

Wojciech Górny

Autoreferat

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski
Banacha 2
02-097 Warszawa
ORCID: [0000-0001-5682-5149](https://orcid.org/0000-0001-5682-5149)
✉ w.gorny@mimuw.edu.pl
🌐 www.mimuw.edu.pl/~wg320323

Spis treści

1. Dane kandydata	2
2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe	2
3. Zatrudnienie	2
4. Omówienie osiągnięcia naukowego	3
4.1. Słabe rozwiązania dla potoków gradientowych w przestrzeniach metrycznych	7
[A] Potok gradientowy p -energii Cheegera	9
[B] Wzór Gaussa-Greena w przestrzeniach metrycznych	13
[C] Potok całkowitego wahanja na zbiorach ograniczonych	16
4.2. Geometryczne spojrzenie na dwuwymiarowe zagadnienie najmniejszego gradientu	20
[D] Metody optymalnego transportu w zagadnieniu najmniejszego gradientu	22
[E] Riemannowski optymalny transport a zagadnienie najmniejszego gradientu z wagą	25
[F] Przestrzeń śladów anizotropowych funkcji najmniejszego gradientu	28
5. Aktywność naukowa	29
5.1. Granty	29
5.2. Prezentacje na konferencjach	30
5.3. Staże naukowe	30
6. Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne oraz popularyzacyjne	31
6.1. Osiągnięcia dydaktyczne	31
6.2. Osiągnięcia organizacyjne	31
6.3. Osiągnięcia popularyzacyjne	31
7. Inne istotne informacje	32
7.1. Otrzymane nagrody i wyróżnienia	32
7.2. Monografia „Functions of Least Gradient”	32
7.3. Rozprawa doktorska	33
7.4. Pozostałe publikacje	34
Literatura	35

1. Dane kandydata

Imię i nazwisko: Wojciech Górny

Afiliacja 1: Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Afiliacja 2: Uniwersytet Wiedeński, Wydział Matematyki

2. Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 2024 **Habilitacja**, Uniwersytet Wiedeński (Austria). Habilitacje austriackie nie są aktualnie uznawane za równoważne polskiemu stopniowi doktora habilitowanego. Tytuł rozprawy: *Geometric problems involving minimisation of total variation*. Recenzenci: prof. Giovanni Bellettini (Università degli Studi di Siena), [recenzja](#); prof. Peter Sternberg (Indiana University), [recenzja](#); oraz prof. Elvira Zappale (Sapienza Università di Roma), [recenzja](#).
- 2020 **Doktorat (matematyka)**, dyplom z wyróżnieniem, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki. Tytuł rozprawy: *Anisotropic least gradient problems*. Promotor: prof. dr hab. Piotr Rybka. Recenzenci: prof. Salvador Moll (University of València), [recenzja](#); oraz prof. Matteo Novaga (University of Pisa), [recenzja](#).
- 2016 **Magister (matematyka)**, dyplom z wyróżnieniem, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki. Tytuł pracy: *Zagadnienia najmniejszego gradientu*. Promotor: prof. dr hab. Piotr Rybka.
- 2015 **Licencjat (fizyka)**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki. Tytuł pracy: *Zastosowanie struktur Diraca: obwody RLC jako przykład układów z więzami nieholonomicznymi*. Promotor: dr hab. Katarzyna Grabowska.
- 2014 **Licencjat (matematyka)**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki. Tytuł pracy: *Klasyfikacja meromorficznych liniowych równań różniczkowych. Zjawisko Stokesa*. Promotor: dr hab. Marcin Bobieński.

3. Zatrudnienie

- 2022-teraz **Senior postdoc**, Uniwersytet Wiedeński (Austria), Wydział Matematyki
- 2021-2022 **Postdoc**, Uniwersytet Wiedeński (Austria), Wydział Matematyki
- 2021 **University assistant**, Uniwersytet Wiedeński (Austria), Wydział Matematyki
- 2020-2021 **Postdoc**, Uniwersytet Wiedeński (Austria), Wydział Matematyki
- 2022-teraz **Status badacza afiliowanego**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki
- 2020-2022 **Asystent (urlop bezpłatny)**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

4. Omówienie osiągnięcia naukowego

Przedstawionym tu osiągnięciem naukowym jest cykl 6 publikacji z dziedziny rachunku wariacyjnego oraz równań różniczkowych cząstkowych opublikowanych w latach 2022-2024. Ich tematem przewodnim jest badanie tego typu zagadnień dla funkcjonałów o liniowym wzroście, przede wszystkim (anizotropowego) całkowitego wahan, i ich analiza pod kątem wpływu geometrii przestrzeni na istnienie i właściwości rozwiązań. Są to następujące publikacje:

- [A] W. Górny, J.M. Mazón, *On the p -Laplacian evolution equation in metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **283** (2022), 109621, doi.org/10.1016/j.jfa.2022.109621.
- [B] W. Górny, J.M. Mazón, *The Anzellotti-Gauss-Green formula and least gradient functions in metric measure spaces*, Commun. Contemp. Math. **26** (2024), no. 6, 2350027, doi.org/10.1142/S021919972350027X.
- [C] W. Górny, J.M. Mazón, *The Neumann and Dirichlet problems for the total variation flow in metric measure spaces*, Adv. Calc. Var. **17** (2024), 131–164, doi.org/10.1515/acv-2021-0107.
- [D] W. Górny, *Applications of optimal transport methods in the least gradient problem*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **24** (2023), pp. 1817–1851, doi.org/10.2422/2036-2145.202105_049.
- [E] S. Dweik, W. Górny, *Optimal transport approach to Sobolev regularity of solutions to the weighted least gradient problem*, SIAM J. Math. Anal. **55** (2023), no. 3, 1916–1948, doi.org/10.1137/21M1468358.
- [F] W. Górny, *The trace space of anisotropic least gradient functions depends on the anisotropy*, Math. Ann. **387** (2023), 1343–1365, doi.org/10.1007/s00208-022-02488-4.

Publikacje [A]–[F] to odpowiednio pozycje [36], [37], [38], [32], [24] oraz [33] w bibliografii na końcu tego dokumentu. Publikacje [A]–[C] powstały we współpracy z prof. José M. Mazónem (Universitat de València); praca [E] powstała we współpracy z dr Samerem Dweikiem (Qatar University, w czasie powstawania pracy Université Paris-Saclay); artykuły [D] i [F] są wyłącznie mojego autorstwa. W przypadku prac współautorskich, w każdym przypadku obaj autorzy uczestniczyli po równo we wszystkich zadaniach (konceptcja pracy, dowodzenie wyników, ich spisywanie i korekta). Poniżej pokrótce opiszę zasadnicze wyniki powyższych publikacji; wśród nich można wyróżnić następujące dwa główne cele.

Mówimy, że funkcjonał $\mathcal{F}$ ma liniowy wzrost, jeśli jego wiodący człon jest typu

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x), Du(x)) \, dx,$$

gdzie funkcja $F(x, u, \xi)$ jest wypukła w ξ i ma liniowy wzrost w ξ , tzn.

$$m|\xi| \leq F(x, u, \xi) \leq M(1 + |\xi|).$$

Zagadnienia zawierające funkcjonały tego typu zostały po raz pierwszy opisane w jednolity sposób przez Giaquintę, Modicę oraz Součeka w [27]; najbardziej klasyczny przykład to funkcjonał powierzchni. Z uwagi na fakt że $\mathcal{F}$ ma liniowy wzrost, naturalną przestrzenią dla istnienia rozwiązań jest przestrzeń BV funkcji o ograniczonym wahanu [2] (a nie przestrzeń typu Sobolewa). Z uwagi na to, używane metody są zdecydowanie inne niż w przypadku wzrostu wielomianowego z $p > 1$. Dla przykładu, przestrzeń BV nie jest

refleksywna, więc podczas analizy zagadnień minimalizacyjnych otrzymany dzięki metodzie bezpośredniej rachunku wariacyjnego ciąg minimalizujący niekoniecznie jest słabo zbieżny. Otrzymujemy jedynie zbieżność w L^1 , co powoduje utratę zwartości dla warunków brzegowych Dirichleta, jako że operator śladu zdefiniowany na BV nie jest ciągły względem zbieżności w L^1 . Cykl [A]-[F] poświęcony jest dwóm zagadnieniom tego typu, w których częścią rozważanego funkcjonału jest (anizotropowe) całkowite wahanie.

Pierwszym z nich jest analiza potoków gradientowych w przestrzeniach metrycznych przy użyciu teorii półgrup w przestrzeniach Banacha bądź Hilberta oraz zrozumienie wpływu geometrii przestrzeni metrycznej na sformułowanie problemu i właściwości rozwiązań. Współczesne podejście do potoków gradientowych wypukłych funkcjonałów, które są modelowym przykładem zagadnień ewolucyjnych z rozpraszaniem energii, ma korzenie w pracach Kōmury [50], Crandalla-Pazy'ego [23] oraz Brezisa [16]. Opisane tam podejście prowadzi do pojęcia półgrupy rozwiązań dla zagadnień ewolucyjnych w przestrzeniach Hilberta (por. [17]).

Najbardziej znanym zagadnieniem tego typu jest równanie ciepła, które przy użyciu tych metod było rozważane w przestrzeniach metrycznych przez Ambrosio, Gigliego i Savaré [4] przy założeniu że przestrzeń ma lokalnie strukturę hilbertowską (ang. infinitesimally Hilbertian space) oraz jej krzywizna Ricciego (w uogólnionym sensie zadanym przez prace Sturm [71] czy Lotta-Villaniego [54]) jest ograniczona z dołu. Przy takich założeniach, odpowiadające równaniu ciepła operator Laplace'a oraz półgrupa rozwiązań są liniowe; nie jest to w ogólności prawdą. Zauważmy ponadto, że w pracy [4] oraz w pracach [3] i [1] dotyczących odpowiednio potoku p -ciepła dla $1 < p < \infty$ oraz potoku całkowitego wahania, użyta definicja rozwiązania zakłada, że pochodna czasowa rozwiązania leży w minus podróźniczce odpowiedniego funkcjonału. Przez podróźniczkę rozumiemy zbiór

$$\partial\mathcal{F} = \left\{ (x, x^*) \in E \times E^* : \mathcal{F}(y) - \mathcal{F}(x) \geq \langle y - x, x^* \rangle_{E, E^*} \quad \forall y \in E \right\}.$$

Podróźniczka ta nie jest natomiast opisana w punktowy sposób. Dla przykładu, w przestrzeni euklidesowej równanie p -ciepła, tzn. potok gradientowy funkcjonału $\mathcal{F}(u) = \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx$, ma postać

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) & \text{w } \mathbb{R}^N \times (0, T); \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Naszym celem jest uzyskanie analogicznego opisu w przestrzeniach metrycznych, zarówno dla $p > 1$ jak i w przypadku liniowego wzrostu, uogólniając potok całkowitego wahanie

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) & \text{w } \mathbb{R}^N \times (0, T); \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Potok całkowitego wahanie pojawia się przede wszystkim w kontekście modelu przetwarzania obrazów zaproponowanego przez Rudina, Oshera i Fatemiego w ich przełomowym artykule [65] (ang. total variation regularization). Jego współczesne ujęcie można znaleźć w [21]. Operator po prawej stronie to 1-Laplasjan; to równanie różniczkowe jest silnie zdegenerowane, i a priori nie jest jasne w jaki sposób rozumieć wyrażenie $\frac{Du}{|Du|}$

(jako pochodna Radona-Nikodyma, jest ona dobrze zdefiniowana tylko $|Du|$ -p.w., a niekoniecznie $\mathcal{L}^N$ -p.w.). Rozwiązanie tego problemu pochodzi od Andreu, Ballester, Casellesa i Mazóna, którzy w [6, 7] użyli w celu charakteryzacji rozwiązań teorii sparowań między polem wektorowym o całkowalnej dywergencji oraz funkcją o skończonym wahanu pochodzącą od Anzellottiego [9] w celu zastąpienia obiektu $\frac{Du}{|Du|}$ za pomocą odpowiedniego pola wektorowego (por. [8]).

W pracach [A]-[C] przyjmujemy łagodniejsze założenia niż te stosowane dotychczas w literaturze i wprowadzamy nowe pojęcia rozwiązania dla potoków gradientowych w przestrzeniach metrycznych przy użyciu struktury różniczkowej pochodzącej od Gigiego [29]. Dzięki temu podejściu uzyskaliśmy nowe właściwości rozwiązań ewolucji zadanej przez p -Laplasjan oraz, w przypadku liniowego wzrostu, dla potoku całkowitego wahanu. Między innymi, otrzymaliśmy ulepszone oszacowania dotyczące odległości dwóch rozwiązań, dokładną asymptotykę, oraz wprowadziliśmy pierwszą definicję (entropijnego) rozwiązania dla danych początkowych w L^1 . Dodatkowo przeprowadzamy szczegółową analizę, badając które właściwości przestrzeni metrycznej są niezbędne dla uzyskania tych wyników oraz, w przypadku gdy struktura przestrzeni to umożliwia, znajdujemy punktowy warunek pozwalający zweryfikować czy dana funkcja jest rozwiązaniem. Ponadto, uogólniamy na przypadek metryczny wzór na całkowanie przez części pochodzący od Anzellottiego [9] — jest to kluczowy techniczny element niezbędny do charakteryzacji podróznicki całkowitego wahanu.

Drugi typ zagadnienia zawierającego funkcjonał o liniowym wzroście w cyklu [A]-[F] to zagadnienie najmniejszego gradientu (ang. least gradient problem). Jego celem jest minimalizacja całkowitego wahanu funkcji spełniającej zadane dane brzegowe Dirichleta. Jeśli $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym ograniczonym z lipschitzowskim brzegiem, to dla danych brzegowych $f \in L^1(\partial\Omega)$ jest to następujący problem:

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |Du| : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\}. \quad (1)$$

Jego najwcześniejsza wersja pojawiła się w pracy Mirandy [58] w 1967. Miranda rozważał *funkcje najmniejszego gradientu*, tzn. funkcje które tylko lokalnie minimalizują całkowite wahanie pod nieobecność danych brzegowych, i udowodnił że ta własność jest zachowana w granicy przy zbieżności w $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Ten wynik został użyty przez Bombieriego, De Giorgiego oraz Giustiego [14] w 1969 do udowodnienia, że nadpoziomice funkcji najmniejszego gradientu minimalizują powierzchnię, co pozwoliło na rozwiązanie problemu Bernsteina (tzn. pokazanie, że w wymiarach 8 oraz wyżej istnieją stożki minimalne które nie są płaszczyznami, a w wymiarach 9 oraz wyżej istnieją powierzchnie minimalne, które nie są płaszczyznami, ale są wykresami funkcji). Zagadnienie najmniejszego gradientu oraz jego warianty są badane od niemal 50 lat także w kontekście potencjalnych zastosowań, w takich obszarach jak metody numeryczne dla powierzchni minimalnych [62] (a także [63, 64]), optymalne projektowanie (ang. optimal design) w modelowaniu materiałów [49], czy problemy odwrotne w obrazowaniu medycznym [45, 61].

Zagadnienie najmniejszego gradientu w postaci (1) zostało wprowadzone przez Sternberga, Williamsa i Ziemera w 1992 w pracy [70]. Ich główny wkład w istniejącą teorię to użycie metod geometrycznej teorii miary w celu zbadania tego zagadnienia bez dodatkowych członów albo więzów. Autorzy udowodnili, że jeśli ograniczona dziedzina lipschitzowska Ω jest ściśle wypukła, to dla ciągłych danych brzegowych istnieje

rozwiązanie zagadnienia (1) i jest ono ciągłe aż do brzegu. W szczególności, spełnia ono warunek brzegowy rozumiany jako ślad funkcji BV na $\partial\Omega$. Przy słabszych założeniach dotyczących dziedziny i regularności danych brzegowych, nawet samo pojęcie rozwiązania nie jest oczywiste; najbardziej powszechnie stosowana definicja, oparta na pojęciu sparowania Anzellottiego, pochodzi z pracy Mazóna, Rossiego i Segury de Leóna [57] i nawiązuje do znanej uprzednio definicji słabego rozwiązania dla potoku całkowitego wahania [8]. Autorzy pracy [57] udowodnili istnienie rozwiązań w tym sensie dla dowolnej ograniczonej dziedziny lipschitzowskiej Ω oraz danych brzegowych $f \in L^1(\partial\Omega)$. Kosztem tego podejścia jest to, że to osłabione pojęcie rozwiązania może nie spełniać warunku brzegowego w sensie śladu. Charakteryzacja przestrzeni możliwych śladów jest ważnym problemem otwartym w tej teorii — nie jest to rozstrzygnięte nawet gdy Ω jest kulą jednostkową, zaś najbardziej znany kontrprzykład pochodzi z pracy Spradlina i Tamasana [69].

W ciągu ostatnich dwudziestu lat w literaturze rozważano także wiele wariantów zagadnienia najmniejszego gradientu. Z naszego punktu widzenia najbardziej znaczące są adaptacja tego problemu na przypadek przestrzeni metrycznych, opisana w sekcji 4.1[B], oraz anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \phi(x, Du) : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\}, \quad (2)$$

gdzie $\phi(x, \cdot)$ to norma równoważna euklidesowej (jednostajnie w zmiennej przestrzennej x). Zostało ono wprowadzone przez Jerrarda, Moradifama i Nachmana w pracy [46]. Badali oni problem (2) dla ciągłych danych brzegowych i szerokiej klasy funkcji ϕ . Zakładając dodatkowo że Ω spełnia *warunek bariery*, który jest adaptacją ściślej wypukłości na przypadek anizotropowy, udowodnili że zagadnienie (2) ma rozwiązanie dla każdej $f \in C(\partial\Omega)$. Jest ono jednoznaczne przy ostrzejszych założeniach dotyczących regularności i jednostajnej wypukłości ϕ . W szczególnym przypadku $\phi(x, \xi) := a(x)|\xi|$, zagadnienie (2) redukuje się do zagadnienia najmniejszego gradientu z wagą wprowadzonego w kontekście obrazowania medycznego w [61]

$$\min \left\{ \int_{\Omega} a(x)|Du| : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\}. \quad (3)$$

Szczegółowe informacje na temat zagadnienia najmniejszego gradientu i jego wariantów można znaleźć w mojej współautorskiej książce [39] opisanej w sekcji 7.2.

W pracach [D]-[F] badamy istnienie oraz właściwości rozwiązań dla dwuwymiarowego zagadnienia najmniejszego gradientu. W pracach [D] oraz [E] wykorzystujemy w tym celu równoważność między zagadnieniem najmniejszego gradientu, problemem Beckmanna oraz zagadnieniem optymalnego transportu (szczegóły w sekcji 4.2). Równoważność ta po raz pierwszy została zaobserwowana w pracach [40] oraz [25]. Uogólniamy ją oraz badamy jej konsekwencje dla regularności oraz stabilności rozwiązań, także w przypadku gdy na dziedzinie Ω jest zadana struktura riemannowska. Natomiast celem pracy [F] jest zbadanie zależności przestrzeni śladów anizotropowych funkcji najmniejszego gradientu od anizotropii, tzn. zbioru dopuszczalnych danych brzegowych dla których istnieje co najmniej jedno rozwiązanie zagadnienia (2) w sensie śladu. Na modelowym przykładzie, gdy dziedzina jest dyskiem oraz anizotropie to normy na $\mathbb{R}^2$, pokazujemy że przestrzenie śladów dla różnych (dostatecznie regularnych) anizotropii są różne.

4.1. Słabe rozwiązania dla potoków gradientowych w przestrzeniach metrycznych

Jako pierwsze przedstawię wyniki z prac [A]–[C] dotyczące konstrukcji słabych rozwiązań dla potoków gradientowych w przestrzeniach metrycznych. W tych pracach, napisanych wspólnie z José M. Mazónem, wprowadzamy to pojęcie na modelowym przykładzie ewolucji zadanej przez p -Laplasjan (ang. p -Laplacian evolution equation) dla $1 < p < \infty$. W myśl definicji wprowadzonej w [3], jest to potok gradientowy p -energii Cheegera (ang. p -Cheeger energy); dla przestrzeni metrycznej $(\mathbb{X}, d)$ wyposażonej w borelowską miarę dodatnią ν , jest to funkcjonał $\text{Ch}_p : L^2(\mathbb{X}, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ zadany wzorem

$$\text{Ch}_p(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{X}} |Du|^p d\nu & \text{dla } u \in W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu) \cap L^2(\mathbb{X}, \nu); \\ +\infty & \text{dla } u \in L^2(\mathbb{X}, \nu) \setminus W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu), \end{cases} \quad (4)$$

gdzie $|Du|$ oznacza minimalny p -słaby górny gradient (ang. minimal p -weak upper gradient) funkcji u (por. [12]; samo pojęcie górnego gradientu jest starsze [41, 43, 68]). Osobno rozważamy także przypadek $p = 1$, który odpowiada potokowi całkowitego wahan (ang. total variation flow), tzn. potokowi gradientowemu 1-energii Cheegera $\text{Ch}_1 : L^2(\mathbb{X}, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ zdefiniowany jako

$$\text{Ch}_p(u) = \begin{cases} \int_{\mathbb{X}} |Du|_{\nu} & \text{dla } u \in BV(\mathbb{X}, d, \nu) \cap L^2(\mathbb{X}, \nu); \\ +\infty & \text{dla } u \in L^2(\mathbb{X}, \nu) \setminus BV(\mathbb{X}, d, \nu), \end{cases} \quad (5)$$

wprowadzonej przez Ambrosio oraz Di Marino w [1]. We wzorze 5, $|Du|_{\nu}$ oznacza miarę całkowitego wahan (ang. total variation measure) funkcji u [59]. Wprowadzamy również odpowiednie metody (takie jak sparowania typu Anzellottiego oraz wzór Gaussa-Greena) które pozwalają na analizę tego zagadnienia. W całej sekcji 4.1 zakładamy, że $(\mathbb{X}, d)$ jest zupełną i ośrodkową przestrzenią metryczną oraz ν jest borelowską miarą dodatnią która przyjmuje skończone wartości na zbiorach ograniczonych.

Głównym celem tej sekcji jest przedstawienie wyników dotyczących istnienia oraz właściwości rozwiązań problemu Cauchy'ego

$$\begin{cases} u'(t) + \partial \text{Ch}_p(u(t)) \ni 0 & \text{dla } t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu). \end{cases} \quad (6)$$

W tym celu opieramy się na teorii potoków gradientowych w przestrzeniach Hilberta oraz na pokazanej w pracy [D] (tzn. [36]) charakteryzacji (wielowartościowego) operatora ∂Ch_p , co pozwoli na wprowadzenie pojęcia słabego rozwiązania. Ambrosio, Gigli oraz Savaré w pracy [3] udowodnili, że funkcjonał Ch_p jest wypukły oraz półciągły z dołu. Jako że jego dziedzina jest gęstym podzbiorem $L^2(\mathbb{X}, \nu)$, ponieważ zawiera ona wszystkie funkcje lipschitzowskie o zwartym nośniku, z twierdzenia Brezisa-Kōmury (por. [17] lub [50]) wynika, że dla każdego $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$ istnieje dokładnie jedno silne rozwiązanie problemu Cauchy'ego (6). Innymi słowy, istnieje lokalnie absolutnie ciągłe odwzorowanie $t \mapsto u(t)$ z $(0, \infty)$ do $L^2(\mathbb{X}, \nu)$, które spełnia $u(t) \rightarrow u_0$ gdy $t \rightarrow 0$ oraz

$$u'(t) \in -\partial \text{Ch}_p(u(t)).$$

We wszystkich wyżej wymienionych pracach, potok gradientowy w $L^2(\mathbb{X}, \nu)$ jest opisany używając podejścia półgrupowego na przestrzeniach Hilberta (por. [17]), a odpowiadający im operator p -Laplace'a (dla $p \in [1, \infty)$) jest zdefiniowany jako element (minus) podrózniczki energii p -Cheegera o najmniejszej normie. Celem prac [A]-[C] było wprowadzenie pojęcia słabego rozwiązania, co pozwala ulepszyć powyższą definicję rozwiązania i wprowadzić lokalny (oraz weryfikowalny punktowo) warunek umożliwiający sprawdzenie czy zadana funkcja jest rozwiązaniem. Najważniejszym elementem powyższego planu jest charakteryzacja podrózniczki funkcjonału Ch_p za pomocą struktury różniczkowej na przestrzeniach metrycznych wprowadzonej przez Gigliego w [29]. Zaznaczmy, że główne trudności związane z pracą w przestrzeniach metrycznych to brak pojęcia funkcji gładkiej (zamiast nich używa się funkcji lipschitzowskich), brak pojęcia pochodnej kierunkowej oraz brak pojęcia pochodnej dystrybucyjnej.

Na koniec przedstawię leksykon najważniejszych pojęć dotyczących analizy na przestrzeniach metrycznych, które są używane w tej sekcji. Jest to wersja minimum pozwalająca odczytać i zrozumieć wyniki opisane poniżej. Podanie pełnych definicji tych obiektów znacząco wydłużyłoby autoreferat — zamiast tego do dokładnych sformułowań odsyłam do sekcji „Preliminaries” w pracach [A], [B] bądź [C].

- $|Du|$: minimalny p -słaby górny gradient (ang. minimal p -weak upper gradient) funkcji u . Jest to obiekt który uogólnia moduł gradientu $|\nabla u|$ z przestrzeni euklidesowej. Samo zdefiniowanie gradientu nie jest łatwe i opiera się na definicji $|Du|$ (patrz niżej), natomiast zdefiniowanie $|Du|$ jest prostsze, możliwe dla każdej funkcji ν -mierzalnej. Dodatkowa trudność: $|Du|$ może zależeć od wykładnika p .
- $W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu)$: przestrzeń Sobolewa (lub Newtona-Sobolewa), tzn. zbiór funkcji takich że $u \in L^p(\mathbb{X}, \nu)$ oraz $|Du| \in L^p(\mathbb{X}, \nu)$. Dodatkowa trudność: istnieje kilka (równoważnych) definicji takich przestrzeni [5].
- $|Du|_\nu$: miara całkowitego wahanía funkcji u . Jest to obiekt, który uogólnia miarę całkowitego wahanía $|Du|$ dla $u \in BV(\Omega)$ w przypadku euklidesowym.
- $BV(\mathbb{X}, d, \nu)$: przestrzeń funkcji o wahaníu ograniczonym, tzn. zbiór funkcji takich że $u \in L^1(\mathbb{X}, \nu)$ oraz $|Du|_\nu(\mathbb{X}) < \infty$. Dodatkowa trudność: istnieje kilka (niemal równoważnych) definicji przestrzeni typu BV.
- Struktura różniczkowa Gigliego: formalizm pozwalający na wprowadzenie pojęcia różniczki i gradientu funkcji z $W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu)$, który pojawił się po raz pierwszy w pracy [29]. Jest to dość abstrakcyjna konstrukcja z uwagi na wspomniane wyżej główne przeszkody, ponieważ uniemożliwiają one podejście znane z przypadku euklidesowego; otrzymane obiekty są w ogólności nielokalne i otrzymane za pomocą teorii L^p -unormowanych modułów. Niemniej, w wielu szczególnych przypadkach znany jest jej punktowy opis. Inne przykłady takich struktur można znaleźć w pracach [22, 28].
- $L^p(T^*\mathbb{X})$: p -moduł kostyczny (ang. p -cotangent module). Obiekt ten uogólnia przestrzeń $L^p(T^*M)$ dla rozmaitości riemannowskiej M , z tą różnicą, że sama przestrzeń kostyczna $T^*\mathbb{X}$ nie jest dobrze zdefiniowana - istnieje wyłącznie p -moduł kostyczny i w ogólności jest on zdefiniowany nielokalnie oraz zależy od p . $|\cdot|_*$: „długość” kowektora.
- $d : W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu) \rightarrow L^p(T^*\mathbb{X})$: operator różniczki. Jest to operator liniowy oraz ciągły (o normie 1).
- $L^q(T\mathbb{X})$: q -moduł styczny (ang. q -tangent module). Obiekt ten uogólnia przestrzeń $L^q(TM)$ i jest zdefiniowany poprzez dualność z przestrzenią $L^p(T^*\mathbb{X})$. Występują podobne trudności, tzn. sama przestrzeń styczna $T\mathbb{X}$ nie jest dobrze zdefiniowana. Dodatkowo, pojęcie gradientu jest nieco słabsze niż różniczki

- gradienty są zdefiniowane wyłącznie poprzez dualność i definicja ta nie jest w ogólności jednoznaczna (tzn. może istnieć wiele gradientów danej funkcji). $|\cdot|$: „długość” wektora.
- div : operator dywergencji zdefiniowany na podzbiorze $L^q(T\mathbb{X})$ poprzez dualność z operatorem różniczkowy.
- $\mathcal{D}^{q,r}(\mathbb{X})$: przestrzeń pól wektorowych $X \in L^q(T\mathbb{X})$ takich, że $\operatorname{div}(X) \in L^r(\mathbb{X}, \nu)$ — oznaczenie wprowadzone w pracy [A].
- $L^p(T^*\Omega)$, $L^q(T\Omega)$, div_0 , $\mathcal{D}_0^{q,r}(\Omega)$: odpowiedniki poprzednich pojęć na zbiorze otwartym ograniczonym Ω — pojęcia wprowadzone w pracy [B].
- T_Ω : operator śladu na odpowiednio regularnym zbiorze otwartym ograniczonym Ω . Prowadzi on z przestrzeni $BV(\Omega, d, \nu)$ na $L^1(\partial\Omega, |D\chi_\Omega|_\nu)$ i jest liniowy oraz ciągły.

■ [A] Potok gradientowy p -energii Cheegera

Ta sekcja jest poświęcona opisowi głównych wyników pracy [A], tzn. [36]. W pierwszej kolejności opiszę wyniki sekcji 3, 6 oraz 7 pracy [A]. Niech $q \in (1, \infty)$ będzie takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. W celu opisu podrózniczki funkcjonału Ch_p zdefiniowanego w (4) wprowadzamy następujący pomocniczy (wielowartościowy) operator.

Definicja 1. Mówimy, że $(u, v) \in \mathcal{A}_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u, v \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$, $u \in W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu)$ oraz istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}^{q,2}(\mathbb{X})$ takie, że następujące warunki są spełnione:

$$-\operatorname{div}(X) = v \quad \text{w } \mathbb{X};$$

$$du(X) = |du|_*^p = |X|^q \quad \nu\text{-p.w. w } \mathbb{X}.$$

Okazuje się, że $\mathcal{A}_p$ pokrywa się z podrózniczką funkcjonału Ch_p . Dowód tego faktu opiera się na metodach analizy wypukłej, w szczególności dualizacji, której możemy użyć dzięki temu że struktura różniczkowa pochodząca od Gigiego [29] jest liniowa. Warto zaznaczyć, że jest to zupełnie inny dowód niż dotychczasowo znane w przypadku euklidesowym, ponieważ opierały się one na przybliżaniu funkcji oraz pól wektorowych za pomocą gładkich obiektów; w tym przypadku jest to niemożliwe, ponieważ struktura różniczkowa Gigiego (przynajmniej a priori) nie jest zdefiniowana lokalnie i nie jest jasne w jaki sposób można przybliżać pole wektorowe z całkowalną dywergencją za pomocą bardziej regularnych pól wektorowych (przy braku dodatkowych założeń na $(\mathbb{X}, d, \nu)$ nawet wymiar pola wektorowego może zależeć od punktu).

Twierdzenie 2. Dla każdego $p > 1$ mamy $\mathcal{A}_p = \partial\operatorname{Ch}_p$. Ponadto operator $\mathcal{A}_p$ jest zupełnie akrecyjny (ang. *completely accretive* [11]) oraz dziedzina $\mathcal{A}_p$ jest gęstym podzbiorem $L^2(\mathbb{X}, \nu)$.

Dla równania ciepła, tzn. dla $p = 2$, taka charakteryzacja została pokazana już przez Gigiego [29] (z innym dowodem), niemniej dla $p \neq 2$ jest ona nowa. Zupełna akrecyjność operatora $\partial\operatorname{Ch}_p$ była już znana (np. [4] dla $p = 2$ czy [47] dla dowolnego $1 < p < \infty$), ale technika wprowadzona w naszej pracy jest prostsza dzięki bezpośredniemu użyciu struktury podrózniczki i dzięki temu dobrze uogólnia się na inne przypadki, np. te opisane w tej sekcji oraz w mojej późniejszej pracy [35]. Jako konsekwencja twierdzenia 2, naturalne jest wprowadzenie następującego pojęcia rozwiązania potoku gradientowego energii Cheegera Ch_p .

Definicja 3. Na przestrzeni $L^2(\mathbb{X}, \nu)$ definiujemy (wielowartościowy) operator $\Delta_{p,\nu}$ w następujący sposób:

$$(u, v) \in \Delta_{p,\nu} \quad \text{wtedy i tylko wtedy gdy} \quad -v \in \partial\operatorname{Ch}_p(u).$$

Z twierdzenia 2 wynika, że zdefiniowany w abstrakcyjny sposób problem Cauchy'ego (6) odpowiada zagadnieniu Cauchy'ego dla p -Laplasjanu

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) \in \Delta_{p,\nu}(u(t)), & t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (7)$$

którego rozwiązania są zdefiniowane w następujący sposób.

Definicja 4. Niech $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Mówimy, że u jest słabym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (7), jeśli $u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{X}, \nu)) \cap W_{\text{loc}}^{1,2}(0, T; L^2(\mathbb{X}, \nu))$, $u(0, \cdot) = u_0$, i $u_t(t, \cdot) \in \Delta_{p,\nu}u(t, \cdot)$ dla p.w. $t \in (0, T)$. Równoważnie, dla p.w. $t \in (0, T)$ mamy $u(t) \in W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu)$ oraz istnieją pola wektorowe $X(t) \in \mathcal{D}^{q,2}(\mathbb{X})$ takie, że:

$$\text{div}(X(t)) = u_t(t, \cdot) \quad \text{w } \mathbb{X};$$

$$|X(t)|^q = du(t)(X(t)) = |du(t)|_*^p \quad \nu\text{-p.w. w } \mathbb{X}.$$

Dwa ostatnie warunki można skrótowo określić w następujący sposób: równanie jest spełnione w słabym sensie; i dla p.w. $t \in (0, T)$ mamy warunek zgodności między polem wektorowym X a funkcją u . Z ogólnej teorii potoków gradientowych w przestrzeniach Hilberta, przede wszystkim przy użyciu twierdzenia Brezisa-Kōmury i zupełnej akrecyjności operatora ∂Ch_p wynika następujący rezultat.

Twierdzenie 5. Dla każdego $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$ oraz $T > 0$ istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u(t)$ problemu Cauchy'ego (7). Ponadto dla każdego $r \in [1, \infty]$, jeśli u_1, u_2 to słabe rozwiązania dla danych początkowych $u_{1,0}, u_{2,0} \in L^2(\mathbb{X}, \nu) \cap L^r(\mathbb{X}, \nu)$ odpowiednio, wówczas

$$\|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_r \leq \|(u_{1,0} - u_{2,0})^+\|_r.$$

Dzięki otrzymanej charakteryzacji rozwiązań, przy użyciu wyników dotyczących asymptotyki operatorów jednorodnych w przestrzeniach Hilberta [20], otrzymujemy także oszacowania tempa zaniku rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego (7). Poniżej podany jest wyłącznie wynik dotyczący czasu po jakim zanika rozwiązanie; szczegółowe oszacowania są podane w sekcji 6 pracy [A].

Twierdzenie 6. Załóżmy, że $\nu(\mathbb{X}) < \infty$ i spełniona jest następująca nierówność typu Poincaré

$$\|w - \bar{w}\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)}^p \leq M \text{Ch}_p(w) \quad \forall w \in W^{1,p}(\mathbb{X}, d, \nu) \cap L^2(\mathbb{X}, \nu),$$

dla pewnego $M > 0$, gdzie $\bar{w}$ oznacza wartość średnią funkcji $w \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Niech $u(t)$ będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego (7) dla $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Wówczas:

(i) (Skończony czas zaniku) Dla $1 < p < 2$, mamy

$$T_{\text{ex}}(u_0) \leq \frac{\|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)}^{2-p}}{(2-p)\lambda_1(\text{Ch}_p)}, \quad \text{gdzie} \quad T_{\text{ex}}(u_0) := \inf\{T > 0 : u(t) = \bar{u}_0 \quad \forall t \geq T\}.$$

(ii) (Nieskończony czas zaniku) Dla $p \geq 2$, mamy $T_{\text{ex}}(u_0) = +\infty$.

Analogiczny wynik jest prawdziwy w przypadku $\nu(\mathbb{X}) = +\infty$ pod warunkiem, że zachodzi następująca nierówność typu Sobolewa

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)}^p \leq M \operatorname{Ch}_p(w) \quad \forall w \in L^2(\mathbb{X}, \nu).$$

Podane powyżej ogólne wyniki dostarczają nowych informacji również w wielu istotnych szczególnych przypadkach, kiedy tylko możliwa jest dokładniejsza charakteryzacja modułu stycznego oraz kostycznego. Dwa takie przypadki to przestrzeń euklidesowa $(\mathbb{R}^N, d_{\text{Eucl}})$ wyposażona w miarę (dodatnią) Radona, gdzie nasze wyniki są nowe nawet gdy $\nu \ll \mathcal{L}^N$; oraz rozmaitości finslerowskie, gdzie znane dotychczas wyniki dotyczyły wyłącznie przypadku $p = 2$. Szczegółowy opis jest przedstawiony w sekcji 7 pracy [A].

Drugim celem artykułu [A] jest analiza potoku całkowitego wahan na przestrzeniach metrycznych, tzn. potoku gradientowego 1-energii Cheegera Ch_1 (zdefiniowanej w (5)). Ta część odpowiada wynikom z sekcji 4 i 5 artykułu [A]. Głównym wynikiem jest charakteryzacja podróżniczki funkcjonału Ch_1 ; w tym celu wprowadzimy najpierw pojęcie sparowania Anzellottiego (wprowadzonego w przypadku euklidesowym w [9]) na przestrzeniach metrycznych. Jest to konieczne, ponieważ aby funkcjonał Ch_1 był dobrze zdefiniowany i póciągiły z dołu, musi być zdefiniowany na przestrzeni funkcji o wahanu ograniczonym $BV(\mathbb{X}, d, \nu)$, a nie na przestrzeni Sobolewa $W^{1,1}(\mathbb{X}, d, \nu)$. Musimy zatem rozszerzyć pewne elementy konstrukcji liniowej struktury różniczkowej Gigiego na przestrzeń BV, tzn. wprowadzić sparowania Anzellottiego i użyć ich w celu zastąpienia znanych wzorów na całkowanie przez części przez uogólniony wzór Gaussa-Greena.

Do końca sekcji 4.1 zakładamy, że przestrzeń $(\mathbb{X}, d)$ jest zupełna, ośrodkowa, wyposażona w miarę podwajającą ν (ang. doubling measure), oraz spełnia słabą nierówność Poincaré typu $(1, 1)$ (ang. weak $(1, 1)$ -Poincaré inequality). Szczegółowe definicje tych pojęć oraz ich konsekwencja są opisane m.in. w [12, 44]. Podobnie jak w klasycznym przypadku [9], sparowanie Anzellottiego między polem wektorowym $X \in L^\infty(T\mathbb{X})$ oraz funkcją $u \in BV(\mathbb{X}, d, \nu)$ jest dobrze zdefiniowane przy założeniu, że następujący łączny warunek dotyczący ich regularności jest spełniony: dla $p \in [1, \infty)$ mamy

$$\operatorname{div}(X) \in L^p(\mathbb{X}, \nu), \quad u \in BV(\mathbb{X}, d, \nu) \cap L^q(\mathbb{X}, \nu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (8)$$

Innymi słowy, $X \in \mathcal{D}^{\infty, p}(\mathbb{X})$ oraz $u \in BV(\mathbb{X}, d, \nu) \cap L^q(\mathbb{X}, \nu)$.

Definicja 7. Załóżmy, że para (X, u) spełnia warunek (8). Dla funkcji lipschitzowskiej $f \in \operatorname{Lip}(\mathbb{X})$ o zwartym nośniku definiujemy

$$\langle (X, Du), f \rangle := - \int_{\mathbb{X}} u \operatorname{div}(fX) d\nu = - \int_{\mathbb{X}} u df(X) d\nu - \int_{\mathbb{X}} u f \operatorname{div}(X) d\nu.$$

Mimo że (X, Du) jest a priori zdefiniowane jako funkcjonał liniowy na funkcjach lipschitzowskich, okazuje się ono być miarą Radona, która jest absolutnie ciągła względem $|Du|_\nu$: dla każdego zbioru borelowskiego

$$\int_A |(X, Du)| \leq \|X\|_\infty \int_A |Du|_\nu.$$

Jeśli u jest funkcją lipschitzowską, to $(X, Du) \ll \nu$ i pokrywa się ono z działaniem różniczki du na X .

Poniższe dwa wyniki są głównym celem konstrukcji sparowań Anzellottiego i umożliwiają badanie równań różniczkowych cząstkowych o liniowym wzroście w przestrzeniach metrycznych. Są to odpowiednio wzór *Gaussa-Greena*, który uogólnia wzór na całkowanie przez części zadany przez definicję dywergencji na przypadek funkcji o wahanu ograniczonym, oraz wzór na całkowanie po włóknach dla sparowania (X, Du) .

Twierdzenie 8. *Założmy, że para (X, u) spełnia warunek (8). Wówczas*

$$\int_{\mathbb{X}} u \operatorname{div}(X) d\nu + \int_{\mathbb{X}} (X, Du) = 0.$$

Twierdzenie 9. *Założmy, że para (X, u) spełnia warunek (8). Oznaczmy $E_{u,t} = \{x \in \mathbb{X} : u(x) > t\}$. Wówczas, dla każdego zbioru borelowskiego $B \subset \mathbb{X}$*

$$\int_B (X, Du) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_B (X, D\chi_{E_{u,t}}) \right) dt.$$

Naszym następnym celem jest zbadanie zagadnienia Cauchy'ego dla potoku całkowitego wahan, tzn. potoku gradientowego 1-energii Cheegera $\operatorname{Ch}_1 : L^2(\mathbb{X}, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ (zdefiniowanej w (5)). W pracy [1] Ambrosio oraz Di Marino udowodnili, że funkcja Ch_1 jest wypukła oraz półciągła z dołu względem zbieżności w $L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Poniższe wyniki dotyczą charakteryzacji podróżniczki Ch_1 , wprowadzają pojęcie słabego rozwiązania na podstawie tej charakteryzacji, oraz opisują podstawowe właściwości rozwiązań. Zaczynamy od następującego pomocniczego (wielowartościowego) operatora.

Definicja 10. *$(u, v) \in \mathcal{A}_1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u, v \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$, $u \in BV(\mathbb{X}, d, \nu)$ oraz istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}^{\infty,2}(\mathbb{X})$ spełniające $\|X\|_{\infty} \leq 1$ takie, że następujące warunki są spełnione:*

$$-\operatorname{div}(X) = v \quad \text{w } \mathbb{X};$$

$$(X, Du) = |Du|_{\nu} \quad \text{jako miary na } \mathbb{X}.$$

Twierdzenie 11. *Zachodzi $\mathcal{A}_1 = \partial \operatorname{Ch}_1$. Ponadto operator $\mathcal{A}_1$ jest zupełnie akrecyjny oraz dziedzina $\mathcal{A}_1$ jest gęstym podzbiorem $L^2(\mathbb{X}, \nu)$.*

Dzięki powyższej charakteryzacji możliwe jest wprowadzenie następującego pojęcia rozwiązania dla potoku całkowitego wahan w przestrzeniach metrycznych.

Definicja 12. *Niech $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Mówimy, że u jest słabym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla potoku całkowitego wahan, jeśli $u \in C([0, T]; L^2(\mathbb{X}, \nu)) \cap W_{\operatorname{loc}}^{1,2}(0, T; L^2(\mathbb{X}, \nu))$, mamy $u(0, \cdot) = u_0$, i dla p.w. $t \in (0, T)$ zachodzi $u(t) \in BV(\mathbb{X}, d, \nu)$ oraz istnieją pola wektorowe $X(t) \in \mathcal{D}^{\infty,2}(\mathbb{X})$ takie, że $\|X(t)\|_{\infty} \leq 1$ i zachodzą następujące warunki:*

$$\operatorname{div}(X(t)) = u_t(t, \cdot) \quad \text{w } \mathbb{X};$$

$$(X(t), Du(t)) = |Du(t)|_{\nu} \quad \text{jako miary na } \mathbb{X}.$$

Jak poprzednio, dzięki twierdzeniu Brezisa-Kōmury i twierdzeniu 11 natychmiast otrzymujemy następujący wynik o istnieniu i jednoznaczności rozwiązań. Zasada porównawcza wynika z zupełnej akrecyjności operatora ∂Ch_1 , a nierówność (9) z faktu, że ∂Ch_1 jest homogeniczny z wykładnikiem równym zero.

Twierdzenie 13. *Dla każdego $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$ i $T > 0$ istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u(t)$ problemu Cauchy'ego dla potoku całkowitego wahan z danymi początkowymi $u(0) = u_0$. Ponadto zachodzi następująca zasada porównawcza: dla każdego $r \in [1, \infty]$, jeśli u_1, u_2 to słabe rozwiązania dla danych początkowych $u_{1,0}, u_{2,0} \in L^2(\mathbb{X}, \nu) \cap L^r(\mathbb{X}, \nu)$ odpowiednio, wówczas*

$$\|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_r \leq \|(u_{1,0} - u_{2,0})^+\|_r.$$

Zachodzi także następujące oszacowanie

$$\left\| \frac{d}{dt} u(t) \right\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)} \leq \frac{\|u_0\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)}}{t} \quad \text{dla każdego } t > 0. \quad (9)$$

Powyższy wynik jest spójny z tymi z pracy Ambrosio i Di Marino [1], ale nasz wynik jest bardziej szczegółowy i dostarcza więcej informacji o rozwiązaniu dzięki charakteryzacji podrózniczki całkowitego wahan. Podobnie jak w przypadku $p > 1$ otrzymujemy także wyniki dotyczące asymptotyki słabych rozwiązań, np. czasu zaniku (podany poniżej) bądź tempa zaniku rozwiązania.

Twierdzenie 14. *Założmy, że $\nu(\mathbb{X}) < \infty$ i spełniona jest następująca nierówność typu Poincaré*

$$\|w - \bar{w}\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)} \leq M \text{Ch}_1(w) \quad \forall w \in BV(\mathbb{X}, d, \nu) \cap L^2(\mathbb{X}, \nu)$$

dla pewnego $M > 0$. Niech $u(t)$ będzie słabym rozwiązaniem zagadnienia Cauchy'ego dla potoku całkowitego wahan dla $u_0 \in L^2(\mathbb{X}, \nu)$. Wówczas

$$T_{\text{ex}}(u_0) \leq \frac{\|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)}}{\lambda_1(\text{Ch}_1)}, \quad \text{gdzie} \quad T_{\text{ex}}(u_0) := \inf\{T > 0 : u(t) = \bar{u}_0 \quad \forall t \geq T\}.$$

Analogiczny wynik jest prawdziwy w przypadku $\nu(\mathbb{X}) = +\infty$ pod warunkiem, że zachodzi następująca nierówność typu Sobolewa

$$\|w\|_{L^2(\mathbb{X}, \nu)} \leq M \text{Ch}_1(w) \quad \forall w \in L^2(\mathbb{X}, \nu).$$

■ [B] Wzór Gaussa-Greena w przestrzeniach metrycznych

W tej sekcji opisujemy główne wyniki pracy [B], tzn. [37]. Głównym celem w tym artykule było rozszerzenie konstrukcji uogólnionych sparowań Anzellottiego wprowadzonej w poprzedniej pracy na przypadek zbioru ograniczonego $\Omega \subset \mathbb{X}$ o wystarczająco regularnym brzegu i udowodnienie odpowiedniego wzoru Gaussa-Greena, który we właściwy sposób uwzględnia efekty wynikające z obecności brzegu dziedziny. W tym celu rozszerzamy konstrukcję struktury różniczkowej Gigliego na przypadek wystarczająco regularnych zbiorów otwartych. Ponieważ wymaga ona zupełności przestrzeni, wpierw wprowadzamy strukturę różniczkową na $\bar{\Omega}$, a następnie za pomocą odpowiednich rozszerzeń funkcji Sobolewa bądź BV z Ω na jej domknięcie identyfikujemy odpowiednie obiekty na Ω i $\bar{\Omega}$.

Do końca sekcji 4.1 zakładamy dodatkowo, że $\Omega \subset \mathbb{X}$ jest zbiorem otwartym ograniczonym o ograniczonym obwodzie, $\nu(\partial\Omega) = 0$, Ω spełnia słabą nierówność Poincaré typu $(1, 1)$, funkcje z przestrzeni $BV(\Omega, d, \nu)$ posiadają ślady i rozszerzenia [55], oraz że Ω jest regularna (ang. regular domain) [19, 56], tzn. $|D\chi_\Omega|_\nu(\mathbb{X}) = \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{\nu(\Omega \setminus \Omega_t)}{t}$ dla $\Omega_t = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) \geq t\}$. Na potrzeby tego tekstu określamy powyższe założenia skrótowo pisząc że Ω jest *wystarczająco regularna*.

Pierwszym krokiem jest udowodnienie wzoru Gaussa-Greena dla funkcji lipschitzowskich w przestrzeniach metrycznych podobnego do wzorów znanych z [19] i [56]. Różnica jest taka, że tutaj mamy $X \in L^\infty(T\Omega)$ zamiast $X \in L^\infty(T\mathbb{X})$. Z tego powodu, musimy także użyć innej definicji dywergencji, tzn. div_0 zamiast div (która ma nieco inną klasę funkcji testowych). Ponieważ obiekty w $L^\infty(T\Omega)$ nie są (a priori) zdefiniowane lokalnie, ale wyłącznie poprzez dualność i rozszerzenia, nie jest oczywiste w jaki sposób rozszerzyć je do $L^\infty(T\mathbb{X})$. Przez to, nie możemy użyć wyniku z [19] i pokazujemy poniższe twierdzenie bezpośrednio.

Twierdzenie 15. *Założmy, że $X \in L^\infty(T\Omega)$ spełnia $\text{div}_0(X) \in L^1(\Omega, \nu)$. Wówczas istnieje funkcja $(X \cdot \nu_\Omega)^- \in L^\infty(\partial\Omega, |D\chi_\Omega|_\nu)$ taka, że*

$$\int_{\Omega} f \text{div}_0(X) d\nu + \int_{\Omega} df(X) d\nu = - \int_{\partial\Omega} f(X \cdot \nu_\Omega)^- d|D\chi_\Omega|_\nu$$

dla każdej $f \in \text{Lip}(\overline{\Omega})$. Ponadto zachodzi następujące oszacowanie:

$$\|(X \cdot \nu_\Omega)^-\|_{L^\infty(\partial\Omega, |D\chi_\Omega|_\nu)} \leq \|X\|_\infty.$$

Funkcja $(X \cdot \nu_\Omega)^-$ skonstruowana w dowodzie twierdzenia 15 to *wewnętrzny ślad części normalnej* (ang. interior normal trace) pola wektorowego X na $\partial\Omega$. W literaturze dotyczącej przypadku euklidesowego na ogół używa się zewnętrznego wektora normalnego w konstrukcji śladu — czego chcemy uniknąć tutaj aby konstrukcja $(X \cdot \nu_\Omega)^-$ zależała wyłącznie od geometrii Ω , a nie od geometrii $\mathbb{X} \setminus \overline{\Omega}$ — przez co wyniki otrzymane w tej (i kolejnej) sekcji różnią się znakiem w członie na $\partial\Omega$ od znanych wyników euklidesowych.

Sparowania Anzellottiego na obszarach ograniczonych definiujemy w podobny sposób jak poprzednio, zastępując dywergencję div poprzez div_0 . Ścisłej, zakładając że $X \in L^\infty(T\Omega)$, $u \in BV(\Omega, d, \nu)$ oraz że zachodzi łączny warunek regularnościowy na u i X

$$\text{div}_0(X) \in L^p(\Omega, \nu), \quad u \in BV(\Omega, d, \nu) \cap L^q(\Omega, \nu), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (10)$$

dla $p \in [1, \infty)$, poniższe sparowanie jest dobrze zdefiniowane.

Definicja 16. *Założmy, że para (X, u) spełnia warunek (10). Dla funkcji lipschitzowskiej $f \in \text{Lip}(\Omega)$ o zwartym nośniku definiujemy*

$$\langle (X, Du), f \rangle := - \int_{\Omega} u \text{div}_0(fX) d\nu = - \int_{\Omega} u df(X) d\nu - \int_{\Omega} u f \text{div}_0(X) d\nu.$$

Ponownie, sparowanie (X, Du) jest miarą Radona oraz $(X, Du) \ll |Du|_\nu$. Ponadto, wzór Gaussa-Greena przedstawiony w twierdzeniu 15 uogólnia się na przypadek funkcji BV (w miejsce lipschitzowskich).

Twierdzenie 17. *Założmy, że para (X, u) spełnia warunek (10). Wówczas*

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}_0(X) d\nu + \int_{\Omega} (X, Du) = - \int_{\partial\Omega} T_{\Omega} u (X \cdot \nu_{\Omega})^- d|D\chi_{\Omega}|_{\nu}.$$

Naszym następnym celem jest użycie powyższych narzędzi w celu analizy zagadnienia najmniejszego gradientu w przestrzeniach metrycznych; skrótowy opis tego zagadnienia w przypadku euklidesowym jest przedstawiony na początku sekcji 4. Jest to modelowy przykład zagadnienia wariacyjnego dla funkcjonałów o liniowym wzroście; ponieważ wiele narzędzi dostępnych w przypadku euklidesowym nie miało swoich metrycznych odpowiedników, analiza zagadnienia najmniejszego gradientu znacząco przyczyniła się do rozwoju teorii funkcji BV w przestrzeniach metrycznych, np. konstrukcji operatora śladu [52, 55], reguły Leibniza [42], i obwodu wewnętrznego (ang. inner perimeter) [51]. Dzięki użyciu wzoru Gaussa-Greena otrzymujemy lokalną charakteryzację rozwiązań tego zagadnienia, uogólniając wynik z pracy [57] w przypadku euklidesowym.

Definicja 18. *Mówimy, że $u \in BV(\Omega, d, \nu)$ jest funkcją najmniejszego gradientu w Ω , jeśli*

$$\int_{\Omega} |Du|_{\nu} \leq \int_{\Omega} |Dv|_{\nu}$$

dla wszystkich $v \in BV(\Omega, d, \nu)$ takich, że $T_{\Omega} u = T_{\Omega} v$.

Zagadnienie najmniejszego gradientu, tj. zagadnienie Dirichleta dla funkcji najmniejszego gradientu, było rozważane w przypadku metrycznym po raz pierwszy w pracy [42]. W przypadku metrycznym możliwe są nierównoważne definicje; w pracy [42] jest to definicja typu (B), tzn.

$$\min \left\{ |Du|_{\nu}(\overline{\Omega}) : u \in BV(\mathbb{X}, d, \nu), \quad u = f \text{ na } \mathbb{X} \setminus \overline{\Omega} \right\} \quad (\text{B})$$

dla $f \in BV(\mathbb{X}, d, \nu)$. Inna możliwość, nazywana definicją typu (T), została wprowadzona w pracy [51]:

$$\min \left\{ |Du|_{\nu}(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |T_{\Omega}(u) - f|(x) dP_+(\Omega, x) \right\} \quad (\text{T})$$

dla $f \in L^1(\partial\Omega, P_+(\Omega, \cdot))$. W tej definicji, $P_+(\Omega, \cdot)$ oznacza wewnętrzny obwód zbioru Ω (jest to miara na $\mathbb{X}$, która w przypadku euklidesowym odpowiada $\mathcal{H}^{N-1}|_{\partial\Omega}$). W przypadku euklidesowym, gdy Ω jest dziedziną z brzegiem lipschitzowskim, powyższe definicje pokrywają się; w przypadku metrycznym wymaga to dodatkowych założeń na $(\mathbb{X}, d, \nu)$ oraz Ω . Definicja (B) jest prostsza i wymaga słabszych założeń dotyczących przestrzeni, natomiast definicja (T) bierze pod uwagę wyłącznie strukturę przestrzeni wewnątrz Ω .

Poniżej przedstawiamy równoważną do (T) lokalną charakteryzację rozwiązań otrzymaną poprzez strukturę różniczkową Gigiego oraz nowo otrzymane sparowanie Anzellottiego (X, Du) . Dla danych brzegowych $f \in L^1(\partial\Omega, |D\chi_{\Omega}|_{\nu})$, definiujemy funkcjonał $\mathcal{T}_f : L^1(\Omega, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ jako

$$\mathcal{T}_f(u) := \begin{cases} |Du|_{\nu}(\Omega) + \int_{\partial\Omega} |T_{\Omega}(u) - f| d|D\chi_{\Omega}|_{\nu} & \text{dla } u \in BV(\Omega, d, \nu); \\ +\infty & \text{dla } u \notin BV(\Omega, d, \nu). \end{cases}$$

Pokazujemy, że dla regularnych dziedzin obwody $|D\chi_\Omega|_\nu$ i P_+ pokrywają się, zatem u rozwiązuje zagadnienie najmniejszego gradientu w sensie (T) dla danych brzegowych f wtedy i tylko wtedy gdy u minimalizuje funkcjonał $\mathcal{T}_f$, co jest równoważne

$$0 \in \partial\mathcal{T}_f(u),$$

tzn. równaniu Eulera-Lagrange'a dla minimalizacji $\mathcal{T}_f$. Istnienie funkcji minimalizujących $\mathcal{T}_f$ wynika z metody bezpośredniej rachunku wariacyjnego; ich charakteryzacja jest zawarta w następującym wyniku.

Twierdzenie 19. Niech $f \in L^1(\partial\Omega, |D\chi_\Omega|_\nu)$. Dla $u \in BV(\Omega, d, \nu)$, następujące warunki są równoważne:

- (i) $0 \in \partial\mathcal{T}_f(u)$;
- (ii) Istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}_0^\infty(\Omega)$ takie, że $\|X\|_\infty \leq 1$ i następujące warunki są spełnione:

$$-\operatorname{div}_0(X) = 0 \quad \text{w } \Omega;$$

$$(X, Du) = |Du|_\nu \quad \text{jako miary};$$

$$(X \cdot \nu_\Omega)^- \in \operatorname{sign}(T_\Omega u - f) \quad |D\chi_\Omega|_\nu - \text{p.w. na } \partial\Omega.$$

Powyżej sign oznacza wielowartościowy znak, tzn. jest to podrózniczka funkcji modułu: $\operatorname{sign}(x) = \partial|x|$. Otrzymaliśmy także wynik dotyczący relacji między funkcjami najmniejszego gradientu a powierzchniami minimalnymi. W przypadku euklidesowym, w pracy [14] udowodniono, że brzegi nadpoziomic funkcji najmniejszego gradientu (globalnie) minimalizują powierzchnię, natomiast w [70] pokazano że przeciwna implikacja również zachodzi. Pokazujemy, że ta równoważność zachodzi w obie strony również w przypadku metrycznym.

■ [C] Potok całkowitego wahanía na zbiorach ograniczonych

Poniższa sekcja jest poświęcona opisowi głównych wyników pracy [C], tzn. [38]. Dotyczą one potoku całkowitego wahanía na zbiorach ograniczonych w przestrzeniach metrycznych; badamy zagadnienia z warunkami brzegowymi Neumanna lub Dirichleta. Używając metod wypracowanych w poprzedniej sekcji, możemy wprowadzić pojęcie słabego rozwiązania. W związku z tym, przez całą niniejszą sekcję pracujemy przy tych samych założeniach co w sekcji 4.1[B].

Zagadnienie Neumanna dla potoku całkowitego wahanía

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \operatorname{div} \left(\frac{Du(t, x)}{|Du(t, x)|_\nu} \right) & \text{w } (0, T) \times \Omega; \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(t, x) = 0 & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{w } \Omega \end{cases} \quad (11)$$

dla danych początkowych $u_0 \in L^2(\Omega, \nu)$ rozumiemy jako potok gradientowy w $L^2(\Omega, \nu)$ funkcjonału $\mathcal{TV}_\mathcal{N} : L^2(\Omega, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ zadanego przez

$$\mathcal{TV}_\mathcal{N}(u) := \begin{cases} \int_\Omega |Du|_\nu & \text{dla } u \in BV(\Omega, d, \nu) \cap L^2(\Omega, \nu); \\ +\infty & \text{dla } u \in L^2(\Omega, \nu) \setminus BV(\Omega, d, \nu). \end{cases}$$

Funkcjonał $\mathcal{TV}_{\mathcal{N}}$ jest wypukły i półciągły z dołu względem zbieżności w $L^2(\Omega, \nu)$, więc z twierdzenia Brezisa-Kōmury wynika istnienie jedyne silnego rozwiązania abstrakcyjnego zagadnienia Cauchy'ego

$$\begin{cases} u'(t) + \partial \mathcal{TV}_{\mathcal{N}}(u(t)) \ni 0 & \text{dla } t \in [0, T]; \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

W celu charakteryzacji podrózniczki $\mathcal{TV}_{\mathcal{N}}$ definiujemy następujący pomocniczy (wielowartościowy) operator.

Definicja 20. $(u, v) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u, v \in L^2(\Omega, \nu)$, $u \in BV(\Omega, d, \nu)$ oraz istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}_0^{\infty, 2}(\Omega)$ spełniające $\|X\|_{\infty} \leq 1$ takie, że następujące warunki są spełnione:

$$-\operatorname{div}_0(X) = v \quad \text{w } \Omega;$$

$$(X, Du) = |Du|_{\nu} \quad \text{jako miary};$$

$$(X \cdot \nu_{\Omega})^{-} = 0 \quad |D\chi_{\Omega}|_{\nu} - p.w. \text{ na } \partial\Omega.$$

Prawdziwa jest także następująca równoważność: $(u, v) \in \mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u, v \in L^2(\Omega, \nu)$, $u \in BV(\Omega, d, \nu)$ oraz istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}_0^{\infty, 2}(\Omega)$ spełniające $\|X\|_{\infty} \leq 1$ takie, że $-\operatorname{div}_0(X) = v$ w Ω oraz dla każdego $w \in BV(\Omega, d, \nu) \cap L^2(\Omega, \nu)$

$$\int_{\Omega} v(w - u) d\nu \leq \int_{\Omega} (X, Dw) - \int_{\Omega} |Du|_{\nu}. \quad (12)$$

Później użyjemy osłabionej wersji warunku 12 w celu wprowadzenia rozwiązań entropijnych (ang. entropy solutions) dla danych początkowych w $L^1(\Omega, \nu)$.

Pierwszym celem pracy [38] jest pokazanie, że $\mathcal{A}_{\mathcal{N}} = \partial \mathcal{TV}_{\mathcal{N}}$, i zbadanie konsekwencji tego faktu. Naszym głównym narzędziem ponownie są metody dualnościowe w analizie wypukłej. Ponieważ struktura różniczkowa Gigiego jest liniowa oraz dziedzina Ω jest wystarczająco regularna (dzięki czemu operator śladu istnieje, jest liniowy i ciągły), używając podobnej strategii jak w dowodzie twierdzenia 11 otrzymujemy, że $\mathcal{A}_{\mathcal{N}} = \partial \mathcal{TV}_{\mathcal{N}}$, $D(\mathcal{A}_{\mathcal{N}})$ jest gęstym podzbiorem $L^2(\Omega, \nu)$, oraz $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$ jest zupełnie akrecyjny. Dzięki temu możemy wprowadzić następujące pojęcia rozwiązania zagadnienia (11).

Definicja 21. Niech $u_0 \in L^2(\Omega, \nu)$. Mówimy, że u jest słabym rozwiązaniem zagadnienia Neumanna (11), jeśli $u \in C([0, T]; L^2(\Omega, \nu)) \cap W_{\text{loc}}^{1, 2}(0, T; L^2(\Omega, \nu))$, $u(0, \cdot) = u_0$, i dla p.w. $t \in (0, T)$ zachodzi $u(t) \in BV(\Omega, d, \nu)$ oraz istnieją pola wektorowe $X(t) \in \mathcal{D}_0^{\infty, 2}(\Omega)$ takie, że $\|X(t)\|_{\infty} \leq 1$ i zachodzą następujące warunki:

$$\operatorname{div}_0(X(t)) = u_t(t, \cdot) \quad \text{w } \Omega;$$

$$(X(t), Du(t)) = |Du(t)|_{\nu} \quad \text{jako miary};$$

$$(X(t) \cdot \nu_{\Omega})^{-} = 0 \quad |D\chi_{\Omega}|_{\nu} - p.w. \text{ na } \partial\Omega.$$

Dzięki charakteryzacji $\mathcal{A}_{\mathcal{N}} = \partial \mathcal{TV}_{\mathcal{N}}$, z twierdzenia Brezisa-Kōmury wynika następujący wynik (zasada porównawcza (13) wynika z zupełnej akrecyjności operatora $\mathcal{A}_{\mathcal{N}}$).

Twierdzenie 22. Dla każdego $u_0 \in L^2(\Omega, \nu)$ oraz $T > 0$ istnieje dokładnie jedno słabe rozwiązanie $u(t)$ zagadnienia Neumanna (11). Ponadto dla każdego $q \in [1, \infty]$, jeśli u_1, u_2 to słabe rozwiązania dla danych początkowych $u_{1,0}, u_{2,0} \in L^2(\Omega, \nu) \cap L^q(\Omega, \nu)$ odpowiednio, wówczas

$$\|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_q \leq \|(u_{1,0} - u_{2,0})^+\|_q. \quad (13)$$

Otrzymujemy także oszacowania asymptotyczne analogiczne do twierdzenia 14. Powyższa konstrukcja rozwiązań uogólnia się na przypadek danych początkowych $u_0 \in L^1(\Omega, \nu)$, co prowadzi do rozwiązań entropijnych (ang. entropy solutions) wprowadzonych w [10] (a w kontekście liniowego wzrostu w [8]). W tym przypadku, dopuszczamy możliwość że rozwiązania będą miały nieskończoną energię (tj. całkowite wahanie miary $|Du|_\nu$) i wymagamy jedynie żeby zachodziła słabsza nierówność wariacyjna typu (12). Oznaczmy

$$T_k(s) = \begin{cases} s & \text{jeśli } |s| \leq k; \\ k \cdot \text{sign}(s) & \text{jeśli } |s| > k. \end{cases}$$

Następnie definiujemy następujący (wielowartościowy) operator w $L^1(\Omega, \nu)$.

Definicja 23. $(u, v) \in \mathcal{B}_\mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u, v \in L^1(\Omega, \nu)$, $T_k(u) \in BV(\Omega, d, \nu)$ dla każdego $k > 0$, oraz istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}_0^{\infty,1}(\Omega)$ takie, że $\|X\|_\infty \leq 1$, $-\text{div}_0(X) = v$ w Ω oraz

$$\int_\Omega (w - T_k(u)) v \, d\nu \leq \int_\Omega (X, Dw) - \int_\Omega |DT_k(u)|_\nu$$

dla każdego $w \in BV(\Omega, d, \nu) \cap L^\infty(\Omega, \nu)$ i $k > 0$.

Operator $\mathcal{B}_\mathcal{N}$ jest zupełnie akrecyjny w $L^1(\Omega, \nu)$, maksymalny w sensie inkluzji i 0-jednorodny. Ponadto

$$\mathcal{B}_\mathcal{N} \cap (L^2(\Omega, \nu) \times L^2(\Omega, \nu)) = \mathcal{A}_\mathcal{N}, \quad (14)$$

dzięki czemu $D(\mathcal{B}_\mathcal{N})$ jest gęstym podzbiorem $L^1(\Omega, \nu)$. Ponadto, uzyskujemy następującą równoważną charakteryzację operatora $\mathcal{B}_\mathcal{N}$: dla $u, v \in L^1(\Omega, \nu)$, $(u, v) \in \mathcal{B}_\mathcal{N}$ wtedy i tylko wtedy gdy $T_k(u) \in BV(\Omega, d, \nu)$ dla każdego $k > 0$ oraz istnieje pole wektorowe $X \in \mathcal{D}_0^{\infty,1}(\Omega)$ spełniające $\|X\|_\infty \leq 1$ takie, że

$$-\text{div}_0(X) = v \quad \text{w } \Omega;$$

$$(X, DT_k(u)) = |DT_k(u)|_\nu \quad \text{jako miary } \forall k > 0;$$

$$(X \cdot \nu_\Omega)^- = 0 \quad |D\chi_\Omega|_\nu - \text{p.w. na } \partial\Omega.$$

Dzięki tej charakteryzacji możemy zdefiniować rozwiązania entropijne w następujący sposób.

Definicja 24. Niech $u_0 \in L^1(\Omega, \nu)$. Mówimy, że $u(t)$ jest rozwiązaniem entropijnym zagadnienia Neumanna (11), jeśli $u \in C([0, T]; L^1(\Omega, \nu)) \cap W_{\text{loc}}^{1,1}(0, T; L^1(\Omega, \nu))$, mamy $u(0, \cdot) = u_0$ oraz dla p.w. $t \in (0, T)$ zachodzi $T_k u(t) \in BV(\Omega, d, \nu)$ dla każdego $k > 0$ oraz istnieją pola wektorowe $X(t) \in \mathcal{D}_0^{\infty,1}(\Omega)$ takie, że $\|X(t)\|_\infty \leq 1$ i następujące warunki są spełnione:

$$\operatorname{div}_0(X(t)) = u_t(t, \cdot) \quad \text{w } \Omega;$$

$$(X(t), DT_k u(t)) = |DT_k u(t)|_\nu \quad \text{jako miary } \forall k > 0;$$

$$(X(t) \cdot \nu_\Omega)^- = 0 \quad |D\chi_\Omega|_\nu - p.w. \text{ na } \partial\Omega.$$

Dzięki maksymalności w sensie inkluzji oraz zupełnej akrecyjności $\mathcal{B}_\mathcal{N}$ otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 25. *Dla każdego $u_0 \in L^1(\Omega, \nu)$ oraz $T > 0$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie entropijne $u(t)$ zagadnienia Neumanna (11). Ponadto dla każdego $r \in [1, \infty]$, jeśli u_1, u_2 to rozwiązania entropijne dla danych początkowych $u_{1,0}, u_{2,0} \in L^r(\Omega, \nu)$ odpowiednio, wówczas*

$$\|(u_1(t) - u_2(t))^+\|_r \leq \|(u_{1,0} - u_{2,0})^+\|_r.$$

Ponadto, dzięki 0-jednorodności operatora $\mathcal{B}_\mathcal{N}$, mamy

$$\left\| \frac{du(t)}{dt} \right\|_{L^1(\Omega, \nu)} \leq \frac{\|u_0\|_{L^1(\Omega, \nu)}}{t} \quad \text{dla każdego } t > 0.$$

Analogiczna konstrukcja działa także dla zagadnienia Cauchy'ego na całej przestrzeni pod warunkiem, że jej miara $\nu(\mathbb{X})$ jest skończona. Ponadto, dzięki własności (14) dla danych początkowych w $L^2(\Omega, \nu)$ rozwiązania entropijne pokrywają się ze słabymi rozwiązaniami.

Powyższe podejście działa także dla potoku całkowitego wahan z warunkami brzegowymi typu Dirichleta (gdzie dodatkowe trudności wynikają z pojawienia się dodatkowych członów na brzegu dziedziny). Formalnie, rozważamy wówczas następujące równanie paraboliczne

$$\begin{cases} u_t(t, x) = \operatorname{div} \left(\frac{Du(t, x)}{|Du(t, x)|_\nu} \right) & \text{w } (0, T) \times \Omega; \\ u(t, x) = f(x) & \text{na } (0, T) \times \partial\Omega; \\ u(0, x) = u_0(x) & \text{w } \Omega \end{cases} \quad (15)$$

dla $u_0 \in L^2(\Omega, \nu)$ oraz $f \in L^1(\partial\Omega, |D\chi_\Omega|_\nu)$. Rozumiemy je jako potok gradientowy w $L^2(\Omega, \nu)$ wypukłego i półciągłego z dołu funkcjonatu $\mathcal{TV}_f : L^2(\Omega, \nu) \rightarrow [0, +\infty]$ zadanego przez

$$\mathcal{TV}_f(u) := \begin{cases} \int_\Omega |Du|_\nu + \int_{\partial\Omega} |T_\Omega(u) - f| d|D\chi_\Omega|_\nu & \text{dla } u \in BV(\Omega, d, \nu) \cap L^2(\Omega, \nu); \\ +\infty & \text{dla } u \in L^2(\Omega, \nu) \setminus BV(\Omega, d, \nu). \end{cases}$$

Otrzymujemy analogiczne pojęcie rozwiązania dla zagadnienia Dirichleta (15), jego istnienie i jednoznaczność, zupełną akrecyjność powiązanego operatora (co pociąga za sobą zasadę porównawczą), oraz oszacowania asymptotyczne w przypadku $f = 0$. Ponadto pokazujemy, że nasze pojęcie słabego rozwiązania jest zgodne z *rozwiązaniami wariacyjnymi* (ang. variational solution), por. [13] lub [53] dla powiązanej idei pseudorozwiązania (ang. pseudosolution) wprowadzonymi dla potoku całkowitego wahan w [18].

4.2. Geometryczne spojrzenie na dwuwymiarowe zagadnienie najmniejszego gradientu

Ta sekcja jest poświęcona analizie zagadnienia najmniejszego gradientu

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |Du| : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\} \quad (16)$$

w dwóch wymiarach, ze szczególnym uwzględnieniem geometrii obszaru oraz przy użyciu metod optymalnego transportu oraz geometrycznej teorii miary (w odróżnieniu od podejścia przedstawionego w sekcji 4.1, w szczególności 4.1[B], które było bardziej abstrakcyjne i używało technik analizy funkcjonalnej). Pierwszy poruszany temat dotyczy relacji między zagadnieniem najmniejszego gradientu a zagadnieniem optymalnego transportu. Najwcześniejszy wynik tego typu pochodzi z pracy [40], gdzie Górny, Rybka i Sabra pokazali, że na wypukłych dziedzinach w dwóch wymiarach zagadnienie najmniejszego gradientu jest równoważne zagadnieniu Beckmanna

$$\min \left\{ \int_{\Omega} |w| : w \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2), \operatorname{div} w = g \right\}, \quad (17)$$

gdzie $g = \partial_{\tau} f$ to pochodna f w kierunku stycznym (patrz także [25]). Formalnie równoważność ta jest zadana poprzez $w = R_{-\frac{\pi}{2}} Du$, gdzie R_{α} to obrót o kąt α względem początku układu współrzędnych. Ponadto, na zbiorach wypukłych zagadnienie Beckmanna jest równoważne zagadnieniu Monge'a-Kantorowicza [67, 72]

$$\min \left\{ \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} |x - y| d\gamma : \gamma \in \mathcal{M}^+(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}), (\Pi_x)_{\#} \gamma = g^+ \text{ and } (\Pi_y)_{\#} \gamma = g^- \right\}, \quad (18)$$

gdzie g^+ i g^- to odpowiednio dodatnia i ujemna część miary g . W tym przypadku miary źródłowa g^+ i docelowa g^- są skoncentrowane na brzegu dziedziny. Związek między tymi trzema zagadnieniami (16), (17) i (18) został po raz pierwszy wykorzystany w pracy [25] do uzyskania następującego wyniku: jeśli dziedzina Ω jest jednostajnie wypukła, to dla $p \leq 2$ regularność danych brzegowych typu $W^{1,p}(\partial\Omega)$ implikuje, że (jedyne) rozwiązanie leży w $W^{1,p}(\Omega)$. Sercem dowodu jest obserwacja, że regularność $W^{1,p}$ danych brzegowych w (16) odpowiada regularności L^p danych brzegowych w (18), oraz regularność $W^{1,p}$ rozwiązania zagadnienia (16) odpowiada regularności L^p gęstości transportu σ_{γ} (ang. transport density) powiązanej z planem transportowym γ . tzn. między rozwiązaniami (16), (17) i (18) odpowiednio zachodzi $|Du| = |w| = |\sigma_{\gamma}|$. Wystarczy zatem zbadać regularność gęstości transportu σ_{γ} , do czego możemy użyć znacznie bogatszego zestawu narzędzi. Sekcje 4.2[D,E] są poświęcone rozbudowaniu tej równoważności i jej wykorzystaniu w celu odpowiedzi na pytania dotyczące regularności, struktury, oraz stabilności rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu i jego anizotropowego wariantu

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \phi(x, Du) : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\},$$

gdzie anizotropia $\phi : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ jest taka, że dla każdego $x \in \overline{\Omega}$ funkcja $\phi(x, \cdot)$ jest normą równoważną normie euklidesowej (jednostajnie względem x). Najbardziej istotne przykłady z punktu widzenia zastosowań to gdy ϕ jest ustaloną normą oraz gdy $\phi(x, Du) = a(x)|Du|$. Ponadto szczegółowo uzasadniamy hipotezę, że poziomice rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu (16) mają interpretację promieni transportowych w zagadnieniu Monge'a-Kantorowicza (18).

Drugi poruszany temat dotyczy przestrzeni śladów *funkcji najmniejszego gradientu* (ang. least gradient functions), tzn. funkcji $u \in BV(\Omega)$ spełniających

$$\int_{\Omega} |Du| \leq \int_{\Omega} |Dv|$$

dla wszystkich $v \in BV(\Omega)$ takich, że $u|_{\partial\Omega} = v|_{\partial\Omega}$. Równoważnie, pytamy dla jakich danych brzegowych $f \in L^1(\partial\Omega)$ istnieje rozwiązanie zagadnienia najmniejszego gradientu (16), które spełnia warunek brzegowy punktowo w sensie śladu. Nawet w najprostszym przypadku, kiedy dziedzina Ω jest dwuwymiarowym dyskiem, jest to problem otwarty. Znane wyniki mówią, że przestrzeń śladów funkcji najmniejszego gradientu zawiera funkcje ciągłe [70] oraz funkcje o wahanii ograniczonym [30], ale nie zawiera $L^\infty(\partial\Omega)$ [69], a nawet nie jest przestrzenią liniową [48]. To sugeruje, że istnienie rozwiązań nie jest bezpośrednio powiązane z regularnością danych brzegowych oraz, ograniczając możliwe dane brzegowe do funkcji charakterystycznych zbiorów na brzegu, jest ono silnie związane z geometrią tychże zbiorów. W sekcji 4.2[F] pokazujemy, że jest to prawda. Dokładniej, jeśli zmienimy geometrię przestrzeni poprzez wprowadzenie anizotropii ϕ , to przestrzeń śladów (anizotropowych) funkcji najmniejszego gradientu istotnie zmienia się wraz z normą anizotropową. Dowód tego faktu opiera się na konstrukcji odpowiedniego zbioru na $\partial\Omega$, który jest homeomorficzny ze zbiorem Cantora (podobnie jak w znanych kontrprzykładach do istnienia rozwiązań w przypadku euklidesowym [30, 69]), oraz na własności geometrycznej zależnej od ϕ która jest spełniona dla dokładnie jednej z tych anizotropii. Jako efekt uboczny tego dowodu otrzymujemy, że istnienie rozwiązań nie jest bezpośrednio powiązane z regularnością danych brzegowych. Ten fenomen jest ściśle związany z faktem, że minimalizowany funkcjonal ma liniowy wzrost, i nie występuje w podobnych zagadnieniach dla wzrostu potęgowego w przypadku $p > 1$.

Podobnie jak w sekcji 4.1, poniżej przedstawiam leksykon najważniejszych pojęć i oznaczeń w skróconej wersji, zaś do dokładnych sformułowań odsyłam do sekcji „Preliminaries” w pracach [D], [E] i [F].

- Ω : zbiór otwarty ograniczony w $\mathbb{R}^2$ z lipschitzowskim brzegiem;
- ϕ : anizotropia, tzn. funkcja $\phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $x \in \bar{\Omega}$ funkcja $\phi(x, \cdot)$ jest normą równoważną normie euklidesowej (jednostajnie względem x);
- $(\mathbf{z}, Du)$: sparowanie Anzellottiego uogólniające $\mathbf{z} \cdot \nabla u$ na mniej regularne pola wektorowe i funkcje. Dla $u \in BV(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ oraz $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$, jeśli $\operatorname{div}(\mathbf{z}) \in L^p(\Omega)$ dla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, definiujemy

$$\langle (\mathbf{z}, Du), \varphi \rangle = - \int_{\Omega} u \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div}(\mathbf{z}) \, dx.$$

Wówczas $(\mathbf{z}, Du)$ jest miarą Radona oraz $(\mathbf{z}, Du) \ll |Du|$ (patrz także sekcje 4.1[A,B]).

- $[\mathbf{z}, \nu^\Omega]$: ślad w kierunku normalnym pola wektorowego $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^N)$ z całkowalną dywergencją. Dla $\mathbf{z} \in C^1(\bar{\Omega})$, mamy $[\mathbf{z}, \nu^\Omega] = \mathbf{z} \cdot \nu^\Omega$, zaś dla mniej regularnych $\mathbf{z}$ jest ono zadane poprzez całkowanie przez części (równoważnie: uśrednianie $\mathbf{z} \cdot \nu^\Omega$ po odpowiednich stożkach w otoczeniu $\partial\Omega$).
- γ : optymalny plan transportowy. Jest to miara dodatnia na $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$. Powiązana z nią jest gęstość transportu σ_γ , miara dodatnia na $\bar{\Omega}$, zadana dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \bar{\Omega}$ wzorem

$$\sigma_\gamma(A) := \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \mathcal{H}^1([x, y] \cap A) \, d\gamma(x, y).$$

[D] Metody optymalnego transportu w zagadnieniu najmniejszego gradientu

W następnej kolejności opiszemy główne wyniki pracy [D], tzn. [32]. Pierwszy z nich stanowi uzupełnienie wyników dotyczący równoważności między zagadnieniem najmniejszego gradientu (16) a zagadnieniem optymalnego transportu (18), tzn. rozszerza tę równoważność na ich zagadnienia dualne. Dokładniej, badamy związek między zagadnieniem maksymalizacyjnym (19) wprowadzonym w [60]

$$\max \left\{ \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu^\Omega] g \, d\mathcal{H}^1 : \mathbf{z} \in \mathcal{Z} \right\}, \quad (19)$$

gdzie $g \in BV(\partial\Omega)$ oraz

$$\mathcal{Z} = \left\{ \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) : \operatorname{div}(\mathbf{z}) = 0, \quad \|\mathbf{z}\|_\infty \leq 1 \text{ p.w. w } \Omega \right\},$$

a zagadnieniem maksymalizacyjnym

$$\max \left\{ \int_{\overline{\Omega}} \phi \, d(f^+ - f^-) : \phi \in \operatorname{Lip}_1(\overline{\Omega}) \right\} \quad (20)$$

którego rozwiązania są znane jako potencjały Kantorowicza [67, 72]. Używamy tutaj oznaczeń jak w pracy [32], tzn. dane brzegowe w zagadnieniu najmniejszego gradientu są oznaczone literą g ; mamy $f = \partial_\tau g$, gdzie ∂_τ oznacza pochodną w kierunku stycznym; wreszcie $f^\pm \in \mathcal{M}(\partial\Omega)$ oznaczają dodatnią i ujemną część miary f . Używając klasycznych technik analizy wypukłej łatwo otrzymać istnienie rozwiązań obu zagadnień — dla (19) zostało to pokazane w [60], zaś dla (20) przykładowo w [67, 72]. Mamy wówczas następującą równoważność między zagadnieniami (19) a (20).

Twierdzenie 26. *Założmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest wypukły. Wówczas, zagadnienia (19) oraz (20) są równoważne w następującym sensie:*

- (1) *Zachodzi $\max(19) = \max(20)$;*
- (2) *Jeśli $\phi \in \operatorname{Lip}_1(\overline{\Omega})$ jest rozwiązaniem zagadnienia (20), to istnieje $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ takie, że $\mathbf{z} = R_{\frac{\pi}{2}} \nabla \phi$ w Ω i jest ono rozwiązaniem zagadnienia (19);*
- (3) *Jeśli $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (19), to istnieje $\phi \in \operatorname{Lip}_1(\overline{\Omega})$ takie, że $\mathbf{z} = R_{\frac{\pi}{2}} \nabla \phi$ w Ω i jest ono rozwiązaniem zagadnienia (20).*

Rozwiązania zagadnień (19) i (20) w ogólności nie są jednoznaczne. W związku z tym ważne jest, że dowolne rozwiązanie zagadnienia (20) determinuje kształt układu promieni transportowych dla wszystkich rozwiązań zagadnienia Monge'a-Kantorowicza. Podobnie, dowolne rozwiązanie zagadnienia (19) determinuje kształt układu poziomicy wszystkich rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu w następującym sensie: pole wektorowe $\bar{\mathbf{z}} = -\mathbf{z}$ spełnia równanie Eulera-Lagrange'a dla zagadnienia najmniejszego gradientu wprowadzone w [57], w szczególności jest bezdywergentne oraz

$$(\bar{\mathbf{z}}, Du) = |Du| \quad \text{jako miary w } \Omega.$$

Zatem, jeśli ϕ to potencjał Kantorowicza, to $\bar{\mathbf{z}} = R_{-\frac{\pi}{2}} \nabla \phi$. Uzasadnia to nieformalną obserwację spotykaną

w literaturze, że poziomice rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu odpowiadają promieniom transportowym w odpowiadającym mu zagadnieniu optymalnego transportu.

Kolejne wyniki w pracy [32] dotyczą regularności rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu w przypadku, gdy dane brzegowe są mniej regularne niż dotychczas spotykane w literaturze [25, 70]. Poniżej przytaczamy tylko jeden wynik, w przypadku gdy zbiór Ω jest ściśle wypukły oraz dane brzegowe leżą w $SBV(\partial\Omega)$; wówczas, każde rozwiązanie leży w $SBV(\Omega)$. W tym przypadku, dane brzegowe mają ograniczone wahania, ale nie muszą być ciągłe, zatem rozwiązania istnieją [30], ale nie muszą być jednoznaczne. W odpowiadającym mu zagadnieniu Monge'a-Kantorowicza optymalny plan transportowy może nie być jednoznaczny i nie musi istnieć optymalne odwzorowanie transportowe (tzn. optymalny plan transportowy nie musi być indukowany przez funkcję $T : \partial\Omega \rightarrow \partial\Omega$ taką, że $T_{\#}f^{+} = f^{-}$). Niemniej, poniższy wynik dotyczy każdego rozwiązania.

Twierdzenie 27. *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest ściśle wypukły. Niech $g \in SBV(\partial\Omega)$. Wówczas, jeśli $u \in BV(\Omega)$ to rozwiązanie zagadnienia (16) dla danych brzegowych g , to $u \in SBV(\Omega)$.*

Podobna analiza jak w dowodzie twierdzenia 27 pozwala na zbadanie lokalnej regularności rozwiązań. Wyniki te otrzymujemy w następujący sposób: w pierw pokazujemy oszacowania regularnościowe na gęstość transportu σ_{γ} bądź badamy jej strukturę, a następnie wykorzystujemy równoważność między zagadnieniem optymalnego transportu a zagadnieniem najmniejszego gradientu w celu „przetłumaczenia ich” na wyniki regularnościowe w tym przypadku. Otrzymujemy m.in., że rozwiązanie zagadnienia najmniejszego gradientu jest lipschitzowskie w otoczeniu generycznego punktu, oraz że lipschitzowskość danych brzegowych implikuje lokalną lipschitzowskość rozwiązania. Oba te wyniki są optymalne, na co wskazują klasyczne przykłady z pracy [70].

W [32] badaliśmy także stabilność rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu, tzn. zbadaliśmy, czy niewielkie zaburzenia danych brzegowych przekładają się na niewielkie zaburzenia rozwiązania (i w jakich topologiach). Dzięki zastosowaniu metod transportowych możliwe jest uzyskanie kilku ogólnych wyników. Jest to o tyle znaczące, że strategia dowodzenia istnienia rozwiązań polegająca na przybliżaniu danych brzegowych i użyciu twierdzenia Mirandy [58] o tym, że granica funkcji najmniejszego gradientu w $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ jest funkcją najmniejszego gradientu, jest skutecznie używana w literaturze w wielu przypadkach [30, 31, 40], natomiast dotychczasowe wyniki tego typu zakładały szczególną postać ciągu przybliżeń, dostosowaną do aktualnie badanej wersji zagadnienia najmniejszego gradientu. W pracy [32] przedstawiono pierwsze wyniki dotyczące stabilności rozwiązań, które nie wymagają konkretnej postaci ciągu przybliżeń. Są one optymalne w tym sensie, że osłabienie założeń regularnościowych na ciąg g_n bądź zastąpienie ścisłej topologii zbieżnością w $L^1(\partial\Omega)$ sprawia, że poniższe twierdzenie jest nieprawdziwe.

Twierdzenie 28. *Załóżmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest ściśle wypukły. Niech $g, g_n \in BV(\partial\Omega)$ oraz $g_n \rightarrow g$ ściśle w $BV(\partial\Omega)$. Załóżmy, że $u_n \in BV(\Omega)$ to rozwiązania zagadnienia (16) dla danych brzegowych g_n . Wówczas istnieje $u \in BV(\Omega)$, rozwiązanie zagadnienia (16), takie że (po ewentualnym przejściu do podciągu) mamy $u_n \rightarrow u$ ściśle w $BV(\Omega)$.*

Konieczność użycia ścisłej zbieżności wynika z faktu, że operator śladu nie jest ciągły względem zbieżności w $L^1(\Omega)$, i w ogólności zbieżność $g_n \rightarrow g$ w $L^1(\partial\Omega)$ nie pociąga za sobą zbieżności rozwiązań (16) dla g_n .

Na tej obserwacji opiera się kontrprzykład pokazujący nieistnienie rozwiązań dla pewnych ograniczonych danych brzegowych podany w [69]. Ponieważ jednak używamy metod transportowych, dane brzegowe muszą leżeć w $BV(\partial\Omega)$, i w szczególności kontrprzykład podany w [69] się nie stosuje. Kluczowym elementem dowodu jest następujące oszacowanie na energię rozwiązania (z optymalną stałą) dostępne w przypadku, gdy dane brzegowe mają wahanie ograniczone:

$$|Du|(\Omega) \leq \frac{\text{diam}(\Omega)}{2} |Dg|(\partial\Omega),$$

gdzie $u \in BV(\Omega)$ to rozwiązanie (16) dla danych brzegowych $g \in BV(\partial\Omega)$.

Podobny wynik o stabilności rozwiązań otrzymujemy także w przypadku, gdy przybliżamy (w metryce Hausdorffa) wypukłą dziedzinę Ω za pomocą zstępującego ciągu ściśle wypukłych zbiorów Ω_n — taki ciąg przybliżeń to podstawa techniki dowodzenia istnienia rozwiązań na zbiorach wypukłych [40, 66]. Pokażemy, że wówczas ciąg rozwiązań przybliżonych zagadnień najmniejszego gradientu zbiega (po ograniczeniu do Ω) do rozwiązania oryginalnego problemu. Ponownie, jest to pierwszy wynik tego typu który nie wymaga konkretnej postaci ciągu przybliżeń Ω_n i pozwala on na dowolne dane brzegowe $g \in BV(\partial\Omega)$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia: dla wypukłej dziedziny Ω oraz ściśle wypukłej dziedziny Ω' takiej, że $\Omega \subset \Omega'$, oznaczamy przez $\pi : \partial\Omega' \rightarrow \partial\Omega$ (jednoznaczny) rzut ortogonalny na (domknięty i wypukły) zbiór $\bar{\Omega}$. Ponieważ $\Omega \subset \Omega'$, obraz tego odwzorowania jest równy $\partial\Omega$. Ponadto, dzięki ścisłej wypukłości Ω' , dla $x, y \in \partial\Omega$ oraz dowolnych punktów $x' \in \pi^{-1}(x)$ i $y' \in \pi^{-1}(y)$ odcinki $[x, x']$ i $[y, y']$ mogą mieć punkt wspólny wyłącznie gdy $x = y$. Dla ściśłego reprezentanta funkcji $g \in BV(\partial\Omega)$, definiujemy $g' \in BV(\partial\Omega')$ za pomocą wzoru

$$g'(x) = g(\pi(x)).$$

Założmy, że Ω_n jest ciągiem zstępującym zbiorów ściśle wypukłych oraz $\text{dist}_{\mathcal{H}}(\partial\Omega_n, \partial\Omega) \rightarrow 0$, tzn. odległość Hausdorffa między Ω_n a Ω zbiega do zera. Wówczas, przez $\pi_n : \partial\Omega_n \rightarrow \partial\Omega$ oznaczamy rzut na domknięty wypukły zbiór $\bar{\Omega}$ i oznaczamy $g_n(x) = g(\pi_n(x))$ dla dowolnego $x \in \partial\Omega_n$. Skoro $g \in BV(\partial\Omega)$, oczywiście mamy $g_n \in BV(\partial\Omega_n)$; otrzymujemy m.in. następujący wynik.

Twierdzenie 29. *Założmy, że $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ jest ściśle wypukła oraz niech $g \in BV(\partial\Omega)$, Ω_n oraz g_n będą skonstruowane jak wyżej. Wówczas, jeśli $u_n \in BV(\Omega_n)$ to rozwiązania zagadnienia (16) na Ω_n dla danych brzegowych g_n , to na podciągu mamy $u_n|_{\Omega} \rightarrow u$ ściśle w $BV(\Omega)$. Ponadto, u to rozwiązanie zagadnienia (16) na Ω dla danych brzegowych g .*

Oczywiście w razie potrzeby można połączyć twierdzenia 28 i 29 w celu skonstruowania ciągu przybliżeń o silniejszej regularności niż $g \circ \pi_n$. Ponadto, jako wniosek z twierdzenia 29 uzyskujemy częściowe wyniki dotyczące istnienia rozwiązań w przypadku, gdy dziedzina Ω jest wypukła, ale nie jest ściśle wypukła. W tym przypadku już w pracy [70] wskazano kontrprzykład dla ciągłych danych brzegowych. W literaturze spotyka się różne warunki dopuszczalności [40, 66] na dane brzegowe w przypadku gdy Ω jest wielokątem — dzięki twierdzeniu 29 możliwe jest uogólnienie niektórych z tych wyników na przypadek dowolnego zbioru wypukłego.

[E] Riemannowski optymalny transport a zagadnienie najmniejszego gradientu z wagą

W poniższej sekcji opisujemy główne wyniki artykułu [E], tzn. [24]. W tej pracy, napisanej wspólnie z Samerem Dweikiem, najpierw opisujemy związek między anizotropowym zagadnieniem najmniejszego gradientu

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \phi(x, Du) : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g \right\} \quad (21)$$

a anizotropowym zagadnieniem Beckmanna

$$\min \left\{ \int_{\overline{\Omega}} \phi^{\perp}(x, v) : v \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2), \operatorname{div} v = f \right\}, \quad (22)$$

gdzie $\phi^{\perp}$ oznacza funkcję ϕ obróconą o $\frac{\pi}{2}$ w drugiej zmiennej. Używamy tutaj oznaczeń jak w pracy [24], tzn. dane brzegowe w zagadnieniu najmniejszego gradientu są ponownie oznaczone literą g oraz oznaczamy $f = \partial_{\tau} g$. Kluczowe geometryczne założenie dotyczące dziedziny jest takie, że zbiór Ω jest ściągalny. Jest to istotnie słabsze założenie niż w [40] (w przypadku izotropowym), gdzie wymagana była wypukłość dziedziny. Uogólniamy wyniki pracy [40] na dwa sposoby: rozszerzając je na przypadek anizotropowy oraz na szerszą klasę dopuszczalnych dziedzin. Osłabienie założenia wypukłości jest szczególnie ważne w przypadku anizotropowym, gdzie istotna będzie wypukłość dziedziny *względem odpowiedniej struktury riemannowskiej*, co niekoniecznie jest związane z euklidesową wypukłością.

Sercem argumentu o równoważności zagadnień (21) i (22) jest lemat pokazujący, że jeśli Ω jest zbiorem ściągalnym, to każde pole wektorowe $v \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ spełniające $\operatorname{div}(v) = 0$ w sensie dystrybucyjnym oraz $|v|(\partial\Omega) = 0$ ma potencjał skalarny, tzn. istnieje $u \in BV(\Omega)$ takie, że $v = R_{-\frac{\pi}{2}} Du$. W szczególności, jeśli $[v, \nu^{\Omega}] = f$ oraz $u|_{\partial\Omega} = g$, wówczas zachodzi $f = \partial_{\tau} g$. Główny wynik dotyczący równoważności zagadnień (21) i (22) jest przedstawiony poniżej; jego założenie na Ω jest optymalne w tym sensie, że jeśli dziedzina nie jest ściągalna, nie jest on prawdziwy nawet w przypadku euklidesowym.

Twierdzenie 30. *Założmy, że Ω jest zbiorem ściągalnym. Wówczas, zagadnienia (21) i (22) są równoważne w następującym sensie:*

- (1) *Zachodzi $\inf (21) = \min (22)$;*
- (2) *Jeśli $u \in BV(\Omega)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (21), to istnieje $v \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ takie, że $v = R_{-\frac{\pi}{2}} Du$ i jest ono rozwiązaniem zagadnienia (22);*
- (3) *Jeśli $v \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (22) spełniającym $|v|(\partial\Omega) = 0$, to istnieje $u \in BV(\Omega)$ takie, że $v = R_{-\frac{\pi}{2}} Du$ i jest ono rozwiązaniem zagadnienia (21).*

Odnotujmy, że notacja dotycząca kierunku obrotu w pracy [E] jest odwrotna do notacji w powyższym wyniku (oraz w pracy [D]; w całej tej sekcji stosujemy oznaczenia z pracy [D]). Niech $k \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ będzie funkcją dodatnią. Poniżej przedstawiamy związek między zagadnieniem najmniejszego gradientu z wagą [46, 73]

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} k(x) |Du| : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = g \right\} \quad (23)$$

a zagadnieniem Monge'a-Kantorowicza względem metryki riemannowskiej indukowanej przez k , tzn.

$$d_k(x, y) := \min \left\{ \int_0^1 k(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt : \gamma \in \text{Lip}([0, 1], \mathbb{R}^2), \gamma(0) = x \text{ oraz } \gamma(1) = y \right\}.$$

Założmy, że Ω to *geodezyjnie wypukła* (ang. geodesically convex) dziedzina w $\mathbb{R}^2$, tzn. dla każdej pary $x, y \in \overline{\Omega}$ istnieje dokładnie jedna geodezyjna γ łącząca te punkty i jest ona zawarta w $\overline{\Omega}$. Niech f^+ i f^- będą dwoma miarami dodatnimi Radona na $\overline{\Omega}$ takimi, że $f^+(\overline{\Omega}) = f^-(\overline{\Omega})$. Wówczas, rozważmy następujące zagadnienie Monge'a-Kantorowicza:

$$\min \left\{ \int_{\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} d_k(x, y) d\Lambda(x, y) : \Lambda \in \mathcal{M}^+(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}), (\Pi_x)_\# \Lambda = f^+ \text{ oraz } (\Pi_y)_\# \Lambda = f^- \right\}, \quad (24)$$

które jest relaksacją zagadnienia Monge'a z kosztem zadany przez metrykę riemannowską [26]

$$\min \left\{ \int_{\overline{\Omega}} d_k(x, T(x)) df^+(x) : T_\# f^+ = f^- \right\}. \quad (25)$$

W pracy [E] udowadniamy, że równoważność między zagadnieniem najmniejszego gradientu a zagadnieniem Monge'a-Kantorowicza uogólnia się na przypadek riemannowski. Kluczową obserwacją w tej analizie jest fakt, że dwa różne promienie transportowe nie mogą się przecinać we wnętrzu któregośkolwiek z nich (dzięki regularności $C^{1,1}$ metryki riemannowskiej). Równoważność między ich zagadnieniami dualnymi przedstawiona w sekcji 4.2[D] również się uogólnia na przypadek riemannowski. Dokładniej, zagadnienie Monge'a-Kantorowicza (24) ma następujące dualne sformułowanie [67, 72]

$$\sup \left\{ \int_{\overline{\Omega}} \psi d(f^+ - f^-) : |\psi(x) - \psi(y)| \leq d_k(x, y), \forall x, y \in \overline{\Omega} \right\}, \quad (26)$$

które dla $g \in BV(\partial\Omega)$ jest równoważne dualnemu sformułowaniu dla zagadnienia najmniejszego gradientu z wagą (23) przedstawionemu w pracy [60]

$$\sup \left\{ \int_{\partial\Omega} [\mathbf{z}, \nu^\Omega] g d\mathcal{H}^1 : \mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2), \text{div } \mathbf{z} = 0, |\mathbf{z}(x)| \leq k(x) \text{ dla p.w. } x \in \Omega \right\}, \quad (27)$$

gdzie $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2) : \text{div}(\mathbf{z}) = 0, |\mathbf{z}(x)| \leq k(x) \text{ p.w. w } \Omega\}$, tzn. zachodzi następujący rezultat.

Twierdzenie 31. *Założmy, że Ω jest geodezyjnie wypukła. Wówczas, zagadnienia (26) oraz (27) są równoważne w następującym sensie:*

- (1) *Zachodzi $\sup (26) = \sup (27)$;*
- (2) *Jeśli $\psi \in \text{Lip}(\overline{\Omega})$ jest rozwiązaniem zagadnienia (26), to istnieje $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ takie, że $\mathbf{z} = R_{\frac{\pi}{2}} \nabla \psi$ w Ω i jest ono rozwiązaniem zagadnienia (27);*
- (3) *Jeśli $\mathbf{z} \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2)$ jest rozwiązaniem zagadnienia (27), to istnieje $\psi \in \text{Lip}(\overline{\Omega})$ takie, że $\mathbf{z} = R_{\frac{\pi}{2}} \nabla \psi$ w Ω i jest ono rozwiązaniem zagadnienia (26).*

Odnosimy, że oba zagadnienia mają rozwiązania, patrz [60] dla zagadnienia (27) oraz [67, 72] dla zagadnienia (26), zatem powyższy wynik ma następującą interpretację: układ poziomic w zagadnieniu najmniejszego gradientu z wagą, który jest kodowany przez rozwiązanie zagadnienia dualnego (27), odpowiada strukturze

promieni transportowych kodowanych przez potencjały Kantorowicza w zagadnieniu (26). W ogólności nie spodziewamy się aby rozwiązania tych problemów były jednoznaczne.

Głównym celem pracy [E] jest uzyskanie regularności rozwiązań dla zagadnienia najmniejszego gradientu z wagą. Warto podkreślić, że jedyny znany wcześniej wynik dotyczy ciągłości rozwiązań dla ciągłych danych brzegowych [73]. W tym celu wykorzystamy otrzymaną powyżej równoważność z riemannowskim zagadnieniem optymalnego transportu. Na początek odnotujmy, że przy założeniu że Ω jest *ściśle geodezyjnie wypukła* (ang. strictly geodesically convex), tzn. jest geodezyjnie wypukła i każda krzywa geodezyjna w $\bar{\Omega}$ przecina $\partial\Omega$ co najwyżej na swych końcach, otrzymujemy istnienie i jednoznaczność optymalnego odwzorowania transportowego T , tzn. rozwiązania (25), przy założeniu że miara źródłowa f^+ jest bezatomowa. Wynik ten odpowiada istnieniu rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu z wagą dla ciągłych danych brzegowych.

Dla zagadnienia optymalnego transportu, klasycznym narzędziem do opisu struktury i regularności optymalnego planu transportowego Λ jest *gęstość transportu* (ang. transport density) [67], dodatnia miara σ_Λ na $\bar{\Omega}$ która reprezentuje intensywność transportu na różnych podzbiorach $\bar{\Omega}$. W przypadku riemannowskim definiujemy ją poprzez dualność z funkcjami ciągłymi, tzn. dla $\phi \in C(\bar{\Omega})$ jest ona zadana wzorem

$$\langle \sigma_\Lambda, \phi \rangle := \int_{\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}} \int_0^1 \phi(\gamma_{x,y}(t)) k(\gamma_{x,y}(t)) |\gamma'_{x,y}(t)| dt d\Lambda(x, y),$$

gdzie $\gamma_{x,y}$ to geodezyjna łącząca x z y . Miara σ_Λ jest dobrze zdefiniowana gdy Ω jest geodezyjnie wypukła.

W celu uzyskania wyników dotyczących regularności rozwiązań zagadnienia najmniejszego gradientu z wagą, pokazujemy oszacowania w L^p gęstości transportu σ_Λ pomiędzy f^+ a f^- przy założeniu, że Ω jest geodezyjnie ściśle wypukła oraz miara źródłowa f^+ leży w $L^p(\partial\Omega)$. Wówczas, gęstość transportu σ_Λ jest dobrze zdefiniowana i jednoznaczna. Dowód opiera się na przybliżeniu miary docelowej f^- za pomocą skończonej sumy delt Diraca, znalezieniu w tym przypadku jawnego wzoru na gęstość transportu, oszacowania jej normy w L^p i pokazanie, że oszacowanie to jest zachowane w granicy. Przy nieco silniejszym założeniu geometrycznym na Ω , które uogólnia na przypadek riemannowski jednostajną wypukłość (geodezyjna jednostajna wypukłość), pokazujemy kilka wyników dotyczących regularności i struktury σ_Λ . Następnie, dzięki równoważności riemannowskiego zagadnienia optymalnego transportu z zagadnieniem najmniejszego gradientu z wagą, otrzymujemy odpowiadające im wyniki dotyczące regularności zagadnienia (3). Poniżej przedstawiamy podsumowanie wyników regularnościowych dla zagadnienia najmniejszego gradientu z wagą z pracy [24]; w sprawie odpowiednich sformułowań dla gęstości transportu odsyłamy do [24].

Twierdzenie 32. *Załóżmy, że Ω jest geodezyjnie ściśle wypukły. Wówczas, dla każdych danych brzegowych $g \in BV(\partial\Omega)$ zagadnienie najmniejszego gradientu z wagą (3) ma rozwiązanie $u \in BV(\Omega)$. Ponadto:*

- (a) *Jeśli $g \in BV(\partial\Omega) \cap C(\partial\Omega)$, to rozwiązanie jest jednoznaczne;*
- (b) *Jeśli $g \in W^{1,1}(\partial\Omega)$, to $u \in W^{1,1}(\Omega)$;*
- (c) *Jeśli $g \in SBV(\partial\Omega)$, to $u \in SBV(\Omega)$.*

Jeśli natomiast Ω jest geodezyjnie jednostajnie wypukły, to mamy dodatkowo:

- (d) *Jeśli $g \in W^{1,p}(\partial\Omega)$ dla $p \in [1, 2]$, to $u \in W^{1,p}(\Omega)$;*
- (e) *Jeśli $g \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega)$ dla $\alpha \in (0, 1]$, to $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dla $p = 2/(1 - \alpha)$.*

[F] Przestrzeń śladów anizotropowych funkcji najmniejszego gradientu

Ta sekcja jest poświęcona opisowi głównych wyników pracy [F], tzn. [33]. Zasadniczym celem tej pracy było zbadanie następującego zjawiska. Dla uproszczenia, niech Ω będzie dwuwymiarowym dyskiem. Wówczas, z pracy [31] wynika, że dla dowolnej normy ϕ anizotropowe zagadnienie najmniejszego gradientu

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \phi(x, Du) : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\} \quad (28)$$

ma rozwiązanie w sensie śladu dla każdego $f \in L^1(\partial\Omega)$, które jest ciągle $\mathcal{H}^1$ -p.w. Z drugiej strony, kontrprzykład podany w [69] pokazuje, że nawet w przypadku izotropowym istnieją dane brzegowe w $L^\infty(\partial\Omega)$ dla których nie ma rozwiązań (jest to funkcja charakterystyczna odpowiednio dobranego zbioru typu Cantora). W związku z tym zadajemy następujące pytanie: czy przestrzeń śladów funkcji ϕ -najmniejszego gradientu, tzn. zbiór danych brzegowych dla których zagadnienie (28) ma rozwiązanie, jest zależna od anizotropii?

Odpowiedź na to pytanie jest twierdząca nawet w opisanym wyżej modelowym przypadku. Mimo że znane wyniki dotyczące istnienia rozwiązań nie zależą od ϕ , sama przestrzeń śladów funkcji ϕ -najmniejszego gradientu zmienia się wraz z anizotropową normą. Dokładniej, pokazujemy, że dla dostatecznie regularnych ϕ_1 oraz ϕ_2 ich przestrzenie śladów się pokrywają wtedy i tylko wtedy gdy $\phi_1 = c\phi_2$. Argument opiera się na następującej obserwacji: w przypadku gdy dane brzegowe są funkcją charakterystyczną pewnego zbioru, jeśli istnieje choć jedno rozwiązanie, to istnieje też rozwiązanie będące funkcją charakterystyczną. Dzięki temu możemy zredukować zagadnienie wariacyjne do odpowiedniego problemu geometrycznego. Konstrukcja funkcji leżących w dokładnie jednej przestrzeni śladów dla ϕ_1 i ϕ_2 może być skrótowo opisana w następujący sposób. Znajdujemy odpowiedni zbiór na $\partial\Omega$ o dodatniej jednowymiarowej mierze Hausdorffa, homeomorficzny ze zbiorem Cantora, z parametrami konstrukcji dobranymi tak aby pewna funkcja pomocnicza h_ϕ (której definicja z [33] jest pominięta w tym podsumowaniu) spełniała odpowiednią nierówność na każdym etapie konstrukcji.

Poniżej przedstawiona jest bardzo uproszczona wersja konstrukcji zbioru F_∞ o żądanych własnościach, zaś pełna konstrukcja jest przedstawiona w [33]. Niech $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$. Rozważmy standardowe przybliżenie zbioru Cantora $F_\infty \subset \partial\Omega$ za pomocą zbiorów domkniętych $F_n \subset \partial\Omega$ które są sumą 2^n łuków na $\partial\Omega$. Dla każdego zbioru F_n , oznaczamy krańce tych łuków za pomocą rodziny kątów $\alpha_{(m_1, \dots, m_{n-1})}$, gdzie $(m_1, \dots, m_{n-1}) \in \{0, 1\}^{(n-1)}$. W zależności od wyboru parametrów $\alpha_{(m_1, \dots, m_{n-1})}$, zbiór graniczny F_∞ może mieć zerową bądź dodatnią miarę Hausdorffa $\mathcal{H}^1$. Następnie wprowadzamy funkcję pomocniczą $h_\phi : \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$, która opisuje minimalizację obwodu wśród podzbiorów Ω , których brzeg na $\partial\Omega$ jest równy F_n . Rozważamy dwa przypadki opisane za pomocą tej funkcji pomocniczej: albo

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } (m_1, \dots, m_{n-1}) \in \{0, 1\}^{(n-1)} \text{ mamy } h_\phi(m_1, \dots, m_{n-1}) > 0; \quad (29)$$

albo

$$\text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ oraz } (m_1, \dots, m_{n-1}) \in \{0, 1\}^{(n-1)} \text{ mamy } h_\phi(m_1, \dots, m_{n-1}) = 0. \quad (30)$$

Pokazujemy, że obie możliwości są możliwe do zrealizowania w zaproponowanej konstrukcji. Poniżej przedstawiony jest jej końcowy efekt w zależności od rozważanego przypadku. Od teraz, zakładamy że ϕ jest ściśle wypukła (tzn. jej kula jednostkowa jest ściśle wypukła).

Twierdzenie 33. *Zachodzą następujące stwierdzenia:*

- (i) *Załóżmy, że zachodzi warunek (29). Wówczas, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $u_n \in BV(\Omega)$ zagadnienia (28) dla danych brzegowych $f_n = \chi_{F_n}$. Jest ono postaci $u_n = \chi_{E_n}$, gdzie $\mathcal{L}^2(E_n) \rightarrow 0$ gdy $n \rightarrow \infty$. Ponadto, o ile $\mathcal{H}^1(F_\infty) > 0$, zagadnienie (28) dla danych brzegowych $f = \chi_{F_\infty}$ nie ma rozwiązań.*
- (ii) *Załóżmy, że zachodzi warunek (30). Wówczas $\mathcal{H}^1(F_\infty) > 0$ oraz dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje (niekoniecznie jedyne) rozwiązanie $u_n = \chi_{E'_n}$ zagadnienia (28) dla danych brzegowych $f_n = \chi_{F_n}$, gdzie $\mathcal{L}^2(E'_n) \geq c > 0$. Ponadto, zagadnienie (28) dla danych brzegowych $f = \chi_{F_\infty}$ ma rozwiązanie.*

Ten wynik, w połączeniu z konstrukcją odpowiedniej rodziny kątów $\{\alpha_{(m_1, \dots, m_{n-1})}\}_{n=2}^\infty$ która spełnia warunek (29) dla ϕ_2 oraz warunek (30) dla ϕ_1 , pokazuje że przestrzeń śladów funkcji ϕ -najmniejszego gradientu zależy od anizotropii.

Twierdzenie 34. *Niech ϕ_1 oraz ϕ_2 będą dwoma ściśle wypukłymi normami klasy C^2 (poza początkiem układu współrzędnych). Jeśli ϕ_1 oraz ϕ_2 nie są proporcjonalne, to istnieje funkcja $f \in L^\infty(\partial\Omega)$ taka, że istnieje rozwiązanie zagadnienia (28) dla ϕ_1 , ale nie istnieje rozwiązanie zagadnienia (28) dla ϕ_2 .*

Innymi słowy, przestrzeń śladów anizotropowych funkcji najmniejszego gradientu dla dostatecznie regularnych ϕ_1 i ϕ_2 pokrywają się wtedy i tylko wtedy gdy $\phi_1 = c\phi_2$ dla pewnej $c > 0$. Ten fenomen jest ściśle związany z faktem że minimalizowany funkcjonał ma liniowy wzrost i nie pojawia się on np. w anizotropowym równaniu p -Laplace'a, gdzie istnienie rozwiązań zależy wyłącznie od regularności danych brzegowych. W naszym przypadku nie jest to prawdą, ponieważ funkcje, które leżą w dokładnie jednej przestrzeni śladów, są otrzymane za pomocą różnych wariantów tej samej konstrukcji. W pracy [F] twierdzenie 34 jest uzupełnione przez dyskusję na temat nieściśle wypukłych norm oraz słabszy wynik dla norm które nie są klasy C^2 . Dokładniej, dla ściśle wypukłej normy ϕ_1 możemy znaleźć normę ϕ_2 dowolnie blisko ϕ_1 w normie supremum (ograniczonej do sfery jednostkowej) w taki sposób, że przestrzeń śladów dla ϕ_1 i ϕ_2 się nie pokrywają.

5. Aktywność naukowa

5.1. Granty

1. Kierownik projektu w grantie [ESP 88 ESPRIT-Programm](#), Austriacki Fundusz Nauki, tytuł: „Inhomogeneous-growth problems including a linear-growth term”, 2022-2025.
2. Kierownik projektu w grantie [2017/27/N/ST1/02418 \(PRELUDIUM\)](#), Narodowe Centrum Nauki, Poland, title: „Anisotropic least gradient problem”, 2018-2022.
3. Wykonawca w międzynarodowym grantie OeAD-WTZ [CZ 01/2021](#) (część austriacka: [I5149](#)), tytuł: „Scales and Shapes in Continuum Thermomechanics”, 2021-2025.
4. Wykonawca w międzynarodowym grantie DFG-FWF [FR 4083/3-1/I4354](#) (część austriacka: [I4354](#)), tytuł: „Variational Modeling of Molecular Geometries”, 2020-2022.

5. Wykonawca w grantie [SFB 65](#) (project part 11), Austriacki Fundusz Nauki, tytuł: „Taming complexity in partial differential equations”, 2020.

5.2. Prezentacje na konferencjach

W mojej dotychczasowej karierze naukowej wygłosiłem 16 zaproszonych referatów na konferencjach naukowych, 5 innych wystąpień na konferencjach naukowych, oraz wygłosiłem 16 referatów seminaryjnych. Poniżej przedstawiam listę 10 najważniejszych wystąpień.

1. *Characterisation of weak solutions to gradient flows of general linear growth functionals* na konferencji „Degenerate and Singular PDEs”, Vienna, 24-28 lutego 2025.
2. *Evolution equations on two overlapping random walk structures* na konferencji „Recent Progress in PDEs”, Rome, 20-21 lutego 2025.
3. *Optimal transport techniques in geometric problems* na konferencji „VIII Symposium on Nonlinear Analysis”, Toruń, 17-21 czerwca 2024.
4. *Duality methods for gradient flows of linear growth functionals* na konferencji „10th International Congress on Industrial and Applied Mathematics” (ICIAM 2023), minisymposium „Frontiers of gradient flows: well-posedness, asymptotics, singular limits”, Tokyo, 20-25 sierpnia 2023.
5. *A new notion of solutions to gradient flows in metric measure spaces* na konferencji „Nonuniformly elliptic problems”, Centrum Banacha, Warszawa, 5-9 września 2022.
6. *Weak solutions to gradient flows in metric measure spaces* na konferencji „92nd Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics” (GAMM Annual Meeting 2022), minisymposium „Evolution equations with gradient flow structure”, Aachen, 15-19 sierpnia 2022.
7. *Weak solutions to the total variation flow in metric measure spaces* na konferencji „XXVII Congress of differential equations and applications / XVI Congress of applied mathematics” (XXVII CEDYA/XVII CMA), minisymposium „New trends on the 1-Laplacian”, Zaragoza, 18-22 lipca 2022.
8. *Geometric aspects of the 1-Laplacian* na konferencji „XII Forum of Partial Differential Equations”, Centrum Banacha, Będlewo, 19-25 września 2021.
9. *The least gradient problem with respect to a non-smooth or non-strictly convex norm* na konferencji „9th International Congress on Industrial and Applied Mathematics” (ICIAM 2019), minisymposium „A broad view of the least gradient problems”, València, 15-19 lipca 2019.
10. *Hölder regularity of anisotropic least gradient functions* na konferencji „Variational Problems in Optical Engineering and Free Material Design”, Centrum Banacha, Warszawa, 7-9 czerwca 2018.

5.3. Staże naukowe

1. 10-dniowy staż na Universitat de València (Departamento de Análisis Matemático), 05.2022, na zaproszenie prof. José M. Mazóna.
2. 4-tygodniowy staż w Scuola Normale Superiore di Pisa, 01-02.2020, na zaproszenie prof. Luigi Ambrosio.
3. 5-tygodniowy staż na Universitat de València (Departamento de Análisis Matemático), 04-05.2019, na zaproszenie prof. José M. Mazóna.

6. Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne oraz popularyzacyjne

6.1. Osiągnięcia dydaktyczne

1. Cykl wykładów pt. „Functions of bounded variation and their applications” dla Vienna School of Mathematics (szkoła doktorska), 5 wykładów, rok akademicki 2023/24.

Ćwiczenia do następujących wykładów na Uniwersytecie Wiedeńskim:

2. Wstęp do Matematyki (2023/24);
3. Równania Różniczkowe Częstkowe (2021/22).

Ćwiczenia do następujących wykładów na Uniwersytecie Warszawskim:

4. Analiza I (2018/19);
5. Równania Różniczkowe Zwyczajne (2017/18);
6. Teoria Miary (2017/18);
7. Teoria Miary (2016/17).

Kształcenie kadry naukowej:

8. Wypromowane licencjaty: 2.
9. Opieka nad doktorantami: W styczniu 2024 skontaktował się ze mną Alexandros Matsoukas, wówczas i obecnie doktorant w National Technical University of Athens (promotor: Nikos Yannakakis). Nasze pierwsze rozmowy dotyczyły mojego cyklu wykładów dla doktorantów (punkt 1 w tej kategorii). W lutym 2024 zaproponowałem mu współpracę, która następnie w czerwcu 2024 została rozszerzona o dr Michała Łasicę (Instytut Matematyki PAN). A. Matsoukas nie jest formalnie moim doktorantem, natomiast nasza współpraca trwa już ponad rok i nasza relacja w pewnym zakresie przypomina relację promotor-doktorant. Celem współpracy jest dokładne opisanie całkowitego wahanie względem struktury o niejednorodnym wzroście. Efektem naszej pracy jest preprint [34], zaś kolejna praca jest w przygotowaniu. Będą one stanowić fragment rozprawy doktorskiej A. Matsoukasa, która dotyczy zagadnień wariacyjnych i równań różniczkowych cząstkowych, w których występuje zarówno liniowy wzrost jak i niejednorodny wzrost. Planowo powinna ona zostać złożona w tym roku akademickim.

6.2. Osiągnięcia organizacyjne

1. Członek komitetu organizacyjnego konferencji „Variational Problems in Optical Engineering and Free Material Design”, Centrum Banacha, Instytut Matematyki PAN, Warszawa, 6-9 czerwca 2018.
2. Członek komitetu organizacyjnego konferencji „Pushing Frontiers of Analysis and PDE's, the Legacy of Marek Burnat”, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Warszawa, 6-7 maja 2016.

6.3. Osiągnięcia popularyzacyjne

1. Kilka cykli wykładów dla Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci: z geometrii klasycznej, geometrii rzutowej oraz teorii grup skończonych (2012-2014).
2. Pomoc w organizacji obozów naukowych Krajowego Funduszu na rzecz Dzieci (2011-2014).

3. Pomoc w organizacji Olimpiady Matematycznej (2016, 2018).
4. Zajęcia dodatkowe z geometrii klasycznej dla XIV Liceum Ogólnokształcącym im. Stanisława Staszica w Warszawie (2017).

7. Inne istotne informacje

7.1. Otrzymane nagrody i wyróżnienia

1. Nagroda im. Kazimierza Kuratowskiego, 2021.
2. Nagroda Polskiego Towarzystwa Matematycznego dla młodych matematyków, 2020.
3. Wyróżnienie w konkursie o nagrodę im. Juliusza Schaudera dla młodych matematyków, 2022.
4. Wyróżnienie w konkursie o Międzynarodową Nagrodę im. Stefana Banacha, 2021.
5. Drugie wyróżnienie w konkursie o nagrodę im. Juliusza Schaudera dla młodych matematyków, 2020.
6. Pierwsze miejsce w konkursie „Krok w przyszłość” (najlepsza praca studencka z matematyki, organizowany przez Fundację mBanku), 2016.

7.2. Monografia „Functions of Least Gradient”

W roku 2024 opublikowana została monografia [39] (w wykazie osiągnięć, sekcja II.8: A) dotycząca funkcji najmniejszego gradientu napisana wspólnie z prof. José M. Mazónem z Universitat de València. Jest to pierwsza książka zawierająca całościowe ujęcie zagadnienia najmniejszego gradientu. Jej głównym celem było uporządkowanie istniejącej teorii oraz przedstawienie jej w jednolity sposób używając nowoczesnego języka. Pierwsze prace dotyczące funkcji najmniejszego gradientu pochodzą z lat 60. Szereg prac dotyczących ich zastosowania w metodach numerycznych pochodzi z lat 80., a samo sformułowanie zagadnienia najmniejszego gradientu pochodzi z lat 90., natomiast większość nowoczesnej teorii (w tym nasze prace) powstała po roku 2010. Skutkiem tego, znane wyniki używają wielu (niekoniecznie równoważnych) definicji rozwiązań oraz innego języka do ich opisu. W monografii [39] przedstawiliśmy rys historyczny i podstawy teorii w jednolity sposób oraz ujednoliliśmy koncepcję rozwiązania (w przedmowie i rozdziale 1).

Pozostałe rozdziały dotyczą współczesnych wyników, w większości autorstwa bądź współautorstwa co najmniej jednego z nas. Rozdziały 2, 3 i 4 dotyczą koncepcji słabego rozwiązania, definiowanego przy użyciu sparowań Anzellottiego podobnie jak w sekcji 4.1; dalsze rozdziały dotyczą silniejszej koncepcji rozwiązania, która minimalizuje całkowite wahania dla zadanych danych brzegowych które są przyjmowane w sensie śladu. Rozdział 5 dotyczy istnienia rozwiązań dla dostatecznie regularnych danych brzegowych oraz odpowiednich warunków geometrycznych na dziedzinę, a rozdziały 6 i 7 dotyczą jednoznaczności, struktury i regularności rozwiązań. W rozdziale 8 rozważamy przypadek osłabionych założeń dotyczących geometrii dziedziny. W rozdziałach 9 i 10 jest przedstawiona równoważność między zagadnieniem najmniejszego gradientu a zagadnieniem optymalnego transportu i jej konsekwencje (są to wyniki wcześniejsze niż te przedstawione w sekcji 4.2[E]). Rozdział 11 dotyczy nielokalnego zagadnienia najmniejszego gradientu i jego powiązania ze standardowym sformułowaniem. Wreszcie rozdział 12 dotyczy znanych wyników z przypadku metrycznego (wcześniejszych niż te przedstawione w sekcji 4.1[B]).

Monografia [39] została zaplanowana w taki sposób, aby mogła służyć jako pomoc naukowa nie tylko dla matematyków mających doświadczenie w podobnych dziedzinach, ale także dla doktorantów i innych badaczy na początku swojej ścieżki kariery naukowej. Aby była ona bardziej przystępna, wszystkie wyniki są napisane przy użyciu jednolitych definicji i jednolitego języka. Ponadto, zidentyfikowaliśmy i poprawiliśmy istniejące błędy bądź niedokładności w literaturze. Dodaliśmy wiele przykładów, uprościliśmy niektóre dowody oraz znaleźliśmy kilka natychmiastowych uogólnień znanych wyników. Na końcu monografii znajduje się także pięć dodatków ułatwiających korzystanie z książki, które dotyczą funkcji o wahanii ograniczonym, geometrycznej teorii miary, analizy wypukłej, optymalnego transportu oraz analizy w przestrzeniach metrycznych. Dodatkowo, na końcu każdego rozdziału znajduje się osobna sekcja, w której omawiamy inne powiązane wyniki znane w literaturze, omawiamy możliwe kierunki rozwoju oraz stawiamy problemy otwarte mające związek z tematami poruszonymi w danym rozdziale.

7.3. Rozprawa doktorska

Celem mojej rozprawy doktorskiej (por. sekcja 2) było zbadanie wpływu geometrii obszaru na istnienie, jednoznaczność i regularność rozwiązań w anizotropowym zagadnieniu najmniejszego gradientu, tzn.

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \phi(x, Du) : u \in BV(\Omega), u|_{\partial\Omega} = f \right\}$$

dla dziedziny lipschitzowskiej $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, danych brzegowych $f \in L^1(\partial\Omega)$, oraz funkcji zadającej anizotropię $\phi : \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty)$. Wymagamy, aby $\phi(x, \cdot)$ była normą w drugiej zmiennej oraz aby zachodziło jednostajne oszacowanie

$$c|\xi| \leq \phi(x, \xi) \leq C|\xi| \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Aby uniknąć niepotrzebnego rozrostu bibliografii, poniżej [WX] oznacza pracę o numerze X z wykazu osiągnięć; w tej notacji, moja rozprawa doktorska odpowiada pracom [W3], [W4], [W5], [W7] oraz [W10]. W pracy doktorskiej poruszane były przede wszystkim następujące trzy różne typy zagadnień.

W pierwszym przypadku funkcja ϕ zadająca anizotropię jest normą. Wówczas pokazujemy istnienie rozwiązań anizotropowego zagadnienia najmniejszego gradientu w przypadku, gdy obszar Ω jest ściśle wypukły oraz dane brzegowe $f \in L^1(\partial\Omega)$ są ciągłe prawie wszędzie (względem miary Hausdorffa kowymiaru jeden). Szczególnie interesuje nas przypadek, gdy ϕ nie jest ściśle wypukła; wtedy brak zależności ϕ od położenia gra szczególną rolę. W dwóch wymiarach otrzymujemy także wyniki regularnościowe dla danych brzegowych ciągłych oraz hölderowsko ciągłych odpowiadające wynikom znanym z przypadku izotropowego (z całkowicie nowym dowodem jako że znany euklidesowy argument nie działa). Okazuje się, że wspomniane wyżej wyniki nie zależą od regularności ϕ i ich dowody są ściśle geometryczne.

Drugi przypadek dotyczy sytuacji, gdy ϕ jest wystarczająco regularna, tak że dostępne są narzędzia równań różniczkowych cząstkowych. Dokładniej, lokalnie we współrzędnych możliwe jest zapisanie poziomic rozwiązania jako rozwiązań pewnego eliptycznego równania różniczkowego i skorzystanie z zasady maksimum bądź zasady porównawczej. Przykładowo, ϕ może zależeć także od położenia, jednak zakładamy wysoką regularność oraz jednostajną wypukłość ϕ . Wówczas, w celu uzyskania wyników podobnych do wspomnianych

w poprzednim akapicie zamiast argumentów ściśle geometrycznych używamy m.in. zasady porównawczej dla anizotropowych powierzchni minimalnych. Ponadto, w przypadku izotropowym, kiedy mamy dostępną m.in. zasadę maksimum dla powierzchni minimalnych, otrzymujemy także lokalną ograniczoność rozwiązań oraz pokazujemy, że dla ustalonych danych brzegowych rozwiązania niekoniecznie są jednoznaczne, ale wszystkie rozwiązania mają identyczną strukturę poziomic.

Wyniki opisane w poprzednich akapitach silnie zależą od geometrii dziedziny Ω . Większość z nich, nawet w przypadku izotropowym, wymaga ograniczoności oraz ścisłej wypukłości (bądź jednostajnej wypukłości) Ω ; w przypadku anizotropowym stosowane są analogiczne założenia. Trzeci przypadek rozważany w rozprawie doktorskiej dotyczy sytuacji, gdy dziedzina Ω nie spełnia tych standardowych założeń. Dla uproszczenia, ograniczamy się do przypadku izotropowego i jedynie w kilku miejscach komentujemy przypadek anizotropowy. Rozważamy dwie sytuacje: kiedy Ω jest zbiorem ściśle wypukłym, ale nieograniczonym; oraz kiedy Ω jest pierścieniem na płaszczyźnie (w szczególności nie jest wypukła i ma niespójny brzeg), co umożliwia stosowanie metod pochodzących z zagadnienia optymalnego transportu.

7.4. Pozostałe publikacje

Poniżej pokrótce opiszę główne kierunki badań poruszane w artykułach naukowych niebędących częścią rozprawy doktorskiej ani cyklu prac przedstawionego w sekcji 4. Ponownie, aby uniknąć niepotrzebnego rozrostu bibliografii, poniżej [WX] oznacza pracę o numerze X z wykazu osiągnięć. Dla przypomnienia, moja rozprawa doktorska odpowiada pracom [W3], [W4], [W5], [W7] oraz [W10], zaś cykl prac przedstawiony w sekcji 4 to artykuły [W11-W16].

Dwie publikacje powstały jeszcze przed doktoratem — są to prace [W1] oraz [W2] (tzn. [40] oraz [30] odpowiednio). Dotyczą one dwuwymiarowego zagadnienia najmniejszego gradientu. W pracy [W1] pokazana jest równoważność między zagadnieniem najmniejszego gradientu a zagadnieniem Beckmanna, która jest podstawą do zastosowania metod transportowych w zagadnieniu najmniejszego gradientu oraz dwa warianty tego zagadnienia: gdy dane brzegowe są zadane jedynie na kawałku brzegu dziedziny; oraz kiedy dziedzina nie jest ściśle wypukła przy pewnych warunkach dopuszczalności na dane brzegowe. Praca [W2] zawiera pierwszy w literaturze wynik dotyczący istnienia rozwiązań dla nieciągłych danych brzegowych (w tym przypadku: klasy BV na brzegu dziedziny) oraz wyniki dotyczące struktury rozwiązań. Kwestie istnienia rozwiązań dla nieciągłych danych brzegowych, struktury rozwiązań, oraz danych brzegowych na fragmencie brzegu są dalej badane w pracy [W18] w przypadku wielowymiarowym.

Drugi poruszany temat dotyczy analizy na przestrzeniach metrycznych ze szczególnym uwzględnieniem zagadnień nielokalnych i odpowiada pracom [W6], [W8], oraz [W9]. Praca [W6] dotyczy nielokalnego wariantu zagadnienia najmniejszego gradientu. Opisane w niej wyniki są sformułowane w dużej ogólności, dla przestrzeni metrycznych wyposażonych w błędzenie losowe, i obejmują m.in. przypadki zagadnień na kratach, grafach nieskierowanych, oraz dla interakcji zadanej przez symetryczne jądro całkowe w przestrzeni euklidesowej. Praca ta dotyczy charakteryzacji rozwiązań, ich podstawowych własności, oraz identyfikacji minimalnych założeń na przestrzeń i błędzenie losowe dla istnienia rozwiązań. Ten temat jest kontynuowany w pracy [W9], gdzie badane jest przejście graniczne z zagadnienia nielokalnego do zagadnienia lokalnego

dla pewnej klasy błędzeń losowych. Wreszcie w pracy [W8] udowodniona jest charakteryzacja przestrzeni Sobolewa na przestrzeniach metrycznych za pomocą rodziny nielokalnych funkcjonałów analogicznych do tych wprowadzonych w przełomowej pracy Bourgaina, Brezisa i Mironescu „Another look at Sobolev spaces” [15]; jest to pierwszy tego typu wynik w przestrzeniach metrycznych z wskazaniem dokładnej stałej. Wprowadzona w tej pracy technika stała się standardem w literaturze dotyczącej tego typu zagadnień.

Trzeci kierunek badań dotyczy zagadnienia podwójnej bańki (ang. double bubble problem), tzn. minimalizacji łącznej powierzchni bańki mydlanej o zadanych objętościach dwóch części. Jest to klasyczny problem rachunku wariacyjnego i poświęcone są mu prace [W17] i [W19]. Praca [W17] stanowi pierwsze w literaturze sformułowanie dyskretnej wersji tego zagadnienia na kracie $\mathbb{Z}^2$. Badamy strukturę rozwiązań oraz pokazujemy, że podobnie jak w przypadku zagadnienia izoperymetrycznego, w przypadku równych objętości rozwiązania spełniają zasadę $N^{3/4}$ (ang. $N^{3/4}$ -law), tzn. moc różnicy symetrycznej dwóch rozwiązań tego zagadnienia dla N atomów (po ewentualnym zastosowaniu pewnej izometrii) jest rzędu $N^{3/4}$. W pracy [W19] badamy model kontinuum tego zagadnienia w granicy gdy liczba atomów dąży do nieskończoności dla ustalonego stosunku objętości, co odpowiada liczeniu powierzchni względem metryki ℓ^1 . Otrzymaliśmy klasyfikację wszystkich rozwiązań tego zagadnienia w pełnej ogólności dla zbiorów o skończonym obwodzie oraz dla różnych poziomów interakcji między zbiorami.

Czwarty temat jest kontynuacją badań przedstawionych w cyklu prac [W11-W16] będących podstawą wniosku habilitacyjnego i jest on przedmiotem artykułów [W20], [W21] oraz [W22]. Dotyczą one charakteryzacji rozwiązań dla potoków gradientowych w przestrzeniach Hilberta w następujących dwóch sytuacjach. W pracy [W20] badamy potoki gradientowe w przestrzeni euklidesowej dla bardzo szerokiej klasy funkcjonałów z liniowym wzrostem, zakładając jedynie liniowy wzrost oraz ciągłość funkcji recesji modelującej zachowanie w nieskończoności. Praca [W21] kontynuuje cykl prac dotyczących zagadnień ewolucyjnych w przestrzeniach metrycznych i rozszerza wyniki znane z pracy [36] dotyczące p -Laplasjanu na szeroką klasę funkcjonałów z niejednorodnym wzrostem, natomiast praca [W22] poświęcona jest analizie analogicznego zagadnienia w przypadku nielokalnym, tzn. dla przestrzeni metrycznych wyposażonych w błędzenie losowe.

Literatura

- [1] L. Ambrosio and S. Di Marino, *Equivalent definition of BV spaces and total variation on metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **266** (2014), 4150–4188.
- [2] L. Ambrosio, N. Fusco and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, 2000.
- [3] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Density of Lipschitz function and equivalence of weak gradients in metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **29** (2013), 969–996.
- [4] L. Ambrosio, N. Gigli and G. Savaré, *Calculus and heat flow in metric measure spaces and applications to spaces with Ricci bounds from below*, Invent. Math. **195** (2014), 289–391.
- [5] L. Ambrosio, T. Ikonen, D. Lučić and E. Pasqualetto, *Metric Sobolev spaces I: equivalence of definitions*, Milan J. Math. **92** (2024), 255–347.

- [6] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón, *Minimizing total variation flow*, Diff. and Int. Eq. **14** (2001), 321–360.
- [7] F. Andreu, C. Ballester, V. Caselles and J.M. Mazón, *The Dirichlet problem for the total variational flow*, J. Funct. Anal. **180** (2001), 347–403.
- [8] F. Andreu, V. Caselles, and J.M. Mazón, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, Progress in Mathematics, vol. 223, Birkhäuser, Basel, 2004.
- [9] G. Anzellotti, *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **135** (1983), 293–318.
- [10] P. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre and J.L. Vazquez, *An L^1 -theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. (4), **22** (1995), no. 2, pp. 241–273.
- [11] Ph. Bénilan and M. G. Crandall, *Completely Accretive Operators*. In Semigroups Theory and Evolution Equations (Delft, 1989), Ph. Clement et al. editors, volume 135 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, Marcel Dekker, New York, 1991, pp. 41–75.
- [12] A. Björn and J. Björn, *Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 17, European Mathematical Society, Zürich, 2011.
- [13] V. Bögelein, F. Duzaar, P. Marcellini, *Parabolic systems with p, q -growth: a variational approach*, Arch. Rational Mech. Anal. **210** (2013), 219–267.
- [14] E. Bombieri, E. De Giorgi and E. Giusti, *Minimal cones and the Bernstein problem*, Invent. Math. **7** (1969), 243–268.
- [15] J. Bourgain, H. Brezis and P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, in: Menaldi, J.L. et al. (eds.), *Optimal Control and Partial Differential Equations*, pp. 439–455, IOS Press, Amsterdam (2001).
- [16] H. Brezis, *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations*, in: *Contributions to Nonlinear Functional Analysis*, Proc. Sympos. Univ. Wisconsin, Madison, Academic Press, New York, USA (1971), pp. 101–156.
- [17] H. Brezis, *Operateurs Maximaux Monotones*, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [18] V. Buffa, M. Collins and C.P. Camacho, *Existence of parabolic minimizers to the total variation flow on metric spaces*, Manuscripta Math. **170** (2023), 109–145.
- [19] V. Buffa, G.E. Comi and M. Miranda Jr., *On BV functions and essentially bounded divergence-measure fields in metric spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **38** (2022), 883–946.
- [20] L. Bungert and M. Burger, *Asymptotic profiles of nonlinear homogeneous evolution equations of gradient flow type*, J. Evol. Equ. **20** (2020), 1061–1092.

- [21] A. Chambolle, V. Caselles, D. Cremers, M. Novaga, and T. Pock, *An introduction to total variation for image analysis*, Theoretical Foundations and Numerical Methods for Sparse Recovery, M. Fornasier (ed.), De Gruyter, Berlin, New York 2010, pp. 263–340.
- [22] J. Cheeger, *Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces*, Geom. Funct. Anal. **9** (1999), 428–517.
- [23] M.G. Crandall and A. Pazy, *Semi-groups of nonlinear contractions and dissipative sets*, J. Funct. Anal. **3** (1969), 376–418.
- [24] S. Dweik and W. Górny, *Optimal transport approach to Sobolev regularity of solutions to the weighted least gradient problem*, SIAM J. Math. Anal. **55** (2023), no. 3, 1916–1948.
- [25] S. Dweik and F. Santambrogio, *L^p bounds for boundary-to-boundary transport densities, and $W^{1,p}$ bounds for the BV least gradient problem in 2D*, Calc. Var. Partial Differ. Equ. **58** (1) (2019), Art. 31.
- [26] M. Feldman and R. McCann, *Monge’s transport problem on a Riemannian manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), 1667–1997.
- [27] M. Giaquinta, G. Modica and J. Souček, *Functionals with linear growth in the calculus of variations I, II*, Comment. Math. Univ. Carolinae **20** (1979), 143–156, 157–172.
- [28] N. Gigli, *On the differential structure of metric measure spaces and applications*, Mem. Amer. Math. Soc. **236** (2015), no. 1113, vi+91 pp.
- [29] N. Gigli, *Nonsmooth differential geometry - an approach tailored for spaces with Ricci curvature bounded from below*, Mem. Amer. Math. Soc. **251** (2018), no. 1196, v+161 pp.
- [30] W. Górny, *Planar least gradient problem: existence, regularity and anisotropic case*, Calc. Var. Partial Differential Equ. **57** (2018), Art. 98.
- [31] W. Górny, *Existence of minimisers in the least gradient problem for general boundary data*, Indiana Univ. Math. J. **70**, no. 3 (2021), 1003–1037.
- [32] W. Górny, *Applications of optimal transport methods in the least gradient problem*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **24** (2023), 1817–1851.
- [33] W. Górny, *The trace space of anisotropic least gradient functions depends on the anisotropy*, Math. Ann. **387** (2023), 1343–1365.
- [34] W. Górny, M. Łasica, A. Matsoukas, *Euler–Lagrange equations for variable-growth total variation*, preprint, arXiv:2504.13559.
- [35] W. Górny, *Weak solutions to gradient flows of functionals with inhomogeneous growth in metric spaces*, J. Evol. Equ., przyjęta do druku, preprint: arXiv:2307.13456.

- [36] W. Górny and J.M. Mazón, *On the p -Laplacian evolution equation in metric measure spaces*, J. Funct. Anal. **283** (2022), 109621.
- [37] W. Górny, J.M. Mazón, *The Anzellotti-Gauss-Green formula and least gradient functions in metric measure spaces*, Commun. Contemp. Math. **26** (2024), no. 6, 2350027.
- [38] W. Górny and J.M. Mazón, *The Neumann and Dirichlet problems for the total variation flow in metric measure spaces*, Adv. Calc. Var. **17** (2024), 131–164.
- [39] W. Górny and J.M. Mazón, *Functions of Least Gradient*, Monographs in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser, 2024, ISBN 978-3-031-51880-5.
- [40] W. Górny, P. Rybka and A. Sabra, *Special cases of the planar least gradient problem*, Nonlinear Anal. **151** (2017), 66–95.
- [41] P. Hajłasz and P. Koskela, *Sobolev met Poincaré*, Mem. Amer. Math. Soc. **145** (2000).
- [42] H. Hakkarainen, R. Korte, P. Lahti and N. Shanmugalingam, *Stability and continuity of functions of least gradient*, Anal. Geom. Metr. Spaces **3** (2015), 123–139.
- [43] J. Heinonen and P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Math. **181** (1998), 1–61.
- [44] J. Heinonen, P. Koskela, N. Shanmugalingam and J. Tyson, *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces: An Approach Based on Upper Gradients*, New Mathematical Monographs, vol. 27, Cambridge University Press, 2015, i–xi+448.
- [45] N. Hoell, A. Moradifam and A.I. Nachman, *Current density impedance imaging of an anisotropic conductivity in a known conformal class*, SIAM J. Math. Anal. **46** (2014), 1820–1842.
- [46] R.L. Jerrard, A. Moradifam and A.I. Nachman, *Existence and uniqueness of minimizers of general least gradient problems*, J. Reine Angew. Math. **734** (2018), 71–97.
- [47] M. Kell, *q -Heat flow and the gradient flow of the Renyi entropy in the p -Wasserstein space*, J. Funct. Anal. **271** (2016), 2045–2089.
- [48] J. Kline, *Non-locality, non-linearity, and existence of solutions to the Dirichlet problem for least gradient functions in metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **39** (2023), no. 4, 1567–1598.
- [49] R. V. Kohn and G. Strang, *The constrained least gradient problem*, In: R. Rnops and A. Lacy (eds.), *Non-classical Continuum Mechanics*, Cambridge Univ. Press, 1987, pp. 226–243.
- [50] Y. Kōmura, *Nonlinear semi-groups in Hilbert space*, J. Math. Soc. Japan **19** (1967), 493–507.

- [51] R. Korte, P. Lahti, X. Li and N. Shanmugalingam, *Notions of Dirichlet problem for functions of least gradient in metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoamericana **35** (2019), 1603–1648.
- [52] P. Lahti and N. Shanmugalingam, *Trace theorems for functions of bounded variation in metric spaces*, J. Funct. Anal. **274** (2018), no. 10, 2754–2791.
- [53] A. Lichnerowicz, R. Temam, *Pseudosolutions of the time-dependent minimal surface problem*, J. Differ. Equ. **30**(3) (1978), 340–364.
- [54] J. Lott and C. Villani, *Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport*, Ann. of Math. (2) **169** (2009), 903–991.
- [55] L. Malý, N. Shanmugalingam and M. Snipes, *Trace and extension theorems for functions of bounded variation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci. **18** (1) (2018), 313–341.
- [56] N. Marola, M. Miranda Jr. and N. Shanmugalingam, *Boundary measures, generalized Gauss-Green formulas, and mean value property in metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **31** (2015), 497–530.
- [57] J. M. Mazón, J. D. Rossi and S. Segura de León, *Functions of least gradient and 1-harmonic functions*, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 1–18.
- [58] M. Miranda, *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **38** (1967), 238–257.
- [59] M. Miranda Jr., *Functions of bounded variation on “good” metric spaces*, J. Math. Pures Appl. **82** (2003), 975–1004.
- [60] A. Moradifard, *Existence and structure of minimizers of least gradient problems*, Indiana Univ. Math. J. **67** (2018), no. 3, 1025–1037.
- [61] A.I. Nachman, A. Tamasan and A. Timonov, *Recovering the conductivity from a single measurement of interior data*, Inverse Probl. **25** (2009), 035014.
- [62] H. Parks, *Explicit determination of area minimizing hypersurfaces*, Duke Math. J. **44** (1977), 519–534.
- [63] H. Parks, *Explicit determination of area minimizing hypersurfaces, II*, Memoirs AMS **342** (1986), 1–90.
- [64] H.R. Parks and J.T. Pitts, *The least-gradient method for computing area minimizing hypersurfaces spanning arbitrary boundaries*, J. Comput. Appl. Math. **66** (1996), 401–409.
- [65] L. Rudin, S. Osher and E. Fatemi, *Nonlinear total variation based noise removal algorithms*, Physica D. **60** (1992), 259–268.

- [66] P. Rybka and A. Sabra, *The planar Least Gradient problem in convex domains, the case of continuous datum*, Nonlinear Anal. **214** (2022), 112595.
- [67] F. Santambrogio, *Optimal transport for applied mathematicians*, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications 87, Birkhäuser, Basel, 2015.
- [68] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces: an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **16** (2000), 243–279.
- [69] G. Spradlin, A. Tamasan, *Not all traces on the circle come from functions of least gradient in the disk*, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), 1819–1837.
- [70] P. Sternberg, G. Williams and W. P. Ziemer, *Existence, uniqueness, and regularity for functions of least gradient*, J. Reine Angew. Math. **430** (1992), 35–60.
- [71] K.-T. Sturm, *On the geometry of metric measure spaces. I, II*, Acta Math. **196** (2006), 65–131, 133–177.
- [72] C. Villani, *Topics in optimal transportation*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [73] A. Zuniga, *Continuity of minimizers to the weighted least gradient problems*, Nonlinear Anal. **178** (2019), 86–109.

.....
(podpis wnioskodawcy)