WAŻONE I BEZWAGOWE NIERÓWNOŚCI DLA OPERATORÓW MAKSYMALNYCH

AUTOREFERAT

MATEUSZ RAPICKI

1. Motywacja

Operatory maksymalne to ważne obiekty w analizie i teorii prawdopodobieństwa, mają też zastosowania sięgające innych dziedzin matematyki. W szczególności, umożliwiają badanie ograniczoności, w różnych przestrzeniach funkcyjnych, szerokich rodzin klasycznych operatorów (np. ułamkowych lub singularnych). Jest to bezpośrednia konsekwencja faktu, że wiele takich operatorów, lub jakieś ich komponenty, może być kontrolowanych punktowo za pomocą odpowiedniej wersji funkcji maksymalnej. To prowokuje pytanie o efektywne radzenie sobie z oszacowaniami maksymalnymi, i celem niniejszej rozprawy jest przedstawienie pewnej liczby technik, które mogą być wykorzystane w tym typie problemów. Co więcej, kładziemy szczególny nacisk na rozmiar pojawiających się stałych.

Zaczniemy od przypomnienia pewnych informacji wstępnych i notacji. Dla lokalnie całkowalnej (względem d-wymiarowej miary Lebesgue'a) funkcji $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, operator maksymalny Hardy'ego-Littlewooda jest zdefiniowany następująco:

$$Mf(x) = \sup \left\{ \langle |f| \rangle_Q : Q \in \mathcal{Q}_x \right\}.$$

Symbol $\langle f \rangle_Q$ oznacza $\frac{1}{|Q|} \int_Q f(x) \mathrm{d}x$, czyli średnią f na Q. Przez $|Q|$ oznaczamy miarę Lebesgue'a Q. Ponadto, dla każdego $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{Q}_x$ jest pewną rodziną zbiorów zawierających x. Jest pięć najważniejszych wyborów dla takich rodzin szeroko studiowanych w literaturze:

- (i) *scentrowany operator maksymalny*, związany z klasami $\mathcal{Q}_x = \{B(x, r) : r > 0\}$ otwartych kul o środku w x;
- (ii) *niescentrowany operator maksymalny*, który odpowiada $\mathcal{Q}_x$ będącej rodziną wszystkich kul zawierających x;
- (iii) oraz (iv) są wersjami (i) oraz (ii) z kulami zastąpionymi przez kostki o ścianach równoległych do osi;
- (v) *diadyczny operator maksymalny*, który odpowiada $\mathcal{Q}_x$ będącej klasą wszystkich kostek diadycznych zawierających x.

Warto tu wspomnieć, że operatory w powyższych kontekstach są zasadniczo porównywalne: udowodniwszy oszacowanie dla jednego z operatorów, natychmiast otrzymujemy odpowiednie oszacowanie dla pozostałych (z inną stałą, zależną od wymiaru d). Podczas gdy jest to mniej lub bardziej oczywiste dla rodzin (i)-(iv) (zob. np. [13]), interakcja pomiędzy kontekstem diadycznym i niediadycznym jest nieco bardziej zawiła: por. [16, 24]. Zagadnienie staje się o wiele trudniejsze dla ogólnych przestrzeni metrycznych z niepodwajającą miarą, ale nie będziemy poruszać tego obszaru w rozprawie.

Operatory maksymalne są badane i stosowane w wielu problemach z analizy i probabilistyki. W zasadzie dowolny podręcznik analizy harmonicznej rozpoczyna się od jakiejś mniej lub bardziej szczegółowej prezentacji tematu (na przykład, zainteresowany czytelnik może odnieść się do monografii [13] i [49]). Zależnie od problemu, który badamy, często wygodnie jest trzymać się jednego z operatorów (i)-(v); każdy z nich daje nam dodatkowe geometryczne lub kombinatoryczne argumenty, które mogą być kluczowe. Zamieszczamy tu krótkie omówienie wybranych ważnych przykładów; bardziej szczegółowe prezentacje można znaleźć w [13, 33, 44]. Dalej, studiując kontekst diadyczny, napotkamy kolejne przykłady.

(a) Twierdzenie Lebesgue'a o różniczkowaniu zapewnia, że jeżeli $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ jest lokalnie całkowalna, to dla prawie wszystkich $x \in \mathbb{R}^d$ granica
$$\lim_{r \to 0} \langle f \rangle_{B(x,r)}$$
istnieje i jest równa $f(x)$. Dowód tego ważnego wyniku wykorzystuje oszacowania słabego typu dla scentrowanego operatora maksymalnego i gęstość funkcji ciągłych w przestrzeniach L^p. Podobna argumentacja prowadzi do różnych rozszerzeń twierdzenia Lebesgue'a, odnoszących się do średnich po innych rodzinach zbiorów zawierających x. Takie wyniki okazały się być wyjątkowo użyteczne, na przykład w kontekście dekompozycji Calderóna-Zygmunda i ich rozszerzeń.

(b) Funkcje maksymalne dominują (punktowo) dużą klasę operatorów konwolucyjnych. Na przykład, załóżmy, że $k : [0, \infty) \to [0, \infty)$ jest malejącą funkcją ciągłą taką, że funkcja $K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ zdefiniowana przez $K(x) = k(|x|)$ jest całkowalna. Zdefiniujmy ε-dylatację K wzorem $K_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d} K(\varepsilon^{-1} x)$. Wówczas, dla dowolnej lokalnie całkowalnej funkcji f mamy oszacowanie
$$\sup_{\varepsilon > 0} (K_\varepsilon * |f|)(x) \leq \|K\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} Mf(x),$$
gdzie M to niescentrowany operator maksymalny. Zatem, dowolne oszacowanie na M natychmiast daje odpowiadające mu oszacowanie operatorów konwolucyjnych danych wzorem $T_\varepsilon f = K_\varepsilon * f$. To spostrzeżenie może być wykorzystane w badaniu (maksymalnej) transformaty Hilberta i półgrup Poissona/ciepła, lecz zakres zastosowań jest o wiele szerszy.

(c) Oszacowania dla operatorów maksymalnych stanowią kluczowy składnik dowodów różnego typu twierdzeń ekstrapolacyjnych. Najprostsza forma takiego twierdzenia zapewnia, że jeżeli dla pewnej ustalonej $1 < p_0 < \infty$ dany operator T jest ograniczony na przestrzeni ważonej $L^{p_0}(w_0)$ dla dowolnej wagi w_0 klasy A_{p_0}, to automatycznie T jest ograniczony na każdej przestrzeni $L^p(w)$ dla każdej $1 < p < \infty$ i dowolnej wagi w klasy A_p. Dowód wykorzystuje tak zwany algorytm Rubio de Francia, który mocno opiera się na oszacowaniach dla niescentrowanych operatorów maksymalnych.

(d) Oszacowania maksymalne mają fundamentalne znaczenie w badaniach różnych singularnych operatorów całkowych. W wielu przypadkach, analiza takich operatorów używa dyskretyzacji lub aproksymacji ich jąder, przez co otrzymujemy sumy różnych operatorów typu diadycznego (np. tak zwanych operatorów rzadkich, klasy, która jest dynamicznie rozwijana w najnowszej literaturze). Te dyskretne struktury są typowo kontrolowane przez diadyczne funkcje maksymalne lub ich odpowiednie modyfikacje i oszacowania maksymalne grają tu istotną rolę.

(e) Istnieje wiele przykładów nierówności maksymalnych w teorii prawdopodobieństwa, w tym oszacowania sum niezależnych zmiennych losowych, jak również nierówności semimartyngałowe, które mają dalsze zastosowania w teorii całkowania stochastycznego.

2. Diadyczny i quasi-diadyczny operator maksymalny, i ich ograniczoność

W całej rozprawie będziemy skupiać się na kontekście diadycznym, i pewnych jego rozszerzeniach pojawiających się naturalnie w teorii prawdopodobieństwa. Przypomnijmy definicję: diadyczny operator maksymalny działa na lokalnie całkowalną funkcję $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ w następujący sposób:

$$Mf(x)=\sup\Big\{\langle|f|\rangle_Q : Q\subset\mathbb{R}^d \text{ jest kostką diadyczną, } x\in Q\Big\}.$$

Rodzina kostek diadycznych w $\mathbb{R}^d$ jest oparta o kraty $(2^{-n}\mathbb{Z}^d)_{n=0,1,2,\ldots}$; innymi słowy, rodzina diadyczna jest zbiorem wszystkich kostek postaci

$$[a_1\cdot 2^{-n},(a_1+1)\cdot 2^{-n})\times[a_2\cdot 2^{-n},(a_2+1)\cdot 2^{-n})\times\ldots\times[a_d\cdot 2^{-n},(a_d+1)\cdot 2^{-n}),$$

gdzie a_1, a_2, ..., a_d to dowolne liczby całkowite, zaś n jest liczbą całkowitą nieujemną. Jedną z kluczowych własności jest to, że każde dwie kostki diadyczne są albo rozłączne albo jedna jest zawarta w drugiej. Okazuje się, że ta własność pozwala na użycie pewnych argumentów indukcyjnych w badaniu operatora M. Co więcej, istnieją owocne połączenia pomiędzy operatorem M i teorią prawdopodobieństwa. Aby to zobaczyć, ograniczmy się do funkcji równych zero poza kostką $[0,1)^d$ i oznaczmy przez $\mathcal{D}^n$ rodzinę diadycznych podkostek $[0,1)^d$ o mierze 2^{-nd}. To natychmiast sugeruje następujący ważny związek z teorią martyngałów. Konkretniej, rozważmy przestrzeń probabilistyczną $([0,1)^d,\mathcal{B}([0,1)^d),|\cdot|)$ oraz, dla dowolnej $n\geq 0$, zdefiniujmy σ-ciało $\mathcal{F}_n=\sigma(\mathcal{D}^n)$ i funkcję/zmienną losową $f_n=\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n)$. Wtedy $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ tworzy filtrację, czyli niemalejącą rodzinę pod-σ-ciał $\mathcal{B}([0,1)^d)$. Dodatkowo, ciąg $(f_n)_{n\geq 0}$ jest martyngałem adaptowanym do $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$: dla każdej $n\geq 0$ funkcja/zmienna losowa f_n jest mierzalna względem $\mathcal{F}_n$ i mamy $\mathbb{E}(f_{n+1}|\mathcal{F}_n)=f_n$ prawie na pewno. Ostatecznie, dla każdej $n\geq 0$ łatwo sprawdzić, że $Mf_n=\max_{k\leq n}|f|_k$ jest obciętą funkcją maksymalną martyngału $(|f|_n)_{n\geq 0}$ i podobnie, diadyczny operator maksymalny może być wyrażony jako $Mf=\sup_{n\geq 0}|f|_n$. Innymi słowy, analiza diadycznych operatorów maksymalnych i martyngałowych funkcji maksymalnych jest równoległa; ta interakcja pozwala nam zastosować różne narzędzia i interpretacje probabilistyczne w badaniach nad M.

Z punktu widzenia zastosowań przedyskutowanych powyżej, ważne jest badanie ograniczoności M w różnych przestrzeniach funkcyjnych (zob. np. [13, 25, 26, 27, 29, 49], jak również odnośniki w nowszych z tych prac), a pokrewny podproblem otrzymywania optymalnych lub przynajmniej dobrych ograniczeń na odpowiednie normy cieszy się znaczącym zainteresowaniem. Jest to jeden z głównych tematów rozprawy, zaprezentujemy więc więcej szczegółów. Pierwszy przykład stanowi ograniczenie M jako operatora z L^1 do $L^{1,\infty}$; faktycznie, spełnia on nieco silniejsze oszacowanie

$$\lambda\left|\{x\in\mathbb{R}^d : Mf(x)>\lambda\}\right|\leq\int_{\{Mf>\lambda\}}|f(x)|\mathrm{d}x \tag{1}$$

dla dowolnej $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$ i $\lambda>0$. To w szczególności implikuje

$$\|Mf\|_{L^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}\leq\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

gdzie, dla $1\leq p<\infty$, $\|f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)}=\sup_{\lambda>0}\lambda|\{x\in\mathbb{R}^d:|f(x)|>\lambda\}|^{1/p}$. To oszacowanie jest optymalne: isnieje nietrywialna funkcja f dla której zachodzi równość. Co więcej, nierówność słabego typu (p,p) zachodzi, z niezmienioną stałą 1, w całym zakresie $1\leq p<\infty$ (por. [28]): mamy oszacowanie

$$\|Mf\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R}^d)}\leq\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.$$

Następny przykład to słynna nierówność Hardy'ego-Littlewooda-Dooba

$$\|Mf\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p}{p-1}\,\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\,, \quad 1 < p \leq \infty, \tag{2}$$

dla każdej $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, w której stała $p/(p-1)$ jest najlepsza możliwa; zob. [2, 25]. Ten wynik powoduje powstanie pewnej liczby interesujących problemów. Na przykład, wersja (2) nie zachodzi z żadną skończoną stałą jeśli $p = 1$; jako zamiennik można rozważać oszacowanie słabego typu $(1,1)$ (które, jak właśnie widzieliśmy powyżej, zachodzi ze stałą 1). Czerpiąc motywację z klasycznych wyników Zygmunda, można badać inne oszacowanie wyrażone w terminach przestrzeni $L\log L$. Z prac Melasa [26] (zob. także Osękowski [33]) można wywnioskować, że jeżeli $K > 1$, E jest mierzalnym podzbiorem $\mathbb{R}^d$, a funkcja $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ spełnia $\|f\|_{L\log L(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d}(|f|+1)\log(|f|+1)\mathrm{d}x < \infty$, to istnieje skończona stała $L(K)$, taka że

$$\int_E Mf\mathrm{d}x \leq K\|f\|_{L\log L(\mathbb{R}^d)} + L(K)\cdot|E|.$$

Oszacowania dla norm Lorentza M również zdobyły znaczne zainteresowanie. Przytoczmy najpierw potrzebne definicje i notację. Jeśli f jest funkcją mierzalną na pewnej przestrzeni z miarą (Ω,μ), to jej nierosnące przestawienie $f^* : [0,\infty) \to [0,\infty)$ jest dane wzorem

$$f^*(t) = \inf\Big\{s > 0 : \mu\big(\{x\in\Omega : |f(x)| > s\}\big) \leq t\Big\}.$$

Zauważmy, że jeżeli $\mu(\Omega) < \infty$, to $f^*(t)$ jest równe zero dla $t > \mu(\Omega)$. Dla danych $0 < p, q < \infty$, definiujemy przestrzeń Lorentza $L^{p,q} = L^{p,q}(\Omega,\mu)$ jako rodzinę wszystkich (klas abstrakcji) funkcji mierzalnych f na Ω, takich że

$$\|f\|_{L^{p,q}} := \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{\mathrm{d}t}{t}\right)^{1/q}$$

jest skończona. Przestrzeń $L^{p,\infty} = L^{p,\infty}(\Omega,\mu)$ jest zdefiniowana podobnie, przy użyciu quasinormy

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \sup_{t>0} t^{1/p}f^*(t).$$

Melas and Nikolidakis [29] udowodnili, że dla dowolnych $1 < p, q < \infty$ mamy

$$\|Mf\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{p}{p-1}\,\|f\|_{L^{p,q}(\mathbb{R}^d)}\,.$$

Jest również pokrewne oszacowanie dotyczące działania M jako operatora z $L^{p,\infty}$ do $L^{q,r}$, szczegóły można znaleźć w [29, 36, 35]. Rozdział 6 tej rozprawy również jest poświęcony wynikowi w tym kierunku.

Okazuje się, że wszystkie powyższe wyniki mogą być znacząco rozszerzone: nierówności maksymalne zachodzą w dużo ogólniejszym kontekście przestrzeni mierzalnych wyposażonych w strukturę drzewa. Następująca definicja uogólnia pojęcie kraty diadycznej.

Definition 1 (Drzewo)**.** Załóżmy, że (Ω,μ) jest bezatomową przestrzenią z miarą spełniającą $\mu(\Omega) < \infty$. Rodzinę $\mathcal{T}$ mierzalnych podzbiorów Ω nazywamy *drzewem* jeśli spełnione są następujące warunki:

(i) $\Omega \in \mathcal{T}$ i dla każdego $Q \in \mathcal{T}$ mamy $\mu(Q) > 0$.
(ii) Dla każdego $Q \in \mathcal{T}$ istnieje skończony podział $C(Q) \subset \mathcal{T}$ zbioru Q (czyli elementy $C(Q)$ są parami rozłącznymi podzbiorami Q a ich suma to Q).
(iii) $\mathcal{T} = \bigcup_{m\geq 0}\mathcal{T}^m$, gdzie $\mathcal{T}^0 = \{\Omega\}$, zaś $\mathcal{T}^{m+1} = \bigcup_{Q\in\mathcal{T}^m} C(Q)$.
(iv) Mamy $\lim_{m\to\infty}\sup_{Q\in\mathcal{T}^m}\mu(Q) = 0$.

Naturalnym przykładem jest kostka $\Omega = [0,1)^d$ z miarą Lebesgue'a μ i drzewem kostek diadycznych zawartych w $[0,1)^d$. Porównując powyższą definicję do poprzedniego kontekstu $\mathbb{R}^d$ z jej kratą diadyczną, widzimy, że nałożyliśmy dodatkowe założenie skończoności $\mu(\Omega) < \infty$. Ten dodatkowy warunek ma charakter techniczny i jego głównym celem jest zapewnienie bazy dla argumentów indukcyjnych. Powinniśmy tu podkreślić, że to założenie nie jest ograniczające w większości zastosowań: udowodniwszy dowolne oszacowanie w skończonym, „lokalnym" przypadku diadycznym, można przeprowadzić dość standardowe rozumowania oparte o translacje i przejścia graniczne, aby otrzymać ten sam wynik w ogólnym przypadku diadycznym.

Definition 2 (Operator maksymalny)**.** Dowolna przestrzeń z miarą wyposażona w drzewo powołuje do życia operator maksymalny $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{\Omega,\mu,\mathcal{T}}$, dany wzorem

$$\mathcal{M}f(x) = \sup\left\{\langle |f|\rangle_{Q,\mu} : Q \in \mathcal{T},\ x \in Q\right\},$$

gdzie $\langle f\rangle_{Q,\mu} = \frac{1}{\mu(Q)}\int_Q f\mathrm{d}\mu$ to średnia f na Q względem miary μ. Taki operator nazywamy quasi-diadycznym operatorem maksymalnym stowarzyszonym z $\mathcal{T}$.

Jeżeli $\mu(\Omega) = 1$, czyli jeżeli (Ω,μ) jest przestrznią probabilistyczną, to istnieje bezpośrednia odpowiedniość pomiędzy drzewami a atomowymi filtracjami $(\sigma(\mathcal{T}^n))_{n\geq 0}$. W szczególności, wszystkie wyniki mogą być interpretowane w terminach martyngałów i ich funkcji maksymalnych. Przejście pomiędzy przypadkiem analitycznym a probabilistycznym jest zasadniczo takie samo, jak w przypadku diadycznym omówionym poniżej, więc pominiemy szczegóły.

Można pokazać, że wszystkie oszacowania maksymalne pozostają prawdziwe, z niezmienionymi stałymi, jeżeli zamienimy operator diadycznym M na jego quasi-diadyczny odpowiednik $\mathcal{M}$ na dowolnej przestrzeni mierzalnej z drzewem. Powodem tego jest, że cytowane powyżej prace zawierają o wiele więcej: identyfikują bezpośrednie wzory na odpowiednie funkcje Bellmana (więcej na ten temat w [25, 31, 32, 34, 47, 48, 51, 52]; wersja tej techniki, dostosowana do kontekstu nierówności maksymalnych, jest opisana w Rozdziale 2). Metoda funkcji Bellmana łączy dane oszacowanie, które badamy, z istnieniem pewnej funkcji specjalnej, spełniającej odpowiednie wymagania co do rozmiaru i wklęsłości: gdy taki obiekt zostaje skonstruowany, wykorzystanie jego własności w odpowiednim porządku daje nam nierówność. Jednakże, w wielu przypadkach to wzajemne oddziaływanie sięga o wiele głębiej: prawdziwość oszacowania jest tak naprawdę *równoważna* istnieniu funkcji specjalnej, więc w szczególności ta metoda może być użyta do śledzenia optymalnych stałych. Dodatkowo, funkcja specjalna nie tylko daje nam oszacowanie, ale także koduje ekstremizery, tzn. wyrażenia, dla których równość jest osiągana lub prawie osiągana.

Aby zakończyć tę dyskusję, zauważmy jeszcze, że odpowiednio zastosowana metoda funkcji Bellmana „nie rozpoznaje" (czy raczej: nie odnosi się do) podziału diadycznego i działa równie dobrze dla dowolnych drzew: dzięki temu otrzymujemy oszacowania maksymalne w ogólnym kontekście bez dodatkowego wysiłku.

3. Wagi

Będziemy zainteresowani szeroką klasą oszacowań, w których pojawiają się pewne dodatkowe obiekty, tak zwane wagi. Tu i poniżej, słowo „waga" odnosi się do lokalnie całkowalnej, nieujemnej funkcji na przestrzeni bazowej (X,μ) (np. $X = \mathbb{R}^d$ i $\mu = |\cdot|$, lub $(X,\mu) = (\Omega,\mu)$, to będzie jasne z kontekstu). Typowo oznaczamy wagi literami u, w or v. Dowolna waga w powołuje do życia odpowiadającą miarę, również oznaczaną w, wzorem $w(E) = \int_E w\mathrm{d}\mu$ dla wszystkich zbiorów mierzalnych E. Co więcej, stowarzyszona z miarą w przestrzeń L^p jest dana wzorem

$$L^p(w) = \left\{ f : X \to \mathbb{R} \, : \, \|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_X |f|^p w \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}, \qquad 0 < p < \infty,$$

przy czym jak zwykle utożsamiamy funkcję równe μ-prawie wszędzie. Dla $p = \infty$ postępujemy w standardowy sposób, używając istotnego supremum względem miary w. Analogicznie, można zdefiniować ważone przestrzenie słabe L^p oznaczane $L^{p,\infty}(w)$, lub ogólniej, ważone wersje przestrzeni Lorentza, przy użyciu nierosnących przestawień względem miary w.

Bada się działanie operatorów maksymalnych na różnych ważonych przestrzeniach Lorentza. Skupimy się na przypadku $X = \mathbb{R}^d$, ponieważ sformułowania, do których będziemy się odnosić dotyczą głównie tego przypadku; aby uniknąć zamętu, niescentrowany operator maksymalny będziemy oznaczać przez $\mathscr{M}$, a jego diadyczną wersję przez M. Punktem wyjścia jest następujący rezultat, wynikający z pracy Feffermana i Steina [10]. Dla dowolnej $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\lambda > 0$ i dowolnej wagi w mamy oszacowanie słabego typu

$$\lambda w \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d : \mathscr{M} f(x) > \lambda \right\} \right) \leq C_d \int_{\{\mathscr{M} f > \lambda\}} |f(x)| \mathscr{M} w(x) \mathrm{d}x \tag{3}$$

dla pewnej stałej C_d zależącej tylko od wymiaru. Można pokazać analogiczną nierówność dla diadycznego operatora maksymalnego M ze stałą 1. Jest to rozszerzenie (1): klasyczne oszacowanie otrzymamy wstawiając $w \equiv 1$. Przez prosty argument interpolacyjny, otrzymujemy nierówności ważone

$$\|\mathscr{M} f\|_{L^p(w)} \leq \frac{pC_d}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathscr{M} w)}, \quad 1 < p \leq \infty,$$

oraz

$$\|M f\|_{L^p(w)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(M w)}, \quad 1 < p \leq \infty. \tag{4}$$

Zauważmy, że drugie z nich uogólnia (2). To prowokuje pytanie o rozszerzenie innych nierówności z poprzednich sekcji do tego dwuwagowego ($w - \mathscr{M} w$ and $w - M w$) kontekstu. Zajmujemy się tym zagadnieniem w Rozdziałach 3 i 4.

Jest też inny, być może bardziej naturalny problem, który dotyczy ograniczoności $\mathscr{M}$ i M jako operatorów na ważonej przestrzeni $L^p(w)$. Konkretniej, załóżmy że $1 < p < \infty$ jest ustalonym wykładnikiem. Nietrudno skonstruować wagę w, taką że $\|\mathscr{M}\|_{L^p(w) \to L^p(w)} = \infty$ i problem polega na podaniu charakteryzacji tych w, dla których ta norma jest skończona. Podobne pytanie można postawić jeśli zastąpimy $\mathscr{M}$ diadycznym operatorem maksymalnym. Z tym pierwszym problemem poradził sobie Muckenhoupt [30] na początku lat siedemdziesiątych: niescentrowany operator maksymalny jest ograniczony jako operator na $L^p(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy w należy do klasy A_p (spełnia warunek Muckenhoupta A_p). Oznacza to, że charakterystyka A_p wagi w, dana wzorem

$$[w]_{A_p}^{general} := \sup \left\{ \langle w \rangle_Q \left\langle w^{1/(1-p)} \right\rangle_Q^{p-1} : Q \subset \mathbb{R}^d \text{ jest kostką o ścianach równoległych do osi} \right\}$$

jest skończona. Okazuje się, że odpowiedź na analogiczne pytanie dla diadycznego operatora maksymalnego wymaga jedynie drobnych modyfikacji: diadyczny operator maksymalny jest ograniczony jako operator na $L^p(w)$ wtedy i tylko wtedy, gdy waga w należy do diadycznej klasy A_p, czyli

$$[w]_{A_p}^{dyadic} := \sup \left\{ \langle w \rangle_Q \left\langle w^{1/(1-p)} \right\rangle_Q^{p-1} : Q \subset \mathbb{R}^d \text{ jest kostką diadyczną} \right\} < \infty. \tag{5}$$

Odtąd będziemy oznaczać obie te charakterystyki po prostu przez $[w]_{A_p}$. Powinno być jasne, w którym kontekście pracujemy.

Wynik Muckenhoupta jest uważany za kamień węgielny teorii ważonej i dał początek licznym uogólnieniom. Okazuje się, że warunek A_p charakteryzuje ograniczoność innych ważnych klasycznych operatorów w analizie harmonicznej. Na przykład Hunt, Muckenhoupt i Wheeden [14] udowodnili, że warunek Muckenhoupta jest wystarczający dla ograniczoności transformaty Hilberta, podczas gdy w kontekście transformat Riesza (a nawet dla szerszej klasy całek singularnych) zostało to udowodnione przez Coifmana i Feffermana [5]. (Dowody, że jest to warunek konieczny, znajdziemy w [11, 14, 50].) Ważone oszacowania dla całek ułamkowych i Poissona były badane przez Sawyera [45, 46], analizę operatorów funkcji kwadratowych można znaleźć w pracach Buckleya [1], Chanilla i Wheedena [4] i Lernera [19].

Inne rozszerzenie wyniku Muckenhoupta cieszące się dużym zainteresowaniem w najnowszej literaturze, dotyczy optymalnej zależności normy $\|\mathscr{M}\|_{L^p(w)\to L^p(w)}$ oraz $\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)}$ od charakterystyki $[w]_{A_p}$. Konkretniej, dla danego $1 < p < \infty$, problem polega na znalezieniu najmniejszego wykładnika $\alpha = \alpha(p)$ takiego że

$$\|\mathscr{M} f\|_{L^p(w)} \leq C_p[w]_{A_p}^{\alpha(p)} \|f\|_{L^p(w)} \tag{6}$$

gdzie stała C_p zależy tylko od p. Ten problem został postawiony i rozwiązany przez Buckleya [1]: pokazał on, że optymalny wykładnik $\alpha(p)$ jest równy $1/(p-1)$. Znowu, można badać analogiczne problemy zastępując funkcję maksymalną innymi ważnymi operatorami analizy harmonicznej; wspomnimy tutaj prace Hÿtonen [15] i Lerner [20] dotyczącą całek singularnych Calderóna-Zygmunda, Lacey et. al. [18] badającą całki ułamkowe i Lerner [19] w kontekście funkcji kwadratowych Littlewooda-Paleya.

Wracając do funkcji maksymalnych, chcielibyśmy wspomnieć dalsze wzmocnienie (6) otrzymane przez Osękowskiego: praca [38] zawiera, dla dowolnej $1 < p < \infty$ i dowolnej $c \geq 1$, wyprowadzenie optymalnej stałej $C_{p,c}$, takiej że

$$\|M\|_{L^p(w)\to L^p(w)} \leq C_{p,[w]_{A_p}}. \tag{7}$$

W rozprawie otrzymamy rezultaty powiązane z tym oszacowaniem.

Należy wspomnieć, że są też wersje warunku A_p dla przypadków skrajnych ($p \in \{1, \infty\}$). Skupimy się na przypadku $p = 1$, jako że warunek A_∞ nie pojawia się w naszych rozważaniach. Konkretnie, w jest wagą A_1 gdy

$$[w]_{A_1} := \operatorname*{esssup}_{\mathbb{R}^d} \frac{\mathscr{M} w}{w}$$

jest skończona; oczywista modyfikacja prowadzi do diadycznych wag A_1. Oczekiwanie, że w przypadku $p = 1$ powinniśmy mieć jakieś ważone oszacowania słabego typu dla $\mathscr{M}$ i M wydaje się naturalne. Nierówność Feffermana-Steina (3) (i jej diadyczna wersja) pokazuje, że faktycznie tak jest: prowadzi ona do jednowagowego oszacowania

$$\lambda w\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \mathscr{M} f(x) > \lambda\right\}\right) \leq C_d[w]_{A_1} \int_{\{\mathscr{M} f > \lambda\}} |f(x)| w(x) \mathrm{d}x, \tag{8}$$

wraz z jego diadyczną wersją. Co więcej, łatwo pokazać, że liniowa zależność od charakterystyki jest optymalna.

Oszacowania (3) i (8) można poprowadzić dalej w bardzo interesującym kierunku przez odpowiednie argumenty dualnościowe. Motywowani przez prace Lerner et. al. [21, 22, 23], rozważamy silną wersję dualną

$$w\left(\{x \in \mathbb{R}^d : \mathscr{M} f(x) \geq \mathscr{M} w(x)\}\right) \leq C_d \int_{\mathbb{R}^d} |f| \mathrm{d}x, \tag{9}$$

gdzie w jest dowolną wagą, a C_d zależy tylko od wymiaru. Słaba nierówność dualna dotyczy wag A_1:

$$w\left(\{x\in\mathbb{R}^d : \mathscr{M}f(x)\geq w(x)\}\right)\leq C_d[w]_{A_1}\int_{\mathbb{R}^d}|f|\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Nietrudno otrzymać te oszacowania w kontekstach niescentrowanym i diadycznym. Wspomniane wcześniej prace Lerner et. al. zawierają analizę analogicznych nierówności dla singularnych operatorów całkowych Calderóna-Zygmunda, które są o wiele większym wyzwaniem. Wkład niniejszej rozprawy w tym kierunku, przedstawiony w Rozdziale 5, dotyczy pewnej wersji (10) w kontekście wag należących do diadycznej klasy A_p z $p>1$.

Wszystkie sformułowane powyżej wyniki dla diadycznych operatorów maksymalnych można badać w ogólniejszym kontekście przestrzeni mierzalnych (Ω,μ) z drzewem $\mathcal{T}$. Całą dyskusję można przeprowadzić bez trudności: należy traktować wagę jako mierzalną i nieujemną funkcję na Ω, jedyna istotna zmiana dotyczy warunku Muckenhoupta. Modyfikacja jest jasna: dla wagi w i wykładnika $1<p<\infty$, definiujemy

$$[w]_{A_p}:=\sup\left\{\langle w\rangle_{Q,\mu}\left\langle w^{\frac{-1}{p-1}}\right\rangle_{Q,\mu}^{p-1} : Q\in\mathcal{T}\right\}<\infty.$$

Z przypadkiem brzegowym $p=1$ radzimy sobie w oczywisty sposób.

4. Harmoniczny operator maksymalny

Jest jeszcze jedna interesująca wersja funkcji maksymalnej, tak zwany diadyczny *harmoniczny* operator maksymalny $M^{\mathcal{H}}$, który definiujemy wzorem

$$M^{\mathcal{H}}f(x)=\sup\left\{\left\langle|f|^{-1}\right\rangle_Q^{-1} : Q\subset\mathbb{R}^d \text{ jest kostką diadyczną, } x\in Q\right\}.$$

Ta definicja łatwo uogólnia się na kontekst przestrzeni mierzalnych (Ω,μ) z drzewem $\mathcal{T}$: definiujemy

$$\mathcal{M}^{\mathcal{H}}_{\Omega,\mu,\mathcal{T}}f(x)=\sup\left\{\left\langle|f|^{-1}\right\rangle_{Q,\mu}^{-1} : Q\in\mathcal{T},\ x\in Q\right\}.$$

Tu i poniżej, używamy konwencji $1/0=\infty$ i $1/\infty=0$. Łączne zachowanie (i wzajemne oddziaływanie) M i $M^{\mathcal{H}}$ jest podobne do związku pomiędzy średnią arytmetyczną a harmoniczną

$$\frac{|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|}{n},\qquad\left(\frac{|x_1|^{-1}+|x_2|^{-1}+\ldots+|x_n|^{-1}}{n}\right)^{-1},$$

gdzie x_1, x_2, …, x_n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. W szczególności mamy punktowe oszacowanie $Mf\geq M^{\mathcal{H}}f$ na $\mathbb{R}^d$. Harmoniczne operatory maksymalne pojawiły się po raz pierwszy w pracach [6, 7, 8] w nieco innej formie: autorzy badali tam tak zwany operator minimalny

$$\mathfrak{M}f(x)=\inf\left\{\langle|f|\rangle_Q : Q\subset\mathbb{R}^d \text{ jest kostką diadyczną, } x\in Q\right\},$$

powiązany z $M^{\mathcal{H}}$ tożsamością $M^{\mathcal{H}}f=\mathfrak{M}(|f|^{-1})^{-1}$. W pewnym sensie, operator minimalny $\mathfrak{M}$ kontroluje f na zbiorze, gdzie funkcja jest mała (podczas gdy operator maksymalny M kontroluje f tam, gdzie funkcja jest duża). Operator minimalny był użyty do badania subtelnej struktury wag A_p w [7], dalsze zastosowania do nierówności ważonych i teorii różniczkowania można znaleźć w [8].

Można zadać pytania o wersje nierówności z poprzednich sekcji z $\mathscr{M}$ i M zastąpionymi przez $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Zgodnie z naszą najlepszą wiedzą, bardzo mało wiadomo na ten temat. Praca [17] zawiera dowód oszacowań słabego i silnego typu dla $M^{\mathcal{H}}$. Normy L^p (bezwagowe) operatora $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ można wywnioskować z odpowiednich ogólnych Φ-oszacowań dla martyngałowych funkcji maksymalnych, zob. Rozdział 7 w [33]. Pojawia się naturalne pytanie o nierówności ważone dla $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Zgodnie z [8], dla ustalonego $0 < p < \infty$, operator $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ jest ograniczony jako operator z $L^p(v)$ do $L^p(u)$ wtedy i tylko wtedy, gdy para wag (u, v) spełnia

$$[u,v]_{A_{-p}} := \sup\left\{ \langle u \rangle_{Q,\mu} \left\langle v^{\frac{1}{p+1}} \right\rangle_{Q,\mu}^{-p-1} : Q \in \mathcal{T} \right\} < \infty$$

(z konwencją $0 \cdot 0^{-p-1} = 0$). Zob. także Duffee i Moen [9]. Pokażemy pewne oszacowanie dwuwagowe z optymalną stałą w tym kierunku.

5. Struktura i wkład rozprawy

Rozprawa została podzielona na siedem rozdziałów: omówimy pokrótce ich zawartość i wskażemy główne wyniki. Wszystkie oszacowania zostały otrzymane w kontekście quasi-diadycznych operatorów na przestrzeniach mierzalnych wyposażonych w drzewa.

Rozdział 1 ma charakter wprowadzający. Zawiera motywację, potrzebne informacje wstępne i notację.

Rozdział 2 jest poświęcony szczegółowemu opisowi metody funkcji Bellmana, która gra szczególną rolę w naszych rozważaniach. Materiał zaprezentowany w tym rozdziale nie jest nowy, jest to kompilacja kilku tekstów z literatury, w tym [32, 33].

Rozdział 3 dotyczy ważonych nierówności Kołmogorowa dla funkcji maksymalnych. Dla danego $p < 1$ i dowolnej wagi w, mamy oszacowanie

$$\|\mathcal{M}f\|_{L^p(w)}^p \leq \frac{1}{1-p} \|f\|_{L^1}^p \|w\|_{L^1} + \frac{p^2}{1-p} E_{\mathcal{T}}(f, w),$$

gdzie $E_{\mathcal{T}}(f, w)$ jest odpowiednim wyrażeniem korygującym. To wyrażenie jest równe zero dla $w = \text{const}$, zatem faktycznie jest to uogólnienie bezwagowej nierówności Kołmogorowa. Jedną z bardzo interesujących dodatkowych właściwości jest stowarzyszona funkcja Bellmana, która ma dość niecodzienną formę. Zawartość tego rozdziału jest wzięta z [42].

Rozdział 4 pokazuje, że każda nierówność całkowa dla $\mathcal{M}$ pewnej dość ogólnej postaci automatycznie uogólnia się do oszacowania ważonego z dowolną wagą w po jednej stronie i $\mathcal{M}w$ po drugiej, analogicznie do relacji pomiędzy nierównością Feffermana-Steina (3) a nierównością (1), której jest uogólnieniem. Zawartość tego rozdziału jest oparta na [43].

Rozdział 5 zawiera dowód nierówności słabego typu

$$w\left(\{x \in \Omega : \mathcal{M}f \geq \mathcal{M}w\}\right) \leq C_p [w]_{A_p} \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu,$$

gdzie $p > 1$, zaś w jest wagą A_p. Liniowa zależność od charakterystyki A_p jest optymalna. Zawartość tego rozdziału jest wzięta z [40].

Rozdział 6 jest poświęcony badaniu $\mathcal{M}$ jako operatora pomiędzy bezwagowymi przestrzeniami Lorentza. Dokładniej, otrzymujemy bezpośredni wzór na $\|\mathcal{M}\|_{L^{p,q_1} \to L^{p,q_2}}$, gdzie $1 < p \leq q_1 < q_2 < \infty$. Zawartość tego rozdziału jest wzięta z [39].

W ostatniej części rozprawy, Rozdziale 7, badamy nierówności ważone dla harmonicznego operatora maksymalnego. Konkretniej, otrzymujemy następujące dwuwagowe oszacowanie w L^p z optymalną stałą dla $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$. Załóżmy, że $p > 0$ oraz (u, v) jest parą wag spełniającą

$$[u,v]_{A_{-p}} := \sup\left\{ \langle u \rangle_{Q,\mu} \left\langle v^{\frac{1}{p+1}} \right\rangle_{Q,\mu}^{-p-1} : Q \in \mathcal{T} \right\} < \infty.$$

Tak jak to zostało wspomniane powyżej, ten warunek gwarantuje, że operator $\mathcal{M}^{\mathcal{H}}$ jest ograniczony jako operator z $L^p(v)$ do $L^p(u)$. Czerpiąc motywację z (7), studiujemy i odpowiadamy na pytanie o optymalne oszacowanie na $\|\mathcal{M}^{\mathcal{H}}\|_{L^p(v)\to L^p(u)}$ w terminach łącznej charakterystyki $[u,v]_{A_{-p}}$. Zawartość tego rozdziału jest wzięta z [41].

Literatura

[1] S. M. Buckley, *Estimates for operator norms on weighted spaces and reverse Jensen inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 253–272.

[2] D. L. Burkholder, *Explorations in martingale theory and its applications*. École d'Ete de Probabilités de Saint-Flour XIX–1989, 1–66, Lecture Notes in Math., 1464, Springer, Berlin, 1991.

[3] D. L. Burkholder, *Sharp norm comparison of martingale maximal functions and stochastic integrals*. Proceedings of the Norbert Wiener Centenary Congress, East Lansing, MI, 1994, pp. 343–358. Proc. Sympos. Appl. Math. **52**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[4] S. Chanillo and R. L. Wheeden, *Some weighted norm inequalities for the area integral*, Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), pp. 277–294.

[5] R. Coifman and C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.

[6] D. Cruz-Uribe, SFO *The minimal operator and the geometric maximal operator in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **144** (2001), no. 1, 1–37.

[7] D. Cruz-Uribe, SFO and C. J. Neugebauer, *The structure of the reverse Hölder classes*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2941–2960.

[8] D. Cruz-Uribe, SFO, C.J. Neugebauer and V. Olesen, *Norm inequalities for the minimal and maximal operator, and differentiation of the integral*, Publ. Mat. **41** (1997), 577–604.

[9] L. A. Duffee and K. Moen, *On the harmonic and geometric maximal operators*, Math. Inequal. Appl. **21** (2018), 265–286.

[10] C. Fefferman and E. M. Stein, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.

[11] J. Garcia-Cuerva and J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, volume 116 of North-Holland Mathematics Studies. North-Holland Publishing Co., Amsterdam 1985.

[12] D. Gilat, *The best bound in the LlogL inequality of Hardy and Littlewood and its martingale counterpart*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), no. 3, pp. 429–436.

[13] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis*, Pearson Education, Inc. New Jersey, 2004.

[14] R. Hunt, B. Muckenhoupt and R. L. Wheeden, *Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform*, Trans. Amer. Math. Soc. **176** (1973), 227–251.

[15] T. P. Hytönen, *The sharp weighted bound for general Calderón-Zygmund operators*, Ann. Math. **175** (2012), 1473–1506.

[16] T. Hytönen and C. Pérez, *Sharp weighted bounds involving* A_∞, Anal. PDE **6** (2013), 777–818.

[17] Ł. Kamiński and A. Osękowski, *Best constants in some estimates for the harmonic maximal operator on the real line*, Colloq. Math., to appear.

[18] M. T. Lacey, K. Moen, C. Pérez and R. H. Torres, *Sharp weighted bounds for fractional integral operators*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 1073–1097.

[19] A. K. Lerner, *On some weighted norm inequalities for Littlewood-Paley operators*, Illinois J. Math. **52** (2009), 653–666.

[20] A. K. Lerner, *On an estimate of Calderón-Zygmund operators by dyadic positive operators*, J. Anal. Math. **121** (2013), 141–161.

[21] A. K. Lerner, S. Ombrosi and C. Pérez, *Sharp* A_1 *bounds for Calderón-Zygmund operators and the relationship with a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, Int. Math. Res. Not. IMRN 6 (2008), Art. ID rnm161, 11 p.

[22] A. K. Lerner, S. Ombrosi and C. Pérez, *Weak type estimates for singular integrals related to a dual problem of Muckenhoupt-Wheeden*, J. Fourier Anal. Appl. **15** (2009), pp. 394–403.

[23] A. K. Lerner, S. Ombrosi and C. Pérez, A_1 *bounds for Calderón-Zygmund operators related to a problem of Muckenhoupt and Wheeden*, Math. Res. Lett. **16** (2009), pp. 149–156.

[24] T. Mei, *BMO is the intersection of two translates of dyadic BMO*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **336** (2003), 1003–1006.

[25] A. D. Melas, *The Bellman functions of dyadic-like maximal operators and related inequalities*, Adv. Math. **192** (2005), 310–340.

[26] A. D. Melas, *Dyadic-like maximal operators on LlogL functions*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 1631–1654.

[27] A. D. Melas, *Sharp general local estimates for dyadic-like maximal operators and related Bellman functions*, Adv. Math. **220** (2009), 367–426.

[28] A. D. Melas and E. N. Nikolidakis, *On weak type inequalities for dyadic maximal functions*, J. Math. Anal. Appl. **348** (2008), 404–410.

[29] A. D. Melas and E. N. Nikolidakis, *Sharp Lorentz estimates for dyadic-like maximal operators and related Bellman functions*, J. Geom. Anal. **27** (2017), no. 4, 2644–2657.

[30] B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226.

[31] F. L. Nazarov and S. R. Treil, *The hunt for a Bellman function: applications to estimates for singular integral operators and to other classical problems of harmonic analysis*, St. Petersburg Math. J. **8** (1997), 721–824.

[32] F. L. Nazarov, S. R. Treil and A. Volberg, *The Bellman functions and two-weight inequalities for Haar multipliers*, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999), 909–928.

[33] A. Osękowski, *Sharp martingale and semimartingale inequalities*, Monografie Matematyczne **72** (2012), Birkhäuser, 462 pp.

[34] A. Osękowski, *Survey article: Bellman function method and sharp inequalities for martingales*, Rocky Mountain J. Math. **43** (2013), 1759–1823.

[35] A. Osękowski, *Sharp $L^{p,\infty} \to L^q$ estimates for the dyadic-like maximal operators*, J. Fourier Anal. Appl. **20** (2014), 911–933.

[36] A. Osękowski, *Weak-type inequalities for maximal operators acting on Lorentz spaces*, Calculus of Variations and PDEs, Banach Center Publ. **101** (2014), pp. 145–162.

[37] A. Osękowski, *Sharp weighted logarithmic bound for maximal operators*, Archiv der Mathematik **107** (2016), 635–644.

[38] A. Osękowski, *Best constants in Muckenhoupt's inequality*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **42** (2017), 889–904.

[39] A. Osękowski and M. Rapicki, *Sharp Lorentz-norm estimates for dyadic-like maximal operators*, accepted for publication in Studia Mathematica.

[40] A. Osękowski and M. Rapicki, *A weighted maximal weak-type inequality*, Mathematika **67** (2021), 145–157.

[41] A. Osękowski and M. Rapicki, *Sharp weighted inequalities for harmonic maximal operators*, submitted.

[42] M. Rapicki, *A weighted inequality for a dyadic-like maximal operator*, Anal. Math. **44** (2018), 577–585.

[43] M. Rapicki, *Fefferman-Stein inequalities for the dyadic-like maximal operators*, Arch. Math. **113** (2019), 81–93.

[44] D. Revuz and M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, 3rd edition, Springer Verlag, 1999.

[45] E. T. Sawyer, *A two weight weak type inequality for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), 339–345.

[46] E. T. Sawyer. *A characterization of two weight norm inequalities for fractional and Poisson integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **308** (1988), 533–545.

[47] L. Slavin, A. Stokolos and V. Vasyunin, *Monge–Ampère equations and Bellman functions: The dyadic maximal operator*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **346** (2008), 585–588.

[48] L. Slavin and V. Vasyunin, *Sharp results in the integral-form John–Nirenberg inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), pp. 4135–4169.

[49] E. M. Stein, *Singular integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[50] E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 of Princeton Mathematical Series. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993. With the assistance of T. S. Murphy, Monographs in Harmonic Analysis, III.

[51] V. Vasyunin and A. Volberg, *The Bellman function for certain two weight inequality: the case study*, St. Petersburg Math. J., **18**, 201–222 (2007).

[52] V. Vasyunin and A. Volberg, *Monge–Ampère equation and Bellman optimization of Carleson Embedding Theorems*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 226, "Linear and Complex Analysis", 195–238 (2009).