Mariusz Mirek
Rutgers University &
Uniwersytet Wrocławski

**Recenzja rozprawy doktorskiej mgra Mateusza Rapickiego pt.
"Weighted and unweighted estimates for maximal operators"**

Rozprawa doktorska mgra Mateusza Rapickiego liczy prawie sto stron i składa się z czterech prac już opublikowanych i jednego preprintu:

[1] M. Rapicki, *A weighted inequality for a dyadic-like maximal operator,* Analysis Mathematica **44** (2018), 577–585.

[2] M. Rapicki, *Fefferman-Stein inequalities for the dyadic-like maximal operators,* Archiv der Mathematik **113** (2019), 81–93.

[3] A. Osękowski and M. Rapicki, *A weighted maximal weak-type inequality,* Mathematika **67** (2021), 145–157.

[4] A. Osękowski and M. Rapicki, *Sharp Lorentz-norm estimates for dyadic-like maximal operators,* Studia Mathematica **257** (2021), 87–110.

[5] A. Osękowski and M. Rapicki, *Sharp weighted inequalities for harmonic maximal operators,* złożona.

Zatem rozprawa została opublikowana w czasopismach matematycznych o bardzo dobrym poziomie. Trzy prace są współautorskie, napisane wspólnie z profesorem Adamem Osękowskim. Oprócz tego mgr Rapicki jest autorem i współautorem dwóch innych prac niewchodzących w skład rozprawy:

[6] M. Brzozowski, A. Osękowski, M. Rapicki, *Sharp weighted weak-norm estimates for maximal functions,* Statistics and Probability Letters **131** (2017), 93–101.

[7] M. Rapicki, *A maximal inequality for stochastic integrals,* Probability and Mathematical Statistics **36**, no. 2 (2016), 311–333.

Rozprawa poświęcona jest badaniu wagowych i niewagowych nierówności maksymalnych w kontekście optymalnych stałych i metody Bellmana. Opis działalności naukowej w autoreferacie w bardzo przejrzysty sposób przedstawia istotę osiągnięć kandydata i świadczy o jego dojrzałości naukowej. Każde osiągnięcie jest jasno opisane, ponadto przedstawione są nie tylko zastosowane metody, ale również szerszy kontekst badań, co jest bardzo wartościowe.

Pierwszy rozdział stanowi wprowadzenie do rozprawy, gdzie autor bardzo starannie motywuje swoje badania poprzez nawiązanie do klasycznych rezultatów w analizie harmonicznej i teorii prawdopodobieństwa. Zapoznajemy się z definicją diadycznych i quasi-diadycznych operatorów maksymalnych, wag Muckenhoupta, przestrzeni Lorentza oraz przestrzeni miarowych wyposażonych w strukturę drzewa, które stanowią ważną klasę przestrzeni w dalszych rozdziałach.

Drugi rozdział jest poświęcony metodzie funkcji Bellmana, która jest nieocenionym narzędziem w dowodzeniu różnych typów nierówności w analizie i rachunku prawdopodobieństwa. Metoda ta pozwala wywnioskować zadane oszacowanie z istnienia pewnej funkcji specjalnej, spełniającej odpowiednie warunki majoryzacji i wklęsłości. Zwykle znalezienie tej funkcji specjalnej sprowadza się do rozwiązania odpowiedniego problemu ekstremalnego i jest dalece nietrywialnym zadaniem, o czym będzie się można przekonać w dalszych rozdziałach tej rozprawy. Ważnym aspektem metody Bellmana jest jej szeroki wachlarz zastosowań. Metoda Bellmana w wielu przypadkach daje optymalne stałe, co jest zawsze bardzo delikatnym pytaniem. Autor w bardzo przystępny sposób wyjaśnia istotę metody funkcji Bellmana w kontekście dalszych rozdziałów. Ta cześć rozprawy jest bardzo pomocna zwłaszcza dla kogoś kto pierwszy raz spotyka się z metodą Bellmana, która w swojej istocie jest bardzo prosta, ale zarazem bardzo subtelna.

Rozdział trzeci dotyczy ważonych nierówności Kołmogorowa dla funkcji maksymalnych z pracy [1]. Głównym wynikiem tego rozdziału jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że* $f, w \in L^1(\Omega)$ *są nieujemne oraz* $0 < p < 1$. *Wtedy dla diadycznej funkcji maksymalnej* $\mathcal{M}$ *mamy*

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(w)}^p \leqslant \frac{1}{1-p}\|f\|_{L^1}^p\|w\|_{L^1} + \frac{p^2}{1-p}E_{\mathcal{T}}(f, w),$$

gdzie

$$E_{\mathcal{T}}(f, w) = \left(\left\|f(\mathcal{M}w)^{1/p}\right\|_{L^1} - \|f\|_{L^1}\|w\|_{L^1}^{1/p}\right)\left(\|f\|_{L^1}\|w\|_{L^1}^{1/p}\right)^{p-1}$$

jest funkcją błędu, która jest równa zero, jeśli $\|f\|_{L^1}\|w\|_{L^1} = 0$. *Ponadto stałe* $\frac{1}{1-p}$ *i* $\frac{p^2}{1-p}$ *są optymalne.*

Biorąc $w = 1$ otrzymujemy $E_{\mathcal{T}}(f, w) = 0$ co daje nam niewagową nierówność Kołmogorowa. W tym miejscu rozprawy czytelnik ma wrażenie że dzieje się coś tajemniczego i to jest właściwe wrażenie. Dowód powyższego twierdzenia opiera się na wykorzystaniu metody funkcji Bellmana. Rozumowanie jest krótkie, bardzo eleganckie w rezultacie daje dowód z optymalnymi stałymi pod warunkiem, że mamy kandydata na funkcję Bellmana. Jak już wcześniej było wspomniane znalezienie odpowiedniej funkcji Bellmana jest w wielu przypadkach dużym wyzwaniem. Tutaj należy docenić warsztat kandydata tym bardziej, że funkcja Bellmana ma dość niespotykaną postać.

W rozdziale czwartym, który jest częścią pracy [2], autor rozważa bardzo ciekawe pytanie. Przypuśćmy, że mamy dwie funkcje $\Phi, \Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ spełniające następującą nierówność całkową

$$\int_\Omega \Psi(\mathcal{M}f)d\mu \leqslant \int_\Omega \Phi(|f|)d\mu.$$

Pytanie czy istnieje wagowy odpowiednik tej nierówności w duchu nierówności Feffermana–Steina

$$\int_\Omega \Psi(\mathcal{M}f)wd\mu \leqslant \int_\Omega \Phi(|f|)\mathcal{M}wd\mu \ ?$$

Autor udziela pozytywnej odpowiedzi na to pytanie dowodząc następującego twierdzenia:

Twierdzenie 2. *Niech $\Phi, \Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ będą niemalejącymi funkcjami takimi, że Φ jest wypukła, a Ψ jest lewostronnie ciągła. Załóżmy, ponadto że nierówność*

$$\|\Psi(\mathcal{M}f)\|_{L^1(0,1)} \leqslant \|\Phi(|f|)\|_{L^1(0,1)}$$

zachodzi dla wszystkich funkcji $f \in L^1(0,1)$. Wtedy dla każdej przestrzeni probabilistycznej (Ω,μ) wyposażonej w strukturę drzewa, dla dowolnej wagi w i funkcji całkowalnej f na Ω mamy

$$\|\Psi(\mathcal{M}f)\|_{L^1(w)} \leqslant \|\Phi(|f|)\|_{L^1(\mathcal{M}w)}.$$

Jest to imponujący rezultat będący pewnego rodzaju metodą transferencji nierówności całkowych do ich wagowych odpowiedników. Istotną cechą tego wyniku są optymalne stałe, mianowicie jeśli pierwsza nierówność zachodzi z optymalną stałą to również ma to miejsce dla jej wagowego odpowiednika. Ponadto autor otrzymuje szereg aplikacji powyższego twierdzenia, np. biorąc $\Phi(x) = x$, $\Psi(x) = \lambda\chi_{(\lambda,\infty)}(x)$ dla $\lambda > 0$, dostajemy klasyczną nierówność Feffermana–Steina, również w przypadku przestrzeni wyposażonych w strukturę drzewa. Dowód jest również oparty na metodzie funkcji Bellmana.

W rozdziale piątym, który jest częścią pracy [3], autor używa metody funkcji Bellmana do badania nierówności słabego typu $(1,1)$ z wagami A_p. Głównym rezultatem jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Niech (Ω,μ) będzie przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w strukturę drzewa $\mathcal{T}$. Jeśli $1 < p < \infty$ oraz $w \in A_p$ jest wagą na Ω, to wtedy dla każdej funkcji $f \in L^1(\Omega)$ mamy*

$$w(\{x \in \Omega : \mathcal{M}f(x) > w(x)\}) \leqslant 2ep[w]_{A_p} \int_\Omega f(x)d\mu(x).$$

Ponadto liniowa zależność od $[w]_{A_p}$ jest optymalna.

Dowód powyższego twierdzenia opiera się na pokazaniu pewnych nierówności wagowych dla tzw. operatora diadycznego przesunięcia “dyadic shift”, które w konsekwencji pozwalają skonstruować odpowiednią funkcję Bellmana. To pokazuje duży wachlarz metod jaki posiadł autor.

Rozdział szósty, oparty na pracy [4], jest poświęcony badaniu norm diadycznego operatora maksymalnego między różnymi przestrzeniami Lorentza, gdzie pokazano:

Twierdzenie 4. *Niech (Ω,μ) będzie przestrzenią miarową wyposażoną w strukturę drzewa. Niech parametry $1 < p \leqslant q_1 < q_2 < \infty$ będą ustalone. Wtedy dla każdej funkcji $f \in L^1(\Omega)$ mamy*

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^{p,q_2}(\Omega)} \leqslant C_{p,q_1,q_2}\|f\|_{L^{p,q_1}(\Omega)},$$

gdzie

$$C_{p,q_1,q_2} = q_1^{1/q_2}(q_2(q_1-1))^{-1/q_1}\left(\frac{q_1(p-1)}{p(q_1-1)}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}-1}\left(\frac{(q_2-q_1)\Gamma\left(\frac{q_1q_2}{q_2-q_1}\right)}{\Gamma\left(\frac{q_2(q_1-1)}{q_2-q_1}\right)\Gamma\left(\frac{q_2}{q_2-q_1}\right)}\right)^{\frac{q_2-q_1}{q_1q_2}}.$$

Ponadto powyższa stała jest najlepszą z możliwych.

Jest to bardzo ciekawy wynik, który rozszerza rezultat Melasa i Nikolidakisa, którzy pokazali, że $\|\mathcal{M}\|_{L^{p,q}(\Omega)\to L^{p,q}(\Omega)} = \frac{p}{p-1}$ dla wszystkich $1 < p < \infty$ oraz $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Dowód opiera się na bardzo pomysłowym dostosowaniu metody funkcji Bellmana do badania przestrzeni Lorentza. Metody tego rozdziału są bardzo delikatne, a zarazem bardzo eleganckie. Ten rozdział również dobrze obrazuje jak można szukać funkcji Bellmana mając zadany konkretny problem, co ma duże znaczenie dydaktyczne. W pierwszym kroku pojawia się kandydat który okazuje się być superrozwiązaniem pewnego problemu ekstremalnego, co daje powyższą nierówność maksymalną. Następnie dokładniejsza analiza prowadzi do konkluzji, że C_{p,q_1,q_2} jest faktycznie najlepszą stałą.

W ostatnim rozdziale, opartym na pracy [5], badane są nierówności wagowe dla harmonicznego operatora maksymalnego. Niech (Ω,μ) będzie przestrzenią probabilistyczną wyposażoną w strukturę drzewa $\mathcal{T}$. Niech

$$\mathcal{M}^{\mathcal{H}}f(x) = \sup\left\{\langle|f|^{-1}\rangle_{Q,\mu}^{-1} : Q \in \mathcal{T},\ x \in Q\right\}$$

będzie harmonicznym operatorem maksymalnym. Autor odpowiada na pytanie optymalnych szacowań na $\|\mathcal{M}^{\mathcal{H}}\|_{L^p(v)\to L^p(u)}$. Mianowicie,

Twierdzenie 5. *Niech $0 < p < \infty$ oraz (u,v) będzie parą wag na Ω spełniającą*

$$[u,v]_{A_{-p}} = \sup\left\{\langle u\rangle_{Q,\mu}\langle v^{1/(p+1)}\rangle_{Q,\mu}^{-p-1} : Q \in \mathcal{T}\right\} < \infty.$$

Wtedy

$$\|\mathcal{M}^{\mathcal{H}}\|_{L^p(v)\to L^p(u)} \leqslant (p+1)^{\frac{p+1}{p}}p^{-1}[u,v]_{A_{-p}}^{1/p}.$$

Ponadto powyższa stała jest najlepszą z możliwych.

W tym rozdziale kolejny raz widzimy niesamowitą siłę metody Bellmana w dowodzeniu tego typu nierówności.

Przechodząc do podsumowania rozprawy stwierdzam, że wyniki oraz rozumowania prowadzące do ich uzyskania są bardzo wartościowe. Dotyczą one zagadnień wywodzących się z klasycznych pytań analizy harmonicznej, które nadal są intensywnie rozwijane przez czołowych badaczy na całym świecie. Pytania o optymalne stałe należą do jednych z najtrudniejszych w analizie rzeczywistej. Niejednokrotnie wymagają subtelnych metod i narzędzi z różnych dziedzin. Otrzymanie tych wyników wymagało, poza pomysłowością, sporej specjalistycznej wiedzy i swobody w posługiwaniu się zaawansowanymi narzędziami współczesnej analizy harmonicznej. Kandydat wykazał się dużym warsztatem i uzyskał nowe znaczące wyniki, jak i wzmocnienie wyników znanych z literatury matematycznej, dzięki wyrafinowanym metodom analizy harmonicznej. Uważam, że mamy do czynienia ze świetną rozprawą doktorską. Jeśli chodzi o formalną stronę rozprawy, to została ona napisana w całości w języku angielskim z wyjątkiem streszczenia, które jest napisane w języku polskim. Uważam, że redakcja jest bardzo staranna, autor włożył dużo energii w ekspozycję, która została bardzo dobrze przemyślana. W mojej ocenie dowody uzyskanych rezultatów są kompletne, również nie mam żadnych zastrzeżeń co do poprawności prezentowanych argumentów.

Uważam, że przedstawiona rozprawa doktorska stanowi znaczny wkład do analizy harmonicznej i przedstawia bardzo wysoki poziom naukowy, ponadto spełnia z nadwyżką wymagania stawiane rozprawom doktorskim, w szczególności wymogi ustawy: *O stopniach naukowych i tytule naukowym oraz o stopniach i tytule w zakresie sztuki* z dnia 14 marca 2003 wraz z późniejszymi zmianami. Wnoszę o dopuszczenie mgra Mateusza Rapickiego do dalszych etapów przewodu doktorskiego. Nie mam wątpliwości, że kandydat do stopnia doktora jest obiecującym młodym badaczem, zdolnym do rozwiązywania trudnych matematycznych zagadnień, i biorąc pod uwagę wysoki poziom merytoryczny rozprawy, zgłaszam wniosek o jej wyróżnienie.

Z poważaniem,
Mariusz Mirek

Mariusz Mirek