Autoreferat

Tomasz Piasecki

Spis treści

1 Dane kandydata **3**

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe **3**

3 Zatrudnienie **3**

4 Omówienie osiągnięcia naukowego **3**

4.1 Stacjonarne słabe rozwiązania dla ściśliwych mieszanin 8

4.2 Mieszaniny ściśliwe w ujęciu maksymalnej regularności ([A-2],[A-3]) 14

4.2.1 Maksymalna regularność i zanik wykładniczy dla pewnej klasy zagadnień parabolicznych ([A-2]) 15

4.2.2 Istnienie i jednoznaczność dla układów opisujących ściśliwe mieszaniny: [A-3] 18

4.3 Lokalne istnienie i słabo-silna jednoznaczność dla ściśliwego układu Naviera-Stokes'a w ruchomym obszarze ([A-4]). 22

5 Informacja o wykazaniu się istotną aktywnoscią naukową **25**

6 Osiągnięcia dydaktyczne oraz organizacyjne **26**

6.1 Działalność organizacyjna 26

6.2 Dydaktyka 26

6.3 Opieka naukowa nad studentami 27

7 Opis pozostałych wyników **27**

7.1 Rozprawa doktorska (prace [B-14]-[B-16]) 27

7.2 Stacjonarne regularne rozwiązania - ciąg dalszy ([B-12],[B-13],[B-9],[B-7]) 27

7.3 Dynamika ściśliwych mieszanin ([B-10],[B-8],[B-3]) 28

7.4 Przepływy ściśliwe w ruchomych obszarach ([B-5]) 30

7.5 Modele dwuskładnikowe ([B-2]) 30

7.6 Układy płyn-ciało stałe [B-6] 30

7.7 Niejednorodne równania Naviera-Stokes'a ([B-1]) 31

7.8 Modelowanie epidemiologiczne [B-4] 32

References **33**

1 Dane kandydata

Imię i nazwisko: Tomasz Piasecki
Afiliacja: Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

2010 Doktorat z Matematyki (z wyróżnieniem)
Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Promotor: prof. Piotr B. Mucha

Tytuł rozprawy: Stacjonarne równania Naviera-Stokesa dla płynu ściśliwego z niejednorodnymi warunkami brzegowymi typu poślizgu. Istnienie i regularność rozwiązań.

2006 Magister Matematyki
Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Promotor: dr Piotr Krzyżanowski

Tytuł pracy: Metoda Galerkina dla równań różniczkowych cząstkowych z osobliwością

3 Zatrudnienie

10.2011 – obecnie: Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, Adiunkt

10.2014 – 9.2016: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, adiunkt

10.2013 – 9.2014: Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, adiunkt

10.2010 – 9.2011: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, adiunkt

4 Omówienie osiągnięcia naukowego

Rozprawa habilitacyjna zatytułowana:

Matematyczna analiza wybranych zagadnień związanych z przepływami złożonymi

składa się z cyklu artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1 pkt 2b Ustawy:

A-1. T. Piasecki, M. Pokorný, *Weak and variational entropy solutions to the system describing steady flow of a compressible reactive mixture.* Nonlinear Anal. 159, 365–392, 2017;

A-2. T. Piasecki, Y. Shibata, E. Zatorska, *On the maximal $L_p - L_q$ regularity of solutions to a general linear parabolic system.* J. Differential Equations 268 (2020), no. 7, 3332–3369;

A-3. T. Piasecki, Y. Shibata, E. Zatorska, *On the isothermal compressible multi-component mixture flow: the local existence and maximal $L_p - L_q$ regularity of solutions.* Nonlinear Analysis 189 (2019), 111571;

A-4. O. Kreml, S. Nečasová, T. Piasecki, *Local existence of strong solutions and weak-strong uniqueness for the compressible Navier-Stokes system on moving domains.* Proc. Royal Soc. Edinburgh A, **150** (2020), 2255–2300.

Zaczynamy od ogólnego opisu wyników uzyskanych w artykułach [A-1] - [A-4] umieszczając je w kontekście aktualnego stanu wiedzy w dziedzinie matematycznej mechaniki płynów. Następnie przechodzimy do bardziej szczegółowego opisu z przedstawieniem głównych wyników oraz idei ich dowodów. Ta część jest podzielona na cztery podrozdziały, każdy poświęcony jednej z prac [A-1]-[A-4].

Wybrany cykl prac poświęcony jest matematycznej analizie układów równań różniczkowych cząstkowych wywodzących się z mechaniki płynów, a dokładniej z matematycznych modeli przepływów ściśliwych. Wspólnym mianownikiem jest tu klasyczny układ Naviera-Stokesa opisujący przepływ cieczy
CNS ściśliwej:

$$\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \tag{1a}$$ CE

$$\partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \pi(\varrho) = \operatorname{div} \mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}), \tag{1b}$$ ME

gdzie $\varrho, \mathbf{u}$ to, odpowiednio, gęstość i pole prędkości płynu. Zakładamy, że tensor naprężeń jest opisany prawem Newtona

$$\mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}) = \mu \left(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u} - \frac{2}{3} \mathrm{div}\, \mathbf{u} \mathbb{I} \right) + \zeta \mathrm{div}\, \mathbf{u} \mathbb{I}$$

Kompletny układ uwzględniający również termodynamikę uzupełniony jest równaniem opisującym bilans energii całkowitej (lub, w alternatywnym sformułowaniu, wewnętrznej). Jego uogólnienie opisujące przepływ ściśliwej mieszaniny pojawi się w Rozdziale 4.2.

Układ (1), lub jego pełna wersja uwzględniająca efekty cieplne, może być połączony z innymi równaniami różniczkowymi cząstkowymi tworząc matematyczny języka opisu bardziej złożonych zjawisk, takich jak przepływy mieszanin, przepływy wielofazowe, układy typu płyn-struktura, ale także problemy niezwiązane na pierwszy rzut oka z mechaniką płynów, takie jak modele zachowań zbiorowych. Prace składające się na rozprawę poświęcone są matematycznej analizie wybranych problemów z tej szerokiej rodziny, które można ogólnie określić jako *przepływy złożone*. Ze względu na duży stopień komplikacji rozważanych układów, ich matematyczne zrozumienie jest nadal tylko częściowe, a nawet podstawowa kwestia istnienia rozwiązań pozostaje otwarta w wielu fizycznie istotnych przypadkach. Prace wchodzące w skład rozprawy można podzielić na dwie główne kategorie:

1. Istnienie rozwiązań dla modeli ściśliwych mieszanin ([A-1]-[A-3]);
2. Przepływy ściśliwe w ruchomych obszarach ([A-4]).

Artykuły [A-1]-[A-4] są częścią szerszych projektów badawczych prowadzonych we współpracy z Yoshihiro Shibatą (Uniwersytet Waseda), Eweliną Zatorską (Imperial College), Milanem Pokorným (Universytet Karola), Ondřejem Kremlem i Šarką Nečasovą (Czeska Akademia Nauk). Wybór podyktowany jest chęcią przedstawienia różnych podejść do kwestii istnienia i regularności rozwiązań.

Słabe rozwiązania, rozpatrywane w [A-1], są rozumiane jako obiekty spełniające pewną formę całkową lub dystrybucyjną oryginalnego problemu. Ich zaletą w teorii przepływów ściśliwych jest to, że często jesteśmy w stanie wykazać ich istnienie dla dowolnie dużych danych. Z kolei ich główną wadą jest zazwyczaj brak jednoznaczności, przynajmniej bez dodatkowych założeń o wyższej regularności.

W [A-2]-[A-4] pracujemy z rozwiązaniami regularnymi, rozumianymi jako funkcje o słabych pochodnych spełniających oryginalną postać równań prawie wszędzie. Dla układu (1) i jego uogólnień rozważanych w pracach składających się na rozprawę, tego typu rozwiązania są jednoznaczne, ale zazwyczaj jesteśmy w stanie wykazać ich istnienie albo w krótkim przedziale czasowym, albo przy dodatkowych założeniach o małości danych początkowych.

Pojęciem łączącym oba powyższe typy rozwiązań jest tzw. słabo-silna jednoznaczność (*weak-strong uniqueness*). Jednoznaczność regularnych rozwiązań oznacza, że nie ma innych rozwiązań w tej samej klasie. Nie oznacza to jednak, że możemy wykluczyć istnienie rozwiązań w słabszym znaczeniu. Własność słabo-silnej regularności wyklucza taki przypadek mówiąc, że słabe rozwiązanie odpowiada regularnemu, o ile to ostatnie istnieje.

Artykuły wybrane do pracy poświęcone są obu wyżej opisanym pojęciom rozwiązań. Trzy z nich dotyczą modeli mieszanin, opierają się jednak na zupełnie różnych podejściach.

Praca [A-1] powstała we współpracy z M. Pokorným, którą rozpocząłem wkrótce po uzyskaniu stopnia doktora. Pokazujemy istnienie stacjonarnych słabych rozwiązań dla modelu ściśliwej mieszaniny opisanego w monografii [16]. Wprowadzamy również nieco bardziej ogólne pojęcie wariacyjnych rozwiązań entropijnych (zastosowane po raz pierwszy w [22],[23] dla pełnej wersji (1) obejmującej bilans energetyczny). Do konstrukcji rozwiązań używamy nowych oszacowań gęstości otrzymując wyniki, które wydają się być optymalne w świetle dzisiejszego stanu wiedzy. Wyniki z [A-1] są opisane szczegółowo w rozdziale 4.1.

Równolegle rozpocząłem współpracę z Y. Shibatą i E. Zatorską. Zajmowaliśmy się podobnym modelem mieszanin, tym razem interesowały nas jednak regularne rozwiązania dla problemu zależnego od czasu. Współpraca zaowocowała artykułami [A-2]-[A-3] (poprzedzonymi przez [B-8], gdzie rozważaliśmy prostszy przypadek dwóch składników). Artykuły te poświęcone są zagadnieniu istnienia i jednoznaczności regularnych rozwiązań dla niestacjonarnej wersji modelu wprowadzonego w [16]. W związku z tym używamy zupełnie innych narzędzi niż w [A-1]. Kluczowe jest oszacowanie w maksymalnej regularności dla układu odpowiadającego linearyzacji oryginalnego problemu we współrzędnych Lagrange'a. Wynik ten, który jest interesujący sam w sobie ze względu na ogólne sformułowanie i wynikającą stąd możliwość zastosowania do innych problemów, został opublikowany w [A-2]. Opiera się na właściwościach $\mathcal{R}$-ograniczonych operatorów rozwiązań dla rodziny powiązanych problemów rezolwenty. W obszarze ograniczonym otrzymujemy również wykładniczy zanik odpowiednich norm rozwiązania.

W pracy [A-3] stosujemy wynik z [A-2], aby pokazać lokalne istnienie i jednoznaczność dla modelu mieszaniny wprowadzonego w [16]. Zasadnicza trudność polega na tym, że oryginalny problem jest tylko półdodatnio określony, dlatego rezultaty z [A-2] nie mogą być bezpośredniego zastosowane. Jednak przekształcenie problemu w tak zwanych zmiennych entropijnych prowadzi do zagadnienia ściśle parabolicznego.

Zdegenerowane problemy paraboliczne pojawiają się w opisie różnych zjawisk, oprócz modelowania mieszanin możemy tu wymienić modele transportu jonów czy pewne modele biologii matematycznej, dobrym źródłem jest tu monografia [20]. Symetryzacja prowadząca do sformułowania entropijnego sama w sobie nie jest nową ideą, ale zaletą naszego podejścia w [A-3] jest jej bezpośredniego wyprowadzenie. Nasz wynik dotyczący maksymalnej regularności dla układu liniowego udowodniony w [A-2] może znaleźć również inne zastosowania ze względu na ogólną formę rozważanego układu.

Artykuł [A-4] dotyczy innego tematu. Pracujemy z "czystym"układem (1), ale trudność polega na tym, że rozważamy przepływ w ruchomym obszarze. Podobnie jak w [A-3], interesują nas regularne rozwiązania. Możliwe jest tu podejście w języku maksymalnej regularności $L_p - L_q$, zastosowaliśmy je w pracy [B-5]. Jednak to podejście jest dość zbliżone do [A-3], dlatego zdecydowałem się dołączyć do rozprawy [A-4], gdzie stosujemy zupełnie inne meody oparte na oszacowaniach energetycznych.

Istotną nowością w [A-4] jest mieszane podejście do układu (1): równanie ciągłości jest rozwiązywane bezpośrednio na ruchomym obszarze, podczas gdy równanie momentu sprowadzamy do stałego obszaru. Musięliśmy również skonstruować operator rozszerzenia dla danych brzegowych, jest to niezależny wynik który może być uogólniony i zastosowany do innych problemów. Wyniki z [A-4] są opisane w rozdziale 4.3.

Na zakończenie tej części opiszę krótko stosowaną notację. Używamy standardowego oznaczenia L_p dla przestrzeni Lebesque'a. Następnie, dla przestrzeni Banacha X i dowolnego przedziału czasu $I \subset R$ przez $L_p(I;X)$ oznaczamy przestrzeń Bochnera. Dla $k \in \mathbb{N}$, $W_p^k(\Omega)$ oznacza przestrzeń Sobolewa funkcji ze słabymi pochodnymi do rzędu k całkowalnymi z p-tą potęgą.

Dla $0 < s < \infty$ i m - najmniejszej liczby całkowitej większej niż s definiujemy przestrzenie Besova jako przestrzenie interpolacyjne

$$B^s_{q,p}(\Omega) = (L_q(\Omega), W^m_q(\Omega))_{s/m,p}, \tag{2}$$ def:bsqp0

gdzie $(\cdot,\cdot)_{s/m,p}$ jest funktorem interpolacji rzeczywistej, patrz [1, Rozdział 7].

Następnie, dla $s \in \mathbb{R}$ przestrzeń Bessel'a $H^s_p(\mathbb{R}, X)$ to przestrzeń funkcji o wartościach w X dla których

$$\|f\|_{H^s_p(\mathbb{R},X)} = \Big(\int_{\mathbb{R}} \|\mathcal{F}^{-1}[(1+\tau^2)^{s/2}\mathcal{F}[f](\tau)]\|^p \,\mathrm{d}\tau\Big)^{1/p} < \infty.$$

Przestrzenie Lorentza na przestrzeni z miarą (X,μ) określamy przez interpolację rzeczywistą przestrzeni Lebesgue'a jako

$$L_{p,r}(X,\mu) = (L_\infty(X,\mu), L_1(X,\mu))_{1/p,r} \quad \text{for} \quad p \in (1,\infty),\ r \in [1,\infty].$$

Wreszcie, dla $0 < \epsilon < \pi$ definiujemy

$$\Sigma_\epsilon = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \ \ |\mathrm{arg}\lambda| \le \pi - \epsilon\}. \tag{3}$$ sector

4.1 Stacjonarne słabe rozwiązania dla ściśliwych mieszanin

sec:mix:weak

W [A-1] badamy następujące uogólnienie (1) opisujące stacjonarny przepływ mieszaniny ściśliwych składników:

$$\begin{gathered}
\mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{u}) = 0,\\
\mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \mathrm{div}\,\mathbb{S} + \nabla\pi = \varrho\mathbf{f},\\
\mathrm{div}\,(\varrho E\mathbf{u}) + \mathrm{div}\,(\pi\mathbf{u}) + \mathrm{div}\,\mathbf{Q} - \mathrm{div}\,(\mathbb{S}\mathbf{u}) = \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u},\\
\mathrm{div}\,(\varrho Y_k\mathbf{u}) + \mathrm{div}\,\mathbf{F}_k = m_k\omega_k, \quad k \in \{1,\dots,n\}.
\end{gathered} \tag{4}$$ mix:steady

E oznacza tu całkowitą energię właściwą, $\mathbf{Q}$ strumień ciepła, ω_k produkcję molową k-tego składnika, $\mathbf{F}_k$ jego strumień dyfuzji, natomiast m_k - masę molową. Zakładamy, że m_k są równe, a więc bez straty ogólności

$$m_1 = \ldots = m_n = 1. \tag{5}$$ eq_mass

Układ (4) jest uzupełniony warunkami braku poślizgu

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}, \tag{6}$$ 1.6

wraz z warunkiem zerowej dyfuzji przez brzeg

$$\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}, \tag{7}$$

1.7

oraz warunkiem typu Robina dla strumienia ciepła

$$-\mathbf{Q} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{L}(\vartheta - \vartheta_{\mathbf{0}}) = \mathbf{0}, \tag{8}$$

1.8

co oznacza, że strumień ciepła przez brzeg jest proporcjonalny do różnicy temperatury wewnątrz Ω i znanej temperatury zewnętrznej ϑ_0. Współczynnik L opisuje izolację termiczną brzegu, dla uproszczenia zakładamy, że jest stały. Ponadto dana jest całkowita masa mieszaniny

$$\int_\Omega \varrho \mathrm{d}x = M > 0. \tag{9}$$

conserva

Frakcje masowe Y_k, $k \in 1, \ldots, n$ są zdefiniowane jako $Y_k = \frac{\varrho_k}{\varrho}$, gdzie ϱ_k jest gęstością k-tego składnika. Zatem z definicji, spełniają

$$\sum_{k=1}^{n} Y_k = 1. \tag{10}$$

brak

Nie będziemy tutaj szczegółowo opisywać innych relacji konstytutywnych, są one szczegółowo opisane w rozdziale 1 pracy [A-1]. Ograniczymy się do definicji rozwiązań z jakimi pracujemy, oraz tych relacji konstytutywnych, które są niezbędne do precyzyjnego sformułowania wyników. Dla ciśnienia zakładamy

$$\pi = \pi(\varrho, \vartheta) = \pi_c(\varrho) + \pi_m(\varrho, \vartheta), \tag{11}$$

defp

gdzie ciśnienie cząsteczkowe π_m spełnia prawo Boyle'a

$$\pi_m = \sum_{k=1}^{n} \varrho Y_k \vartheta = \varrho\vartheta. \tag{12}$$

mol

Oznacza ono ciśnienie dla mieszaniny n doskonałych gazów o masie molowej równej 1. Pierwszy składnik (11), to tzw. zimne ciśnienie (*cold pressure*), o którym zakładamy

$$\pi_c(\varrho) \sim \varrho^\gamma \quad \text{dla dużych } \varrho, \tag{13}$$

pc

$\pi_c \in C([0,\infty)) \cap C^1((0,\infty))$, ściśle rosnące na $\mathbb{R}_+$. Strumień ciepła $\mathbf{Q}$ składa się z dwóch wyrazów. Pierwszy reprezentuje transfer energii spowodowany dyfuzją, a drugi prawo Fouriera:

$$\mathbf{Q} = \sum_{k=1}^{n} h_k \mathbf{F}_k + \mathbf{q}, \qquad \mathbf{q} = -\kappa \nabla \vartheta, \tag{14}$$

eq:heatd

gdzie $\kappa = \kappa(\vartheta)$ to współczynnik przewodzenia ciepła, o którym zakładamy

$$\underline{\kappa}(1 + \vartheta^m) \le \kappa(\vartheta) \le \overline{\kappa}(1 + \vartheta^m) \tag{15}$$

growth_kappa

dla pewnych stałych $m, \underline{\kappa}, \overline{\kappa} > 0$. Strumień dyfuzji k-tego składnika, $\mathbf{F}_k$, jest dany wzorem

$$\mathbf{F}_k = -Y_k \sum_{l=1}^{n} D_{kl} \nabla Y_l, \tag{16}$$

eq:diff1

gdzie $\mathbb{D} = D_{ij}$ jest macierzą dyfuzji o następujących własnościach, które omówiono w [16, Rozdział 7]:

$$\begin{gathered} \mathbb{D} = \mathbb{D}^t, \quad N(\mathbb{D}) = \mathbb{R}\vec{Y}, \quad R(\mathbb{D}) = \vec{Y}^{\perp}, \\ \mathbb{D} \quad \text{jest półdodatnio określona } \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{17}$$

prop

gdzie $N(\mathbb{D})$ oznacza jądro macierzy $\mathbb{D}$, natomiast $R(\mathbb{D})$ jej obraz. Zakładamy, że $\vec{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^t > 0$ oraz że współczyniki D_{ij} to różniczkowalne funkcje zmiennych $\vartheta, Y_1, \ldots, Y_n$ spełniające

$$|D_{ij}(\vartheta, \vec{Y})| \le C(\vec{Y})(1 + \vartheta^a) \tag{18}$$

growth:D

dla pewnego $a \ge 0$. Oznaczając $\vec{U} = (1, \ldots, 1)^t$ widzimy, że postać $\mathbf{F}_k$ implikuje w szczególności $\{\mathbf{F}_k\}_{k=1}^n \in \vec{U}^{\perp}$, skąd otrzymujemy

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k = \mathbf{0}. \tag{19}$$

sum_F

Interesuje nas istnienie słabych rozwiązań zagadnienia (4) z relacjami konstytutywnymi określonymi powyżej. Definiujemy je następująco:

def:weak **Definicja 1.** *Mówimy, że układ funkcji $(\varrho, \mathbf{u}, \vartheta, \vec{Y})$ jest słabym rozwiązaniem (4) z założeniami określonymi powyżej, jeżeli*

- $\varrho \geq 0$ *p.w. w* Ω, $\varrho \in L^{6\gamma/5}(\Omega)$, $\int_\Omega \varrho \mathrm{d}x = M$,
- $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varrho|\mathbf{u}|$ *oraz* $\varrho|\mathbf{u}|^2 \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$,
- $\vartheta \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^{3m}(\Omega)$, $\varrho\vartheta, \varrho\vartheta|\mathbf{u}|, \mathbb{S}\mathbf{u}, \kappa|\nabla\vartheta| \in L^1(\Omega)$,
- $\vec{Y} \in W^{1,2}(\Omega)$, $Y_k \geq 0$ *p.w. w* Ω, $\sum_{k=1}^n Y_k = 1$ *p.w. w* Ω, $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$,

oraz spełnione są następujące tożsamości całkowe:
• *słabe sformułowanie równania ciągłości*

$$\int_\Omega \varrho\mathbf{u} \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x = 0 \tag{20}$$ weak_cont

dla każdej funkcji próbnej $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$*;*
• *słabe sformułowanie równania momentu*

$$-\int_\Omega \big(\varrho\,(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla\varphi - \mathbb{S} : \nabla\varphi\big)\mathrm{d}x - \int_\Omega \pi \mathrm{div}\, \nabla\varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega \varrho\mathbf{f} \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}\mathbf{x} \tag{21}$$ weak_mom

dla każdej funkcji próbnej $\nabla\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$*;*
• *słabe sformułowanie równań dyfuzji poszczególnych składników*

$$-\int_\Omega Y_k \varrho\mathbf{u} \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{F}_k \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x = \int_\Omega \omega_k \psi \mathrm{d}x \tag{22}$$ weak_spe

dla każdej funkcji próbnej $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *dla* $k = 1, \ldots, n$*;*
• *słabe sformułowanie równania zachowania energii całkowitej*

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\varrho|\mathbf{u}|^2 + \varrho e\right) \mathbf{u} \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x + \int_\Omega \kappa\nabla\vartheta \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x - \int_\Omega \left(\sum_{k=1}^n h_k \mathbf{F}_k\right) \cdot \nabla\psi \mathrm{d}x \\ = \int_\Omega \varrho\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}\psi \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\boldsymbol{\Omega}} (\mathbb{S}\mathbf{u}) \cdot \nabla\psi \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\boldsymbol{\Omega}} \pi\mathbf{u} \cdot \nabla\psi \mathrm{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{L}(\vartheta - \vartheta_{\mathbf{0}})\psi \,\mathrm{d}\mathbf{S} \end{aligned} \tag{23}$$ weak_ene

dla każdej funkcji próbnej $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Dopuszczalny zakres γ w (13), dla którego jesteśmy w stanie wykazać istnienie słabych rozwiązań w powyższym znaczeniu, jest ograniczony głównie przez wyrazy $\varrho|\mathbf{u}|^2\mathbf{u}$ i $\mathbb{S}\mathbf{u}$ w słabym sformułowaniu równania zachowania energii całkowitej. Dlatego, motywowani pracami [22], [23], wprowadzamy nieco bardziej ogólne pojęcie wariacyjnych rozwiązań entropijnych układu (4). Polega ono na zastąpieniu słabego sformułowania równania zachowania energii całkowitej słabym sformułowaniem nierówności entropijnej.

def:var **Definicja 2.** *Układ funkcji* $(\varrho, \mathbf{u}, \vartheta, \vec{Y})$ *jest wariacyjnym rozwiązaniem entropijnym układu* (4) *z założeniami opisanymi powyżej, jeżeli*

- $\varrho \geq 0$ *p.w. w* Ω, $\varrho \in L^{s\gamma}(\Omega)$ *dla pewnego* $s > 1$, $\int_\Omega \varrho \mathrm{d}x = M$,
- $\mathbf{u} \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varrho\mathbf{u} \in L^{\frac{6}{5}}(\Omega)$,
- $\vartheta \in W^{1,r}(\Omega) \cap L^{3m}(\Omega)$, $r > 1$, $\varrho\vartheta, \mathbb{S} : \frac{\nabla \mathbf{u}}{\vartheta}, \kappa\frac{|\nabla\vartheta|^2}{\vartheta^2}, \kappa\frac{\nabla\vartheta}{\vartheta} \in L^1(\Omega)$, $\frac{1}{\vartheta} \in L^1(\partial\Omega)$,
- $\vec{Y} \in W^{1,2}(\Omega)$, $Y_k \geq 0$ *p.w. w* Ω, $\sum_{k=1}^n Y_k = 1$ *p.w. w* Ω, $\mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n}|_{\partial\mathbf{\Omega}} = \mathbf{0}$,

oraz spełnione są równania (20)–(22) *wraz z następującą nierównością entropijną*

$$\int_\Omega \frac{\mathbb{S} : \nabla\mathbf{u}}{\vartheta}\psi \mathrm{d}x + \int \kappa\frac{|\nabla\vartheta|^2}{\vartheta^2}\psi \mathrm{d}x - \int_\Omega \sum_{k=1}^n \omega_k(c_{pk} - c_{vk}\log\vartheta + \log Y_k)\psi \mathrm{d}x$$
$$+ \int_\Omega \psi \sum_{k,l=1}^n D_{kl}\nabla Y_k \cdot \nabla Y_l \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{L}{\vartheta}\vartheta_0\psi \,\mathrm{d}S \leq \int \frac{\kappa\nabla\vartheta\cdot\nabla\psi}{\vartheta}\mathrm{d}x - \int_\Omega \varrho s\mathbf{u}\cdot\nabla\psi \mathrm{d}x$$
$$- \int_\Omega \log\vartheta\Big(\sum_{k=1}^n \mathbf{F_k c_{vk}}\Big)\cdot\nabla\psi \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\mathbf{\Omega}} \Big(\sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{F_k}\log\mathbf{Y_k}\Big)\cdot\nabla\psi \mathrm{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\mathbf{\Omega}} \mathbf{L}\psi \,\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{24}$$

entropy_ineq

dla wszystkich nieujemnych $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *oraz globalne zachowanie energii całkowitej (tzn.* (23) *z* $\psi \equiv 1$*):*

$$\int_{\partial\Omega} L(\vartheta - \vartheta_0)\,\mathrm{d}S = \int_\Omega \varrho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\mathrm{d}\mathbf{x}. \tag{25}$$

glob_ene

Następujące twierdzenie jest głównym wynikiem w pracy [A-1]:

thm:weak **Twierdzenie 1.** *Załóżmy, że* $\gamma > 1$, $M > 0$, $m > \max\{\frac{2}{3}, \frac{2}{3(\gamma-1)}\}$, $a < \frac{3m}{2}$, $\Omega \in C^2$. *Wówczas istnieje co najmniej jedno wariacyjne rozwiązanie entropijne w sensie Definicji 2. Ponadto,* $(\varrho, \mathbf{u})$ *jest zrenormalizowanym rozwiązaniem równania ciągłości.*

Jeżeli dodatkowo $m > \max\{1, \frac{2\gamma}{3(3\gamma-4)}\}$, $\gamma > \frac{4}{3}$, $a < \frac{3m-2}{2}$, *to rozwiązanie jest słabym rozwiązaniem w sensie Definicji 1.*

Układ (4) był po raz pierwszy rozważany w [17], gdzie wykazano istnienie słabych rozwiązań w sensie Definicji 1 dla $\gamma > \frac{5}{3}$ w (13).

Głównym osiągnięciem [A-1] jest rozszerzenie tego ostatniego wyniku na $\gamma > \frac{4}{3}$ dzięki zastosowaniu lokalnych oszacowań ciśnienia zamiast tradycyjnach oszacowań typu Bogovskiego. Metoda ta była już stosowana wcześniej ([2],[15],[24]), ale w [A-1] wypełniliśmy istotną lukę obecną w tych pracach (opis poniżej).

Druga istotna nowość to wprowadzenie pojęcia wariacyjnych rozwiązań entropijnych, co pozwala osiągnąć $\gamma > 1$. To uogólnienie nie jest oczywiste, ponieważ w każdym przejściu granicznym w procedurze konstrukcji rozwiązań musimy przejść do granicy również w nierówności entropijnej. Krótko opiszemy teraz główne idee dowodu Twierdzenia 1.

Dowód opiera się na 5-stopniowej aproksymacji. Pierwsze cztery etapy są związane z małymi parametrami $\delta > \varepsilon > \lambda > \eta > 0$, ostatni jest przybliżeniem Galerkina dla prędkości. Parametr η odpowiada za wygładzenie tensora naprężeń i współczynnika przewodnictwa ciepła, λ regularyzuje strumienie dyfuzji $\mathbf{F}_k$ w sposób umożliwiający otrzymanie odpowiednich oszacowań dla Y_k, ϵ jest eliptyczną regularyzacją równania ciągłości, wreszcie δ regularyzuje ciśnienie dając wyższą całkowalność przybliżonej gęstości. Regularyzacja za pomocą $\delta, \varepsilon, \eta$ i przybliżenie Galerkina jest obecnie standardem w konstrukcji słabych rozwiązań ściśliwego układu Naviera-Stokesa, nowością jest dodatkowy parametr λ, który jest niezbędny do uzyskania odpowiednich oszacowań dla frakcji Y_k.

Pierwsze kroki dowodu są standardowe; pokazujemy istnienie rozwiązania dla pełnej aproksymacji z oszacowaniem

$$\begin{aligned}&\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\Big(\|Y_k\|_{1,2}+\Big\|\frac{\nabla Y_k}{Y_k}\Big\|_2+\lambda^{-1/4}\|\log Y_k\|_2\Big)+\sum_{k=1}^{n}\Big\|\frac{|\nabla Y_k|^2}{Y_k}\Big\|_1+\|\nabla\vartheta^{B/2}\|_2+\Big\|\frac{\nabla\vartheta}{\vartheta^2}\Big\|_2\\&+\Big\|\frac{\nabla\varrho}{\sqrt{\varrho+\sqrt{\lambda}}}\Big\|_2+\|\vartheta^{-2}\|_1+\|\vartheta\|_{B,\partial\Omega}+\Big\|\frac{\log\vartheta}{\vartheta}\Big\|_{1,\partial\Omega}+\|\nabla^2\varrho\|_2+\|\mathbf{u}\|_{1,2}+\|\nabla\varrho\|_6\le C,\end{aligned} \tag{26}$$

est_1

co pozwala od razu przejść do granic $N \to \infty$ i $\eta \to 0$.

Następnie, dokładniejsza analiza zależności oszacowań od λ pozwala na przejście $\lambda \to 0$. Aby przejść do granicy z ϵ stosujemy oszacowania gęstości typu

Bogovskiego, co jest wystarczające, ponieważ nadal mamy wyższą całkowalność gęstości ze względu na δ.

Przejście graniczne $\delta \to 0$ jest kluczową częścią pracy. Tutaj powtórzenie oszacowań typu Bogovskiego pozwala uzyskać słabe rozwiązania tylko dla $\gamma > \frac{5}{3}$, to podejście jest używane w [17]. W celu rozszerzenia zakresu dopuszczalnych γ stosujemy nowatorską technikę lokalnych oszacowań ciśnienia.

Pomysł został wprowadzony w [24] i [15], Polega na przetestowaniu równania momentu za pomocą starannie dobranej funkcji związanej z odległością od brzegu. Otrzymujemy w ten sposób oszacowanie

$$\sup_{x_0\in\bar{\Omega}} \int_\Omega \frac{\pi(\varrho,\vartheta)}{|x-x_0|^\alpha} \mathrm{d}x \leq C \tag{27}$$ est:pres

dla pewnego $\alpha > 0$. Musimy użyć różnych funkcji testujących dla 3 przypadków: x_0 daleko od brzegu, x_0 na brzegu i wreszcie x_0 blisko brzegu. Pierwsze dwa przypadki są szczegółowo omówione w [23], ale trzeci, najbardziej skomplikowany, nie został omówiony ani tam, ani w wyżej cytowanych pracach [24],[15]. Wypełnienie tej luki jest ważnym osiągnięciem [A-1]. Wynik jest przedstawiony w Lemacie 6, gdzie można znaleźć dokładną postać funkcji próbnej i omówienie jej własności. Nierówność (27) pozwala oszacować kluczową wielkość

$$A = \int_\Omega \varrho^b |\mathbf{u}|^2 \mathrm{d}x$$

dla pewnego $b > 1$. Otrzymujemy stąd oszacowanie dla ciśnienia w L_s dla pewnego $s > 1$ przy założeniach pierwszej części Twierdzenia 1, co pozwala udowodnić istnienie wariacyjnych rozwiązań entropijnych, oraz dla $s = \frac{6}{5}$ przy silniejszych założeniach, co pozwala przejść do granicy również w słabym sformułowaniu równania energii całkowitej i udowodnić istnienie słabych rozwiązań.

4.2 Mieszaniny ściśliwe w ujęciu maksymalnej regularności ([A-2],[A-3])

sec:mix:strong

Druga część rozprawy dotyczy regularnych rozwiązań dla modelu opisanego w poprzednim rozdziale (z pewnymi różnicami w zakładanych relacjach konstytutywnych) i uwzględniającego zależność od czasu. Rozwiązania regularne są tu rozumiane jako funkcje z przestrzeni Sobolewa spełniające równania prawie wszędzie. W tej klasie regularności w naturalny sposób otrzymujemy jednoznaczność, musimy jednak założyć małość danych początkowych aby otrzymać globalne w czasie rozwiązanie. Jak już wspomniano, kluczowym wynikiem, który pozwala udowodnić istnienie i jednoznaczność jest oszacowanie w maksymalnej regularności dla ogólnego problemu parabolicznego opublikowane w pracy [A-2]. Wynik ten ma charakter bardziej ogólny i może znaleźć szersze zastosowania, opisuję go szczegółowo w podrozdziale 4.2.1. Następnie w podrozdziale 4.2.2 omawiam jego zastosowanie do modelu mieszaniny w [A-3].

4.2.1 Maksymalna regularność i zanik wykładniczy dla pewnej klasy zagadnień parabolicznych ([A-2])

sec:maxreg

W [A-2] rozważamy układ paraboliczny w ogólnej postaci

$$\begin{cases} \sum_{l=1}^{n} R_{kl}(x)\partial_t u_l(x,t) - \operatorname{div}\,\{\sum_{l=1}^{n} B_{kl}(x)\nabla u_l(x,t)\} = F_k(x,t) & \text{w } \Omega\times(0,T), \\ \sum_{l=1}^{n} B_{kl}(x)\nabla u_l(x,t)\cdot\mathbf{n}(x) = G_k & \text{na } \partial\Omega\times(0,T), \\ u_k|_{t=0}(x) = u_{0k}(x) & \text{w } \Omega, \end{cases} \tag{28}$$

lin:gen

gdzie $n\in\mathbb{N}$, $k\in 1,\dots,n$ i Ω jest obszarem klasy C^2 jednostajnie w R^N ($N\geq 2$). Pomijamy tutaj dokładną definicję obszaru klasy C^2 jednostajnie, ogólnie rzecz biorąc, jest to obszar z brzegiem klasy C^2 taki, że funkcje opisujące lokalnie brzeg spełniają pewne jednostajne oszacowania wraz z pochodnymi do drugiego rzędu włącznie.

Zakładamy, że współczynniki macierzy R and B są Hölderowsko ciągłe, oraz że spełniony jest warunek koercytywności

$$\langle B(x)\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}}\rangle \geq m_1|\mathbf{v}|^2, \quad \langle R(x)\mathbf{v},\overline{\mathbf{v}}\rangle \geq m_1|\mathbf{v}|^2 \quad \forall\, x\in\Omega,\ \mathbf{v}\in\mathbb{C}^n. \tag{29}$$

A1

Głównym wynikiem [A-2] jest następujące twierdzenie:

thm:maxreg

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że współczynniki macierzy B, R są ograniczone i Hölderowsko ciągłe oraz spełniają (29), $1<p,q<\infty$ oraz $T>0$. Ponadto, załóżmy że $2/p+1/q\neq 1$ oraz Ω jest obszarem klasy C^2 jednostajnie w $\mathbb{R}^N$ ($N\geq 2$). Niech $\mathbf{u}_0=(u_{01},\dots,u_{0n})^\top\in B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega)$, $\mathbf{F}\in L_p((0,T),L_q(\Omega))$ oraz $\mathbf{G}\in L_p(\mathbb{R},W^1_q(\Omega))\cap H^{1/2}_p(\mathbb{R},L_q(\Omega))$ będą danymi funkcjami. Jeżeli $2/p+1/q<1$, zakładamy dodatkowo warunek zgodności*

$$B(\nabla\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{G}(\cdot,0) \quad \textit{na } \partial\Omega. \tag{30}$$

1.4

Wówczas układ (28) ma jednoznaczne rozwiązanie $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^\top$ spełniające oszacowanie:

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}\|_{L_p((0,T),W_q^2(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L_p((0,T),L_q(\Omega))} \leq Ce^{\gamma T}\big(\|\mathbf{u}_0\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega)} \\
&\quad + \|\mathbf{F}\|_{L_p((0,T),L_q(\Omega))} + \|e^{-\gamma t}\mathbf{G}\|_{L_p(\mathbb{R},W_q^1(\Omega))} + (1+\gamma^{1/2})\|e^{-\gamma t}\mathbf{G}\|_{H_p^{1/2}(\mathbb{R},L_q(\Omega))}\big)
\end{aligned}
\tag{31}
$$

1.6

dla dowolnego $\gamma \geq \gamma_0 > 0$, gdzie C, γ_0 są pewnymi dodatnimi stałymi.

Dowód Twierdzenia 2 polega na wykazaniu $\mathcal{R}$-ograniczoności dla rodziny operatorów rozwiązań odpowiednich problemów rezolwenty. Nie formułujemy tutaj zagadnienia rezolwenty ani definicji $\mathcal{R}$-ograniczoności, szczegóły opisane są w [A-2]. Fundamenty tego podejścia wywodzą się z pracy Weisa [27], zob. także [6], gdzie to podejście jest szczegółowo wyjaśnione w zastosowaniu do równania ciepła. Twierdzenie 2.17 z [10] wyjaśnia, w jaki sposób twierdzenie Weisa pozwala wywnioskować maksymalną regularność dla problemu zależnego od czasu z $\mathcal{R}$-ograniczoności rodziny rozwiązań powiązanych problemów rezolwenty.

Stosujemy tu klasyczne podejście, polegające na rozwiązaniu najpierw problemu w całej przestrzeni, następnie w półprzestrzeni, wreszcie na zaburzonej półprzestrzeni i użyciu standardowej lokalizacji do wywnioskowania rezultatu dla obszaru o zakładanej regularności.

Główną techniczną trudnością i kluczowym osiągnięciem [A-2] jest analiza w półprzestrzeni. Problem jest technicznie skomplikowany już dla układu (1), który w tym podejściu jest rozważany w pracy [10], natomiast dla układu opisującego mieszaninę komplikuje się jeszcze bardziej. Wiele elementów składowych dla tego podejścia zostało opracowanych w poprzednich pracach dotyczących maksymalnej regularności dla prostszych problemów, zaczynając od równania ciepła i układu Stokesa ([10],[25],[26]). Szczególnie ważne dla nas były tu wyniki z [10], gdzie autorzy udowadniają lokalne i, przy dodatkowym założeniu małości, również globalne istnienie i jednoznaczność dla (1) w maksymalnej regularności takiej jak w Twierdzeniu 2. Korzystamy z tych rezultatów, wprowadzając zasadniczą nowość, jaką jest jawny wzór na rozwiązanie w półprzestrzeni i dowód maksymalnej regularności w oparciu o tę formułę.

Drugim głównym wynikiem [A-2] jest twierdzenie o wykładniczym zaniku rozwiązania przy dodatkowych założeniach ograniczoności obszaru i zerowej średniej danych:

thm:decay **Twierdzenie 3.** *Niech $1 < p, q < \infty$. Załóżmy, że $2/p + 1/q \neq 1$ oraz Ω jest ograniczonym obszarem z brzegiem klasy C^2. Załóżmy, że $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{F}$ oraz $\mathbf{G}$ spełniają założenia Twierdzenia 2. Ponadto, załóżmy że istnieje $\gamma_0 > 0$ takie, że*

$$e^{\gamma t}\mathbf{F} \in L_p((\mathbb{R}_+), L_q(\Omega)^n), \quad e^{\gamma t}\mathbf{G} \in L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega)^n) \cap H_p^{1/2}(\mathbb{R}, L_q(\Omega)^n)$$

dla dowolnego $\gamma \leq \gamma_0$. Wówczas rozwiązanie $\mathbf{u}$ otrzymane w Twierdzeniu 2 jest określone dla wszystkich $t > 0$ oraz zanika wykładniczo, a dokładnie spełnia oszacowanie:

$$\begin{aligned}\|e^{\gamma t}\mathbf{u}\|_{L_p((\mathbb{R}_+), W_q^2(\Omega))} + \|\partial_t \mathbf{u}\|_{L_p((\mathbb{R}_+), L_q(\Omega))} \leq C(\|\mathbf{u}_0\|_{B_{q,p}^{2(1-1/p)}(\Omega)} \\ + \|\mathbf{F}\|_{L_p((\mathbb{R}_+), L_q(\Omega))} + \|e^{\gamma t}\mathbf{G}\|_{L_p(\mathbb{R}_+, W_q^1(\Omega))} + (1+\gamma^{1/2})\|e^{\gamma t}\mathbf{G}\|_{H_p^{1/2}(\mathbb{R}, L_q(\Omega))})\end{aligned} \tag{32}$$ est:decay

dla dowolnego $\gamma \leq \gamma_0$ z pewną stałą $C > 0$.

Wyniki tego typu pozwalają łatwo wykazać globalne w czasie rezultaty dla problemów nieliniowych przy dodatkowych założeniach o małości danych.

Dowód Twierdzenia 3 opiera się na Twierdzeniu 2 i teorii półgrup analitycznych. Najpierw rozważamy jednorodny problem

$$\begin{aligned} R\partial_t \mathbf{u}_1 - \operatorname{div}(B\nabla \mathbf{u}) = 0 \quad \text{w } \Omega, \\ B(\nabla \mathbf{u}_1)\cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{u}_1|_{t=0} = \mathbf{u}_0, \end{aligned} \tag{33}$$ semi:1

oraz odpowiadające mu zagadnienie rezolwenty

$$R\lambda \mathbf{u}_{1,\lambda} - \operatorname{div}(B\nabla \mathbf{u}_{1,\lambda}) = 0, \quad B(\nabla \mathbf{v}_1)\cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0. \tag{34}$$ res:2

Pokazujemy, że rozwiązania (34) spełniają oszacowanie rezolwenty

$$|\lambda|\|\mathbf{u}_{1,\lambda}\|_{L_q(\Omega)} + \|\mathbf{u}_{1,\lambda}\|_{W_q^2} \leq C\|f\|_{L_q(\Omega)}$$

dla dowolnego $\lambda \in \Sigma_\epsilon$, gdzie $\epsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$ również jest dowolny. Wynika stąd istnienie C_0 - analitycznej półgrupy $\{T(t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ związanej z (33) i mającej własność wykładniczego zaniku.

Następnie zauważamy, że z Twierdzenia 2 wynika, że dla dostatecznie dużego $\eta > 0$ rozwiązanie przesuniętego problemu

$$\begin{aligned} R(\partial_t \mathbf{u}_2 + \eta \mathbf{u}_2) - \operatorname{div}(B\nabla \mathbf{u}_2) = 0 \quad \text{w } \Omega, \\ B(\nabla \mathbf{u}_2)\cdot \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{G}, \quad \mathbf{u}_2|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \end{aligned} \tag{35}$$ shifted

również zanika wykładniczo (w tym celu rozważamy zagadnienie dla $e^{\gamma t}\mathbf{u}_2$ dla dostatecznie małego $\gamma > 0$).

W ostatnim kroku rozważamy problem

$$\begin{aligned} R\partial_t \mathbf{u}_3 - \mathrm{div}\,(B\nabla \mathbf{u}_3) &= -\eta R\mathbf{u}_2 \quad \text{w } \Omega, \\ B(\nabla \mathbf{u}_3)\cdot \mathbf{n}|_\Gamma = \mathbf{G}, &\quad \mathbf{u}_3|_{t=0} = \mathbf{u}_0. \end{aligned} \tag{36}$$

comp

Jego rozwiązanie dane jest wzorem

$$\mathbf{u}_3(\cdot, t) = -\eta \int_0^t T(t-s)R\mathbf{u}_2(\cdot, s)ds,$$

co wraz z wykładniczym zanikiem półgrupy $T(\cdot)$ daje wykładniczy zanik $\mathbf{u}_3$. Wnioskujemy stąd, że $\mathbf{u} = \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$ jest rozwiązaniem wyjściowego problemu i spełnia oszacowanie (32).

4.2.2 Istnienie i jednoznaczność dla układów opisujących ściśliwe mieszaniny: [A-3]

sec:nonlin

W pracy [A-3] rozważamy układ opisujący przepływ ściśliwej mieszaniny dowolnej liczby składników ze stałą temperaturą:

$$\left.\begin{aligned} \partial_t \varrho + \mathrm{div}\,(\varrho \mathbf{u}) &= 0 \\ \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \mathrm{div}\,(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \mathrm{div}\,\mathbb{S} + \nabla p &= \mathbf{0} \\ \partial \varrho_k + \mathrm{div}\,(\varrho_k \mathbf{u}) + \mathrm{div}\,\mathbf{F}_k &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{w } (0,T)\times\Omega \tag{37}$$

sys:mix

w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, uzupełniony warunkami brzegowymi

$$\mathbf{u} = 0, \ \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{na } (0,T)\times\partial\Omega \tag{38}$$

bc

i warunkami początkowymi

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0, \quad \varrho_k|_{t=0} = \varrho_k^0 \text{ dla } k = 1 \ldots n \quad \text{w } \Omega. \tag{39}$$

bc

W układzie (37) ϱ oznacza całkowitą gęstość

$$\varrho = \sum_{k=1}^n \varrho_k, \tag{40}$$

rho

$\mathbf{u}$ jest średnią prędkością, a ϱ_k jest gęstością k-tego składnika. Strumienie dyfuzji $\mathbf{F}_k$ są określane przez relacje konstytutywne (16) i spełniają (19). Główna różnica w przyjętych relacjach konstytutywnych w porównaniu z [A-1] polega na tym, że teraz zakładamy, że ciśnienie jest liniową funkcją częściowych gęstości:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\varrho_k}{m_k}.$$

Tym razem dopuszczamy, aby masy molowe m_k były różne i nie zakładamy warunków wzrostu (15) i (18).

Główną trudnością w matematycznej analizie układu (37) jest to, że przy założeniach (17) jest on tylko zdegenerowanie paraboliczny. Posiada jednak strukturę, która pozwala przeformułować go jako jednostajnie paraboliczny dzięki zastosowaniu odpowiedniej zamiany zmiennych.

Niech $(\varrho, \mathbf{u}, \varrho_1, \ldots, \varrho_n)$ będzie regularnym rozwiązaniem układu (37) takim, że wszystkie częściowe gęstości ϱ_i są ograniczone z dołu przez dodatnią stałą. W rozdziale 2 [A-3] udowadniamy, że przy tych założeniach zamiana zmiennych

$$(\varrho, h_1, \ldots, h_{n-1}) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varrho_k, \log\left\{ \frac{\varrho_2^{\frac{1}{m_2}}}{\varrho_1^{\frac{1}{m_1}}} \right\}, \ldots, \log\left\{ \frac{\varrho_n^{\frac{1}{m_n}}}{\varrho_1^{\frac{1}{m_1}}} \right\} \right\} =: \Psi(\varrho_1, \ldots, \varrho_n) \tag{41}$$

def:psi

jest dyfeomorfizmem oraz układ (37) możemy przepisać jako

$$\begin{aligned}
&\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{u}) = 0, \\
&\varrho \partial_t \mathbf{u} + \varrho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\varrho \nabla \varrho}{\Sigma_\varrho} + \sum_{l=2}^{3} \left\{ \varrho_l - \frac{m_l \varrho_l \varrho}{\Sigma_\varrho} \right\} \nabla h_{l-1} = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \nu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}, \\
&\sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{R}_{kl}(\partial_t h_l + \mathbf{u} \cdot \nabla h_l) + \left\{ \varrho_{k+1} - \frac{m_{k+1} \varrho_{k+1} \varrho}{\Sigma_\varrho} \right\} \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{B}_{kl} \nabla h_l \right)
\end{aligned} \tag{42}$$

sys:normal

z warunkami brzegowymi

$$\mathbf{u} = 0, \quad \sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{B}_{kl} \nabla h_l \cdot \mathbf{n} = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1, \quad \text{na } (0,T) \times \partial\Omega \tag{43}$$

bc:normal

i warunkami początkowymi

$$(\mathbf{u}, \varrho, \{h_k\}_{k=1,\dots,n-1})|_{t=0} = (\mathbf{u}^0, \varrho^0, \{h_k^0\}_{k=1,\dots,n-1}) = \Psi(\varrho_1^0(x), \dots \varrho_n^0(x)), \tag{44}$$ ic:normal

gdzie

$$\Sigma_\varrho = \sum_{k=1}^{n} m_k \varrho_k \tag{45}$$ def:sigma

oraz $\mathcal{R}$ i $\mathcal{B}$ są macierzami $(n-1) \times (n-1)$ o współczynnikach

$$\mathcal{R}_{kl} = m_{k+1}\varrho_{k+1}\delta_{kl} - \frac{m_{k+1}m_{l+1}\varrho_{k+1}\varrho_{l+1}}{\Sigma_\varrho}, \tag{46}$$ def:Rkl

$$\mathcal{B}_{kl} = \frac{\varrho_{k+1}\varrho_{l+1}D_{k+1,l+1}}{p}. \tag{47}$$ lag:5b

dla $k, l = 1, \dots, n-1$.

Ponadto, macierze $\mathcal{R}$ i $\mathcal{B}$ są jednostajnie koercytywne. Główny wynik [A-3] to następujące twierdzenie:

thm:multicomp **Twierdzenie 4.** *Załóżmy, że*

- $2 < p < \infty$, $3 < q < \infty$, $2/p + 3/q < 1$;
- Ω *jest obszarem klasy* C^3 *jednostajnie w* $\mathbb{R}^3$;
- *istnieją dodatnie stałe* a_1, a_2, C, L *takie, że*

$$\forall\, k, l \in 1, \dots, n \quad \|\nabla D_{kl}(t, \cdot)\|_{L_q(\Omega)} \le C \sum_{j=1}^{n} \|\nabla \varrho_j(t, \cdot)\|_{L_q(\Omega)} \quad \text{p.w. na } (0, T),$$

$$a_1 \le \varrho_k^0(x) \le a_2 \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ k \in 1, \dots, n,$$

$$\|\nabla(\varrho_1^0, \dots, \varrho_n^0)\|_{L_q(\Omega)} + \|\mathbf{u}^0\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega)} + \|h_1^0, \dots, h_{n-1}^0\|_{B^{2(1-1/p)}_{q,p}(\Omega)} \le L;$$

- *dane początkowe spełniają warunek zgodności*

$$\mathbf{u}^0|_\Gamma = 0, \quad \nabla h_k^0 \cdot \mathbf{n}|_\Gamma = 0, \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{48}$$ initial:2

Oznaczmy

$$(\varrho^0(x), h_1^0(x), \dots, h_{n-1}^0(x)) = \Psi(\varrho_1^0(x), \dots \varrho_n^0(x)).$$

Wówczas istnieje $T > 0$ zależne od a_1, a_2 oraz L takie, że układ (42) z warunkami brzegowymi (43) i warunkami początkowymi (44) ma jednoznaczne rozwiązanie $(\varrho, \mathbf{u}, h_1, \ldots, h_{n-1})$ spełniające oszacowanie:

$$\|\varrho - \varrho^0\|_{W^1_p((0,T),W^1_q(\Omega))} + \|\partial_t(\mathbf{u}, h_1, \ldots, h_{n-1})\|_{L_p(0,T;L_q(\Omega))}$$
$$+ \|(\mathbf{u}, h_1, \ldots, h_{n-1})\|_{L_p((0,T),W^2_q(\Omega))} \leq CL,$$
$$a_1 \leq \varrho(x,t) \leq na_2 + a_1 \quad \textit{dla } (x,t) \in \Omega \times (0,T), \qquad \int_0^T \|\nabla \mathbf{u}(\cdot, s)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \delta,$$

gdzie C jest stałą niezależną od L, oraz δ jest małą liczbą dodatnią.

Twierdzenie 4 jest sformułowane dla układu zsymetryzowanego (42), ale własności transformacji pozwalają wywnioskować tę samą regularność dla oryginalnego problemu.

Aby udowodnić Twierdzenie 4, przekształcamy układ we współrzędnych Lagrange'a i stosujemy oszacowanie z [A-2] do jego linearyzacji. Współrzędne Lagrange'a definiujemy jako

$$x(t,y) = y + \int_0^t \mathbf{u}(x(s,y),s)\, ds. \tag{49}$$ lag:1

Nasza regularność rozwiązań zapewnia, że powyższa transformacja jest dobrze określona. Jej zaletą jest to, że człon konwekcyjny znika: pochodna materialna $\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ staje się po prostu pochodną po czasie. Dlatego oznaczając

$$\mathbf{v}(y,t) = \mathbf{u}(x,t), \quad \eta(y,t) = \varrho(x,t), \quad \vartheta_i(y,t) = h_i(x,t),\ i = 1, \ldots, n-1, \tag{50}$$ lag:5

i stosując transformację (49) do układu (42) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\partial_t \eta + \eta \operatorname{div} \mathbf{v} = R_1(U),\\
&\eta \partial_t \mathbf{v} - \mu \Delta \mathbf{v} - (\mu + \nu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{\eta}{\Sigma_\varrho} \nabla \eta + \sum_{l=1}^{n-1} \left(\varrho_{l+1} - \frac{m_{l+1}\varrho_{l+1}\varrho}{\Sigma_\varrho} \right) \nabla \vartheta_l = \mathbf{R_2}(\mathbf{U}),\\
&\sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{R}_{kl} \partial_t \vartheta_l + \left(\varrho_{k+1} - \frac{m_{k+1}\varrho_{k+1}\varrho}{\Sigma_\varrho} \right) \operatorname{div} \mathbf{v} - \operatorname{div} \left(\sum_{l=1}^{n-1} \mathcal{B}_{kl} \nabla \vartheta_l \right) = R_3^k(U),\\
&k = 1, \ldots, n-1,
\end{aligned} \tag{51}$$ lag:sys

z warunkami (43)-(44), z $(\mathbf{u}, h_k, \varrho)$ zastąpionym przez $(\mathbf{v}, \vartheta_k, \eta)$.

Ostatni wiersz (51) jest układem $n-1$ równań, w którym rozpoznajemy strukturę (28); dlatego możemy zastosować Twierdzenie 2 do wywnioskowania maksymalnej regularności tego układu. Pierwsza i druga linia (51) to nic innego jak linearyzacja ściśliwego układu Naviera-Stokesa, który był rozważany w ujęciu maksymalnej regularności w [10], oraz w wersji bliższej (51) w naszym artykule [B-8]. Łącząc te wyniki otrzymujemy maksymalną regularność dla (51) z daną prawą stroną. Aby zastosować te wyniki do udowodnienia Twierdzenia 4 starannie szacujemy nieliniowości $R_1(U) - R_3(U)$ i stosujemy twierdzenie Banacha o punkcie stałym.

Opracowanie spójnych ram dla szacowania tego typu nieliniowości w podejściu $L_p - L_q$ jest jednym z głównych osiągnięć [A-3]. Oszacowania opierają się głównie na twierdzeniach Sobolewa i interpolacji.

Wypracowane w [A-3] schematy wykorzystaliśmy później w innych pracach: we wspomnianym już [B-5] dla układu (1) na ruchomym obszarze, a ostatnio w [B-2], gdzie udowadniamy istnienie regularnych rozwiązań dla innego modelu opisującego przepływ złożony.

Na zakończenie wspomnijmy, że chociaż globalne istnienie przy założeniach małości danych nie zostało udowodnione w [A-3], można je wydedukować z Twierdzenia 3 analogicznie do dowodu Twierdzenia 2 z [B-8]. W tym celu musimy pozbyć się założenia zerowej średniej w Twierdzeniu 3. Można to zrobić podobnie jak w ostatnim kroku dowodu twierdzenia 5.1 z [B-8].

sec:mov

4.3 Lokalne istnienie i słabo-silna jednoznaczność dla ściśliwego układu Naviera-Stokes'a w ruchomym obszarze ([A-4]).

W [A-4] rozważamy układ (1) na obszarze, który porusza się z danym polem prędkości $\mathbf{V}$:

$$\Omega_t = \mathbf{X}(t, \Omega_0), \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{X}(t,x) = \mathbf{V}(t, \mathbf{X}(t,x)). \tag{52}$$

moving

Układ jest uzupełniony warunkiem początkowym

$$(\varrho, \mathbf{u})|_{t=0} = (\varrho_0, \mathbf{u}_0) \tag{53}$$

ic

oraz warunkiem brzegowym Dirichleta

$$(\mathbf{u} - \mathbf{V})|_{\partial\Omega_t} = 0 \qquad (54) \quad \boxed{\texttt{bc:dir}}$$

lub warunkiem poślizgu

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega_t} &= 0, \\ [\mathbb{S}\mathbf{n}]_{\tan} + \kappa[\mathbf{u} - \mathbf{V}]_{\tan}|_{\partial\Omega_t} &= 0, \end{aligned} \qquad (55) \quad \boxed{\texttt{bc:slip}}$$

gdzie $\kappa \geq 0$ jest współczynnikiem tarcia.

Istnienie słabych rozwiązań dla tego problemu wykazano w [13] w przypadku warunków brzegowych Dirichleta (54) oraz w [14] dla warunków poślizgu (55). W obu przypadkach zastosowano metodę penalizacji. Polega ona na rozważeniu problemu na większym, stałym obszarze z wyrazem penalizacyjnym uwzględniającym funkcję charakterystyczną ruchomego obszaru. Jednak takie podejście nie może być zastosowane do wykazania istnienia regularnych rozwiązań, ponieważ nie mamy wystarczającej informacji na temat regularności brzegu, w związku z czym możemy przejść do granicy tylko w słabym sformułowaniu.

Pierwszy główny wynik [A-4] mówi o lokalnym istnieniu regularnych rozwiązań.

`thm:moving` **Twierdzenie 5.** *Załóżmy, że $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^3$ jest ograniczonym obszarem klasy C^2, $\pi(\cdot)$ jest funkcją gęstości klasy C^2 oraz $\mathbf{V} \in C^3((0,T) \times \mathbb{R}^3)$. Załóżmy ponadto, że $\mathbf{u}_0 \in H^3(\Omega_0)$, $\varrho_0 \in H^2(\Omega_0)$ oraz istnieją dodatnie stałe c_1, c_2 takie, że $c_1 < \varrho_0 < c_2$. Wówczas istnieje $T > 0$ takie, że układ (1) z warunkami brzegowymi (54) lub (55) i warunkiem początkowym (53) ma jednoznaczne rozwiązanie $(\mathbf{u}, \varrho)$ o regularności $\mathbf{u} \in L_\infty(0,T; H^2(\Omega_t)) \cap L_2(0,T; H^3(\Omega_t))$, $u_t \in L_\infty(0,T; H^1(\Omega_t)) \cap L_2(0,T; H^2(\Omega_t))$, $u_{tt} \in L_2(0,T; L_2(\Omega_t))$, $\varrho \in L_\infty(0,T; H^2(\Omega_t))$, $\varrho_t \in L_2(0,T; H^1(\Omega_t))$.*

Rozważamy zarówno warunki brzegowe Dirichleta, jak i poślizgu, szczegółowy dowód jest przedstawiony tylko dla tego drugiego przypadku, który w tym ujęciu jest bardziej skomplikowany. Dowód dla przypadku Dirichleta można z niego łatwo wywnioskować. Idea dowodu jest klasyczna; definiujemy schemat iteracyjny na ruchomym obszarze

$$\begin{aligned} &\partial_t \varrho_{n+1} + \mathbf{u}_n \cdot \nabla \varrho_{n+1} + \varrho_{n+1} \mathrm{div}\, \mathbf{u}_n = 0, \\ &\varrho_{n+1} \partial_t \mathbf{u}_{n+1} - \mu \mathbf{u}_{n+1} - \nu \nabla \mathrm{div}\, \mathbf{u}_{n+1} = -\varrho_{n+1} \mathbf{u}_n \cdot \nabla \mathbf{u}_n - \nabla p(\varrho_{n+1}), \end{aligned} \qquad (56) \quad \boxed{\texttt{iter}}$$

uzupełniony przez (53) oraz (54) lub (55). Aby pokazać, że ciąg przybliżeń jest dobrze określony, musimy rozwiązać układ problemów liniowych w ruchomym obszarze, co prowadzi do kilku trudności technicznych. Pierwsza dotyczy liniowego równania ciągłości. Najwygodniejsze podejście prowadzące do uzyskania wymaganej regularności rozwiązań to metoda charakterystyk. We współrzędnych Lagrange'a (49) rozwiązanie liniowego równania ciągłości

$$\partial_t \varrho + \mathbf{u} \cdot \nabla \varrho = -\varrho \operatorname{div} \mathbf{u}$$

jest dane przez

$$\varrho(t, x(t, y)) = \varrho_0(y) \exp\left(- \int_0^t \operatorname{div}_x \mathbf{u}(s, x(s, y)) dy \right). \tag{57}$$ char

Jednak zamiana zmiennych sprowadzająca zagadnienie do stałego obszaru zaburza strukturę, która daje wzór (57). Dlatego rozważamy liniowe równanie ciągłości bezpośrednio na ruchomym obszarze, gdzie możemy skorzystać ze wzoru (57). Za jego pomocą pokazujemy odpowiednie oszacowania gęstości. Potrzebujemy do tego oszacowań dla zamiany zmiennych (Lemat 3.2 w [A-3]). Rezultaty te rozwijają teorię regularnych rozwiązań rówania transportu, mogą więc znaleźć szersze zastosowania.

Liniowe równanie momentu odpowiadające drugiemu równaniu układu (56) sprowadzamy do stałego obszaru przy użyciu współrzędnych Lagrange'a określonych przez dane pole wektorowe $\mathbf{V}$. Istnienie rozwiązań na stałym obszarze wykazujemy przy użyciu klasycznych metod energetycznych, musimy jednak starannie oszacować składniki pochodzące z zamiany zmiennych. Najpoważniejsza techniczna trudność wynika z niejednorodnych danych brzegowych pochodzących z zamiany zmiennych. Dla warunków brzegowych poślizgu musimy skonstruować rozwiązanie $\mathbf{u}_b$ układu

$$\begin{aligned} &(\mathbf{u}_b - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{d}(\mathbf{u}, \mathbf{V}), \\ &[\mathbb{S}(\nabla \mathbf{u}_b)]_{\tan} + \kappa [\mathbf{u}_b - \mathbf{V}]_{\tan} = \mathbf{B}(\mathbf{u}, \mathbf{V}), \end{aligned} \tag{58}$$

spełniające oszacowanie

$$\|\mathbf{u}_b\|_{\mathcal{Y}(T)} \leq E(T)[1 + \|(\mathbf{u} - \mathbf{V})\|_{\mathcal{Y}(T)}],$$

gdzie

$$\begin{aligned} \|f\|_{\mathcal{Y}(T)} = & \|f\|_{L_\infty(0,T;H^2(\Omega)) \cap L_2(0,T;H^3(\Omega))} + \|f_t\|_{L_\infty(0,T;H^1(\Omega)) \cap L_2(0,T;H^2(\Omega))} \\ & + \|f_{tt}\|_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \end{aligned}$$

oraz $E(T)$ jest małe dla małych czasów. Konstrukcja jest podana w Lemacie 4.4, wynik jest intersujący sam w sobie, dowód można również zmodyfikować w celu zastosowania do innych warunków brzegowych.

Mając dobrze określony schemat iteracyjny (56), możemy użyć naszych oszacowań liniowych, aby pokazać ograniczoność ciągu przybliżeń, która z kolei pozwala udowodnić zbieżność (56). W tym celu rozważamy układ spełniony przez różnicę rozwiązań. Tutaj najbardziej skomplikowane jest wyprowadzenie oszacowań dla niejednorodnego równania transportu otrzymanego z równania ciągłości.

Drugim głównym rezultatem [A-4] jest słabo-silna jednoznaczność rozwiązań (1) w ruchomym obszarze (52). Rezultat dla warunku brzegowego Dirichleta został wykazany w [9], w [A-4] rozszerzamy go na warunki poślizgu (55). Dowód opiera się na nierówności relatywnej energii (Twierdzenie 6.2). Używamy tu koncepcji z [12] zmodyfikowanych w sposób umożliwiający oszacowanie dodatkowych składników związanych z polem prędkości $\mathbf{V}$.

5 Informacja o wykazaniu się istotną aktywnością naukową

Jestem autorem lub współautorem 20 oryginalnych artykułów naukowych opublikowanych lub przyjętych do druku w pismach takich jak J. Differential Equations, SIAM J. Mathematical Analysis and Applications, Soft Matter, Proc. Royal Soc. Edinburgh A, Annales IHP Analyse Nonlinéaire i PLOS One. W zdecydowanej większości dotyczą one matematycznej teorii płynów.

Na wczesnym etapie mojej działalności naukowej, w pracy doktorskiej i bezpośrednio po uzyskaniu stopnia doktora, zajmowałem się regularnymi rozwiązaniami stacjonarnej wersji układu (1).

Później, głównie w wyniku współpracy z M. Pokorným, zacząłem zajmować się teorią słabych rozwiązań. W tym samym czasie zainteresowałem się matematyczną teorią mieszanin, której podstawy przedstawiono w monografii [16]. Współpraca z M. Pokorným przyniosła do tej pory 3 opublikowane prace, w tym [A-1]. Będąc częstym gościem w Pradze nawiązałem współpracę z Šárką Nečasovą i Ondřejem Kremlem, która zaowocowała do tej pory 3-ma publikacjami.

Zgłębiając matematyczną teorię mieszanin, nawiązałem współpracę z Yoshihiro Shibatą i Eweliną Zatorską. Byliśmy zainteresowani udowodnieniem istnienia i jednoznaczności regularnych rozwiązań za pomocą podejścia maksymalnej regularności. Współpraca zaowocowała dotychczas 4-ma wspólnymi publikacjami, z których dwie wchodzą w skład rozprawy habilitacyjnej.

Wygłosiłem wykłady na około 20 konferencjach i warsztatach, w zdecydowanej większości międzynarodowych, w szczególności zaproszone wykłady na dwóch konferencjach AIMS (Orlando 2012, Taipei 2018), Japanese-German Workshop (Waseda University, Tokyo, 2016), Vorticity, Rotation and Symmetry (Luminy 2020) oraz Mathflows (Luminy 2022).

Wygłosiłem również kilka referatów na seminariach badawczych na Wydziale MIM UW (w szczególności wykład na Kolokwium Wydziału MIM w listopadzie 2022), Uniwersytecie Karola, w Instytucie Matematycznym PAN oraz Instytucie Matematycznym Czeskiej Akademii Nauk.

6 Osiągnięcia dydaktyczne oraz organizacyjne

6.1 Działalność organizacyjna

Brałem udział w organizacji 7 międzynarodowych konferencji naukowych, ich szczegółowa lista przedstawiona jest w *Wykazie osiągnięć naukowych.*

6.2 Dydaktyka

1. Prowadzenie wykładów na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW:

- Równania Różniczkowe Cząstkowe (wykład fakultatywny dla studentów 3-5 roku Matematyki)
- Zaawansowany Kurs Równań Różniczkowych Cząstkowych (wykład monograficzny dla studentów etapu magisterskiego i doktorantów)

2. Prowadzenie ćwiczeń na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW:

- Równania Różniczkowe Cząstkowe (3-5 rok Matematyki)
- Analiza Matematyczna II (2. rok Matematyki)

- Równania Różniczkowe Zwyczajne (2. rok Matematyki)
- Analiza Matematyczna dla Informatyków (1. rok Informatyki)

6.3 Opieka naukowa nad studentami

- 2019-2023: Promotor 9 prac licencjackich na Wydziale MIM UW

sec:other

7 Opis pozostałych wyników

7.1 Rozprawa doktorska (prace [B-14]-[B-16])

Moja praca doktorska opierała się na serii trzech prac dotyczących istnienia regularnych rozwiązań układu (1) w obszarach ograniczonych. Pierwszy artykuł [B-15] był moim wprowadzeniem do tej dziedziny; dotyczy prostego problemu liniowego. W dwóch kolejnych artykułach rozważam stacjonarny układ nieliniowy, w obydwu wykazałem istnienie i jednoznaczność regularnych rozwiązań, kluczowa różnica polega na metodzie dowodu.

W [B-16] zastosowałem metodę regularyzacji eliptycznej. Polega ona na dodaniu do równania ciągłości członu eliptycznego, dzięki czemu cały układ staje się eliptyczny. Jest to metoda dobrze znana, ale w przypadku bardziej złożonych układów jej zastosowanie staje się problematyczne, jeśli chodzi o wyprowadzanie oszacowań niezależnych od parametru regularyzacji.

Z tego powodu w [B-14] postanowiłem zastosować inną metodę, definiując ciąg rozwiązań przybliżonych podobnie do (56) i pokazując jego zbieżność do rozwiązania oryginalnego problemu.

7.2 Stacjonarne regularne rozwiązania - ciąg dalszy ([B-12],[B-13],[B-9],[B-7])

Prace te stanowią kontynuację badań prowadzonych w trakcie studiów doktoranckich. W [B-13] dowodzimy stabilności przepływu Poiseuille'a (lub jego uogólnienia, którego istnienie w kanale o ogólnym gładkim przekroju również wykazujemy). Stabilność jest pokazana w klasie regularnych rozwiązań.

[B-12] jest pierwszym efektem współpracy z M. Pokornym, nawiązanej wkrótce po obronie doktoratu. Tutaj interesuje nas pełny układ obejmujący bilans energii. Pokazujemy istnienie rozwiązań regularnych zbliżonych do szczególnego rozwiązania o stałej gęstości $\bar{\varrho}$, stałej prędkości $\bar{\mathbf{v}}$ w kierunku osi cylindra i nietrywialną funkcją temperatury $\bar{\vartheta}$, która jest rozwiązaniem równania zachowania energii z danymi $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\varrho})$.

W obu wyżej opisanych artykułach konstrukcja rozwiązań odbywa się metodą kolejnych przybliżeń, z wykorzystaniem doświadczeń zdobytych w [B-14].

Moja ostatnia publikacja związana z tym tematem to [B-7]. Naszą motywacją był rezultat z [21], gdzie wykazano istnienie regularnych rozwiązań (1) w klasie takiej jak w naszych wcześniejszych pracach, tzn. z prędkością w W^2_p i gęstością w W^1_p, przy pewnych założeniach na brzeg obszaru w otoczeniu punktów, w których charakterystyki równania ciągłości są styczne do brzegu.

Po kilku nieudanych próbach wzmocnienia tego rezultatu dla rozwiązań w tej samej klasie wpadliśmy na pomysł, aby zmniejszyć wymaganą regularność rozwiązań pracując w ułamkowych przestrzeniach Sobolewa z normą Słobodeckiego. W tych przestrzeniach zachowujemy jednoznaczność rozwiązań, co uzasadnia nazywanie ich wciąż regularnymi rozwiązaniami.

Wstępny wynik w tym kierunku został opublikowany w [B-9]. W [B-7] obniżenie wymaganej regularności rozwiązań pozwoliło nam, kosztem dość technicznych obliczeń, znacznie osłabić założenia z [21]. Nasz warunek dotyczący brzegu obszaru w otoczeniu punktów osobliwych spełniony jest w szczególności przez każdy brzeg, który jest analityczny w otoczeniu tych punktów.

7.3 Dynamika ściśliwych mieszanin ([B-10],[B-8],[B-3])

Praca [B-10] jest uogólnieniem wyników z [A-1] na przypadek warunków brzegowych poślizgu dla prędkości. Własności tego typu warunków brzegowych w połączeniu z lokalnymi oszacowaniami ciśnienia (podobymi do [A-1], jednak ze zmodyfikowanymi funkcjami testowymi pasującymi do warunków brzegowych poślizgu) pozwoliły nam wykazać istnienie słabych rozwiązań dla $\gamma > \frac{5}{4}$ w (13), co jest mniej restrykcyjne niż w [A-1]. Wykazaliśmy również istnienie wariacyjnych rozwiązań entropijnych dla $\gamma > 1$, podobnie jak w [A-1].

[B-8] jest pierwszą publikacją powstałą w wyniku współpracy z Y. Shibatą i E. Zatorską (dwie kolejne zostały włączone do rozprawy habilitacyjnej jako [A-2] i [A-3]). Udowadniamy lokalne oraz, przy dodatkowym założeniu małości danych, również globalne istnienie i jednoznaczność dla uproszczonej wersji układu (37) z dwoma składnikami. Zaletą tego uproszczenia jest to, że podukład opisujący dyfuzję poszczególnych składników w układzie zsymetryzowanym (42) redukuje się do pojedynczego równania, co znacznie ułatwia wyprowadzenie oszacowania w maksymalnej regularności dla problemu liniowego.

Stosując współrzędne Lagrange'a otrzymujemy układ, dla którego jesteśmy w stanie pokazać oszacowanie w maksymalnej regularności $L_p - L_q$. Zaletą tego podejścia jest to, że w problemie rezolwenty równanie ciągłości sprowadza się do prostej relacji algebraicznej, w której gęstość wyraża się jawnym wzorem w zależności od prędkości. Aby udowodnić lokalne istnienie linearyzujemy układ wokół danych początkowych (jak później w [A-3]), natomiast globalny rezultat wymaga linearyzacji wokół stałych, co do których zakłada się, że początkowe dane są do nich zbliżone. Aby zastosować oszacowanie maksymalnej regularności, musimy odpowiednio oszacować nieliniowości. Ramy opracowane w [B-8] pozwoliły nam zaatakować bardziej skomplikowany przypadek dowolnej liczby składników w [A-3] i zastosować tę technikę do innych problemów: układu (1) na ruchomym obszarze w [B-5] i pewnego układu opisującego przepływ złożony w [B-2].

Teoria maksymalnej regularności oparta na $\mathcal{R}$-ograniczoności jest potężnym narzędziem w analizie problemów nieliniowych, ale ma jedną wadę: ogranicza się do przestrzeni UMD, w szczególności muszą to być przestrzenie refleksywne, co wyklucza regularność L_1 w czasie. Jednym z możliwych sposobów obejścia tego ograniczenia jest praca w przestrzeniach Lorentza.

W [B-3] idziemy w tym kierunku, wykazując globalne istnienie dla układu opisującego dynamikę nieściśliwej mieszaniny z nietrywialnymi reakcjami chemicznymi przy założeniu małości danych. Kolejną nowością w porównaniu z wcześniejszymi pracami dotyczącymi mieszanin jest to, że nie zakładamy dyfuzji poszczególnych składników, co oznacza, że nie mamy efektu regularyzacji w tym podukładzie. Ceną do zapłacenia jest to, że potrzebujemy dość technicznego założenia dotyczącego funkcji opisujących reakcje chemiczne, aby uzyskać oszacowania częściowych gęstości. Oszacowanie równania momentu w przestrzeniach Lorentza uzyskuje się przez interpolację z klasycznych oszacowań $L_p - L_q$ dla układu Stokesa. Chociaż wynik obwarowany jest technicznymi założeniami, wygląda obiecująco jako pierwszy rezultat w przestrzeniach Lorentza dla tego typu układów, z perspektywami uogólnienia na inne problemy.

7.4 Przepływy ściśliwe w ruchomych obszarach ([B-5])

Projekt realizowany jest we współpracy z Šarką Nečasovą i Ondřejem Kremlem z Pragi. Naszą pierwszą pracą na ten temat było [A-4]. Ponieważ równolegle pracowałem z modelami mieszanin w podejściu maksymalnej regularności, wpadliśmy na pomysł, aby zastosować to podejście do naszego problemu. Kluczową ideą jest to, że za pomocą pojedynczej transformacji Lagrange'a określonej przez rozwiązanie jednocześnie przekształcamy pochodną materialną w pochodną czasową, oraz sprowadzamy problem na ruchomym obszarze do stałego obszaru. Warto zauważyć, że do wykazania globalnego istnienia nie potrzebujemy wykładniczego zaniku ani małości $\mathbf{V}$ w $L_p(\mathbb{R}_+, L_q(\mathbb{R}^3))$, tylko jego pochodnych.

7.5 Modele dwuskładnikowe ([B-2])

W tej pracy wykorzystaliśmy nasze doświadczenia z [B-8] i [A-2]-[A-3] do analizy ściśliwego układu typu Naviera-Stokesa opisującego przepływ dwuskładnikowy z pojedynczym polem prędkości i ciśnieniem danym jako funkcja uwikłana obydwu gęstości. Udowadniamy lokalne w czasie istnienie rozwiązań oraz, zakładając dodatkowo ograniczoność obszaru i małość danych, istnienie globalne.

Kluczowy pomysł polega na przeformułowaniu problemu w sposób pozwalający na zastosowanie oszacowań maksymalnej regularności $L_p - L_q$ dla problemu liniowego. Oszacowanie nieliniowości jest dość skomplikowane przede wszystkim ze względu na uwikłaną postać ciśnienia, bardzo przydatne okazało się tu doświadczenie z naszych wcześniejszych prac.

7.6 Układy płyn-ciało stałe [B-6]

Wykazujemy słabo-silną jednoznaczność dla układu opisującego dynamikę układu składającego się z ciała stałego zanurzonego w ściśliwym płynie. Teoria istnienia zarówno słabych, jak i regularnych rozwiązań dla tego problemu została rozwinięta, odpowiednio, w [7],[11] i [3], [18]. Wiemy, że rozwiązania regularne są jednoznaczne. Nie wyklucza to jednak sytuacji, w której mamy regularne rozwiązanie oraz, to dla tych samych danych, inne, słabe, określone na tym samym przedziale czasowym. Taka możliwość jest wykluczona przez właściwość słabo-silnej jednoznaczności.

Dla ściśliwego układu Naviera-Stokesa (1) własność ta została wykazana w [12], gdzie wprowadzono kluczowy koncept relatywnej nierówności entropijnej. Ten przełomowy artykuł posłużył jako inspiracja dla wielu podobnych wyników. Jednak w przypadku problemu płyn-ciało stałe podejście to nie może być bezpośrednio zastosowane, ponieważ potrzebujemy spójnego, słabego sformułowania na obszarze odpowiadającym ciału stałemu.

Innym problemem jest to, że relatywna energia powinna być rozpatrywana w ustalonym obszarze, podczas gdy tutaj mamy dwa problemy na dwóch różnych ruchomych obszarach: jednym określonym przez słabe rozwiązanie, oraz drugim, odpowiadającym regularnemu rozwiązaniu. Dlatego musimy sprowadzić silne rozwiązanie do obszaru słabego rozwiązania w taki sposób, aby ciało stałe zostało przekształcone w ciało stałe. W tym celu stosujemy zamianę inspirowaną pracą [19]. Przekształcone silne rozwiązanie spełnia układ o bardzo złożonej prawej stronie, która wchodzi do relatywnej nierówność energetyczną i musi być starannie oszacowana.

Praca [B-11] ma zupełnie inny charakter. Interesuje nas analiza dynamiki małych elastycznych ciał w przepływie laminarnym (profil Poiseuille'a w kanale nieograniczonym). Nie rozwijamy jednak rygorystycznej teorii matematycznej, skupiamy się na modelowaniu i numerycznej analizie dynamiki. Badamy dwa rodzaje ciał: elastyczne włókna modelowane jako sekwencje małych kulek oraz pęcherzyki złożone z membrany wypełnionej lepkim płynem, które są dobrym modelem czerwonych krwinek. Przeanalizowaliśmy numerycznie migrację w poprzek kanału, akumulację i ewolucję kształtu tych dwóch typów elastycznych obiektów. Nasze symulacje wykazały, że dynamika obydwu typów struktur wykazuje podobne podstawowe cechy gdy ich *aspect ratio* jest taki sam, a lepkość pęcherzyków jest wysoka w porównaniu z otaczającym je płynem. Nasze symulacje pokazały również liniową zależność pozycji akumulacji od względnej sztywności i innych uniwersalne skalowania. Większość pracy związanej z ta publikacją została wykonana podczas mojego rocznego pobytu w IPPT PAN.

7.7 Niejednorodne równania Naviera-Stokes'a ([B-1])

Niejednorodny układ Naviera-Stokesa jest z matematycznego punktu widzenia umiejscowiony między modelem ściśliwym (1) a klasycznym układem Naviera-Stokesa dla przepływów nieściśliwych. Gęstość jest zmienna, ale płyn jest nieściśliwy, co znajduje odzwierciedlenie w warunku zerowej dywergencji.

Jeśli gęstość początkowa jest ściśle dodatnia i wystarczająco regularna, analiza jest zbliżona do analizy układu nieściśliwego. Dopuszczenie możliwości zerowania się gęstości prowadzi do istotnych trudności, ponieważ równanie momentu staje się tylko zdegenerowanie paraboliczne. W niedawnym artykule [4] wykazano globalne w czasie istnienie regularnych rozwiązań w dwóch i trzech wymiarach przestrzennych (w tym drugim przypadku przy dodatkowym założeniu o małości danych) w przypadku, gdy początkowa gęstość jest jedynie ograniczona i może znikać. Wykazano również jednoznaczność rozwiązań, ale kwestia ich stabilności pozostała otwarta. W [B-1] zajęliśmy się tą kwestią, udowadniając stabilność rozwiązań skonstruowanych w [4]. Otrzymujemy oszacowanie w przestrzeni energetycznej dla prędkości i w ujemnej przestrzeni Sobolewa dla gęstości.

Pomysł polega na wykazaniu wykładniczego zaniku rozwiązań, co jest niezależnie interesującym wynikiem. Otrzymane oszacowania dają kontrolę nad $\|e^{\beta t}\nabla v\|_{L_1(\mathbb{R}_+,L_\infty)}$ z pewną dodatnią stałą β. To z kolei pozwala na globalne zdefiniowanie współrzędnych Lagrange'a, które mają istotną zaletę:
dzięki nieściśliwości gęstość w układzie Lagrange'a jest stała, więc wystarczy wykazać stabilność dla równania momentu. Dlatego najpierw udowadniamy oszacowanie stabilności we współrzędnych Lagrange'a. Problem polega na tym, że różnica gęstości początkowych może być niezerowa na zbiorze, w którym jedna z nich znika - aby pokonać tę trudność, porównujemy dwa rozwiązania z odpowiednim rozwiązaniem "pośrednim". Ten trik pozwala zastosować własności równania dywergencji odkryte w [5] w połączeniu z oszacowaniami energetycznymi do zamknięcia oszacowania stabilności we współrzędnych Lagrange'a. Ostatnim krokiem jest powrót do współrzędnych Eulera; w tym celu musimy porównać rozwiązania wzdłuż różnych charakterystyk za pomocą metryk typu Wassersteina.

7.8 Modelowanie epidemiologiczne [B-4]

Artykuł ten stanowi całkowicie nowy kierunek w moich badaniach. Kierując się potrzebą lepszego zrozumienia dynamiki pandemii Covid-19 na jej wczesnym etapie, opracowaliśmy modyfikację klasycznego modelu SEIR, która uwzględnia przypadki niezdiagnozowane i kwarantannę. Stosując metody wprowadzone w [8] byliśmy w stanie wyznaczyć jawną wartość współczynnika reprodukcji $\mathcal{R}$ w zależności od parametrów modelu.

Parametry zostały dopasowne do danych dotyczących dynamiki Covid-19 w

Polsce w marcu-kwietniu 2020 r. Wzięliśmy pod uwagę kolejne lockdowny, zakładając skokowe zmiany parametrów transmisji. Analizę utrudniała niska wiarygodność danych wynikająca przede wszystkim z trudnej do oszacowania liczby przypadków niezdiagnozowanych. Z tego powodu musieliśmy badać różne scenariusze zakładając różne proporcje przypadków niezdiagnozowanych.

Mimo tych trudności nasze wyniki okazały się być w znacznym stopniu zgodne z rzeczywistością. Otrzymane szacunkowe wartości $\mathcal{R}$ były nieco poniżej jednego, co oznaczało, że epidemia jest pod kontrolą, ale nawet lekkie złagodzenie restrykcji może doprowadzić do jej wybuchu. Jak się później okazało, dokładnie taka była sytuacja w Polsce w tym czasie. Nasz model wykorzystaliśmy również do przewidywania rozwoju epidemii w Polsce, biorąc pod uwagę kilka scenariuszy dla różnych poziomów złagodzenia ograniczeń i proporcji niezdiagnozowanych przypadków. Późniejsze porównanie efektów prognoz z rzeczywistymi danymi pokazało ich wysoką trafność.

Projekt jest rozwojowy, na szczęście sytuacja epidemiczna jest ustabilizowana, jednak z drugiej strony dysponujemy ogromną ilością danych, które można wykorzystać do analizy. Szczególnie interesującą kwestią jest możliwość oszacowania proporcji niezdiagnozowanych przypadków.

Literatura

Ad [1] R. A. Adams, J. F. Fournier: *Sobolev Spaces*, Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, (2003).

NoBr [2] J. Březina, A. Novotný: *On Weak Solutions of Steady Navier–Stokes Equations for Monatomic Gas*, Comment. Math. Univ. Carolin. 49, 611–632 (2008).

BG [3] M. Boulakia, S. Guerrero: *A regularity result for a solid-fluid system associated to the compressible Navier-Stokes equations.* Ann. I. H. Poincaré- AN, (2009); 26, 777–813.

DM1 [4] R. Danchin, P.B. Mucha: *The incompressible Navier-Stokes equations in vacuum*, Comm. Pure Appl. Math. 72 (2019), no. 7, 1351-1385.

DM2 [5] R. Danchin, P.B. Mucha: *The divergence equation in rough spaces*, J. Math. Anal. Appl. 386 (2012), no. 1, 9-31.

DHP [6] R. Denk, M. Hieber, J. Prüß: *$\mathcal{R}$-boundedness, Fourier multipliers and problems of elliptic and parabolic type.* Memoirs of AMS. Vol 166. no. 788, 2003.

DE [7] B. Desjardins, M.J. Esteban: *On weak solutions for fluid-rigid structure interaction: Compressible and incompressible models.* Commun. Partial Differential Equations (2000); 25, 1399–1413.

Diekmann [8] O. Diekmann, J. A. P. Heesterbeek, M. G. Roberts: *The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models.* J. R. Soc. Interface (2010) 7, 873–885.

Dobo [9] S. Doboszczak: *Relative entropy and a weak-strong uniqueness principle for the compressible Navier-Stokes equations on moving domains.* Appl. Math. Lett. 57 (2016), 60–68.

ES [10] Y. Enomoto, Y.Shibata: *On the R-sectoriality and the Initial Boundary Value Problem for the Viscous Compressible Fluid Flow*, Funkcialaj Ekvacioj, **56** (2013), 441-505.

Fe [11] E. Feireisl: *On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid.* Arch. Rational Mech. Anal. (2003); 167, 281–308.

FeJiNo [12] E. Feireisl, B. J. Jin, A. Novotný: *Relative entropies, suitable weak solutions, and weak-strong uniqueness for the compressible Navier-Stokes system.* J. Math. Fluid Mech. 14 (2012), no. 4, 717-730.

FNS [13] E. Feireisl, I. Neustupa, J. Stebel: *Convergence of a Brinkman-type penalization for compressible fluid flows.*, J. Differential Equations 250 (2011), no. 1, 596-606.

FNS+ [14] E. Feireisl, O. Kreml, S. Nečasová, I. Neustupa, J. Stebel: *Weak solutions to the barotropic Navier-Stokes system with slip boundary conditions in time dependent domains.* J. Differential Equations 254 (2013), no. 1, 125-140.

FrStWe [15] J. Frehse, M. Steinhauer, W. Weigant: *The Dirichlet problem for steady viscous compressible flow in 3-D*, J. Math. Pures Appl. 97, 85–97 (2009).

VG [16] V. Giovangigli: *Multicomponent Flow Modeling*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser, Boston, 1999.

GPZ [17] V. Giovangigli, M. Pokorný, E. Zatorska: *On the steady flow of reactive gaseous mixture*, Analysis (Berlin) 35, no. 4, 319–341 (2015).

HM [18] M. Hieber, M. Murata: *The Lp-approach to the fluid-rigid body interaction problem for compressible fluids*, Evol. Equ. Control Theory 4 (2015); no. 1, 69–87.

IW [19] A. Inoue, M. Wakimoto: *On existence of solutions of the Navier-Stokes equation in a time dependent domain.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 24(2):303–319 (1977).

Jungel_book [20] A. Jüngel: *Entropy Methods for Diffusive Partial Differential Equations, SpringerBriefs in Mathematics.* Springer 2016.

Kweon [21] J.R. Kweon, R.B. Kellogg: *Compressible Navier-Stokes equations in a bounded domain with inflow boundary condition.* SIAM J. Math. Anal. 28 (1997), no. 1, 94-108.

NoPo1 [22] A. Novotný, M. Pokorný: *Steady compressible Navier–Stokes–Fourier system for monoatomic gas and its generalizations*, J. Differential Equations 251, no. 2, 270–315 (2011).

NoPo2 [23] A. Novotný, M. Pokorný: *Weak and variational solutions to steady equations for compressible heat conducting fluids*, SIAM J. Math. Anal. 43, no. 3, 1158–1188 (2011).

PlSo [24] P. I. Plotnikov, J. Sokolowski: *On compactness, domain dependence and existence of steady state solutions to compressible isothermal Navier-Stokes equations*, J. Math. Fluid Mech. 7 (2005), no. 4, 529-573.

ShSh1 [25] Y. Shibata, S. Shimizu: *A decay property of the Fourier transform and its application to the Stokes problem.* J. Math. Fluid Mech. 3 (2001), no. 3, 213–230.

ShSh2 [26] Y. Shibata, S. Shimizu: *On the* $L_p - L_q$ *maximal regularity of the Neumann problem for the Stokes equations in a bounded domain.* J. Reine Angew. Math. 615 (2008), 157–209.

Weis [27] L. Weis: *Operator-valued Fourier multiplier theorems and maximal* L_p*-regularity.*, Math. Ann. 319, 735–758, 2001.