

Macierze trójkątne o pewnych szczególnych przekątnych

Roksana Słowik
Politechnika Śląska
Wydział Matematyki Stosowanej

Twierdzenie (Sourour). Niech F będzie ciałem, natomiast $\alpha_i, \beta_i \in F$, $1 \leq i \leq n$. Jeśli $A \in M_n(F)$ jest macierzą nieosobliwą, nieskalarną, taką, że $\prod_{i=1}^n \beta_i \gamma_i = \det A$, to istnieją macierze B, C o wartościach własnych $\beta_1, \dots, \beta_n$, oraz $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, odpowiednio takie, że $A = BC$. Ponadto, można wybrać B, C w taki sposób, że w pewnej bazie B będzie dolnotrójkątna, a C górnortrójkątna.

Niech G będzie grupą.

Niech $\star$ oznacza pewną własność, którą mogą posiadać elementy z A .

Przykład. $\star$ może oznaczać np. diagonalizowalność, bycie inwolucją, idempotentem, komutatorem ...

Problem. Jakie elementy mogą być wygenerowane przez elementy z własnością $\star$?

Czy elementy z własnością $\star$ mogą generować podgrupę G ?

Podpółgrupę G ?

Niech F będzie ciałem i

$$\mathcal{T}_n(F) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & & & a_{nn} \end{bmatrix} : a_{ij} \in F \right\}$$

$$\mathcal{T}_\infty(F) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \\ & & a_{33} & a_{34} & \\ & & & a_{44} & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} : a_{ij} \in F \right\}$$

Definicja. Niech $A \in \mathcal{T}_\infty(F)$. Jeśli istnieje $X \in \mathcal{T}_\infty(F)$ taka, że $X^{-1}AX$ jest macierzą diagonalną, to mówimy, że A jest diagonalizowalna (w $\mathcal{T}_\infty(F)$).

Twierdzenie (Sł). Niech F będzie ciałem o co najmniej 3 elementach. Każda odwracalna macierz z $\mathcal{T}_\infty(F)$ może być przestawiona w postaci iloczynu (co najwyżej) 4 macierzy diagonalizowalnych.

Wniosek (Sł). Niech F będzie ciałem o co najmniej 3 elementach oraz $n \in \mathbb{N}$. Każda odwracalna macierz z $\mathcal{T}_n(F)$ może być przestawiona w postaci iloczynu (co najwyżej) 4 macierzy diagonalizowalnych.

Problem. Czy to samo można powiedzieć o macierzach nieodwracalnych?

Twierdzenie (Alahmadi et al.). Niech R będzie pierścieniem oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Każda macierz ściśle górnotrójkątna $A \in \mathcal{T}_n(F)$ jest iloczynem (co najwyżej) n macierzy górnotrójkątnych idempotentnych.

Twierdzenie (Sł). Macierz

$$J_{\infty}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

nie może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy diagonalizowalnych w $\mathcal{T}_{\infty}(F)$.

W szczególności

Twierdzenie (Sł). Niech F będzie dowolnym ciałem, a $n \in \mathbb{N}$.

- 1 Macierz $A \in \mathcal{T}_\infty(F)$, o zerowej głównej przekątnej, jest iloczynem dwóch macierzy diagonalizowalnych w $\mathcal{T}_\infty(F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.
- 2 Macierz $A \in \mathcal{T}_n(F)$, o zerowej głównej przekątnej, jest iloczynem dwóch macierzy diagonalizowalnych w $\mathcal{T}_n(F)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A^2 = 0$.

Rozważmy macierze o wyznacznikach ze zbioru $\{\pm 1\}$.

Twierdzenie (Gustafson et al.). Każda macierz kwadratowa nad ciałem, której wyznacznik jest równy ± 1 , jest iloczynem (co najwyżej) 4 inwolucji.

Uwaga. Zbiór macierzy (górn)trójkątnych, których elementy diagonalne pochodzą ze zbioru $\{\pm 1\}$ tworzy grupę.

Twierdzenie (Sł; Bien et al.). Każda $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ macierz trójkątna zdefiniowana nad ciałem, której elementy diagonalne są równe ± 1 , jest iloczynem (co najwyżej) 4 inwolucji.

x jest involucją $\Rightarrow x$ spełnia $q(x) := x^2 - 1 = 0$

Problem. Czy podobna własność jest spełniona dla innych równań (nie)kwadratowych?

$\mathcal{A}$ - algebra nad ciałem F

$$q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0$$

Definicja. Jeśli element $a \in \mathcal{A}$ spełnia równanie $q(a) = 0$, to powiemy, że a jest kwadratowy względem $q(x)$, lub krótko, że a jest $q(x)$ -kwadratowy.

Przykład.

- involucje są $q(x)$ -kwadratowe dla $q(x) = x^2 - 1$
- macierze spełniające $A^2 = -I$ są $q(x)$ -kwadratowe dla $q(x) = x^2 + 1$
- macierze spełniające $(A - I)^2 = 0$ są $q(x)$ -kwadratowe dla $q(x) = (1 - x)^2$

Twierdzenie (Gustafson et al.;Gustafson). Każda macierz stopnia n o wyznaczniku ± 1 , zdefiniowana nad ciałem jest iloczynem co najwyżej 4 macierzy $q(x)$ -kwadratowych, gdzie $q(x) = x^2 - 1$.

Twierdzenie (Wang, Wu). Macierz A (stopnia n) może być przestawiona w postaci iloczynu macierzy $q(x)$ -kwadratowych dla $q(x) = (1 - x)^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\det(A) = 1$.
W tym przypadku, minimalna liczba macierzy potrzebnych do rozkładu wynosi 1 dla $n = 1$; 3 dla $n = 2$; oraz 4 dla $n \geq 3$.

Twierdzenie (Bien et al.; Thuy et al.). Każda $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ macierz trójkątna, której elementy diagonalne są postaci $\lambda_1^{s_i} \lambda_2^{t_i}$, gdzie $s_i + t_i = k$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, może być zapisana jako iloczyn k $q(x)$ -kwadratowych macierzy, gdzie $q(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$.

Problem. Co się dzieje w przypadku, gdy $\lambda_1 \lambda_2 = 0$?

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 \Rightarrow x \text{ jest idempotentem}$$

Twierdzenie (Erdős). Każda macierz osobliwa stopnia n może być zapisana w postaci iloczynu macierzy idempotentnych.

Twierdzenie (Alahmadi et al.). Niech R będzie pierścieniem oraz niech $n \in \mathbb{N}$. Każda macierz ściśle górnotrójkątna (tzn. z 0-ami na głównej przekątnej) $A \in T_n(R)$ jest iloczynem n idempotentnych, trójkątnych macierzy.

$$J_n(0) = \left[\begin{array}{c|c} I_{n-1} & e_{n-1}^T \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} J_{n-1}(0) & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right]$$

Twierdzenie (Sł). Macierz

$$J_{\infty}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

nie może być przedstawiona w postaci iloczynu macierzy $q_{0,1}(x)$ -kwadratowych z $\mathcal{T}_{\infty}(F)$.

Istnieją macierze w $\mathcal{T}_\infty(F)$, które nie są nilpotentne, ale są iloczynami idempotentów.

Przykład. Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(która nie jest nilpotentna) jest iloczynem następujących nilpotentów

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 1 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Problem. Co można powiedzieć w przypadku, gdy $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$?
($q(x) = x^2$)

Twierdzenie (Novak). Każda $n \times n$ macierz rzędu nie większego niż $\frac{n}{2}$ jest iloczynem (co najwyżej) 3 macierzy o zerowym kwadracie.

Twierdzenie (Truong, Sł). Niech F będzie dowolnym ciałem, a $m \in \mathbb{N}$ dowolną liczbą. Macierz $J_{\infty}^m(0)$ nie może być zapisana jako iloczyn macierzy o zerowym kwadracie z $\mathcal{T}_{\infty}(F)$.

Dla dowolnej liczby $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, istnieją macierze w $\mathcal{T}_\infty(F)$, które nie są nilpotentne, ale są iloczynami k macierzy o zerowym kwadracie.

Przykład. Niech

$$S_i = \sum_{n=0}^{\infty} e_{i+nk, i+1+nk} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k.$$

Mamy $S_i^2 = 0$, ale

$$\prod_{i=1}^k S_i = \sum_{n=0}^{\infty} e_{1+nk, 1+(n+1)k},$$

oraz m -ta potęga tego iloczynu jest równa

$$\sum_{n=0}^{\infty} e_{i+nk, i+m(n+1)k} \neq 0.$$

Niech $q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$.

Problem. Co można powiedzieć o iloczynach macierzy spełniających tożsamość $q(x) = 0$?

Czy tworzą grupę/półgrupę?

Niech

$$\mathcal{Z}_\infty(q(x)) = \{A \in \mathcal{T}_\infty(F) : q(A) = 0\}$$

oraz

$$\mathcal{Z}_k(q(x)) = \{A \in \mathcal{T}_k(F) : q(A) = 0\}.$$

Uwaga. Niech F będzie ciałem i niech $\lambda_i \in F$, $1 \leq i \leq n$, $n \geq 3$.
Jeśli macierz A może być przedstawiona jako iloczyn k macierzy $q_{\lambda_j, \lambda_\ell}(x)$ -kwadratowych, to może być również przedstawiona jako iloczyn k lub mniej macierzy z $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.

Twierdzenie (Truong, Sł). Niech $n \geq 2$, $r \geq 3$, będą liczbami całkowitymi oraz λ_i , dla $1 \leq i \leq n$, będą niezerowymi elementami F . Ponadto, niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą z $\mathcal{T}_\infty(F)$. Załóżmy, że $a_{ii} = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{r_i}$, gdzie $\sum_{u=1}^n u r_i = r$. Jeśli dla każdego i istnieją co najmniej trzy indeksy j takie, że $j r_i \geq 1$ albo istnieją co najmniej dwa indeksy j takie, że $j r_i \geq 2$, to A może być zapisana w postaci iloczynu r macierzy z $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.

Wniosek (Truong, Sł). Niech $n, k \geq 2$, $r \geq 3$, będą liczbami całkowitymi oraz λ_i , dla $1 \leq i \leq n$, będą niezerowymi elementami F . Ponadto, niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą z $\mathcal{T}_k(F)$. Załóżmy, że $a_{ii} = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{r_i}$, gdzie $\sum_{u=1}^n u r_i = r$. Jeśli dla każdego i istnieją co najmniej trzy indeksy j takie, że $j r_i \geq 1$ albo istnieją co najmniej dwa indeksy j takie, że $j r_i \geq 2$, to A może być zapisana w postaci iloczynu r macierzy z $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.

Niech $q(x) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia n nad F , $n \geq 2$, oraz $k \geq 2$.

Uwaga. Zbiory $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$, $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$ są półgrupami.

Uwaga. Zbiory $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$, $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$ są półgrupami z jedyneką wtedy i tylko wtedy, gdy $\lambda_i = 1$ dla pewnego indeksu i .

Uwaga. Zbiory $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$, $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$ są grupami wtedy i tylko wtedy, gdy $\{\lambda_i\}$ tworzy grupę.

Definicja. Wielomian $q(x)$, stopnia n , nazywamy palindromicznym, jeśli

$$x^n q\left(\frac{1}{x}\right) = q(x).$$

Definicja. Wielomian $q(x)$, stopnia n , nazywamy antypalindromicznym, jeśli

$$x^n q\left(\frac{1}{x}\right) = -q(x).$$

Twierdzenie (Truong, Sł). Niech $n \geq 2$, oraz niech λ_i , $1 \leq i \leq n$, będą niezerowymi elementami F takimi, że $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ jest grupą (mnożeniową), natomiast $q(x)$ będzie wielomianem palindromicznym lub antypalindromicznym. Ponadto, niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą z $\mathcal{T}_\infty(F)$. Wtedy A jest iloczynem macierzy z $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(a_{ii}) = 0$ dla wszystkich $i \geq 1$. Ponadto, każda taka macierz A może być zapisana w postaci iloczynu co najwyżej 4 macierzy z $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.

Wniosek (Truong, Sł). Niech $n, k \geq 2$, oraz niech λ_i , $1 \leq i \leq n$, będą niezerowymi elementami F takimi, że $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ jest grupą (mnożeniową), natomiast $q(x)$ będzie wielomianem palindromicznym lub antypalindromicznym. Ponadto, niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą z $\mathcal{T}_k(F)$. Wtedy A jest iloczynem macierzy z $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(a_{ii}) = 0$ dla wszystkich $i \geq 1$. Ponadto, każda taka macierz A może być zapisana w postaci iloczynu co najwyżej 4 macierzy z $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.

Przykład. Niech $F = \mathbb{C}$ oraz $q(x) = x^2 + 1$. Wtedy $\lambda_1 = i$,
 $\lambda_2 = -i$.

Założmy, że $A = [a_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F)$ jest taka, że $a_{jj} = 1$ dla wszystkich j . Faktoryzacja elementów diagonalnych $a_{jj} = -i \cdot i$ wymaga dwóch czynników. Jednak w twierdzeniu mamy $r \geq 3$, więc w rzeczywistości potrzebujemy 4 czynników ($1 = (-i)^2 i^2$), aby wyrazić dowolną macierz A w postaci odpowiedniego iloczynu.

Przykład. Niech $q(x) = x^2 + 1$.

- Każda macierz z $\mathcal{T}_\infty(F)$, której elementy na głównej przekątnej są równe $\pm i$ jest iloczynem 5 macierzy z $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.
- Każda macierz z $\mathcal{T}_\infty(F)$, której elementy na głównej przekątnej są równe ± 1 jest iloczynem 4 macierzy z $\mathcal{Z}_\infty(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.
- Ponieważ każda faktoryzacja liczb $\pm i$ w postaci iloczynu $\pm i$ wymaga nieparzystej liczby czynników, podczas, gdy każda faktoryzacja ± 1 wymaga parzystej liczby czynników, macierze, które na głównej przekątnej posiadają elementy $\pm i$, jak i ± 1 nie mogą być przedstawione jako iloczyny macierzy z $\mathcal{Z}_k(q_{\{\lambda_i\}_{i=1}^n}(x))$.

Przykład. Niech $q(x) = (x - i)(x + i)(x - 2)$.

Wtedy

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2i & -2i \\ & -2 & 2i & -2i \\ & & -2 & 0 \\ & & & -2 \end{bmatrix}$$

jest iloczynem macierzy

$$B_1 = \begin{bmatrix} i & -2i & 1+2i & -1-2i \\ & -i & 1+2i & -1-2i \\ & & i & -2i \\ & & & -i \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} i & 3-i & -3+i & 3-i \\ & 2 & -2+i & 3-i \\ & & i & 3-i \\ & & & 2 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1-i & 1+i & -1-i \\ & -i & 2+i & -1-i \\ & & 2 & -1-i \\ & & & -i \end{bmatrix},$$

takich że $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{Z}_4(q(x))$.

Ponieważ $A_{ii} = -2$, w tym przypadku liczba czynników nie może być mniejsza niż 3.

Przykład. Tym razem $q(x) = (x - i - 1)(x + i - 1)(x - 2)$.

$$x_1 = 1 + i, x_2 = 1 - i, x_3 = 2, x_1 x_2 = x_3$$

Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1-i & 1-2i & 1-2i & 1-2i \\ & 2 & 1+i & 2i & -1+2i \\ & & 2 & 1-i & 1-2i \\ & & & 2 & 1+i \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

jest iloczynem macierzy

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1-i & 1-2i & 1-2i & 1-2i & 1-2i \\ & 1+i & 2i & -1+2i & -1+2i \\ & & 1-i & 1-2i & 1-2i \\ & & & 1+i & 2i \\ & & & & 1-i \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1+i & 2i & -1+2i & -1+2i & -1+2i \\ & 1-i & 1-2i & 1-2i & 1-2i \\ & & 1+i & 2i & -1+2i \\ & & & 1-i & 1-2i \\ & & & & 1+i \end{bmatrix},$$

gdzie $B_1, B_2 \in \mathcal{Z}_5(q(x))$.

Przykład. Załóżmy, że element $\lambda \in F \setminus \{0\}$ jest beztorsyjny.

Niech

$$q(x) = (x - \lambda)(x - 1)^n, \quad n \geq 1.$$

Wtedy dowolna macierz $A = [a_{ij}] \in \mathcal{T}_\infty(F)$ taka, że $a_{ii} = \lambda^r$ może być zapisana w postaci iloczynu $r + 2$ macierzy z $\mathcal{Z}_k(q(x))$, i liczba czynników nie może być mniejsza niż r .

- [1] A. Alahmadi, S.K. Jain , A. Leroy, A. Sathaye, Decompositions into products of idempotents, *Electron J. Linear Algebra* 29 (2015), 74–88.
- [2] M.H. Bien, V.M. Tam, D.C.M. Tri, L.Q. Trong, Products of infinite upper triangular matrices, *Linear Algebra Appl.* 699 (2024), 59-71.
- [3] J.A. Erdos, On products of idempotent matrices, *Glasgow Math. J.* 8 (1967), 118-122.
- [4] W.H. Gustafson, On products of involutions, in: J.H. Ewing, F.W. Gehring (Eds.), *Paul Halmos, Celebrating 50 Years of Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 1991, 237-255.
- [5] W.H. Gustafson, P.R. Halmos, H. Radjavi, Products of involutions, *Collection of articles dedicated to Olga Taussky Todd*, *Linear Algebra Appl.* 13 (1976), 157-162.
- [6] N. Novak, Products of square-zero operators, *J. Math. Anal. Appl.* 339 (2008), 10-17.
- [7] R. Słowik, Expressing infinite matrices as products of involutions, *Linear Algebra Appl.* 438 (2013), 399-404.
- [8] R. Słowik, A note on products of idempotents in the ring of upper triangular infinite matrices, *Linear Multilinear Algebra* 72(17), 2938-2946.
- [9] R. Słowik, Products of diagonalizable matrices, w recenzji.

- [10] A.R. Sourour, A factorization theorem for matrices, *Linear Multilinear Algebra* 19 (1986), 141-147.
- [11] J.-H. Wang, P.Y. Wu, Products of unipotent matrices of index 2, *Linear Algebra Appl.* 149 (1991), 111-123.
- [12] P.T.T. Thuy, L.Q. Truong, M.H. Bien, Expressing infinite matrices over rings as products of quadratic matrices, w recenzji.
- [13] L.Q. Truong, R. Słowik, Products of infinite matrices annihilated by fixed polynomials, w recenzji.