

Grupy addytywne pierścieni Hamiltona, a grupy addytywne pierścieni przemiennych

Mateusz Woronowicz

Wydział Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku

16.10.2025

Definicja 1

*Pierścieniem nazywamy system algebraiczny $(A, +, 0, *)$ spełniający warunki:*

Definicja 1

*Pierścieniem nazywamy system algebraiczny $(A, +, 0, *)$ spełniający warunki:*

- 1 *$(A, +, 0)$ jest grupą abelową;*

Definicja 1

*Pierścieniem nazywamy system algebraiczny $(A, +, 0, *)$ spełniający warunki:*

- ❶ $(A, +, 0)$ jest grupą abelową;
- ❷ $x * (y + z) = x * y + x * z$ i $(x + y) * z = x * z + y * z$ dla wszystkich $x, y, z \in A$.

Definicja 1

*Pierścieniem nazywamy system algebraiczny $(A, +, 0, *)$ spełniający warunki:*

- ❶ $(A, +, 0)$ jest grupą abelową;
- ❷ $x * (y + z) = x * y + x * z$ i $(x + y) * z = x * z + y * z$ dla wszystkich $x, y, z \in A$.

Twierdzenie 2

Dla dowolnej grupy abelowej A , zbiór $\text{Mult}(A)$ wszystkich mnożeń pierścieniowych możliwych do określenia na A tworzy grupę abelową względem dodawania funkcji oraz

$$\text{Mult}(A) \cong \text{Hom}(A \otimes A, A) \cong \text{Hom}(A, \text{End}(A)).$$

Definicja 1

*Pierścieniem nazywamy system algebraiczny $(A, +, 0, *)$ spełniający warunki:*

- ❶ $(A, +, 0)$ jest grupą abelową;
- ❷ $x * (y + z) = x * y + x * z$ i $(x + y) * z = x * z + y * z$ dla wszystkich $x, y, z \in A$.

Twierdzenie 2

Dla dowolnej grupy abelowej A , zbiór $\text{Mult}(A)$ wszystkich mnożeń pierścieniowych możliwych do określenia na A tworzy grupę abelową względem dodawania funkcji oraz

$$\text{Mult}(A) \cong \text{Hom}(A \otimes A, A) \cong \text{Hom}(A, \text{End}(A)).$$

Definicja 3

Zbiór wszystkich łącznych mnożeń pierścieniowych możliwych do określenia na grupie abelowej A oznaczmy przez $\text{Mult}_a(A)$.

Uwaga 4

Zbiór $\text{Mult}_a(A)$ nie musi być grupą względem dodawania funkcji. Istotnie, niech $A = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^+$ i niech $\circ$ oraz $*$ oznaczają odpowiednio mnożenie pierścienia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i funkcję $*$: $A \times A \rightarrow A$ daną wzorem:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).$$

Wówczas $\circ, * \in \text{Mult}_a(A)$, lecz $\circ + * \in \text{Mult}(A) \setminus \text{Mult}_a(A)$, gdyż dla $\circledast = \circ + *$, $x = (1, 0)$ i $y = (0, 1)$ zachodzi $(x \circledast x) \circledast y = 2y$ oraz $x \circledast (x \circledast y) = y$.

Uwaga 4

Zbiór $\text{Mult}_a(A)$ nie musi być grupą względem dodawania funkcji. Istotnie, niech $A = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})^+$ i niech $\circ$ oraz $*$ oznaczają odpowiednio mnożenie pierścienia $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ i funkcję $*$: $A \times A \rightarrow A$ daną wzorem:

$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).$$

Wówczas $\circ, * \in \text{Mult}_a(A)$, lecz $\circ + * \in \text{Mult}(A) \setminus \text{Mult}_a(A)$, gdyż dla $\circledast = \circ + *$, $x = (1, 0)$ i $y = (0, 1)$ zachodzi $(x \circledast x) \circledast y = 2y$ oraz $x \circledast (x \circledast y) = y$.

Definicja 5

Grupę abelową A nazywamy *nil-grupą*, gdy jedynym pierścieniem o grupie addytywnej A jest pierścień A^0 z zerowym mnożeniem:

$$a * b = 0 \text{ dla wszystkich } a, b \in A.$$

Jeżeli A^0 jest jedynym łącznym pierścieniem o grupie addytywnej A , to mówimy, że A jest *nil_a-grupą*.

Twierdzenie 6

Jeżeli istnieje nil_a -grupa niebędąca nil -grupą, to jest ona beztorsyjna i jej ranga jest większa niż dwa.

Twierdzenie 6

Jeżeli istnieje nil_a -grupa niebędąca nil -grupą, to jest ona beztorsyjna i jej ranga jest większa niż dwa.

Twierdzenie 7

Jeżeli pojęcia nil - oraz nil_a -grupy nie są równoważne w klasie grup abelowych skończonej rangi, to istnieje nierozkładalna beztorsyjna nil_a -grupa G skończonej rangi nie mniejszej niż trzy taka, że G nie jest nil -grupą.

Twierdzenie 6

Jeżeli istnieje nil_a -grupa niebędąca nil -grupą, to jest ona beztorsyjna i jej ranga jest większa niż dwa.

Twierdzenie 7

Jeżeli pojęcia nil - oraz nil_a -grupy nie są równoważne w klasie grup abelowych skończonej rangi, to istnieje nierozkładalna beztorsyjna nil_a -grupa G skończonej rangi nie mniejszej niż trzy taka, że G nie jest nil -grupą.

Definicja 8

Grupę abelową A nazywamy SI -grupą, gdy w dowolnym pierścieniu o grupie addytywnej A , każdy podpierścień jest ideałem. Jeżeli A spełnia warunek SI ograniczony do klasy pierścieni łącznych, to mówimy, że A jest SI_H -grupą.

Podstawowe pojęcia

Twierdzenie 6

Jeżeli istnieje nil_a -grupa niebędąca nil -grupą, to jest ona beztorsyjna i jej ranga jest większa niż dwa.

Twierdzenie 7

Jeżeli pojęcia nil - oraz nil_a -grupy nie są równoważne w klasie grup abelowych skończonej rangi, to istnieje nierozkładalna beztorsyjna nil_a -grupa G skończonej rangi nie mniejszej niż trzy taka, że G nie jest nil -grupą.

Definicja 8

Grupę abelową A nazywamy SI -grupą, gdy w dowolnym pierścieniu o grupie addytywnej A , każdy podpierścień jest ideałem. Jeżeli A spełnia warunek SI ograniczony do klasy pierścieni łącznych, to mówimy, że A jest SI_H -grupą.

Definicja 9

Łączne pierścienie, w których każdy podpierścień jest ideałem nazywamy pierścieniami Hamiltona lub krótko: H -pierścieniami.

Przykład 10

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}^+$ oraz $Z(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są SI -grupami.

Przykład 10

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}^+$ oraz $Z(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są SI -grupami.

Uwaga 11

- 1 Każda SI -grupa jest SI_H -grupą.

Przykład 10

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}^+$ oraz $Z(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są SI -grupami.

Uwaga 11

- ❶ *Każda SI -grupa jest SI_H -grupą.*
- ❷ *Warunki SI oraz SI_H są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*

Przykład 10

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}^+$ oraz $Z(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są SI -grupami.

Uwaga 11

- ❶ *Każda SI -grupa jest SI_H -grupą.*
- ❷ *Warunki SI oraz SI_H są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*
- ❸ *Istnieją mieszane SI_H -grupy niebędące SI -grupami.*

Przykład 10

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}^+$ oraz $Z(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są SI -grupami.

Uwaga 11

- ❶ *Każda SI -grupa jest SI_H -grupą.*
- ❷ *Warunki SI oraz SI_H są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*
- ❸ *Istnieją mieszane SI_H -grupy niebędące SI -grupami.*
- ❹ *Istnienie beztorsyjnej SI_H -grupy niebędącej SI -grupą równoważne jest istnieniu nil_a -grupy niebędącej nil -grupą.*

Przykład 10

Łatwo zauważyć, że $\mathbb{Z}^+$ oraz $Z(n)$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są SI-grupami.

Uwaga 11

- ❶ *Każda SI-grupa jest SI_H -grupą.*
- ❷ *Warunki SI oraz SI_H są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*
- ❸ *Istnieją mieszane SI_H -grupy niebędące SI-grupami.*
- ❹ *Istnienie beztorsyjnej SI_H -grupy niebędącej SI-grupą równoważne jest istnieniu nil_a -grupy niebędącej nil-grupą.*

Definicja 12

Grupę abelową G nazywamy CR-grupą, gdy każdy pierścień o grupie addytywnej G jest przemienny. Jeżeli G spełnia warunek CR ograniczony do klasy pierścieni łącznych, to mówimy, że G jest ACR-grupą. W przypadku, gdy G może być grupą addytywną jedynie pierścieni łącznych, to G nazywamy AR-grupą.

Uwaga 13

- 1 *Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.*

Uwaga 13

- 1 *Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.*
- 2 *Warunki CR, ACR i AR są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*

Uwaga 13

- 1 *Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.*
- 2 *Warunki CR, ACR i AR są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*
- 3 *Istnieją beztorsyjne ACR-grupy dowolnej skończonej rangi $r \geq 2$, które nie są CR-grupami.*

Uwaga 13

- 1 *Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.*
- 2 *Warunki CR, ACR i AR są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*
- 3 *Istnieją beztorsyjne ACR-grupy dowolnej skończonej rangi $r \geq 2$, które nie są CR-grupami.*
- 4 *Istnieją beztorsyjne AR-grupy dowolnej skończonej rangi $r > 2$, które nie są CR-grupami.*

Uwaga 13

- 1 Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.
- 2 Warunki CR, ACR i AR są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.
- 3 Istnieją beztorsyjne ACR-grupy dowolnej skończonej rangi $r \geq 2$, które nie są CR-grupami.
- 4 Istnieją beztorsyjne AR-grupy dowolnej skończonej rangi $r > 2$, które nie są CR-grupami.
- 5 Istnieją mieszane ACR-grupy niebędące CR-grupami.

Uwaga 13

- ❶ *Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.*
- ❷ *Warunki CR, ACR i AR są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.*
- ❸ *Istnieją beztorsyjne ACR-grupy dowolnej skończonej rangi $r \geq 2$, które nie są CR-grupami.*
- ❹ *Istnieją beztorsyjne AR-grupy dowolnej skończonej rangi $r > 2$, które nie są CR-grupami.*
- ❺ *Istnieją mieszane ACR-grupy niebędące CR-grupami.*
- ❻ *Istnieją mieszane AR-grupy niebędące (A)CR-grupami.*

Uwaga 13

- 1 Każda CR-grupa jest ACR-grupą oraz AR-grupą.
- 2 Warunki CR, ACR i AR są równoważne dla torsyjnych grup abelowych.
- 3 Istnieją beztorsyjne ACR-grupy dowolnej skończonej rangi $r \geq 2$, które nie są CR-grupami.
- 4 Istnieją beztorsyjne AR-grupy dowolnej skończonej rangi $r > 2$, które nie są CR-grupami.
- 5 Istnieją mieszane ACR-grupy niebędące CR-grupami.
- 6 Istnieją mieszane AR-grupy niebędące (A)CR-grupami.

Przykład 14

Pokażemy, że warunek CR implikuje warunek AR. Załóżmy, że G jest CR-grupą, $* \in \text{Mult}(G)$ i $g, x, y \in G$. Wtedy wzór $x_1 \circledast x_2 = x_1 * (g * x_2)$ wprowadza na G strukturę przemiennej pierścienia, skąd $x * (g * y) = x \circledast y = y \circledast x = y * (g * x)$. Z przemienności mnożenia $*$ wynika więc, że $x * (g * y) = (g * x) * y = (x * g) * y$. Zatem pierścień $(G, *)$ jest łączny i w konsekwencji G jest AR-grupą.

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- 1 G jest Sl -grupą;

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest Sl -grupą;*
- ❷ *G jest Sl_H -grupą;*

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ G jest Sl -grupą;
- ❷ G jest Sl_H -grupą;
- ❸ $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$, przy czym $n_p \leq 1$, jeśli $I_p \neq \emptyset$.

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ G jest Sl -grupą;
- ❷ G jest Sl_H -grupą;
- ❸ $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$, przy czym $n_p \leq 1$, jeśli $I_p \neq \emptyset$.

Twierdzenie 16

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest Sl -grupą;*
- ❷ *G jest Sl_H -grupą;*
- ❸ *$G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$, przy czym $n_p \leq 1$, jeśli $I_p \neq \emptyset$.*

Twierdzenie 16

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest AR -grupą;*

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest Sl -grupą;*
- ❷ *G jest Sl_H -grupą;*
- ❸ *$G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$, przy czym $n_p \leq 1$, jeśli $I_p \neq \emptyset$.*

Twierdzenie 16

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest AR -grupą;*
- ❷ *G jest CR -grupą;*

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest Sl -grupą;*
- ❷ *G jest Sl_H -grupą;*
- ❸ *$G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$, przy czym $n_p \leq 1$, jeśli $I_p \neq \emptyset$.*

Twierdzenie 16

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G jest AR -grupą;*
- ❷ *G jest CR -grupą;*
- ❸ *G jest ACR -grupą;*

Twierdzenie 15

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ G jest Sl -grupą;
- ❷ G jest Sl_H -grupą;
- ❸ $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$, przy czym $n_p \leq 1$, jeśli $I_p \neq \emptyset$.

Twierdzenie 16

Dla dowolnej torsyjnej grupy abelowej G , następujące warunki są równoważne:

- ❶ G jest AR -grupą;
- ❷ G jest CR -grupą;
- ❸ G jest ACR -grupą;
- ❹ $G = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} \left(Z(p^{n_p}) \oplus \left(\bigoplus_{i \in I_p} Z(p^\infty) \right) \right)$, gdzie $n_p \in \mathbb{N}_0$.

Twierdzenie 17

Jeżeli G jest mieszaną Sl -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.

Twierdzenie 17

Jeżeli G jest mieszaną Sl -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.

Twierdzenie 18

*Jeżeli G jest mieszaną CR -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.
Ponadto jeśli grupa G_p nie jest cykliczna, to $r_0(H) \leq 1$.*

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 17

Jeżeli G jest mieszaną Sl -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.

Twierdzenie 18

*Jeżeli G jest mieszaną CR -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.
Ponadto jeśli grupa G_p nie jest cykliczna, to $r_0(H) \leq 1$.*

Twierdzenie 19

Jeżeli G jest mieszaną Sl_H -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ i $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH \leq 1$.

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 17

Jeżeli G jest mieszaną Sl -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.

Twierdzenie 18

*Jeżeli G jest mieszaną CR -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ oraz $H = pH$.
Ponadto jeśli grupa G_p nie jest cykliczna, to $r_0(H) \leq 1$.*

Twierdzenie 19

Jeżeli G jest mieszaną Sl_H -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ i $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH \leq 1$.

Twierdzenie 20

*Jeżeli G jest mieszaną ACR -grupą i $p \in \mathbb{P}(G)$, to $G = G_p \oplus H$ i $\dim_{\mathbb{Z}_p} H/pH \leq 1$.
W szczególności $H = pH$, gdy grupa G_p nie jest ani podzielna, ani zredukowana.
Ponadto, jeśli grupa G_p nie jest cykliczna, to $r_0(H) = 1$.*

Twierdzenie 21

Jeżeli G jest mieszaną $Sl_{(H)}$ -grupą, to $T(G) = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} Z(p)$.

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 21

Jeżeli G jest mieszaną $Sl_{(H)}$ -grupą, to $T(G) = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} Z(p)$.

Twierdzenie 22

Beztorsyjna grupa abelowa G jest Sl_H -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nil_a -grupą albo $G \cong \mathbb{Z}^+$.

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 21

Jeżeli G jest mieszaną $Sl_{(H)}$ -grupą, to $T(G) = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} Z(p)$.

Twierdzenie 22

Beztorsyjna grupa abelowa G jest Sl_H -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nil_a -grupą albo $G \cong \mathbb{Z}^+$.

Stwierdzenie 23

Składnik prosty Sl_H -grupy (Sl -grupy) jest Sl_H -grupą (Sl -grupą).

Wybrane wiadomości o strukturze $Sl_{(H)}$ - oraz $(A)CR$ -grup

Twierdzenie 21

Jeżeli G jest mieszaną $Sl_{(H)}$ -grupą, to $T(G) = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} Z(p)$.

Twierdzenie 22

Beztorsyjna grupa abelowa G jest Sl_H -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy G jest nil_a -grupą albo $G \cong \mathbb{Z}^+$.

Stwierdzenie 23

Składnik prosty Sl_H -grupy (Sl -grupy) jest Sl_H -grupą (Sl -grupą).

Stwierdzenie 24

Niech G będzie mieszaną Sl_H -grupą (Sl -grupą) i niech $\emptyset \neq P \subseteq \mathbb{P}(G)$, przy czym $|P| < \infty$. Wtedy $G = \left(\bigoplus_{p \in P} Z(p) \right) \oplus A$ dla pewnej Sl_H -podgrupy (Sl -podgrupy) A grupy G .

Definicja 25

Mówimy, że mnożenie łącznego pierścienia R jest prawie zerowe, gdy spełniony jest układ warunków:

Definicja 25

Mówimy, że mnożenie łącznego pierścienia R jest prawie zerowe, gdy spełniony jest układ warunków:

1 $x^3 = 0$ dla każdego $x \in R$;

Definicja 25

Mówimy, że mnożenie łącznego pierścienia R jest prawie zerowe, gdy spełniony jest układ warunków:

- 1 $x^3 = 0$ dla każdego $x \in R$;
- 2 dla każdego $x \in R$ istnieje bezkwadratowa liczba naturalna n taka, że $nx^2 = 0$;

Definicja 25

Mówimy, że mnożenie łącznego pierścienia R jest prawie zerowe, gdy spełniony jest układ warunków:

- 1 $x^3 = 0$ dla każdego $x \in R$;
- 2 dla każdego $x \in R$ istnieje bezkwadratowa liczba naturalna n taka, że $nx^2 = 0$;
- 3 $x \cdot y \in \langle x^2 \rangle \cap \langle y^2 \rangle$ dla wszystkich $x, y \in R$.

Definicja 25

Mówimy, że mnożenie łącznego pierścienia R jest prawie zerowe, gdy spełniony jest układ warunków:

- 1 $x^3 = 0$ dla każdego $x \in R$;
- 2 dla każdego $x \in R$ istnieje bezkwadratowa liczba naturalna n taka, że $nx^2 = 0$;
- 3 $x \cdot y \in \langle x^2 \rangle \cap \langle y^2 \rangle$ dla wszystkich $x, y \in R$.

Uwaga 26

Jeżeli R jest pierścieniem z prawie zerowym mnożeniem, to $R^3 = \{0\}$ oraz dla każdego $x \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $nx \in \mathcal{N}(R)$.

Definicja 25

Mówimy, że mnożenie łącznego pierścienia R jest prawie zerowe, gdy spełniony jest układ warunków:

- 1 $x^3 = 0$ dla każdego $x \in R$;
- 2 dla każdego $x \in R$ istnieje bezkwadratowa liczba naturalna n taka, że $nx^2 = 0$;
- 3 $x \cdot y \in \langle x^2 \rangle \cap \langle y^2 \rangle$ dla wszystkich $x, y \in R$.

Uwaga 26

Jeżeli R jest pierścieniem z prawie zerowym mnożeniem, to $R^3 = \{0\}$ oraz dla każdego $x \in R$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $nx \in \mathcal{N}(R)$.

Definicja 27

Jeżeli $\circ$ jest mnożeniem pierścienia R , to $R^\ominus$ oznacza pierścień z mnożeniem $\ominus$ danym wzorem $x \ominus y = x \circ y - y \circ x$ dla wszystkich $x, y \in R$.

Twierdzenie 28

Każda SI_H -grupa jest ACR -grupą.

Sl_H -grupy a ACR -grupy

Twierdzenie 28

Każda Sl_H -grupa jest ACR -grupą.

Dowód

Dla torsyjnych i beztorsyjnych Sl_H -grup teza jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzeń 15, 16 i 22. Rozważmy więc dowolną mieszaną Sl_H -grupę G oraz dowolny łączny pierścień $R = (G, \circ)$. Wtedy R jest H -pierścieniem. Jeżeli $R^2 = \{0\}$, to pierścień R jest przemienny. Załóżmy teraz, że $R^2 \neq \{0\}$. Mamy do rozważenia dwa następujące przypadki:

- (i). $R = \mathcal{N}(R)$. Ponieważ $T(G) \neq \{0\}$, to z [13, Proposition (2.6)] wynika, że R jest pierścieniem z prawie zerowym mnożeniem. Stąd oraz na mocy Uwagi 26 otrzymujemy, że $R^3 = \{0\}$. Zatem $(G \ominus G) \ominus G = G \ominus (G \ominus G) = \{0\}$. Wobec tego H -pierścień $R^\ominus$ spełnia warunek $R^\ominus = \mathcal{N}(R^\ominus)$. Powołując się ponownie na [13, Proposition (2.6)] wnioskujemy, że $R^\ominus$ jest pierścieniem z prawie zerowym mnożeniem. Stąd $x \ominus y \in \langle x \ominus x \rangle = \{0\}$, więc $x \circ y = y \circ x$ dla wszystkich $x, y \in G$. Zatem pierścień R jest przemienny.*
- (ii). $R \neq \mathcal{N}(R)$. Jeżeli $\mathcal{N}(R) = \{0\}$, to przemienność pierścienia R wynika wprost*

Dowód

z [13, (1.4)]. Przypuśćmy teraz, że $\mathcal{N}(R) \neq \{0\}$. Załóżmy nie wprost, że grupa $(R/\mathcal{N}(R))^+$ nie jest torsyjna. Z [13, (3.3)] wynika wówczas, że grupa $\mathcal{N}(R)^+$ jest torsyjna. Ponadto, na mocy [13, (3.5)], $\mathcal{N}(R)_p^+ \neq \{0\}$ jedynie dla skończenie wielu liczb pierwszych p . Stąd, z Twierdzenia 21 i ze Stwierdzenia 24 wynika, że $R^+ = \mathcal{N}(R)^+ \oplus A$ dla pewnej Sl_H -podgrupy A grupy G . Dalej, $A \cong (R/\mathcal{N}(R))^+$ oraz [13, (1.4)] implikuje, iż $(R/\mathcal{N}(R))^+ \cong Z(s) \oplus \mathbb{Z}^+$ dla pewnego $s \in \mathbb{N}$. Istnieje więc składnik prosty grupy G izomorficzny z $\mathbb{Z}^+$, wbrew [8, Corollary 2] i [1, Remark 2.4]. Zatem grupa $(R/\mathcal{N}(R))^+$ jest torsyjna. Z [13, (1.4)] wynika więc, że pierścień $R/\mathcal{N}(R)$ jest idempotentny, skąd $R^3 + \mathcal{N}(R) = R$. Ponieważ grupa $(R/\mathcal{N}(R))^+$ jest torsyjna oraz grupa R^+ jest mieszana, to grupa $\mathcal{N}(R)^+$ nie jest torsyjna. Ponadto $\mathcal{N}(R)$ jest H -pierścieniem, więc [13, Proposition (2.6)] implikuje, że $\mathcal{N}(R)$ jest pierścieniem z prawie zerowym mnożeniem. Stąd oraz na mocy Uwagi 26 uzyskujemy, że $\mathcal{N}(R)^3 = \{0\}$ i dla wszystkich $a, b, c \in R$ istnieją $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}$ takie, że $\alpha a, \beta b, \gamma c \in \mathcal{N}(R)$. Zatem $0 = (\alpha a) \circ (\beta b) \circ (\gamma c) = (\alpha\beta\gamma)(a \circ b \circ c)$, skąd $R^3 \subseteq T(R)$. Wobec tego $T(R) + \mathcal{N}(R) = R$. Ponadto $T(R) = \bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G)} Z(p)$ na mocy Twierdzenia 21,

Sl_H -grupy a ACR -grupy

Dowód

oraz $R \neq \mathcal{N}(R)$, więc $\{p \in \mathbb{P}(G) : R_p \cong \mathbb{Z}_p\} \neq \emptyset$. Oczywiście dla $P = \{p \in \mathbb{P}(G) : R_p \cong \mathbb{Z}_p\}$ zachodzi $\bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G) \setminus P} Z(p) \subseteq \mathcal{N}(R)$, i w konsekwencji $R = \left(\bigoplus_{p \in P} R_p\right) \oplus \mathcal{N}(R)$. Stąd oraz na mocy Stwierdzenia 23 uzyskujemy, że $\mathcal{N}(R)^+$ jest Sl_H -grupą. Zatem pierścień $\mathcal{N}(R)$ jest przemienny na mocy punktu (i). Ponadto, z Twierdzenia 16 wynika, że również pierścień $\bigoplus_{p \in P} R_p$ jest przemienny. Wobec tego pierścień R jest przemienny. Ostatecznie otrzymujemy więc, że G jest ACR -grupą. $\square$

Sl_H -grupy a ACR -grupy

Dowód

oraz $R \neq \mathcal{N}(R)$, więc $\{p \in \mathbb{P}(G) : R_p \cong \mathbb{Z}_p\} \neq \emptyset$. Oczywiście dla $P = \{p \in \mathbb{P}(G) : R_p \cong \mathbb{Z}_p\}$ zachodzi $\bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G) \setminus P} Z(p) \subseteq \mathcal{N}(R)$, i w konsekwencji $R = \left(\bigoplus_{p \in P} R_p\right) \oplus \mathcal{N}(R)$. Stąd oraz na mocy Stwierdzenia 23 uzyskujemy, że $\mathcal{N}(R)^+$ jest Sl_H -grupą. Zatem pierścień $\mathcal{N}(R)$ jest przemienny na mocy punktu (i). Ponadto, z Twierdzenia 16 wynika, że również pierścień $\bigoplus_{p \in P} R_p$ jest przemienny. Wobec tego pierścień R jest przemienny. Ostatecznie otrzymujemy więc, że G jest ACR -grupą. $\square$

Wniosek 29

Klasa Sl_H -grup jest właściwą podklasą klasy ACR -grup.

Sl_H -grupy a ACR -grupy

Dowód

oraz $R \neq \mathcal{N}(R)$, więc $\{p \in \mathbb{P}(G) : R_p \cong \mathbb{Z}_p\} \neq \emptyset$. Oczywiście dla $P = \{p \in \mathbb{P}(G) : R_p \cong \mathbb{Z}_p\}$ zachodzi $\bigoplus_{p \in \mathbb{P}(G) \setminus P} Z(p) \subseteq \mathcal{N}(R)$, i w konsekwencji $R = \left(\bigoplus_{p \in P} R_p\right) \oplus \mathcal{N}(R)$. Stąd oraz na mocy Stwierdzenia 23 uzyskujemy, że $\mathcal{N}(R)^+$ jest Sl_H -grupą. Zatem pierścień $\mathcal{N}(R)$ jest przemienny na mocy punktu (i). Ponadto, z Twierdzenia 16 wynika, że również pierścień $\bigoplus_{p \in P} R_p$ jest przemienny. Wobec tego pierścień R jest przemienny. Ostatecznie otrzymujemy więc, że G jest ACR -grupą. $\square$

Wniosek 29

Klasa Sl_H -grup jest właściwą podklasą klasy ACR -grup.

Stwierdzenie 30

Jeżeli C jest nietrywialną torsyjną CR -grupą oraz A jest podgrupą grupy $\mathbb{Q}^+$ taką, że $A = pA$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(C)$, to $G = C \oplus A$ jest CR -grupą.

Przykład 31

Ze Stwierdzenia 30, Twierdzenia 21 i Uwagi 13 wynika, że $Z(2^\infty) \oplus [\frac{1}{2}]^+$ jest mieszaną (A)CR-grupą niebędącą SI_H -grupą.

Przykład 31

Ze Stwierdzenia 30, Twierdzenia 21 i Uwagi 13 wynika, że $Z(2^\infty) \oplus [\frac{1}{2}]^+$ jest mieszaną (A)CR-grupą niebędącą Sl_H -grupą.

Uwaga 32

Przypuśćmy, że grupa abelowa G nie spełnia warunku CR. Istnieje wówczas $\circ \in \text{Mult}(G)$ takie, że $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$ dla pewnych $g_1, g_2 \in G$. Jeśli więc $R = (G, \circ)$, to mnożenie pierścienia $R^\ominus$ jest niezerowe.

Przykład 31

Ze Stwierdzenia 30, Twierdzenia 21 i Uwagi 13 wynika, że $Z(2^\infty) \oplus [\frac{1}{2}]^+$ jest mieszaną (A)CR-grupą niebędącą SI_H -grupą.

Uwaga 32

Przypuśćmy, że grupa abelowa G nie spełnia warunku CR. Istnieje wówczas $\circ \in \text{Mult}(G)$ takie, że $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$ dla pewnych $g_1, g_2 \in G$. Jeśli więc $R = (G, \circ)$, to mnożenie pierścienia $R^\ominus$ jest niezerowe.

Twierdzenie 33

Każda SI-grupa jest CR-grupą. W szczególności każda SI-grupa jest AR-grupą.

SI-grupy a CR-grupy

Przykład 31

Ze Stwierdzenia 30, Twierdzenia 21 i Uwagi 13 wynika, że $Z(2^\infty) \oplus [\frac{1}{2}]^+$ jest mieszaną (A)CR-grupą niebędącą SI_H -grupą.

Uwaga 32

Przypuśćmy, że grupa abelowa G nie spełnia warunku CR. Istnieje wówczas $\circ \in \text{Mult}(G)$ takie, że $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$ dla pewnych $g_1, g_2 \in G$. Jeśli więc $R = (G, \circ)$, to mnożenie pierścienia $R^\ominus$ jest niezerowe.

Twierdzenie 33

Każda SI-grupa jest CR-grupą. W szczególności każda SI-grupa jest AR-grupą.

Dowód

Dla torsyjnych SI-grup teza jest bezpośrednią konsekwencją Twierdzeń 15 i 16. Rozważmy teraz dowolną nietorsyjną SI-grupę G oraz dowolne $x, y \in G$.

Dowód

Jeżeli grupa G jest mieszana, to istnieje pierścień R taki, że $R^+ = G$ i $R^2 \neq \{0\}$. Niech $\circ$ oznacza mnożenie w R . Wtedy $R^\ominus$ jest pierścieniem, w którym wszystkie podpierścienie są ideałami oraz $g^2 = 0$ dla każdego $g \in G$. Stąd $\langle x \rangle = [x]$ i $\langle y \rangle = [y]$ w $R^\ominus$, więc $\langle x \rangle, \langle y \rangle \triangleleft R^\ominus$. Zatem $x \ominus y = kx = ly$ dla pewnych $k, l \in \mathbb{Z}$, skąd $(kl)(x \ominus y) = (kx) \ominus (ly) = ((x \ominus y) \ominus (x \ominus y)) = 0$. Wobec tego $(R^\ominus)^2 \subseteq T(G)$. Jeśli więc $x \in G \setminus T(G)$, to $k = 0$, skąd $x \ominus y = 0$, co oznacza iż $x \circ y = y \circ x$. Stąd $G \setminus T(G) \subseteq \mathcal{Z}(R)$. Jeżeli $h \in T(G)$, to $h + z \in \mathcal{Z}(R)$ dla każdego $z \in G \setminus T(G)$, więc $h = (h + z) - z \in \mathcal{Z}(R)$. Zatem $G \subseteq \mathcal{Z}(R)$, skąd wynika, iż G jest CR-grupą.

Załóżmy teraz, że $T(G) = \{0\}$. Jeżeli G nie jest CR-grupą, to z Uwagi 32 wynika istnienie pierścienia P o grupie addytywnej G , w którym $g_1^2 = g_2^2 = 0$ i $g_1 g_2 \neq 0$ dla pewnych $g_1, g_2 \in G$. Ponieważ każdy podpierścień pierścienia P jest ideałem, to $\langle g_i \rangle = [g_i] \triangleleft P$ dla $i = 1, 2$. Wobec tego $g_1 g_2 = Kg_1 = Lg_2$ dla pewnych $K, L \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, skąd $K(g_1 g_2) = (Kg_1)g_2 = Lg_2^2 = 0$. Ale $K \neq 0$, $g_1 g_2 \neq 0$ oraz $T(G) = \{0\}$, sprzeczność. Zatem G jest CR-grupą. Stąd oraz na mocy Uwagi 13 uzyskujemy, że AR-grupą. $\square$

Wniosek 34

Klasa SI -grup jest właściwą podklasą klasy CR -grup.

Sl_H -grupy a ACR -grupy

Wniosek 34

Klasa Sl -grup jest właściwą podklasą klasy CR -grup.

Przykład 35

Ponieważ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ntriangleleft \mathbb{Q}$ oraz każde mnożenie pierścieniowe $$ określone na grupie $\mathbb{Q}^+$ jest całkowicie zdeterminowane przez wartość $1 * 1$, to $\mathbb{Q}^+$ jest CR -grupą niebędącą Sl -grupą.*

SI_H -grupy a ACR -grupy

Wniosek 34

Klasa SI -grup jest właściwą podklasą klasy CR -grup.

Przykład 35

Ponieważ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ntriangleleft \mathbb{Q}$ oraz każde mnożenie pierścieniowe $$ określone na grupie $\mathbb{Q}^+$ jest całkowicie zdeterminowane przez wartość $1 * 1$, to $\mathbb{Q}^+$ jest CR -grupą niebędącą SI -grupą.*

Wniosek 36

Grupa abelowa G jest SI -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy G może być grupą addytywną jedynie H -pierścieni.

Sl_H -grupy a ACR -grupy

Wniosek 34

Klasa Sl -grup jest właściwą podklasą klasy CR -grup.

Przykład 35

Ponieważ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ntriangleleft \mathbb{Q}$ oraz każde mnożenie pierścieniowe $$ określone na grupie $\mathbb{Q}^+$ jest całkowicie zdeterminowane przez wartość $1 * 1$, to $\mathbb{Q}^+$ jest CR -grupą niebędącą Sl -grupą.*

Wniosek 36

Grupa abelowa G jest Sl -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy G może być grupą addytywną jedynie H -pierścieni.

Twierdzenie 37

Beztorsyjna grupa abelowa A jest Sl -grupą wtedy i tylko wtedy gdy $A \cong \mathbb{Z}^+$ albo A jest nil-grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Założmy, że A jest SI -grupą. Wtedy A jest SI_H -grupą, więc $A \cong \mathbb{Z}^+$ albo A jest nil_a -grupą ma mocy Twierdzenia 22. Ponadto z Twierdzenia 33 wynika A jest AR -grupą. Jeśli więc $A \not\cong \mathbb{Z}^+$, to A jest nil -grupą. Implikacja przeciwna jest oczywista. $\square$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Założmy, że A jest SI -grupą. Wtedy A jest SI_H -grupą, więc $A \cong \mathbb{Z}^+$ albo A jest nil_a -grupą ma mocy Twierdzenia 22. Ponadto z Twierdzenia 33 wynika A jest AR -grupą. Jeśli więc $A \not\cong \mathbb{Z}^+$, to A jest nil -grupą. Implikacja przeciwna jest oczywista. $\square$

Stwierdzenie 38

Niech B będzie nil_a -grupą taką, że $B_p = \{0\}$ dla pewnego $p \in \mathbb{P}$. Jeżeli istnieje $b_0 \in B$ takie, że $B = \langle b_0 \rangle + pB$, to $Z(p) \oplus B$ jest SI_H -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Załóżmy, że A jest SI -grupą. Wtedy A jest SI_H -grupą, więc $A \cong \mathbb{Z}^+$ albo A jest nil_a -grupą ma mocy Twierdzenia 22. Ponadto z Twierdzenia 33 wynika A jest AR -grupą. Jeśli więc $A \not\cong \mathbb{Z}^+$, to A jest nil -grupą. Implikacja przeciwna jest oczywista. $\square$

Stwierdzenie 38

Niech B będzie nil_a -grupą taką, że $B_p = \{0\}$ dla pewnego $p \in \mathbb{P}$. Jeżeli istnieje $b_0 \in B$ takie, że $B = \langle b_0 \rangle + pB$, to $Z(p) \oplus B$ jest SI_H -grupą.

Przykład 39

Niech $B = \langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \rangle$. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że B jest nil -grupą i $B = \langle 1 \rangle + 5B$. Ze Stwierdzenia 38 oraz Twierdzenia 17 wynika więc, że $Z(5) \oplus B$ jest mieszaną SI_H -grupą niebędącą SI -grupą.

Definicja 40

Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{X}$ oznaczają odpowiednio dowolnie ustalony nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{P}$, pierścień $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ oraz dowolny niepusty niezależny podzbiór grupy $\mathcal{R}^+$ zawierający wyłącznie elementy nieskończonego rzędu. Ponadto definiujemy:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond} = \{a \in \mathcal{R} : na \in \langle \mathcal{X} \rangle \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Definicja 40

Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{X}$ oznaczają odpowiednio dowolnie ustalony nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{P}$, pierścień $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ oraz dowolny niepusty niezależny podzbiór grupy $\mathcal{R}^+$ zawierający wyłącznie elementy nieskończonego rzędu. Ponadto definiujemy:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond} = \{a \in \mathcal{R} : na \in \langle \mathcal{X} \rangle \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 41

Niech $A = \langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- 1 A jest SI -grupą;

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Definicja 40

Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{X}$ oznaczają odpowiednio dowolnie ustalony nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{P}$, pierścień $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ oraz dowolny niepusty niezależny podzbiór grupy $\mathcal{R}^+$ zawierający wyłącznie elementy nieskończonego rzędu. Ponadto definiujemy:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond} = \{a \in \mathcal{R} : na \in \langle \mathcal{X} \rangle \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 41

Niech $A = \langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ① A jest SI -grupą;
- ② A jest SI_H -grupą;

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Definicja 40

Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{X}$ oznaczają odpowiednio dowolnie ustalony nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{P}$, pierścień $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ oraz dowolny niepusty niezależny podzbiór grupy $\mathcal{R}^+$ zawierający wyłącznie elementy nieskończonego rzędu. Ponadto definiujemy:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond} = \{a \in \mathcal{R} : na \in \langle \mathcal{X} \rangle \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 41

Niech $A = \langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ① A jest SI -grupą;
- ② A jest SI_H -grupą;
- ③ jeżeli $c \in \mathcal{R}$ oraz $a \cdot c \cdot b \in A$ dla wszystkich $a, b \in A$, to $|\text{supp}(c) \cap \text{supp}(x)| < \infty$ dla każdego $x \in A$;

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Definicja 40

Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{X}$ oznaczają odpowiednio dowolnie ustalony nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{P}$, pierścień $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ oraz dowolny niepusty niezależny podzbiór grupy $\mathcal{R}^+$ zawierający wyłącznie elementy nieskończonego rzędu. Ponadto definiujemy:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_\diamond = \{a \in \mathcal{R} : na \in \langle \mathcal{X} \rangle \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 41

Niech $A = \langle \mathcal{X} \rangle_\diamond$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- 1 A jest SI -grupą;
- 2 A jest SI_H -grupą;
- 3 jeżeli $c \in \mathcal{R}$ oraz $a \cdot c \cdot b \in A$ dla wszystkich $a, b \in A$, to $|\text{supp}(c) \cap \text{supp}(x)| < \infty$ dla każdego $x \in A$;
- 4 jeżeli $c \in \mathcal{R}$ oraz dla wszystkich $x, y \in \mathcal{X}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n(x \cdot c \cdot y) \in \langle \mathcal{X} \rangle$, to $|\text{supp}(c) \cap \text{supp}(x)| < \infty$ dla każdego $x \in \mathcal{X}$;

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Definicja 40

Niech $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}$ i $\mathcal{X}$ oznaczają odpowiednio dowolnie ustalony nieskończony podzbiór zbioru $\mathbb{P}$, pierścień $\prod_{p \in \mathcal{P}} \mathbb{Z}_p$ oraz dowolny niepusty niezależny podzbiór grupy $\mathcal{R}^+$ zawierający wyłącznie elementy nieskończonego rzędu. Ponadto definiujemy:

$$\langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond} = \{a \in \mathcal{R} : na \in \langle \mathcal{X} \rangle \text{ dla pewnego } n \in \mathbb{N}\}.$$

Twierdzenie 41

Niech $A = \langle \mathcal{X} \rangle_{\diamond}$. Wówczas następujące warunki są równoważne:

- ❶ A jest SI -grupą;
- ❷ A jest SI_H -grupą;
- ❸ jeżeli $c \in \mathcal{R}$ oraz $a \cdot c \cdot b \in A$ dla wszystkich $a, b \in A$, to $|\text{supp}(c) \cap \text{supp}(x)| < \infty$ dla każdego $x \in A$;
- ❹ jeżeli $c \in \mathcal{R}$ oraz dla wszystkich $x, y \in \mathcal{X}$ istnieje $n \in \mathbb{N}$ takie, że $n(x \cdot c \cdot y) \in \langle \mathcal{X} \rangle$, to $|\text{supp}(c) \cap \text{supp}(x)| < \infty$ dla każdego $x \in \mathcal{X}$;
- ❺ $\square A = T(A)$, przy czym $\square A = \sum_{* \in \text{Mult}(A)} A * A$.

Twierdzenie 42

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje nierozszczepialna SI -grupa A taka, że $A/\square A \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}^+$ oraz $\square A = T(A)$. W szczególności, $A/\square A$ nie jest nil_a -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Twierdzenie 42

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje nierozszczepialna SI -grupa A taka, że $A/\square A \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}^+$ oraz $\square A = T(A)$. W szczególności, $A/\square A$ nie jest nil_a -grupą.

Idea dowodu

Niech $n \in \{2, 3, \dots\}$. Istnieje element $x \in \mathcal{R}$ przestępny nad $\mathbb{Z}$. SI -grupą spełniającą warunki twierdzenia jest $A = \langle x, x^2, \dots, x^n \rangle_{\diamond}$.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Twierdzenie 42

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje nierozszczepialna SI -grupa A taka, że $A/\square A \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}^+$ oraz $\square A = T(A)$. W szczególności, $A/\square A$ nie jest nil_a -grupą.

Idea dowodu

Niech $n \in \{2, 3, \dots\}$. Istnieje element $x \in \mathcal{R}$ przestępny nad $\mathbb{Z}$. SI -grupą spełniającą warunki twierdzenia jest $A = \langle x, x^2, \dots, x^n \rangle_{\diamond}$.

Przykład 43

Z Przykładu 39 oraz Twierdzeń 28 i 18 wynika, że $Z(5) \oplus \left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle$ jest mieszaną ACR -grupą niebędącą CR -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Twierdzenie 42

Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ istnieje nierozszczepialna SI -grupa A taka, że $A/\square A \cong \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Q}^+$ oraz $\square A = T(A)$. W szczególności, $A/\square A$ nie jest nil_a -grupą.

Idea dowodu

Niech $n \in \{2, 3, \dots\}$. Istnieje element $x \in \mathcal{R}$ przestępny nad $\mathbb{Z}$. SI -grupą spełniającą warunki twierdzenia jest $A = \langle x, x^2, \dots, x^n \rangle_{\diamond}$.

Przykład 43

Z Przykładu 39 oraz Twierdzeń 28 i 18 wynika, że $Z(5) \oplus \left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle$ jest mieszaną ACR -grupą niebędącą CR -grupą.

Twierdzenie 44

Jeżeli C jest nietrywialną torsyjną AR -grupą oraz A beztorsyjną nil -grupą taką, że $A = pA$ dla każdego $p \in \mathbb{P}(C)$, to $G = C \oplus A$ jest AR -grupą.

Przykład 45

$Z(2^\infty) \oplus \left(\left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle + \left[\frac{1}{2} \right]^+ \right) \oplus \left(\left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle + \left[\frac{1}{2} \right]^+ \right)$ jest mieszaną AR -grupą niebędącą CR -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Przykład 45

$Z(2^\infty) \oplus \left(\left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle + \left[\frac{1}{2} \right]^+ \right) \oplus \left(\left\langle \frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \right\rangle + \left[\frac{1}{2} \right]^+ \right)$ jest mieszaną AR -grupą niebędącą CR -grupą.

Przykład 46

Niech $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych i niech $G = G_1 \oplus G_2 \oplus G_3$, gdzie $G_1 = \left\langle \frac{1}{p_{2n-1}} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$, $G_2 = \left\langle \frac{1}{p_{2n}} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$ oraz $G_3 = \left\langle \frac{1}{p_n} : n \in \mathbb{N} \right\rangle$. Z Twierdzenia 2 i własności produktu tensorowego grup abelowych wynika, że $\text{Mult}(G) \cong \text{Hom}(G_1 \otimes G_2, G_3) \oplus \text{Hom}(G_2 \otimes G_1, G_3)$. Jeśli więc $*$ $\in \text{Mult}(G)$, to $G * G \subseteq G_3 x_3$ i $(G_3 x_3) * G = G * (G_3 x_3) = \{0\}$. Zatem $(G * G) * G = G * (G * G) = \{0\}$, co implikuje łączność pierścienia $(G, *)$. Wobec tego G jest AR -grupą. Bezpośrednie sprawdzenie pokazuje, że funkcja $\circledast: G \times G \rightarrow G$ dana wzorem $(g_1, g_2, g_3) \circledast (q_1, q_2, q_3) = (0, 0, g_1 q_2)$ wprowadza na G strukturę pierścienia. Ponieważ $x_1 \circledast x_2 = x_3$ oraz $x_2 \circledast x_1 = 0$, to pierścień $(G, \circledast)$ nie jest przemienny. Zatem G nie jest CR -grupą. W szczególności G nie jest ACR -grupą.

Definicja 47

Niech $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych.

Charakterystyką $\chi(a)$ elementu a beztorsyjnej grupy abelowej A nazywamy ciąg $(h_{p_n}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ wszystkich p_n -wysokości elementu a w A .

Pojęcie typu elementu beztorsyjnej grupy abelowej

Definicja 47

Niech $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Charakterystyką $\chi(a)$ elementu a beztorsyjnej grupy abelowej A nazywamy ciąg $(h_{p_n}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ wszystkich p_n -wysokości elementu a w A .

Uwaga 48

Dowolny ciąg $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach w zbiorze $\mathbb{S} = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ jest charakterystyką pewnego elementu w pewnej podgrupie grupy $\mathbb{Q}^+$. Dlatego takie ciągi nazywamy krótko charakterystykami.

Pojęcie typu elementu beztorsyjnej grupy abelowej

Definicja 47

Niech $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich liczb pierwszych. Charakterystyką $\chi(a)$ elementu a beztorsyjnej grupy abelowej A nazywamy ciąg $(h_{p_n}(a))_{n \in \mathbb{N}}$ wszystkich p_n -wysokości elementu a w A .

Uwaga 48

Dowolny ciąg $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o wyrazach w zbiorze $\mathbb{S} = \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ jest charakterystyką pewnego elementu w pewnej podgrupie grupy $\mathbb{Q}^+$. Dlatego takie ciągi nazywamy krótko charakterystykami.

Uwaga 49

Zbiór $\mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ wszystkich charakterystyk wraz z relacją $\preceq$ częściowego porządku:

$$(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \preceq (l_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow k_n \leq l_n, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N},$$

jest dystrybutywną kratą zupełną. $(0)_{n \in \mathbb{N}}$ oraz $(\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ są odpowiednio elementami najmniejszym i największym w poscie $\mathcal{L} = (\mathbb{S}^{\mathbb{N}}, \preceq)$.

Uwaga 50

W opisie algebraicznym, $\mathcal{L} = (\mathbb{S}^{\mathbb{N}}, \wedge, \vee)$, gdzie
 $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge (l_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\min\{k_n, l_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ i $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \vee (l_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\max\{k_n, l_n\})_{n \in \mathbb{N}}$,
przy czym $\max\{\infty, m\} = \infty$ oraz $\min\{\infty, m\} = m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}_0$.

Pojęcie typu elementu beztorsyjnej grupy abelowej

Uwaga 50

W opisie algebraicznym, $\mathcal{L} = (\mathbb{S}^{\mathbb{N}}, \wedge, \vee)$, gdzie
 $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge (l_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\min\{k_n, l_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ i $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \vee (l_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\max\{k_n, l_n\})_{n \in \mathbb{N}}$,
przy czym $\max\{\infty, m\} = \infty$ oraz $\min\{\infty, m\} = m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}_0$.

Uwaga 51

Relacja $\sim \subseteq \mathbb{S}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ określona następująco:

$$(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (l_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} (k_n = \infty \Leftrightarrow l_n = \infty) \wedge |\{n \in \mathbb{N} : k_n \neq l_n\}| < \infty \right)$$

jest kongruencją na kracie $\mathcal{L}$.

Pojęcie typu elementu beztorsyjnej grupy abelowej

Uwaga 50

W opisie algebraicznym, $\mathcal{L} = (\mathbb{S}^{\mathbb{N}}, \wedge, \vee)$, gdzie $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \wedge (l_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\min\{k_n, l_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ i $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \vee (l_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\max\{k_n, l_n\})_{n \in \mathbb{N}}$, przy czym $\max\{\infty, m\} = \infty$ oraz $\min\{\infty, m\} = m$ dla każdego $m \in \mathbb{N}_0$.

Uwaga 51

Relacja $\sim \subseteq \mathbb{S}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{S}^{\mathbb{N}}$ określona następująco:

$$(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (l_n)_{n \in \mathbb{N}} \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N} (k_n = \infty \Leftrightarrow l_n = \infty) \wedge |\{n \in \mathbb{N} : k_n \neq l_n\}| < \infty \right)$$

jest kongruencją na kracie $\mathcal{L}$.

Definicja 52

Kratę ilorazową $\mathcal{L}/\sim$ oznaczamy symbolem $\mathcal{T}$, zaś jej elementy nazywamy typami. Mówimy, że element a beztorsyjnej grupy abelowej A ma typ t wówczas, gdy $\chi(a) \in t$. Typ elementu a oznaczamy symbolem $t(a)$.

Definicja 53

Grupę abelową, w której każdy niezerowy element ma ten sam typ nazywamy homogeniczną. Typem homogenicznej grupy A nazywamy typ jej dowolnego niezerowego elementu. Fakt, że grupa A ma typ t zapisujemy symbolicznie: $t(A) = t$.

Pojęcie typu elementu beztorsyjnej grupy abelowej

Definicja 53

Grupę abelową, w której każdy niezerowy element ma ten sam typ nazywamy homogeniczną. Typem homogenicznej grupy A nazywamy typ jej dowolnego niezerowego elementu. Fakt, że grupa A ma typ t zapisujemy symbolicznie: $t(A) = t$.

Stwierdzenie 54

Jeżeli A_1 i A_2 są podgrupami w $\mathbb{Q}^+$ odpowiednio o typach t_1 i t_2 , to:

$$\text{Hom}(A_1, A_2) \neq \{0\} \iff t_1 \leq t_2.$$

Pojęcie typu elementu beztorsyjnej grupy abelowej

Definicja 53

Grupę abelową, w której każdy niezerowy element ma ten sam typ nazywamy homogeniczną. Typem homogenicznej grupy A nazywamy typ jej dowolnego niezerowego elementu. Fakt, że grupa A ma typ t zapisujemy symbolicznie: $t(A) = t$.

Stwierdzenie 54

Jeżeli A_1 i A_2 są podgrupami w $\mathbb{Q}^+$ odpowiednio o typach t_1 i t_2 , to:

$$\text{Hom}(A_1, A_2) \neq \{0\} \iff t_1 \leq t_2.$$

Twierdzenie 55

Istnieje nierozkładalna beztorsyjna AR-grupa G dowolnej skończonej rangi $n > 3$ taka, że G nie jest CR-grupą oraz $G/\square G$ nie jest nil_a -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Niech $n \in \{4, 5, \dots\}$ i niech $p_2, p_3, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ będą parami różne. Rozważmy dowolny $(n-1)$ -elementowy podział $\{P_1, P_2, \dots, P_{n-1}\}$ zbioru $\mathbb{P} \setminus \{p_2, p_3, \dots, p_n\}$ taki, że $|P_i| = \infty$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Niech ponadto:

$$A_i = \left\langle \frac{1}{p} : p \in P_i \right\rangle \text{ dla każdego } i \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

$$A_n = \left\langle \frac{1}{p^2} : p \in P_n \right\rangle, \text{ gdzie } P_n = \bigcup_{i=2}^{n-1} P_i,$$

oraz

$$A = \bigoplus_{i=1}^n A_i \text{ i } G = A + \left\langle \frac{1}{p_i}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle.$$

Wówczas G jest beztorsyjną grupą abelową rangi n , $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jest maksymalnym niezależnym podzbiorem w G . Zauważmy, że każdy element g grupy G można zapisać w postaci:

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

$$g = \left(a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{k_i}{p_i} \right) x_1 + \sum_{i=2}^n \left(a_i + \frac{k_i}{p_i} \right) x_i, \quad (1)$$

gdzie $k_2, k_3, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ oraz $a_i \in A_i$ dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Ponadto

$$mG \subseteq A \text{ dla } m = \prod_{i=2}^n p_i. \quad (2)$$

Weźmy dowolne $q_1, q_2, \dots, q_n \in \mathbb{Q}$. Jeżeli $g = q_1 x_1$, to z (1) wynika, że $q_1 = a_1 + \sum_{i=2}^n \frac{k_i}{p_i}$ oraz $\frac{k_i}{p_i} = -a_i \in A_i$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, więc $\frac{k_i}{p_i} \in \mathbb{Z}$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n\}$, skąd $q_1 \in A_1$. Analogicznie, jeśli $g = \sum_{i=2}^n q_i x_i$, to $\sum_{i=2}^n \frac{k_i}{p_i} = -a_1 \in A_1$. Stąd $\frac{k_i}{p_i} \in A_1$, więc $\frac{k_i}{p_i} \in \mathbb{Z}$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n\}$. Zatem $q_i = a_i + \frac{k_i}{p_i} \in A_i$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n\}$. Wobec tego

$$\langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle_*^G = \bigoplus_{i=2}^n A_i x_i \text{ i } \langle x_i \rangle_*^G = A_i x_i \text{ dla każdego } i \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3)$$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Aby wykazać nierozkładalność grupy G , weźmy dowolne $f \in \text{End}(G)$. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieją $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{in} \in \mathbb{Q}$ takie, że $f(x_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} x_j$. Stąd oraz na mocy (2) otrzymujemy, iż:

$$mf\left(\frac{1}{p^s}x_i\right) = \sum_{j=1}^n \frac{m}{p^s} \lambda_{ij} x_j \in A \quad (4)$$

dla wszystkich $p \in P_i$ i $s \in \{0, 1, 2\}$ takich, że $\frac{1}{p^s}x_i \in \langle x_i \rangle_*^G$. Zatem $\lambda_{1j} = 0$ dla $j > 1$, oraz $\lambda_{ij} = 0$ dla różnych $i > 1, j < n$. Wobec tego $f(x_1) = \lambda_{11}x_1 \in \langle x_1 \rangle_*^G$, $f(x_n) = \lambda_{nn}x_n \in \langle x_n \rangle_*^G$ oraz $f(x_i) = \lambda_{ii}x_i + \lambda_{in}x_n \in \langle x_i, x_n \rangle_*^G \subseteq \langle x_2, x_3, \dots, x_n \rangle_*^G$ dla $1 < i < n$, więc z (3) wynika, iż $\lambda_{11} \in A_1, \lambda_{22} \in A_2, \dots, \lambda_{nn} \in A_n$ oraz $\lambda_{in} \in A_n$ dla $1 < i < n$. W świetle (4) uzyskujemy więc, że $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{nn} \in \mathbb{Z}$ oraz $\lambda_{in} \in \mathbb{Z}$ dla $1 < i < n$. Zatem:

$$f(x_i) = \begin{cases} \lambda_i x_i & \text{dla } i = 1 \text{ lub } i = n \\ \lambda_i x_i + \delta_i x_n & \text{dla } 1 < i < n, \end{cases} \quad (5)$$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

gdzie $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{Z}$ i $\delta_2, \delta_3, \dots, \delta_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Dalej, dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ istnieją $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Z}$ takie, że $\lambda_i = m\alpha_i + \beta_i$. Stąd

$$f\left(\frac{1}{p_n}(x_1 + x_n)\right) = \left(\frac{m}{p_n}\alpha_1 + \frac{\beta_1}{p_n}\right)x_1 + \left(\frac{m}{p_n}\alpha_n + \frac{\beta_n}{p_n}\right)x_n \in G.$$

Ponadto $\frac{m}{p_n}\alpha_1 x_1, \frac{m}{p_n}\alpha_n x_n, \frac{\beta_1}{p_n}(x_1 + x_n) \in G$, więc $\frac{\beta_n - \beta_1}{p_n}x_n \in G$. Wobec tego (3) implikuje istnienie takiej $\gamma_n \in \mathbb{Z}$, że $\beta_n = \gamma_n p_n + \beta_1$. Zatem

$\lambda_n = p_n \left(\frac{m}{p_n}\alpha_n + \gamma_n\right) + \beta_1$. Podobnie uzasadnia się, że dla dowolnego $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ zachodzi:

$$f\left(\frac{1}{p_i}(x_1 + x_i)\right) = \left(\frac{m}{p_i}\alpha_1 + \frac{\beta_1}{p_i}\right)x_1 + \left(\frac{m}{p_i}\alpha_i + \frac{\beta_i}{p_i}\right)x_i + \frac{\delta_i}{p_i}x_n \in G$$

oraz

$$\frac{m}{p_i}\alpha_1 x_1, \frac{m}{p_i}\alpha_i x_i, \frac{\beta_1}{p_i}(x_1 + x_i) \in G.$$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Wobec tego $\frac{\beta_i - \beta_1}{p_i} x_i + \frac{\delta_i}{p_i} x_n \in G$. Stąd oraz na mocy (3) otrzymujemy, że $\frac{\beta_i - \beta_1}{p_i} \in A_i$ i w konsekwencji $\beta_i = \gamma_i p_i + \beta_1$ dla pewnego $\gamma_i \in \mathbb{Z}$. Zatem $\lambda_i = p_i \left(\frac{m}{p_i} \alpha_i + \gamma_i \right) + \beta_1$. Wobec tego wzór (5) można zapisać bardziej precyzyjnie:

$$f(x_i) = \begin{cases} (mc_1 + b)x_1 & \text{dla } i = 1 \\ (p_i c_i + b)x_i + d_i x_n & \text{dla } 1 < i < n \\ (p_n c_n + b)x_n & \text{dla } i = n, \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $b, c_1, c_2, \dots, c_n, d_2, d_3, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{Z}$. Weźmy dowolne $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Jeżeli $f = f \circ f$, to z (6) wynika, że

$$\begin{cases} (mc_1 + b)^2 = mc_1 + b \\ (p_n c_n + b)^2 = p_n c_n + b \\ (p_i c_i + b)^2 = p_i c_i + b \\ d_i((p_i c_i + b) + (p_n c_n + b)) = d_i \end{cases}, \quad (7)$$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

skąd każda spośród liczb: $mc_1 + b$, $p_n c_n + b$ oraz $p_i c_i + b$ równa jest 0 albo 1. Załóżmy nie wprost, że $(p_i c_i + b) \neq (p_n c_n + b)$. Mamy do rozpatrzenia dwa przypadki:

(i) $p_i c_i + b = 0$ oraz $p_n c_n + b = 1$. Wtedy $b = -p_i c_i$. Podstawienie tego do pierwszego równania w (7) daje $p_i \left(\frac{m}{p_i} c_1 - c_i \right)^2 = \frac{m}{p_i} c_1 - c_i$. Jeśli więc $\frac{m}{p_i} c_1 - c_i \neq 0$, to $\frac{1}{p_i} = \frac{m}{p_i} c_1 - c_i \in \mathbb{Z}$, co jest niemożliwe. Dlatego $\frac{m}{p_i} c_1 - c_i = 0$, czyli $c_i = \frac{m}{p_i} c_1$. Zatem $b = -mc_1$, skąd $p_n c_n - mc_1 = 1$ i w konsekwencji $\frac{1}{p_n} = c_n - \frac{m}{p_n} c_1 \in \mathbb{Z}$, sprzeczność.

(ii) $p_i c_i + b = 1$ oraz $p_n c_n + b = 0$. Wówczas $b = -p_n c_n$, więc pierwsze równanie dane w (7) implikuje, że $p_n \left(\frac{m}{p_n} c_1 - c_n \right)^2 = \frac{m}{p_n} c_1 - c_n$. Założenie, iż $\frac{m}{p_n} c_1 - c_n \neq 0$ prowadzi do wniosku, że $\frac{1}{p_n} = \frac{m}{p_n} c_1 - c_n \in \mathbb{Z}$, sprzeczność. Zatem $c_n = \frac{m}{p_n} c_1$, skąd $b = -mc_1$. Wobec tego $p_i c_i - mc_1 = 1$, więc $\frac{1}{p_i} = c_i - \frac{m}{p_i} c_1 \in \mathbb{Z}$, sprzeczność.

Dlatego $(p_i c_i + b) = (p_n c_n + b)$. W świetle ostatniego równania w (7) wynika stąd, że $d_i = 0$. Dalej, jeżeli $p_n c_n + b = 0$ i $mc_1 + b = 1$, to $b = -p_n c_n$, skąd

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

$\frac{1}{p_n} = \frac{m}{p_n} c_1 - c_n \in \mathbb{Z}$, co jest niemożliwe. Jeśli natomiast $p_n c_n + b = 1$ i $m c_1 + b = 0$, to $b = -m c_1$, więc $\frac{1}{p_n} = c_n - \frac{m}{p_n} c_1 \in \mathbb{Z}$, sprzeczność. Zatem $p_n c_n + b = m c_1 + b$, skąd

$$m c_1 + b = p_n c_n + b = p_i c_i + b \in \{0, 1\} \text{ oraz } d_i = 0. \quad (8)$$

Wobec tego id_G jest jedynym niezerowym idempotentnym endomorfizmem grupy G , co w świetle [12, p. 50, Lemma 2.1] oznacza, że grupa G jest nierozkładalna. W celu opisanego wszystkich mnożeń pierścieniowych na G , rozważmy dowolne $\star \in \text{Mult}(G)$ i $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas $x_k \star x_l = \sum_{t=1}^n \xi_t x_t$ dla pewnych $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in \mathbb{Q}$, więc z (2) wynika, iż

$$m \left(\left(\frac{1}{p^r} x_k \right) \star \left(\frac{1}{q^s} x_l \right) \right) = \frac{m}{p^r q^s} (x_k \star x_l) = \sum_{t=1}^n \frac{m}{p^r q^s} \xi_t x_t \in A$$

dla wszystkich $p, q \in \mathbb{P}$ i $r, s \in \mathbb{N}_0$ takich, że $\frac{1}{p^r} x_k \in \langle x_k \rangle_*^G$ oraz $\frac{1}{q^s} x_l \in \langle x_l \rangle_*^G$.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Stąd

$$x_i \star x_j = \begin{cases} \zeta_{ij} x_n & \text{dla } i, j \in \{2, 3, \dots, n-1\} \\ 0 & \text{dla pozostałych } i, j \end{cases}, \quad (9)$$

gdzie $\zeta_{ij} \in \mathbb{Q}$ dla wszystkich $i, j \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Zatem $(G \star G) \star G = G \star (G \star G) = \{0\}$ i w konsekwencji pierścień $(G, \star)$ jest łączny. Wobec tego G jest AR -grupą. Rozważmy funkcję $\circledast: G \times G \rightarrow G$ określoną wzorem:

$$\left(\sum_{t=1}^n \alpha_t x_t \right) \circledast \left(\sum_{t=1}^n \beta_t x_t \right) = p_2 p_3 \alpha_2 \beta_3 x_n$$

dla wszystkich $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{Q}$ takich, że $\sum_{t=1}^n \alpha_t x_t, \sum_{t=1}^n \beta_t x_t \in G$. Poprawność określenia funkcji $\circledast$ wynika wprost ze wzoru (1) i inkluzji $A_2 \cdot A_3 \subseteq A_n$. Standardowe sprawdzenie pokazuje, iż jest ona addytywna w obu argumentach oraz że $x_2 \circledast x_3 = x_n$ i $x_3 \circledast x_2 = 0$. Zatem $(G, \circledast)$ jest nieprzemiennym pierścieniem i w konsekwencji G nie jest CR -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

Pozostało udowodnić, że $G/\square G$ nie jest nil_a -grupą. Na mocy (9) oraz (3) uzyskujemy, że $\square G \subseteq A_n x_n$. W celu wykazania inkluzji przeciwnej, weźmy dowolne $j \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ i rozważmy funkcję $\odot: G \times G \rightarrow G$ określoną wzorem:

$$\left(\sum_{t=1}^n \alpha_t x_t \right) \odot \left(\sum_{t=1}^n \beta_t x_t \right) = p_j^2 \alpha_j \beta_j x_n$$

dla wszystkich $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{Q}$ takich, że $\sum_{t=1}^n \alpha_t x_t, \sum_{t=1}^n \beta_t x_t \in G$. Analogicznie jak wcześniej uzasadnia się, że $\odot \in \text{Mult}(G)$. Zauważmy, że $p_j^2 A_j^2 x_n = (A_j x_j) \odot (A_j x_j) \subseteq \square G$. Ponadto $\left(\frac{1}{p_j} (x_1 + x_j) \right) \odot \left(\frac{1}{p_j} (x_1 + x_j) \right) = x_n$, więc $\mathbb{Z} x_n \subseteq \square G$. Stąd $(\mathbb{Z} + p_j^2 A_j^2) x_n \subseteq \square G$. Weźmy dowolne $w \in \mathbb{Z}$ i $u \in \mathbb{N}$ takie, że $\text{NWD}(w, u) = 1$ i $\frac{w}{u} \in A_j^2$. Wtedy $p_j \nmid u$, więc istnieją $K, L \in \mathbb{Z}$ takie, że $w = Lu + Kp_j^2$. Zatem $\frac{w}{u} = L + p_j^2 \frac{K}{u} \in \mathbb{Z} + p_j^2 A_j^2$, skąd $A_j^2 \subseteq \mathbb{Z} + p_j^2 A_j^2$. Oczywiście prawdziwa jest także inkluzja przeciwna, więc $\mathbb{Z} + p_j^2 A_j^2 = A_j^2$. Stąd $A_j^2 x_n \subseteq \square G$. Ponadto, $A_n = \sum_{j=2}^{n-1} A_j^2$, więc $A_n x_n \subseteq \square G$ i w konsekwencji $\square G = A_n x_n$. Zatem $G/\square G \cong H \oplus Z(p_n)$, gdzie

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

$$H = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i \right) + \left\langle \frac{1}{p_i}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \right\rangle.$$

Stąd $G/\square G$ nie jest nil_a -grupą. $\square$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

$$H = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i \right) + \left\langle \frac{1}{p_i}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \right\rangle.$$

Stąd $G/\Box G$ nie jest nil_a -grupą. $\square$

Uwaga 56

Dla $n = 3$ grupa G skonstruowana w dowodzie Twierdzenia 55 jest nierozkładalną CR -grupą taką, że $G/\Box G$ nie jest nil_a -grupą oraz każdy pierścień R o grupie addytywnej G spełnia warunek $R^3 = \{0\}$.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Dowód

$$H = \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i \right) + \left\langle \frac{1}{p_i}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n-1\} \right\rangle.$$

Stąd $G/\Box G$ nie jest nil_a -grupą. $\square$

Uwaga 56

Dla $n = 3$ grupa G skonstruowana w dowodzie Twierdzenia 55 jest nierozkładalną CR -grupą taką, że $G/\Box G$ nie jest nil_a -grupą oraz każdy pierścień R o grupie addytywnej G spełnia warunek $R^3 = \{0\}$.

Twierdzenie 57

Istnieje nierozkładalna beztorsyjna ACR -grupa G dowolnej skończonej rangi $n > 2$ taka, że G nie jest CR -grupą, $\Box_a G = \Box G$ oraz $G/\Box G$ nie jest nil_a -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Idea dowodu

Dla dowolnego $n \in \{2, 3, \dots\}$, dowolnych parami różnych $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ oraz dowolnego $(n-1)$ -elementowego podziału $\{P, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}\}$ zbioru $\mathbb{P} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ takiego, że $|P_i| = |P| = \infty$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ definiujemy: $A_1 = \left[\frac{1}{p_1}\right]^+$, $A_n = \left\langle \frac{1}{p} : p \in P \right\rangle$ oraz $A_i = \left[\frac{1}{p} : p \in P \cup P_i\right]^+$ przy czym i przebiega zbiór $\{2, 3, \dots, n-1\}$. Niech ponadto $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ oraz

$$G = A + \left\langle \frac{1}{p_i} (x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle.$$

Wtedy G jest nierozkładalną beztorsyjną ACR -grupą rangi n niebędącą CR -grupą i taką, że $G/\square G$ nie jest nil_a -grupą. W szczególności, $\square G = \square_a G = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i x_i$ oraz $G/\square G \cong A_n \oplus \bigoplus_{i=2}^n Z(p_i)$

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Idea dowodu

Dla dowolnego $n \in \{2, 3, \dots\}$, dowolnych parami różnych $p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{P}$ oraz dowolnego $(n-1)$ -elementowego podziału $\{P, P_2, P_3, \dots, P_{n-1}\}$ zbioru $\mathbb{P} \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ takiego, że $|P_i| = |P| = \infty$ dla każdego $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$ definiujemy: $A_1 = \left[\frac{1}{p_1}\right]^+$, $A_n = \left\langle \frac{1}{p} : p \in P \right\rangle$ oraz $A_i = \left[\frac{1}{p} : p \in P \cup P_i\right]^+$ przy czym i przebiega zbiór $\{2, 3, \dots, n-1\}$. Niech ponadto $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ oraz

$$G = A + \left\langle \frac{1}{p_i} (x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle.$$

Wtedy G jest nierozkładalną beztorsyjną ACR -grupą rangi n niebędącą CR -grupą i taką, że $G/\square G$ nie jest nil_a -grupą. W szczególności, $\square G = \square_a G = \bigoplus_{i=1}^{n-1} A_i x_i$ oraz $G/\square G \cong A_n \oplus \bigoplus_{i=2}^n Z(p_i)$

Twierdzenie 58

Istnieje nierozkładalna beztorsyjna CR -grupa G dowolnej skończonej rangi $n > 2$ taka, że $G/\square G$ nie jest nil_a -grupą.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Idea dowodu

Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną, zaś $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – parami różnymi liczbami pierwszymi. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definiujemy: $A_i = \left[\frac{1}{p_i} \right]^+$. Niech ponadto $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ oraz $G = A + \left\langle \frac{1}{p_0}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle$. Wtedy G jest nierozkładalną CR -grupą rangi n taką, że $\square G = A$, skąd $G/\square G \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} Z(p_0)$.

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Idea dowodu

Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną, zaś $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – parami różnymi liczbami pierwszymi. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definiujemy: $A_i = \left[\frac{1}{p_i}\right]^+$. Niech ponadto $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ oraz $G = A + \left\langle \frac{1}{p_0}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle$. Wtedy G jest nierozkładalną CR -grupą rangi n taką, że $\square G = A$, skąd $G/\square G \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} Z(p_0)$.

Twierdzenie 59

Beztorsyjna grupa abelowa G rangi dwa jest ACR -grupą niebędącą CR -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $G = G_1 \oplus G_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup G_1 oraz G_2 grupy G takich, że zachodzi dokładnie jeden z dwóch następujących przypadków:

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Idea dowodu

Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną, zaś $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – parami różnymi liczbami pierwszymi. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definiujemy: $A_i = \left[\frac{1}{p_i}\right]^+$. Niech ponadto $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ oraz $G = A + \left\langle \frac{1}{p_0}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle$. Wtedy G jest nierozkładalną CR -grupą rangi n taką, że $\square G = A$, skąd $G/\square G \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} Z(p_0)$.

Twierdzenie 59

Beztorsyjna grupa abelowa G rangi dwa jest ACR -grupą niebędącą CR -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $G = G_1 \oplus G_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup G_1 oraz G_2 grupy G takich, że zachodzi dokładnie jeden z dwóch następujących przypadków:

① $t(G_i)^2 = t(G_i)$, $t(G_j)^2 > t(G_j)$, $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$;

Przykłady SI -, SI_H -, CR -, ACR - i AR -grup

Idea dowodu

Niech $n > 2$ będzie liczbą naturalną, zaś $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ – parami różnymi liczbami pierwszymi. Dla każdego $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ definiujemy: $A_i = \left[\frac{1}{p_i}\right]^+$. Niech ponadto $A = \bigoplus_{i=1}^n A_i$ oraz $G = A + \left\langle \frac{1}{p_0}(x_1 + x_i) : i \in \{2, 3, \dots, n\} \right\rangle$. Wtedy G jest nierozkładalną CR -grupą rangi n taką, że $\square G = A$, skąd $G/\square G \cong \bigoplus_{i=1}^{n-1} Z(p_0)$.

Twierdzenie 59

Beztorsyjna grupa abelowa G rangi dwa jest ACR -grupą niebędącą CR -grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $G = G_1 \oplus G_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup G_1 oraz G_2 grupy G takich, że zachodzi dokładnie jeden z dwóch następujących przypadków:

- 1 $t(G_i)^2 = t(G_i)$, $t(G_j)^2 > t(G_j)$, $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$;
- 2 $t(G_i)^2 > t(G_i)$, $t(G_j)^2 > t(G_j)$ oraz $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$.

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- 1 G nie jest AR -grupą;

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ G nie jest AR -grupą;
- ❷ G nie jest CR -grupą;

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ G nie jest AR -grupą;
- ❷ G nie jest CR -grupą;
- ❸ $G = G_1 \oplus G_2$, przy czym $G_1 \neq \{0\}$, $G_2 \neq \{0\}$ oraz $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ G nie jest AR -grupą;
- ❷ G nie jest CR -grupą;
- ❸ $G = G_1 \oplus G_2$, przy czym $G_1 \neq \{0\}$, $G_2 \neq \{0\}$ oraz $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;
- ❹ $G \cong H_1 \oplus H_2$, gdzie H_1 i H_2 są takimi nietrywialnymi podgrupami w $\mathbb{Q}^+$, że $n(H_1 \cdot H_2) \subseteq H_2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ G nie jest AR -grupą;
- ❷ G nie jest CR -grupą;
- ❸ $G = G_1 \oplus G_2$, przy czym $G_1 \neq \{0\}$, $G_2 \neq \{0\}$ oraz $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;
- ❹ $G \cong H_1 \oplus H_2$, gdzie H_1 i H_2 są takimi nietrywialnymi podgrupami w $\mathbb{Q}^+$, że $n(H_1 \cdot H_2) \subseteq H_2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;
- ❺ G jest grupą addytywną pewnego niełącznego i jednocześnie nieprzemiennego pierścienia.

Beztorsyjne CR - i AR -grupy rangi dwa

Twierdzenie 60

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ G nie jest AR -grupą;
- ❷ G nie jest CR -grupą;
- ❸ $G = G_1 \oplus G_2$, przy czym $G_1 \neq \{0\}$, $G_2 \neq \{0\}$ oraz $t(G_i) \cdot t(G_j) = t(G_i)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;
- ❹ $G \cong H_1 \oplus H_2$, gdzie H_1 i H_2 są takimi nietrywialnymi podgrupami w $\mathbb{Q}^+$, że $n(H_1 \cdot H_2) \subseteq H_2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;
- ❺ G jest grupą addytywną pewnego niełącznego i jednocześnie nieprzemiennego pierścienia.

Wniosek 61

Warunki CR i AR są równoważne dla beztorsyjnych grup abelowych rangi dwa.

Twierdzenie 62

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

Twierdzenie 62

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- 1 G nie jest ACR -grupą;

Twierdzenie 62

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G nie jest ACR-grupą;*
- ❷ *$G = G_1 \oplus G_2$, gdzie G_1 i G_2 są nietrywialnymi podgrupami grupy G spełniającymi warunki $\mathfrak{t}(G_i)^2 = \mathfrak{t}(G_i)$ oraz $\mathfrak{t}(G_i) \cdot \mathfrak{t}(G_j) = \mathfrak{t}(G_j)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;*

Twierdzenie 62

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G nie jest ACR-grupą;*
- ❷ *$G = G_1 \oplus G_2$, gdzie G_1 i G_2 są nietrywialnymi podgrupami grupy G spełniającymi warunki $\mathfrak{t}(G_i)^2 = \mathfrak{t}(G_i)$ oraz $\mathfrak{t}(G_i) \cdot \mathfrak{t}(G_j) = \mathfrak{t}(G_j)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;*
- ❸ *$G \cong H_1 \oplus H_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup H_1 i H_2 grupy $\mathbb{Q}^+$ takich, że H_1 nie jest nil-grupą oraz $n(H_1 \cdot H_2) \subseteq H_2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;*

Twierdzenie 62

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ *G nie jest ACR-grupą;*
- ❷ *$G = G_1 \oplus G_2$, gdzie G_1 i G_2 są nietrywialnymi podgrupami grupy G spełniającymi warunki $\mathfrak{t}(G_i)^2 = \mathfrak{t}(G_i)$ oraz $\mathfrak{t}(G_i) \cdot \mathfrak{t}(G_j) = \mathfrak{t}(G_j)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;*
- ❸ *$G \cong H_1 \oplus H_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup H_1 i H_2 grupy $\mathbb{Q}^+$ takich, że H_1 nie jest nil-grupą oraz $n(H_1 \cdot H_2) \subseteq H_2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;*
- ❹ *istnieją dwa niezależne elementy $x, y \in G$, łączny pierścień $R = (G, \cdot)$ oraz nietrywialny homomorfizm $f: G \rightarrow (\mathfrak{N}(G))^+$ takie, że $x \cdot y = f(x)y$ lub $x \cdot y = f(y)x$, przy czym $\mathfrak{N}(G) = \mathbb{Z} + \left[\frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \wedge G = pG \right]$.*

Twierdzenie 62

Dla dowolnej beztorsyjnej grupy abelowej G rangi dwa następujące warunki są równoważne:

- ❶ G nie jest ACR-grupą;
- ❷ $G = G_1 \oplus G_2$, gdzie G_1 i G_2 są nietrywialnymi podgrupami grupy G spełniającymi warunki $\mathfrak{t}(G_i)^2 = \mathfrak{t}(G_i)$ oraz $\mathfrak{t}(G_i) \cdot \mathfrak{t}(G_j) = \mathfrak{t}(G_j)$ dla pewnych $i, j \in \{1, 2\}$ takich, że $i \neq j$;
- ❸ $G \cong H_1 \oplus H_2$ dla pewnych nietrywialnych podgrup H_1 i H_2 grupy $\mathbb{Q}^+$ takich, że H_1 nie jest nil-grupą oraz $n(H_1 \cdot H_2) \subseteq H_2$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$;
- ❹ istnieją dwa niezależne elementy $x, y \in G$, łączny pierścień $R = (G, \cdot)$ oraz nietrywialny homomorfizm $f: G \rightarrow (\mathfrak{N}(G))^+$ takie, że $x \cdot y = f(x)y$ lub $x \cdot y = f(y)x$, przy czym $\mathfrak{N}(G) = \mathbb{Z} + \left[\frac{1}{p} : p \in \mathbb{P} \wedge G = pG \right]$.

Uwaga 63

$$\mathfrak{N}(G) = \{q \in \mathbb{Q} : qG \subseteq G\}.$$

- ❶ R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On SI -groups*, Bull. Aust. Math. Soc. 91(1) (2015), 92–103.
- ❷ R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On additive groups of associative and commutative rings*, Quaest. Math. 40(4) (2017), 527–537.
- ❸ R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *On the square subgroup of a mixed SI -group*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 61 (2018), no. 1, 295–304.
- ❹ R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *New examples of indecomposable torsion-free abelian groups of finite rank and rings on them*, J. Algebra Appl. 22 (2023), no. 10, (14 pages).
- ❺ R. R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A simple solution of Stratton and Webb's problem*, Comm. Algebra 50(7) (2022), 3113–3123.
- ❻ S. Feigelstock, Additive groups of rings. Vol. 1 (Pitman Advanced Publishing Program, Boston, 1983).

Bibliografia II

- 7 S. Feigelson, Additive groups of rings. Vol. 2 (Research Notes in Mathematics 169, Longman, London, 1988).
- 8 S. Feigelson, *Additive groups of rings whose subrings are ideals*, Bull. Austral. Math. Soc. 55 (1997), 477–481.
- 9 S. Feigelson, *Additive groups of commutative rings* Quest. Math. 23 (2000), 241–245.
- 10 L. Fuchs, Infinite abelian groups. Vol. 1 (Academic Press, New York, London, 1970).
- 11 L. Fuchs, Infinite abelian groups. Vol. 2 (Academic Press, New York, London, 1973).
- 12 L. Fuchs, Abelian Groups (Springer Monographs in Mathematics, Springer International Publishing, Cham, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2015).

- 13 R. L. Kruse, *Rings in which all subrings are ideals* Canad. J. Math. 20 (1968), 862–871.
- 14 M. Woronowicz, *A note on Feigelson's conjecture on the equivalence of the notions of nil and associative nil groups in the context of additive groups of rings of finite rank*, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 12. 27(4) (2020), 509-519.
- 15 M. Woronowicz, *O addytywnych grupach (łącznych) pierścieni przemennych*, ch. 2, pp. 37-66, Politechnika Białostocka, 2022.
- 16 M. Woronowicz, *New Results for the Additive Groups of Hamiltonian Rings*, Comm. Algebra 52(5) (2024), 2216-2224.
- 17 M. Woronowicz *O grupach addytywnych pierścieni Hamiltona*, Perspektywy rozwoju w naukach inżyneryjno-technicznych – trendy, innowacje i wyzwania (P. Pomajda, M. Świtalski Ed(s).), vol. 1, Wydawnictwo Naukowe TYGIEL sp. z o.o., Lublin, Polska, 2024, pp. 277-302.