywnie abstrakcyjnego dowodu, bez drobiazgowej analizy konkretnej funkcji Bellmana która w tym przypadku prawdopodobnie byłaby niezwykle skomplikowana. Praca z tym wynikiem jest wspólna z promotorem i ukazała się w czasopiśmie Mathematika w roku 2021.

Kolejny rozdział poświęcony jest diadycznej nierówności maksymalnej między przestrzeniami Lorentza L^{p,q_i}, $i = 1, 2$ bez wag. Przypadek gdy $q_1 = q_2$ został rozpatrzony przez Melasa i Nikolidakisa którzy pokazali, że optymalna stała operatora maksymalnego wynosi $p/(p-1)$. W rozprawie dowodzi się, że $\|\mathcal{M}f\|_{L^{p,q_2}} \leq C(p, q_1, q_2)\|f\|_{L^{p,q_1}}$ dla $p \leq q_1 < q_2$, oraz że wyliczona norma $C(p, q_1, q_2)$ jest optymalna. Trzeba przyznać, że uzyskany wzór na tę normę robi wrażenie. Dowód jest dość skomplikowany, czego głównym powodem zdaje się być fakt, że nie można zapisać nierówności maksymalnej w przypadku dwoch rożnych przestrzeni Lorentza jak równoważnej nierówności całkowej dla odpowiedniej funkcji. Aby obejść tę trudność ustala się konkretną wartość jednej z całek definiujących normę i traktuje ją jak dodatkową zmienną funkcji Bellmana. Poszukiwaną funkcję odgaduje się jako wzór który jednak zawiera część zdefiniowaną implicite dla której znajduje się kodujące ją równanie różniczkowe. Cały dowód jest bardzo złożony i, sądząc z postaci optymalnej stałej raczej niełatwo by było go uprościć. Praca, wspólna z promotorem, została przyjęta do Studia Math.

Ostatni rozdział rozprawy dotyczy ograniczoności tak zwanego harmonicznego operatora maksymalnego, zdefiniowanego supremum odwrotności średnich odwrotności funkcji po elementach pokrycia diadycznego zawierających argument. W tyn przypadku ograniczoność operatora wynika wprost z ograniczoności zwykłego operatora maksymalnego ale oczywiście pozostaje kwestia najlepszej stałej. Podkreślić należy, że rozpatruje się tu operator maksymalny działający między przestrzeniami $L^p(w)$ i $L^p(u)$, $0 < p < \infty$, dla dwóch różnych wag. Znana jest z pracy Cruz-Uribe et all, postać "normy" $[u,v]_{A_{-p}}$ gwarantującej skończoność normy takiego operatora maksymalnego. Autorzy przenoszą tę definicję na przypadek diadycznego operatora maksymalnego oraz dowodzą optymalnego oszacowania jego normy postaci $(p+1)^{(p+1)/p}p^{-1}[u,v]_{A_{-p}}^{1/p})$. Dowód naśladuje dowód Sawyera analogicznej nierówności dla klasycznego operatora maksymalnego. Harmoniczną funkcję maksymalną tłumaczy się na funkcję minimalną, dowodzi się oszacowania bez wag, po czym wprowadza pewien warunek do testowania ograniczoności którego zachodzenie jest gwarantowane przez warunek $[u,v]_{A_{-p}} < c$. Następnie stosuje się argument ze zmianą miary inkorporując do niej jedną z wag. Dowód optymalności wymaga osobnego przemyślnego argumentu.

Podsumowując: rozprawa doktorska pana Rapickiego prezentuje sobą bardzo wysoki poziom. Opanowanie technik dowodowych w zakresie metody funkcji Bellmana jest mistrzowskie, a liczba nietrywialnych rezultatów, jak też subtelności pojawiające się w ich dowodach są imponujące. Jestem pewien że współpraca z promotorem zaowocowała ukształtowaniem dojrzałego matematyka który "odziedziczył" po nim biegłość w stosowaniu technik dowodzenia nierówności analitycznych. Rozprawa oczywiście jest znacznie więcej niż dostateczną podstawą do przyznania panu Rapickiemu stopnia doktora, o co wnioskuję. Dodatkowo wnioskuję o przyznanie panu Rapickiemu za tę rozprawę wyróżnienia.

Michał Wojciechowski