Zmienność stochastyczna w wybranych modelach rynków finansowych

Autoreferat rozprawy doktorskiej

Zofia Miśkiewicz

1 Wstęp i motywacja

Głównym obiektem badań niniejszej pracy doktorskiej są modele rynków finansowych ze *zmiennością stochastyczną*, czyli modele, w których zmienność ceny akcji jest opisywana pewnym procesem stochastycznym. Modele te są rozwinięciem klasycznego modelu Blacka-Scholesa, w którym przyjmuje się, że zmienność ceny jest stała. Założenie to prowadzi jednak do pewnych sprzeczności z obserwacjami na rynku (na przykład do tak zwanego *uśmiechu zmienności*). Zmienność stochastyczna jest jednym ze sposobów na pokonanie tej trudności.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją, i niech $\mathbb{P}$ będzie miarą martyngałową. W największej ogólności w modelach badanych w pracy zakładamy, że dynamika ceny akcji S jest opisana równaniem

$$\mathrm{d}S_t = r_t f_1(S_t)\mathrm{d}t + \sigma_t f_2(S_t)\mathrm{d}W_t,$$

gdzie W jest $\mathbb{F}$-procesem Wienera, f_1, f_2 są odpowiednimi funkcjami deterministycznymi, σ jest procesem stochastycznym (być może skorelowanym z ceną akcji), zaś r jest procesem stochastycznym lub stałą.

Wśród najważniejszych modeli stochastycznej zmienności warto wymienić model Hulla i White'a [15], model Hestona [14] oraz model Steina i Steina [29]. Szczególną klasą modeli ze zmiennością stochastyczną są procesy przełącznikowe (zob. [21, 30, 19]), w których zmienność pochodzi od pewnego łańcucha Markowa (*przełącznika*), interpretowanego jako aktualny stan gospodarki.

Dla większości z wyżej wymienionych modeli nie znamy jawnej postaci rozkładów cen akcji. W konsekwencji nie dysponujemy również wzorami na wycenę instrumentów pochodnych i konieczne jest użycie metod numerycznych.

Zmiany czasu

W literaturze można spotkać wiele podejść do modelowania stochastycznej zmienności, spośród których szczególnie interesującym jest użycie techniki losowej zmiany czasu. Główna idea jest następująca: zaczynamy od prostszego modelu z deterministyczną zmiennością, a następnie wprowadzamy dodatkową losowość do modelu przy użyciu zmiany czasu. Przez zmianę czasu rozumiemy tu niemalejącą, prawostronnie ciągłą rodzinę zmiennych losowych $(\tau_t)_{t\geqslant 0}$ o wartościach w $[0,\infty]$ taką, że dla każdego $t \geqslant 0$, τ_t jest momentem stopu względem danej filtracji $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ (zob. [1]).

Można pokazać, że w pewnych modelach stochastycznej zmienności cena akcji może być przedstawiona jako $\hat{S} := S \circ \tau$, gdzie S jest geometrycznym ruchem Browna, a τ jest zmianą czasu niezależną od S (zob. [24, Example 1.2.1] dla modelu Hestona i [24, Theorem 4.4.4] dla modeli przełącznikowych). Może się wydawać, że pomysł wprowadzenia stochastycznej zmienności poprzez zmianę czasu jest mało naturalny. Jednak w wielu przypadkach pozwala on uprościć wyznaczenie funkcji charakterystycznej dla logarytmicznej ceny akcji, co jest istotne dla numerycznej wyceny opcji. Zilustruje to poniższy przykład.

Przykład 1. Niech $\hat{S} := S\circ\tau$, gdzie S i τ są jak wyżej. Wtedy proces $\hat{S}_t$ może być zapisany jako $\hat{S}_t = S_0 \exp(\hat{X}_t)$, gdzie $X_t = \log(\frac{S_t}{S_0})$ dla wszystkich $t \geqslant 0$ oraz $\hat{X} = X\circ\tau$. Wówczas, ponieważ τ jest niezależne od S, funkcja charakterystyczna $\hat{X}$ może być przedstawiona w postaci

$$\mathbb{E}\exp\left(iu\hat{X}_t\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\exp\left(iuX_{\tau_t}\right)|\tau_t\right) = \mathbb{E}e^{\tau_t\psi(u)},$$

gdzie ψ oznacza wykładnik charakterystyczny procesu X. Można więc zauważyć, że dla wyznaczenia funkcji charakterystycznej $\hat{X}$ wystarczy nam znajomość transformaty Laplace'a τ.

Zastosowania zmiany czasu były badane np. przez Carra i Wu w [8]. Ich wyniki zostały rozwinięte przez Linetsky'ego i Mendoza-Arriagę [22], którzy do modelowania d-wymiarowego procesu cen akcji S wykorzystali d-wymiarową zmianę czasu. Technika ta jest szczególnie interesująca, ponieważ – oprócz wprowadzenia zmienności stochastycznej do modelu – taka zmiana czasu może również wpłynąć na strukturę zależności współrzędnych procesu $\hat{S}$.

Markowska zgodność i struktury zależności

Problem modelowania zależności pomiędzy procesami stochastycznymi był badany w wielu artykułach i monografiach, m.in. w [6, 5, 26].

Gdy $X = (X_1, \dots, X_d)$ jest wektorem losowym w $\mathbb{R}^d$, problem badania zależności między jego współrzędnymi sprowadza się do znalezienia odpowiedniej funkcji, nazywanej *kopułą* (ang. *copula function*), por. twierdzenie Sklara w [28]. Przy pomocy tej metody możemy oddzielić strukturę zależności wektora od jego dystrybuant brzegowych. Naturalnym jest więc pytanie, czy podobne rozumowanie ma zastosowanie w sytuacji, gdy zamiast wektora losowego rozważamy d-wymiarowy proces stochastyczny. Okazuje się jednak, że w tym przypadku opisanie struktury zależności poprzez funkcję rozkładów brzegowych nie jest możliwe – zob. omówienie tego problemu przez Scarsiniego [26] oraz Bieleckiego i in. [6].

Gdy Z jest d-wymiarowym procesem Markowa, jedno z interesujących pytań dotyczy tego, czy jego współrzędne również są procesami Markowa. Jeśli współrzędne te są niezależne, jest to oczywiście prawda, ale w ogólnym przypadku już niekoniecznie. Motywuje to poniższą definicję.

Procesem *markowsko zgodnym* nazywamy proces Markowa, którego współrzędne również mają własność Markowa. Dokładniej, dla procesu Markowa $Z = (Z^1, \dots, Z^d)$ na przestrzeni stanów $E_1 \times \dots \times E_d$ będącej produktem przestrzeni polskich przyjmujemy następującą definicję (zob. [5]).

Definicja 2. Mówimy, że Z ma silną własność markowskiej zgodności względem i-tej współrzędnej, jeśli Z^i jest procesem Markowa względem filtracji generowanej przez proces Z, czyli jeśli dla każdego zbioru borelowskiego $B \in \mathcal{B}(E_i)$ i dowolnych $t, s > 0$ zachodzi

$$\mathbb{P}(Z^i_{t+s} \in B | \mathcal{F}^Z_t) = \mathbb{P}(Z^i_{t+s} \in B | Z^i_t),$$

gdzie $\mathbb{F}^Z$ jest filtracją generowaną przez proces Z.

Mówimy, że Z ma silną własność markowskiej zgodności, jeśli posiada ją względem każdej ze współrzędnych.

Markowska zgodność posiada wiele zastosowań w matematyce finansowej w modelach, w których mamy do czynienia z wielowymiarowymi procesami Markowa (na przykład [2, 3, 4, 10]).

W świecie modeli stochastycznej zmienności można rozważać wielowymiarowy proces cen S i wielowymiarowy proces zmienności σ, i zastanawiać się, czy para (S^i, σ^i) jest procesem Markowa. W niniejszej pracy tego typu problemy są rozważane przede wszystkim w kontekście zmian czasu.

2 Główne wyniki rozprawy doktorskiej

Model Steina i Steina

Pierwsza część rozprawy poświęcona jest modelowi Steina i Steina. W większości oparta jest na wspólnej pracy z Jackiem Jakubowskim i Maciejem Wiśniewolskim [16]. Przypomnijmy, że w modelu Steina i Steina zmienność opisywana jest procesem Ornsteina-Uhlenbecka. Innymi słowy, para (S, σ) spełnia

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S_t &= \sigma_t S_t \mathrm{d}W^1_t \\ \mathrm{d}\sigma_t &= -\lambda \sigma_t \mathrm{d}t + \mathrm{d}W^2_t \end{aligned}$$

gdzie $\lambda > 0$, zaś (W^1, W^2) jest dwuwymiarowym procesem Wienera takim, że $\mathrm{d}\langle W^1, W^2\rangle_t = \rho \mathrm{d}t$, $\rho \in [-1, 1]$.

W swojej oryginalnej pracy [29] Stein i Stein zakładają, że W^1 i W^2 są nieskorelowane (tzn. $\rho = 0$) – w niniejszej pracy możemy pominąć to założenie. Głównymi wynikami tej części rozprawy są jawne wzory na momenty i transformatę Mellina ceny akcji. Wzory te są następnie wykorzystane do numerycznej wyceny opcji.

W zależności od wykładnika α oraz parametrów modelu, wyprowadzamy trzy różne formuły na momenty rzędu α procesu cen akcji. Wyniki te wymagają różnych technik dowodowych. W [24, Theorem 3.2.1] rozważamy proces S w otoczeniu zera i znajdujemy miarę probabilistyczną, przy której σ jest procesem Wienera. Pozwala to na wyznaczenie momentów przy użyciu znanych wzorów na transformatę Laplace'a pewnych funkcjonałów ruchu Browna (zob. np. [20]). W dowodach kolejnych dwóch wyników [24, Theorem 3.2.3, Theorem 3.2.6] wykorzystujemy fakt, że kwadrat zmienności jest kwadratowym radialnym procesem Ornsteina-Uhlenbecka. Różnica między tymi twierdzeniami wynika z różnych założeń o parametrach modelu, przez co potrzebne są różne strategie dowodu. W pierwszym przypadku możemy zastosować wzory na transformaty Laplace'a pewnych funkcjonałów kwadratowego radialnego procesu Ornsteina-Uhlenbecka, wyprowadzone w [17]. W drugim przypadku nie możemy zastosować tych wyników bezpośrednio, możemy jednak użyć podobnych metod dowodowych.

Oprócz momentów ceny akcji, wyprowadzamy również jawny wzór na jej transformatę Mellina. Przypomnijmy, że dla dodatniej zmiennej losowej ξ transformatę Mellina definiujemy wzorem

$$f(z) = \mathbb{E}\xi^z, \quad z \in D,$$

gdzie D jest pionowym pasem w $\mathbb{C}$ tak dobranym, by ξ^z było całkowalne dla każdego $z \in D$. Transformata Mellina ceny akcji (równoważnie, transformata Laplace'a logarytmu ceny) jest wielkością istotną z punktu widzenia numerycznej wyceny instrumentów pochodnych. W [24, Theorem 3.2.8] wyznaczamy wzór na transformatę Mellina, jednocześnie wskazując zbiór D, w którym jest ona określona. Wynik ten uogólnia rezultat uzyskany przez Shöbela i Zhu [27, Appendix A].

Jako zastosowanie wyprowadzonych wzorów na momenty i transformatę Mellina, omawiamy również numeryczne metody wyceny opcji wykorzystujące te wzory:

- metoda oparta na wzorze Gila-Pelaeza (ang. *inversion formula*) [24, Proposition 3.3.1],
- metoda szybkiej transformaty Fouriera (FFT, zob. [7, 9, 25]),
- metoda gęstości maksymalizującej entropię (ang. *maximum entropy density method*, zob. np. [11]).

Pierwsza z tych metod uogólnia wynik otrzymany w [27] (dla $\alpha = 1$) na przypadek asymetrycznych opcji potęgowych, czyli opcji o wypłacie $(S_T^\alpha - K)^+$. Jest to możliwe dzięki wyznaczeniu transformaty Mellina nie tylko w jednym punkcie, lecz w całym pasie $D \subset \mathbb{C}$.

Twierdzenie 3 ([24, Proposition 3.3.1])**.** Ustalmy $\lambda > 0$, $\alpha \in D \cap \mathbb{R}$ oraz $\rho \in (-1, 0] \cup [\frac{1}{2\lambda}, 1)$. Wówczas cena asymetrycznej opcji potęgowej w modelu Steina i Steina jest dana wzorem

$$\mathbb{E}(S_T^\alpha - K)^+ = F_1\Big(\frac{1}{c}K^{\frac{1}{\alpha}}\Big)\mathbb{E}S_T^\alpha - c^\alpha K F_2\Big(\frac{1}{c}K^{\frac{1}{\alpha}}\Big),$$

gdzie

$$F_k(a) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Re}\Big(f_k(u)\frac{\exp(-iu\ln a)}{iu}\Big)\mathrm{d}u, \quad k = 1, 2,$$

oraz

$$f_1(u) = \frac{f(\alpha + iu)}{f(\alpha)}, \qquad f_2(u) = f(iu), \qquad f(z) = \mathbb{E}S_T^z.$$

Kolejne podejście do wyceny jest oparte na szybkiej transformacie Fouriera – metodzie numerycznej wprowadzonej przez Cooleya i Tukeya [9], a zastosowanej do wyceny po raz pierwszy przez Carra i Madana w [7]. Przy pewnych technicznych założeniach można pokazać (zob. [7, 25]), że cena opcji o wypłacie $\omega(S_T)$ wyraża się w terminach $\zeta := -\ln(S_0)$ jako

$$\Pi_\omega(\zeta) = \frac{e^{\zeta R}}{2\pi} \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^{s} e^{iu\zeta} \mathcal{B}\Big\{v(x)\Big\}(R+ui) f(-R-ui) \mathrm{d}u,$$

gdzie $v(x) = \omega(e^{-x})$, $\mathcal{B}$ oznacza dwustronną transformatę Laplace'a, zaś $f(z) = \mathbb{E}S_T^z$. Wynik ten nie zależy od R pod warunkiem, że parametr ten leży on w odpowiednim przedziale.

W ramach trzeciej ze stosowanych metod wyznaczamy skończony ciąg momentów ceny akcji $(\mathbb{E}S_T^{\alpha_i})_{i=1,\dots,N} = (\mu_i)_{i=1,\dots,N}$, a następnie przybliżamy gęstość S_T przez gęstość f^{ME} maksymalizującą entropię przy zachowaniu więzów $\int_0^\infty x^{\alpha_j} f^{ME}(x) = \mu_j$ dla $j = 1, \dots, N$. Mając gęstość, możemy numerycznie wycenić dowolny instrument pochodny o wypłacie zależnej wyłącznie od ceny S_T w chwili T. Szersze omówienie tej metody można znaleźć w [11].

Przykłady zastosowań powyższych metod dla różnych typów opcji opisano w [24, Chapter 3.3].

Zmiany czasu i modele przełącznikowe

Następna część rozprawy dotyczy innego przykładu modelu stochastycznej zmienności, a mianowicie modelu przełącznikowego (ang. *regime-switching diffusion*). Główne wyniki rozdziału pochodzą z pracy autorki [23], ale niektóre z rezultatów i przykładów omówionych w tym rozdziale wykraczają poza zawartość oryginalnego artykułu. Procesy przełącznikowe, o których tu mowa, uzyskujemy poprzez zmianę czasu w procesie dyfuzji. Okazuje się, że badanie takich modeli prowadzi do interesujących zagadnień dotyczących samych zmian czasu. Dlatego istotna część wyników dotyczy pewnych fundamentalnych problemów związanych ze zmianami czasu, a niekoniecznie dotyczących bezpośrednio procesów przełącznikowych.

Rozważmy teraz zmianę czasu szczególnej postaci, a mianowicie rozwiązanie niejednorodnego równania zmiany czasu generowanego przez łańcuch Markowa. Będziemy odtąd zakładać, że filtracja $\mathbb{F}$ spełnia zwykłe warunki. Niech X będzie càdlàg $\mathbb{F}$-łańcuchem Markowa o wartościach w skończonej przestrzeni stanów E. Przez $\Lambda = [\lambda_y^x]_{x,y\in E}$ oznaczmy jego macierz intensywności (generator). Rozważana przez nas zmiana czasu jest rodziną zmiennych losowych τ_t spełniającą równanie

$$\tau_t = \int_0^t g(s, X_{\tau_s}) ds \tag{2.1}$$

dla pewnej funkcji borelowskiej $g\colon [0,\infty)\times E \to [0,\infty)$. *Niejednorodność* odnosi się do tego, że funkcja g zależy od czasu, przez co proces $(X_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ ze zmienionym czasem jest niejednorodny w czasie.

W przypadku jednorodnym, tzn. gdy $g(s,x) \equiv g(x)$, równania zmiany czasu były badane dla ogólnych procesów Markowa w książce Ethiera i Kurza [13, Chapter 6] oraz w niedawnej pracy Krühnera i Schnurra [18]. Przypadek niejednorodny omawiają Döring i in. [12], którzy dowodzą istnienia i jednoznaczności rozwiązań dla ogólnych procesów Markowa. Jednakże założenia na g przyjęte w tej pracy są dość restrykcyjne i skomplikowane, podczas gdy dla łańcuchów Markowa potrzebne założenia okazują się bardzo naturalne. Prawdziwe jest mianowicie następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4 ([24, Theorem 4.2.3])**.** Niech X będzie łańcuchem Markowa jak wyżej. Załóżmy, że $g\colon [0,\infty) \times E \to [0,\infty)$ jest taką funkcją, że dla każdego $x \in E$ funkcja $s \mapsto g(s,x)$ jest prawostronnie ciągła i lokalnie całkowalna. Wówczas równanie (2.1) posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Ponadto w ramach dowodu twierdzenia podajemy jawną konstrukcję rozwiązania, co pozwala na symulację trajektorii τ, a w konsekwencji również trajektorii $(X_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$. Pokazujemy też [24, Theorem 4.2.6], że po zmianie czasu proces $(X_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ jest (niejednorodnym) łańcuchem Markowa względem nowej filtracji $\mathbb{G} := (\mathcal{F}_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$, o przestrzeni stanów E i macierzy intensywności $\widehat{\Lambda}(t) = [g(t,x)\lambda^x_y]_{x,y\in E}$.

Następna część rozdziału poświęcona jest markowskiej zgodności procesu ze zmienionym czasem (zgodnie z Definicją 2). Rozważmy dwuwymiarowy łańcuch Markowa $X = (X^1, X^2)$ o przestrzeni stanów $E = E^1 \times E^2$ oraz zmianę czasu generowaną przez niego (wraz z funkcją $g\colon [0,+\infty) \times E \to [0,+\infty)$). W [24, Theorem 4.3.1, Corollary 4.3.4] podajemy stosowne warunki na funkcję g gwarantujące zachowanie markowskiej zgodności przy zmianie czasu.

Co więcej, badamy, czy z danego procesu da się poprzez zmianę czasu otrzymać proces markowsko zgodny. Rozważania te prowadzą do określenia nowej klasy procesów Markowa; nazywamy je procesami markowsko quasi-zgodnymi.

Definicja 5 ([24, Definition 4.3.6])**.** Łańcuch Markowa X nazywamy markowsko quasi-zgodnym, jeśli istnieje zmiana czasu $\tau \not\equiv \mathrm{const}$, dla której proces $X_{\tau(\cdot)}$ jest markowsko zgodny.

Klasa ta oczywiście zawiera wszystkie procesy markowsko zgodne (za zmianę czasu zawsze można przyjąć identyczność), ale w [24, Example 4.3.11] konstruujemy quasi-zgodny łańcuch Markowa, który nie jest markowsko zgodny.

W następnej części pracy rozważamy proces dyfuzji ze zmianą czasu opisaną powyżej, co prowadzi do tak zwanego modelu przełącznikowego (*regime-swithing diffusion*).

Rozważmy n-wymiarowy proces cen akcji $S = (S^1, \ldots, S^n)$ będący silnym rozwiązaniem równania

$$\mathrm{d}S_t = m(S_t)\mathrm{d}t + \Sigma(S_t)\mathrm{d}W_t, \tag{2.2}$$

w którym $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$, zaś W jest d-wymiarowym standardowym procesem Wienera. Niech X będzie łańcuchem Markowa na skończonej przestrzeni stanów E – niezależnym od W – modelującym aktualny stan gospodarki. Weźmy następnie zmianę czasu τ rozwiązującą (2.1) dla odpowiedniej funkcji g. Oznaczmy przez $\hat{S}$ proces cen akcji ze zmienionym czasem, czyli $\hat{S}_t := S_{\tau_t}$, zaś przez $\mathbb{G} := (\mathcal{F}_{\tau_t})_{t\geqslant 0}$ – filtrację ze zmienionym czasem.

Twierdzenie 6. Niech S będzie procesem cen określonym przez (2.2) z funkcjami $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oraz $\Sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times d}$ spełniającymi lokalnie warunek Lipschitza, a ponadto dla wszystkich $x \in \mathbb{R}^n$ spełniającymi oszacowanie

$$x \cdot m(x) + \frac{1}{2}|\Sigma(x)|^2 \leqslant \kappa(1 + |x|^2) \tag{2.3}$$

z pewną stałą $\kappa > 0$. Ustalmy skończony horyzont czasowy $T < \infty$. Wówczas proces $\hat{S}$ jest jedynym silnym rozwiązaniem równania

$$\mathrm{d}\hat{S}_t = m(\hat{S}_t)g(t, \hat{X}_t)\mathrm{d}t + \Sigma(\hat{S}_t)\sqrt{g(t, \hat{X}_t)}\mathrm{d}B_t, \quad t \in [0, T], \tag{2.4}$$

gdzie B jest d-wymiarowym standardowym $\mathbb{G}$-procesem Wienera niezależnym od X.

Zwróćmy na chwilę uwagę na interpretację finansową zmiany czasu w modelach cen akcji. Wielkość $g(t, \hat{X}_t)$ interpretujemy jako chwilową intensywność aktywności biznesowej, zależną od chwili kalendarzowej t oraz aktualnego stanu gospodarki $\hat{X}_t$. Wtedy τ_t odpowiada tak zwanemu *czasowi biznesowemu*. Twierdzenie 6 potwierdza intuicję mówiącą, że im wyższa aktywność biznesowa danego dnia, tym większa jest chwilowa zmienność cen. Dokładniejsze omówienie finansowej interpretacji zmian czasu można znaleźć w artykule Carra i Wu [8].

W tej samej części rozprawy poświęcamy też uwagę pytaniu odwrotnemu: mając dany n-wymiarowy proces przełącznikowy S, czy możliwe jest przedstawienie jego współrzędnych jako dyfuzji ze zmienionym czasem? Rozważmy mianowicie proces przełącznikowy (S, Y), gdzie $S = (S^1, S^2)$, a $Y = (Y^1, Y^2)$ jest dwuwymiarowym łańcuchem Markowa. Precyzyjne sformułowanie naszego pytania jest następujące: czy istnieją jednowymiarowe dyfuzje R^1 i R^2, to znaczy procesy spełniające

$$dR^i_t = \mu_i(R^i_t)\mathrm{d}t + \sigma_i(R^i_t)\mathrm{d}B^i_t, \quad i = 1, 2,$$

oraz zmiany czasu τ^1 i τ^2 (generowane przez jednowymiarowe łańcuchy Markowa X^1, X^2), dla których rozkład S^i jest tożsamy z rozkładem $R^i \circ \tau^i$ (dla $i = 1, 2$)?

Reprezentacja tego typu jest pożyteczna z wielu powodów. Po pierwsze zauważmy, że procesy R^i są jednowymiarowymi dyfuzjami niezależnymi od zmian czasu τ^i, wobec tego zamiast całego procesu (S^1, S^2) można rozważać oddzielnie procesy R^1 i R^2, bez odnoszenia się do struktury zależności całego procesu. Po drugie, jeśli proces R^i jest geometrycznym ruchem Browna z dryfem, to funkcję charakterystyczną logarytmu ceny S^i możemy wyznaczyć przy użyciu wykładnika charakterystycznego procesu R^i oraz transformaty Laplace'a τ^i (por. Przykład 1). Ponadto zmiany czasu τ^1 i τ^2 zależą jedynie od jednowymiarowych łańcuchów Markowa, a nie od całego procesu Y, co pozwala na zmniejszenie złożoności obliczeniowej przy numerycznej wycenie instrumentów zależnych od R^i. Pomysł osobnej zmiany czasu dla R^1 i R^2 odpowiada temu, że czas biznesowy może się różnić dla różnych aktywów.

Na koniec przedstawiamy przykłady zastosowań zmiany czasu do wyceny opcji metodą Monte Carlo. Rozważamy akcje, których cena jest modelowana przez geometryczny ruch

Browna ze zmianą czasu. Dzięki jawnej postaci rozwiązania (2.1) możemy symulować trajektorie zmian czasu, a następnie trajektorie samego procesu cen, co przy użyciu metody Monte Carlo prowadzi nas do wyceny opcji. Porównujemy zachowanie zmian czasu dla różnych funkcji g oraz wyceny dla różnych typów opcji. Omówione tu wyniki uzyskane metodą Monte Carlo są nowe – nie stanowiły części artykułu [23].

Literatura

[1] O. E. Barndorff-Nielsen and A. Shiryaev, *Change of time and change of measure*, vol. 13 of Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2010.

[2] T. Bielecki, A. Cousin, S. Crépey, and A. Herbertsson, *A bottom-up dynamic model of portfolio credit risk. Part I: Markov copula perspective*, Recent Advances in Financial Engineering, (2012), pp. 25–49.

[3] T. Bielecki, A. Vidozzi, and L. Vidozzi, *A Markov copulae approach to pricing and hedging of credit index derivatives and ratings triggered step-up bonds*, Journal of Credit Risk, 4 (2008), pp. 47–76.

[4] T. R. Bielecki, S. Crépey, M. Jeanblanc, and B. Zargari, *Valuation and hedging of CDS counterparty exposure in a Markov copula model*, Int. J. Theor. Appl. Finance, 15 (2012), pp. 1250004, 39.

[5] T. R. Bielecki, J. Jakubowski, and M. Niewęgłowski, *Structured Dependence between Stochastic Processes*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2020.

[6] T. R. Bielecki, J. Jakubowski, A. Vidozzi, and L. Vidozzi, *Study of dependence for some stochastic processes*, Stoch. Anal. Appl., 26 (2008), pp. 903–924.

[7] P. Carr and D. Madan, *Option valuation using the fast Fourier transform*, Journal of Computational Finance, 2 (1998), pp. 61–73.

[8] P. Carr and L. Wu, *Time-changed Lévy processes and option pricing*, Journal of Financial Economics, 71 (2004), pp. 113 – 141.

[9] J. W. Cooley and J. W. Tukey, *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series*, Mathematics of Computation, 19 (1965), pp. 297–301.

[10] S. Crépey, M. Jeanblanc, and B. Zargari, *Counterparty risk on a CDS in a Markov chain copula model with joint defaults*, in Recent Advances in Financial Engineering, 2009, pp. 91–126.

[11] M. D'Amico, G. Fusai, and A. Tagliani, *Valuation of exotic options using moments*, Operational Research. An International Journal, 2 (2002), pp. 157–186.

[12] L. Döring, L. Gonon, D. J. Prömel, and O. Reichmann, *Existence and uniqueness results for time-inhomogeneous time-change equations and Fokker–Planck equations*, Journal of Theoretical Probability, (2019).

[13] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov processes. Characterization and convergence*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.

[14] S. Heston, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies, 6 (1993), pp. 327–343.

[15] J. Hull and A. White, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, J. Finance, 42 (1987), pp. 281–300.

[16] J. Jakubowski, Z. Michalik, and M. Wiśniewolski, *Moments and Mellin transform of the asset price in Stein and Stein model and option pricing*, Lith. Math. J., 58 (2018), pp. 33–47.

[17] J. Jakubowski and M. Wiśniewolski, *On matching diffusions, Laplace transforms and partial differential equations*, Stoch. Proc. Appl., 125 (2015), pp. 3663–3690.

[18] P. Krühner and A. Schnurr, *Time change equations for Lévy-type processes*, Stochastic Process. Appl., 128 (2018), pp. 963–978.

[19] R. H. Liu, Q. Zhang, and G. Yin, *Option pricing in a regime-switching model using the fast Fourier transform*, International Journal of Stochastic Analysis, 2006 (2006), pp. 1–22.

[20] R. Mansuy and M. Yor, *Aspects of Brownian Motion*, Universitext, Springer-Verlag, 2008.

[21] X. Mao and C. Yuan, *Stochastic differential equations with Markovian switching*, Imperial College Press, London, 2006.

[22] R. Mendoza-Arriaga and V. Linetsky, *Multivariate subordination of Markov processes with financial applications*, Math. Finance, 26 (2016), pp. 699–747.

[23] Z. Miśkiewicz, *Inhomogeneous time change equations for Markov chains and their applications*, Stochastic Analysis and Applications, to appear (2021). DOI: 10.1080/07362994.2021.1924204.

[24] ——, *Stochastic volatility in selected models of financial markets*, PhD dissertation, (2021).

[25] S. Raible, *Lévy Processes in Finance: Theory, Numerics and Empirical Facts*, Ph.D. dissertation, Freiburg University, 2000.

[26] M. Scarsini, *Copulae of probability measures on product spaces*, J. Multivariate Anal., 31 (1989), pp. 201–219.

[27] R. Shöbel and J. Zhu, *Stochastic volatility with an Ornstein-Uhlenbeck process: An extension*, European Finance Review, 3 (1999), pp. 23–46.

[28] A. Sklar, *Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges*, Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, 8 (1959), pp. 229–231.

[29] E. Stein and J. Stein, *Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach*, The Review of Financial Studies, 4 (1991), pp. 727–752.

[30] G. G. Yin and C. Zhu, *Hybrid switching diffusions. Properties and applications*, vol. 63 of Stochastic Modelling and Applied Probability, Springer, New York, 2010.