

Praca *The dimension-free structure of nonhomogeneous random matrices* współautorstwa prof. Rafała Latały w *Inventiones mathematicae*

W *Inventiones mathematicae*, jednym z najbardziej prestiżowych czasopism matematycznych, ukazał się artykuł *The dimension-free structure of nonhomogeneous random matrices* autorstwa Rafała Latały (MIM UW), Ramona van Handela (Princeton University) i Pierre'a Youssefa (Université Paris-Diderot).

Teoria macierzy losowych, wywodząca się ze statystyki (badania Wisharta z lat 20-tych) i fizyki (prace Wignera z drugiej połowy lat 50-tych) znalazła w ciągu ostatniego półwiecza wiele związków z pozornie tak odległymi działami matematyki jak statystyka matematyczna, teoria liczb, asymptotyczna kombinatoryka i wysokowymiarowa geometria wypukła oraz związane z nimi zagadnienia algorytmiczne.

Omawiana praca dotyczy macierzy losowych, których wyrazy są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym ze średnią i wariancją, mogącymi zmieniać się w obrębie macierzy. Autorzy charakteryzują profile średnich i wariancji, dla których nieskończona macierz losowa powyższego typu definiuje ograniczony operator na przestrzeni Hilberta ℓ_2 ciągów sumowalnych z kwadratem. W szczególności podają dwustronne oszacowania na oczekiwaną normę spektralną tego operatora. Oszacowania te autorzy rozszerzają także na przypadek norm zających tzw. klasy Schattena S_p (nieprzemienne odpowiedniki przestrzeni L_p).

Powyższe wyniki dotyczą macierzy nieskończonych, związane z nimi nierówności mają jednak znaczenie także dla klasycznych zagadnień teorii macierzy losowych, dotyczących zachowania widma dla ciągów macierzy skończonych, ale o rozmiarach dążących do nieskończoności. Uzyskane oszacowania górne i dolne na oczekiwaną normę spektralną (największą wartość szczególną) macierzy gaussowskich różnią się jedynie czynnikiem mnożącym, który nie zależy od rozmiarów macierzy ani innych jej parametrów (jest to kluczowa własność, pozwalająca na zastosowania dla macierzy nieskończonych). W szczególności dają one pozytywną odpowiedź na postawioną przez Rafała Latałę w roku 2005 hipotezę, dotyczącą średniej normy spektralnej symetrycznych macierzy losowych o niezależnych gaussowskich współczynnikach. Okazuje się, że jest ona tego samego rzędu co oczekiwana maksymalna długość wiersza macierzy (jest to zaskakujące, gdyż w ogólności, dla macierzy deterministycznych, maksymalna długość wiersza jest jedynie dolnym ograniczeniem na normę spektralną). Obserwacja ta pozwala na dokładne oszacowania norm ogólniejszych macierzy losowych, w szczególności macierzy sąsiedztwa niejednorodnych grafów losowych Erdősa-Rényi (grafów, w których krawędzie wybierane są niezależnie z ustalonymi prawdopodobieństwami). Przedstawione w artykule wyniki najpewniej znajdują także zastosowania w statystyce wysokowymiarowej.

Bibliografia

- [1] Latała, R., van Handel, R. and Youssef, P. *The dimension-free structure of nonhomogeneous random matrices* *Inventiones mathematicae* (2018) 214: 1031. <https://doi.org/10.1007/s00222-018-0817-x>.