Autoreferat

Tomasz Dębiec

Spis treści

1 Dane kandydata

Imię i nazwisko: Tomasz Dębiec
Adres korespondencyjny: Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, ul. Banacha 2, 02-097 Warszawa
Adres e-mail: t.debiec@mimuw.edu.pl
Strona www: www.mimuw.edu.pl/ tdebiec
ORCID: 0009-0006-9293-766X

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

11.2020 **Doktor nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka**, dyplom z wyróżnieniem, Uniwersytet Warszawski.
Tytuł rozprawy: *Metody słabej zbieżności dla równań fizyki i biologii matematycznej.*
Promotor: prof. dr hab. Agnieszka Świerczewska-Gwiazda.
Recenzenci: prof. dr hab. Piotr Biler (Uniwersytet Wrocławski), recenzja;
dr hab. Piotr Kalita (Uniwersytet Jagielloński), recenzja.

07.2014 **Magister matematyki** (*Master of Mathematics, MMath, with Honours*),
University of Warwick. Tytuł pracy: *Morse Homology.* Promotor: prof. John Rawnsley.

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

2024–obecnie **Adiunkt im. Samuela Eilenberga**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki.

2022–2024 **Adiunkt badawczy**, Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

2020–2022 **Postdoctoral researcher**, Sorbonne Université, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Paryż, Francja.

4 Omówienie osiągnięć naukowych, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy

Osiągnięciem naukowym, o którym mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy jest cykl pięciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych w dziedzinie nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Dotyczą one analizy pewnej klasy układów równań pojawiających się w biologii matematycznej, w szczególności w makroskopowym modelowaniu wzrostu żywych tkanek. Cykl nosi tytuł

Granice osobliwe w mechanicznych modelach wzrostu tkanek

i składa się z następujących artykułów opublikowanych w latach 2020–2025:

[A] N. David, T. Dębiec, B. Perthame, *Convergence rate for the incompressible limit of nonlinear diffusion-advection equations*, Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire **40**(3) (2023), 511–529, doi.org/10.4171/AIHPC/53

[B] T. Dębiec, B. Perthame, M. Schmidtchen, N. Vauchelet, *Incompressible limit for a two-species tumour model with coupling through Brinkman's law in any dimension*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **145** (2021), 204–239, doi.org/10.1016/j.matpur.2020.11.002

[C] N. David, T. Dębiec, M. Mandal, M. Schmidtchen, *A Degenerate Cross-Diffusion System as the Inviscid Limit of a Nonlocal Tissue Growth Model*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **56**(2) (2024), 2090–2114, doi.org/10.1137/23M1575573

[D] T. Dębiec, M. Schmidtchen, *Nonlocal approximation of an anisotropic cross-diffusion system*, Nonlinear Analysis **260** (2025), 113835, doi.org/10.1016/j.na.2025.113835

[E] T. Dębiec, M. Mandal, M. Schmidtchen, *From Finite to Continuous Phenotypes in (Visco-)Elastic Tissue Growth Models*, Journal of Differential Equations **437** (2025), 113375, doi.org/10.1016/j.jde.2025.113375

Powyższy cykl jest powiązany badaniem pewnych granic osobliwych pojawiających się w naturalny sposób przy analizie rozważanych w nim zagadnień. Granice tego typu odgrywają centralną rolę zarówno w analizie stosowanej, jak i teoretycznej, ponieważ łączą różne systemy modelowania i często prowadzą do prostszych lub bardziej przystępnych opisów złożonych zjawisk. W mechanice płynów, na przykład, granice osobliwe łączą modele ściśliwe i nieściśliwe, podczas gdy w teorii kinetycznej równanie Boltzmanna formalnie redukuje się do równań Naviera-Stokesa, wiążąc mikroskopową dynamikę cząstek z makroskopowym zachowaniem płynu. W biologii matematycznej podobne procedury graniczne łączą modele gęstości komórek z opisem wzrostu nowotworu jako gemoetrycznej dziedziny lub z opisami kontinuum ruchu zbiorowego, zastępując duże populacje współdziałających agentów efektywnymi prawami makroskopowymi.

Poza znaczeniem w modelowaniu, granice osobliwe stanowią potężne narzędzie analityczne. Na przykład, aproksymacje typu phase-field oferują systematyczny sposób opisu ewolucji ostrych interfejsów, takich jak przepływ krzywizny średniej, podczas gdy metody zanikania lepkości regularyzują hiperboliczne prawa zachowania i wybierają fizycznie istotne rozwiązania. Dzięki tym rolom granice osobliwe ujawniają głębokie powiązania między odmiennymi układami fizycznymi i biologicznymi oraz prowadzą do trudnych problemów matematycznych na styku analizy, modelowania i zastosowań.

4.1 Tło matematyczne i biologiczne

W ostatnich dekadach matematyczne modele wzrostu nowotworów coraz częściej przyjmują *perspektywę mechaniczną*, ujmując rozwój guza w kategoriach dynamiki płynów. W skali makroskopowej żywe tkanki mogą być traktowane jako złożone płyny poruszające się w ośrodku porowatym, mianowicie w macierzy pozakomórkowej. W związku z tym, modele ciągłe wzrostu nowotworu zazwyczaj przyjmują postać nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych, w których czasowa i przestrzenna ewolucja gęstości populacji komórek opisywana jest za pomocą układów reakcji–dyfuzji.

W tym kontekście *ciśnienie* generowane przez proliferację komórek odgrywa kluczową rolę zarówno w napędzaniu ruchu komórek, jak i w regulacji ich proliferacji oraz śmierci. Gdy komórki się dzielą, wywierają siły mechaniczne na swoje otoczenie, prowadząc do ruchu zbiorowego w kierunku mniej zatłoczonych obszarów. Jednocześnie nadmierne ciśnienie może hamować dalsze podziały lub sprzyjać śmierci komórek, zapewniając naturalny mechanizm sprzężenia zwrotnego ograniczający wzrost. Te mechanicznie napędzane procesy stanowią kluczowe ogniwo pomiędzy zachowaniem biologicznym a modelowaniem matematycznym.

Z biologicznego punktu widzenia, rozwój guzów litych przebiega zazwyczaj w dwóch głównych etapach. We wczesnej, *beznaczyniowej* fazie komórki nowotworowe agregują się w niewielką, w przybliżeniu sferyczną masę pozbawioną własnego unaczynienia. Składniki odżywcze i tlen docierają do guza jedynie na drodze dyfuzji z otaczających tkanek, co prowadzi do charakterystycznej struktury: aktywnie proliferujących komórek w pobliżu brzegu, otoczonych przez coraz bardziej spoczynkowe, a ostatecznie nekrotyczne obszary w kierunku wnętrza. Na tym etapie wzrost guza jest w dużej mierze kontrolowany przez lokalną gęstość komórek, dostępność składników odżywczych oraz ciśnienie mechaniczne.

Gdy guz przekracza ograniczenia narzucone przez dyfuzję, inicjuje *angiogenezę*, czyli tworzenie nowych naczyń krwionośnych. Faza naczyniowa umożliwia szybszy i mniej regularny wzrost, ponieważ guz silniej oddziałuje ze swoim otoczeniem i rozwija złożony, ewoluujący kształt. Naprężenia mechaniczne, niestabilność naczyń oraz heterogeniczność przestrzenna stają się coraz ważniejsze, a ekspansja guza jest naturalnie opisywana w kategoriach rosnącej dziedziny z poruszającą się granicą.

Te cechy biologiczne motywują dwa komplementarne podejścia modelowe w skali makroskopowej. Gdy guz jest postrzegany jako ciągły rozkład populacji komórek, jego ewolucję można opisać za pomocą modeli opartych na gęstości, sformułowanych jako układy równań cząstkowych. Alternatywnie, gdy nacisk kładziony jest na kształt i ekspansję samej masy guza, naturalne ramy stanowią opisy geometryczne w postaci problemów ze swobodnym brzegiem.

Modele oparte na gęstości Na poziomie makroskopowym jednym z najczęściej stosowanych podejść do modelowania wzrostu tkanek są równania reakcji–dyfuzji. Ewolucja w czasie i przestrzeni gęstości populacji komórek $n = n(t, x)$ jest klasycznie opisana przez równanie ciągłości z członem wzrostu,

$$\partial_t n + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = g(n, p, \ldots), \tag{1}$$

gdzie $\mathbf{v}$ oznacza pole prędkości komórek, a p ciśnienie. Człon źródłowy g reprezentuje bilans proliferacji i może zależeć od różnych wielkości, takich jak ciśnienie lub poziom składników odżywczych. Takie modele oparte na gęstości, zakorzenione w prawach zachowania, stanowią jedną z głównych rodzin modeli ciągłych w biologii matematycznej.

Wczesne podejścia koncentrowały się głównie na oddziaływaniu pomiędzy komórkami nowotworowymi a dyfundującymi substancjami chemicznymi, takimi jak składniki odżywcze (np. tlen lub glukoza), czy dwutlenek węgla, które silnie wpływają na dynamikę guza. W szczególności, wzrost ograniczony dostępnością składników odżywczych był intensywnie badany w kontekście guzów beznaczyniowych. Wraz z rozwojem modelowania uwaga przesunęła się na uwzględnianie *ruchu komórek* oprócz dyfuzji i zużycia składników odżywczych. Komórki mogą migrować na drodze konwekcji, aktywnej dyfuzji lub chemotaksji — ukierunkowanego ruchu wzdłuż gradientów chemicznych. Obszerne przeglądy makroskopowych modeli wzrostu guzów beznaczyniowych można znaleźć w [32, 49, 55].

Nowsze prace podkreślają *mechaniczne aspekty* rozwoju nowotworu. Jeden z najwcześniejszych modeli mechanicznych, wprowadzony przez Greenspana [35], rozszerza opis oparty na składnikach odżywczych poprzez wprowadzenie pojęcia *ciśnienia wewnętrznego*. W takich modelach guz jest postrzegany jako lepki płyn przepływający przez ośrodek porowaty — macierz pozakomórkową — a pole prędkości $\mathbf{v}$ jest powiązane z ciśnieniem poprzez *prawo Darcy'ego*,

$$\mathbf{v} = -\nabla p.$$

Relacja ta wyraża tendencję komórek do przemieszczania się wzdłuż spadków ciśnienia, z dala od obszarów nadmiernego zagęszczenia.

Dalsze udoskonalenie, zaproponowane przez Byrne i Drasdo [11], podkreśla wpływ zatłoczenia zarówno na ruch komórek, jak i na proliferację. W ich modelu ciśnienie nie tylko napędza ruch, lecz także działa jako czynnik ograniczający wzrost, ucieleśniając zasadę *hamowania kontaktowego*. Ewolucja gęstości komórek opisana jest wówczas prawem bilansu postaci

$$\partial_t n + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = \alpha H(p_H - p), \quad \text{oraz} \quad \mathbf{v} = -\nabla p,$$

gdzie H oznacza funkcję skokową Heaviside'a, a p_H jest *ciśnieniem homeostatycznym* — minimalnym poziomem, przy którym proliferacja zostaje zahamowana.

Aby domknąć równanie na n, należy założyć konstytutywną zależność ciśnienia od gęstości. Najczęstszym wyborem w literaturze matematycznej jest relacja barotropowa

$$p(n) = n^\gamma, \quad \gamma \geq 1,$$

dla której równanie (1) przyjmuje postać równania ośrodka porowatego. Innym fizycznie istotnym wyborem jest prawo ciśnienia

$$p(n) = \epsilon \frac{n}{1-n}, \quad \epsilon > 0,$$

którego osobliwość w $n = 1$ bezpośrednio narzuca, że gęstość nie może przekroczyć wartości maksymalnej, $n \leq 1$. W kontekście modeli wzrostu komórek ma to wymuszać warunek braku nakładania się komórek.

Modele ze swobodnym brzegiem Alternatywny makroskopowy opis wzrostu nowotworu zapewniają modele z brzegiem swobodnym, które przyjmują bardziej geometryczny punkt widzenia. W modelach tych guz jest reprezentowany jako zależna od czasu dziedzina $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^d$, której brzeg $\partial\Omega(t)$ ewoluuje zgodnie z lokalnymi warunkami mechanicznymi i biologicznymi. Ewolucja guza jest zatem determinowana nie tylko przez równania zdefiniowane wewnątrz $\Omega(t)$, lecz także przez sam ruch brzegu, który stanowi istotną część rozwiązania. Sformułowania z granicą swobodną mają długą historię w matematycznym modelowaniu wzrostu nowotworów, sięgającą pionierskiej pracy Greenspana [36]; zob. także [31, 33, 49]. Zapewniają one geometrycznie jawny opis ewolucji guza, uchwytując zarówno ograniczenia mechaniczne wynikające z upakowania komórek, jak i oddziaływania biochemiczne wynikające z obecności składników odżywczych.

Przykładowo, model tego typu opisuje wzrost ciśnienia wewnątrz obszaru guza $\Omega(t)$ o stałej gęstości komórek w następujący sposób

$$\begin{cases} \Delta p = g(p, c), & \text{w } \Omega(t), \\ p = 0, & \text{na } \partial\Omega(t). \end{cases}$$

Stężenie składnika odżywczego $c = c(t, x)$ jest dane przez

$$\begin{cases} \partial_t c - \Delta c = -\lambda c, & \text{w } \Omega(t), \\ c = c_b, & \text{w } \partial\Omega(t), \\ c(0) = c_0, & \text{na } \Omega(0), \end{cases}$$

gdzie dane są wartości początkowe i brzegowe, wraz z początkową dziedziną $\Omega(0)$, a $\lambda > 0$ oznacza współczynnik konsumpcji składników odżywczych. Dziedzina $\Omega(t)$ ewoluuje zgodnie z

$$V_n = -\nabla p \cdot \mathbf{n} \quad \text{na } \partial\Omega(t),$$

gdzie V_n oznacza składową normalną prędkości brzegu, a $\mathbf{n}$ jest zewnętrznym wektorem normalnym. Zakładając, że składnik odżywczy jest wszędzie dostępny w wystarczającej ilości, stężenie to można pominąć, co prowadzi do prostego, czysto mechanicznego modelu [11].

Klasyczne zagadnienie Hele-Shaw Podobnie jak w modelach opartych na gęstości, powyższe podejście do modelowania tkanek ma duży związek z mechaniką płynów. Przepływ Hele-Shaw opisuje ruch lepkiego, nieściśliwego płynu wtłaczanego pomiędzy dwie równoległe płyty oddzielone wąską szczeliną [54]. Pomijając zależność od kierunku pionego, poziomy przepływ spełnia prawo Darcy'ego,

$$\mathbf{v} = -\nabla p, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{w } \Omega(t),$$

gdzie $\Omega(t)$ oznacza obszar zajmowany przez płyn w chwili t. Na brzegu $\partial\Omega(t)$ ciśnienie jest stałe (często przyjmowane równe zeru), normalna prędkość interfejsu spełnia $V_n = -\partial_{\mathbf{n}} p$, a przepływ jest styczny do nieruchomej zewnętrznej granicy Γ_{outer}. Zakładając, że obszar płynu i jego brzeg mogą być opisane przez

$$\Omega(t) = \{\ell(x) < t\}, \quad \partial\Omega(t) = \{t - \ell(x) = 0\},$$

dla pewnej funkcji $\ell = \ell(x)$, problem Hele-Shaw można sformułować jako

$$\begin{cases} \ell(x) = 0, & \text{w } \Omega(0), \\ \Delta p = 0, & \text{w } \Omega(t), \end{cases}$$

z warunkiem $\partial_{\mathbf{n}} p = Q$ na wewnętrznej granicy Γ_{inner}, gdzie Q jest stałą szybkością, z jaką płyn jest wtłaczany do układu. Niech Ω oznacza całą dziedzinę pomiędzy Γ_{inner} i Γ_{outer}. Jak pokazano w [30], powyższy problem można przeformułować jako zależną od czasu nierówność wariacyjną: znaleźć $w(t) \in H^1_+(\Omega)$ takie, że

$$\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla (v - w)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega (\mathbf{1}\Omega(0) - 1)(v - w)\,\mathrm{d}x + \int \Gamma_{\text{inner}} Q t (v - w)\,\mathrm{d}\sigma, \quad \forall v \in H^1_+(\Omega), \tag{2}$$

gdzie przez $H^1_+(\Omega)$ rozumiemy te funkcje z H^1, które są nieujemne p.w. w Ω. Funkcja w jest powiązana z ciśnieniem z pierwotnego sformułowania poprzez tzw. transformację Baiocchiego. Podobna nierówność wariacyjna odgrywa kluczową rolę w granicy nieściśliwej dla równania ośrodka porowatego.

4.2 Granica Hele-Shaw dla równania ośrodka porowatego

Równanie ośrodka porowatego (PME – porous medium equation) jest paradygmatycznym przykładem nieliniowego, zdegenerowanego równania parabolicznego. Ma postać

$$\partial_t n = \Delta n^k, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \tag{3}$$

gdzie $k > 1$ jest wykładnikiem dyfuzji. Dla $k = 1$ równanie sprowadza się do klasycznego równania ciepła, natomiast dla $k > 1$ degeneracja wyrazu dyfuzji w pobliżu $n = 0$ wprowadza kilka charakterystycznych cech. Najbardziej typową właściwością PME jest *skończona prędkość propagacji*: rozwiązania z początkowymi danymi o zwartym nośniku utrzymują zwarty nośnik w czasie, patrz [58]. Jest to w wyraźnym kontraście do równania ciepła, którego rozwiązania rozprzestrzeniają się natychmiastowo. W konsekwencji pojawia się przesuwająca się granica swobodna, oddzielająca obszar $\{n > 0\}$ od próżni $\{n = 0\}$. Wprowadzając zmienną ciśnienia

$$p = \frac{k}{k-1} n^{k-1}, \tag{4}$$

PME można zapisać jako równanie ciągłości z polem prędkości spełniającym prawo Darcy'ego,

$$\partial_t n + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0, \qquad \mathbf{v} = -\nabla p.$$

Dla zmiennej ciśnienia otrzymujemy nieliniowe równanie

$$\partial_t p = (k-1) p \Delta p + |\nabla p|^2. \tag{5}$$

Charakter paraboliczny równania (5) dominuje tam, gdzie $p > 0$, natomiast w pobliżu $p = 0$ równanie zachowuje się jak równanie pierwszego rzędu $\partial_t p = |\nabla p|^2$. To mieszane zachowanie wyjaśnia istnienie przesuwającego się ze skończoną prędkością brzegu, napędzanego przez gradient ciśnienia.

Warto zauważyć, że równanie ośrodka porowatego (3) pojawia się naturalnie w wielu kontekstach fizycznych, np. w opisie przepływu gazu izentropowego przez ośrodek porowaty, filtracji wód gruntowych czy promieniowania cieplnego w plazmach. Jest ono również naturalne w modelowaniu biomatematycznym, ponieważ badania eksperymentalne wykazały, że motoryka komórek zależy od lokalnej gęstości, co uzasadnia stosowanie nieliniowych praw dyfuzji zamiast klasycznej dyfuzji liniowej [10].

Zagadnienie „mesa” Jednym z kluczowych zagadnień w analizie PME jest zrozumienie jego zachowania asymptotycznego w granicy $k \to \infty$, tzw. *nieściśliwa granica*. Wraz ze wzrostem k prawo ciśnienia staje się coraz bardziej sztywne, a rozwiązanie n rozwija ostre interfejsy, które oddzielają obszary nasycone od nienasyconych. Ta własność graniczna łączy PME z klasycznym zagadnieniem Hele-Shaw o swobodnym brzegu. Zagadnienie to sięga lat 80. XX wieku [4, 29] i od tego czasu przyciąga dużą uwagę. Równanie PME można zapisać jako nieliniowe równanie dyfuzji

$$\partial_t n = \operatorname{div}(D_k(n) \nabla n), \quad D_k(n) = k n^{k-1}.$$

W miarę jak $k \to \infty$, współczynnik dyfuzji $D_k(n)$ degeneruje w sposób osobliwy:

$$D_k(n) \approx \begin{cases} 0, & n < 1, \\ \infty, & n > 1. \end{cases}$$

Dla rozwiązania problemu Cauchy'ego z danymi początkowymi n^{in} sugeruje to pojawienie się obszaru, w którym gęstość graniczna n_∞ jest równa 1 (w szczególności każdy obszar, gdzie $n^{\mathrm{in}} > 1$, „zapada się" natychmiast), oraz obszaru, w którym rozwiązanie pozostaje nieruchome (ponieważ współczynnik dyfuzji zanika, gdy $n < 1$). Formalnie, rozwiązanie dąży więc do niezależnej od czasu granicy $n_\infty = n_\infty(x)$, wykazując obszary typu „mesa" gdzie $\{n_\infty = 1\}$.

To heurystyczne wyprowadzenie można sformułować precyzyjnie w następującym sensie, dzięki Caffarelliemu i Friedmanowi [12]. Wykorzystując słynne oszacowanie Aronsona-Bénilana, pokazują oni, że słabe rozwiązanie problemu Cauchy'ego zbiega w granicy $k \to \infty$ do stacjonarnej gęstości granicznej $0 \le n_\infty \le 1$, która pokrywa się z danymi początkowymi, jeśli $\|n^{\mathrm{in}}\|_{L^\infty} < 1$. Jeśli natomiast $\|n^{\mathrm{in}}\|_{L^\infty} \ge 1$, to n_∞ spełnia

$$n_\infty(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ n_0(x), & x \notin A, \end{cases}$$

gdzie zbiór A (obszar typu „mesa") jest określony przez nierówność wariacyjną równoważną stacjonarnemu problemowi Hele-Shaw, podobnie jak w (2). W tym sensie PME stanowi regularyzację modelu Hele-Shaw, a granica $k \to \infty$ odpowiada stanowi nieściśliwemu.

Warunek wysycenia Z prawa ciśnienia (4) mamy

$$np = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} p^{\frac{k}{k-1}},$$

co formalnie implikuje, że

$$p_\infty(1 - n_\infty) = 0.$$

To fundamentalne ograniczenie oznacza, że w obszarach o dodatnim ciśnieniu gęstość jest w pełni wysycona, czyli $\{p_\infty > 0\} \subset \{n_\infty = 1\}$. Równoważnie, oznacza to, że $p_\infty \in P_\infty(n_\infty)$, gdzie P_∞ jest wykresem monotonicznym:

$$P_\infty(n) = \begin{cases} \{0\}, & n \in [0,1), \\ [0,\infty), & n = 1. \end{cases}$$

Ponadto, przechodząc do granicy $k \to \infty$ w równaniu ciśnienia (5), otrzymujemy

$$p_\infty \Delta p_\infty = 0,$$

co implikuje, że $\Delta p_\infty = 0$ na zbiorze $\Omega(t) = \{p_\infty(t) > 0\}$, jak w klasycznym zagadnieniu Hele-Shaw.

Uwzględnienie proliferacji Gdy równanie PME jest rozważane na ograniczonym obszarze z niezerowymi warunkami brzegowymi, problem graniczny staje się niestacjonarny. Brzeg działa jak źródło, a przesuwający się front ewoluuje zgodnie z prawem Darcy'ego $\mathbf{v} = -\partial_{\mathbf{n}} p_\infty$, dając klasyczny przepływ Hele-Shaw [34]. Inną sytuacją, w której granica jest niestacjonarna, jest obecność wyrazów źródłowych bezpośrednio w równaniu gęstości.

W kontekście wzrostu guza, PME można rozszerzyć o wyraz proliferacyjny zależny od ciśnienia, modelujący narodziny i śmierć komórek. Popularny model, rozważany przez Perthame'a, Quirósa i Vázqueza [52], ma postać

$$\partial_t n - \operatorname{div}(n \nabla p) = n\, G(p), \qquad p = \frac{k}{k-1} n^{k-1}, \tag{6}$$

gdzie $G(p)$ jest szybkością wzrostu spełniającą

$$G'(p) < 0, \qquad G(p_H) = 0,$$

przy czym p_H oznacza ciśnienie homeostatyczne — poziom, powyżej którego proliferacja ustaje z powodu hamowania kontaktowego. Równanie dla ciśnienia w tym przypadku przyjmuje postać

$$\partial_t p = (k-1)p(\Delta p + G(p)) + |\nabla p|^2.$$

Dla $k \to \infty$ otrzymuje się układ graniczny

$$\begin{cases} \partial_t n_\infty - \Delta p_\infty = n_\infty G(p_\infty), \\ p_\infty(\Delta p_\infty + G(p_\infty)) = 0, \\ p_\infty \geq 0, \quad 0 \leq n_\infty \leq 1, \quad p_\infty(1-n_\infty) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Drugie równanie w (7) nazywa się zazwyczaj *relacją komplementarności*, rozszerzając klasyczne warunki Hele-Shaw na przypadek niezerowych wyrazów źródłowych. Oznacza ono, że ciśnienie spełnia równanie eliptyczne

$$\begin{cases} -\Delta p_\infty(t) = G(p_\infty(t)), & \text{w } \{p_\infty(t) > 0\}, \\ \quad p_\infty(t) = 0, & \text{na } \partial\{p_\infty(t) > 0\}. \end{cases}$$

W obszarach, gdzie $p_\infty = 0$ i $n_\infty < 1$ (tzw. *mushy regions*), gęstość ewoluuje zgodnie z równaniem $\partial_t n_\infty = n_\infty G(0)$, prowadząc do wzrostu wykładniczego aż do osiągnięcia nasycenia. Warto zauważyć, że z powodu obecności takich obszarów nie jest oczywiste wyprowadzenie prawa prędkości dla swobodnego brzegu guza $\partial\{n_\infty = 1\}$. Ponieważ gęstość zmienia się tam z wartości 1 do wartości $n_{\mathrm{b}} = n^{\mathrm{in}} e^{G(0)t}$, normalna składowa prędkości V_n jest dana wzorem

$$V_n = \frac{|\nabla p_\infty|}{1 - n_{\mathrm{b}}}.$$

To prawo prędkości zostało najpierw sformułowane w [52], a następnie udowodnione w [43, 50].

4.3 Model mechaniczny z prawem Brinkmana

Alternatywą dla czysto algebraicznego opisu prędkości tkanki jest *prawo Brinkmana*, które uzupełnia zależność Darcy'ego o efekt lepkości:

$$\mathbf{v} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}, \tag{8}$$

gdzie $\nu > 0$ jest współczynnikiem efektywnej lepkości. Ta postać jest często interpretowana jako regularyzacja prawa Darcy'ego i jest szeroko stosowana w mechanicznych modelach wzrostu nowotworu [5, 26, 44, 53, 56, 59].

Wskazać możemy dwa standardowe (i komplementarne) uzasadnienia poprawki Brinkmana w (8). Po pierwsze, Allaire [2] uzyskuje prawo Brinkmana jako granicę homogenizacji równań Naviera-Stokesa dla cieczy nieściśliwej postawionych w dziedzinie perforowanej przez okresową sieć bardzo małych przeszkód. Kluczowym pomysłem jest wykonanie asymptotycznego rozwinięcia dwuskalowego dla prędkości i ciśnienia oraz uśrednienie po komórce okresowej. Gdy rozmiar przeszkód i ich wzajemna odległość dążą do zera w odpowiednio dobrany sposób, interakcja lokalnego przepływu Stokesa wokół przeszkód generuje w makroskali nie tylko liniowy opór Darcy'ego, ale także wyraz dyfuzji lepkościowej. W tym krytycznym skalowaniu, wiodąca prędkość cieczy spełnia efektywne równanie w postaci (8), gdzie dodatkowy wyraz zerowego rzędu wynika z nagromadzonego oporu wszystkich przeszkód. Jeśli przeszkody są mniejsze (skala subkrytyczna), ich wpływ zanika wiodąco i w granicy otrzymujemy równania Stokesa; jeśli są większe (skala superkrytyczna), wyraz oporu dominuje i pojawia się prawo Darcy'ego (czysto algebraiczna zależność między ∇p a prędkością) bez Laplasjanu.

Jest to zgodne z drugim punktem widzenia, gdzie równanie Brinkmana traktowane jest jako fenomenologiczna interpolacja między przepływem Stokesa (dominuje termin lepkościowy, istotny w pobliżu granic lub w ośrodkach o wysokiej porowatości) a przepływem Darcy'ego (dominuje opór od porowatego szkieletu ośrodka). Fizycznie, Laplasjan modeluje ścinanie lepkościowe (efektywna lepkość tkanki), a wyraz zerowego rzędu modeluje opór macierzy pozakomórkowej.

Zakładając przepływ potencjalny, $\mathbf{v} = -\nabla W$, Perthame i Vauchelet [53] proponują następujący model:

$$\begin{cases} \partial_t n - \operatorname{div}(n\nabla W) = n, G(p), \\ \quad -\nu\Delta W + W = p, \\ \qquad\qquad p = \dfrac{k}{k-1} n^{k-1}, \end{cases} \tag{9}$$

i badają granicę $k \to \infty$.

Z analitycznego punktu widzenia, operator eliptyczny $-\nu\Delta + \mathrm{Id}$ działający na potencjał prędkości W zapewnia dodatkową regularność przestrzenną. Ułatwia to uzyskanie zwartosci prędkości i może być korzystne przy przybliżeniach numerycznych [56]. Z drugiej strony, regularność ciśnienia staje się znacznie bardziej subtelna. W szczególności, nawet dla gładkich danych początkowych mogą pojawiać się nieciągłości w ciśnieniu, a standardowe oszacowanie Aronsona-Bénilana, typowe dla PME, nie jest dostępne. Przechodząc do granicy w równaniu dla ciśnienia związanym z (9), widzimy, że dla $k \to \infty$ ciśnienie graniczne spełnia relację komplementarności typu Hele-Shaw zmodyfikowaną o efekty lepkości.

Model (9) stanowi punkt wyjścia dla prac [B]-[E] w tej rozprawie, zarówno w kontekście granicy nieściśliwej $k \to \infty$, jak i ścisłego otrzymania modelu Darcy'ego przy zaniku parametru lepkości.

4.4 Aproksymacja nielokalna układów krzyżowo–dyfuzyjnych

Potencjał W, rozwiązujący $-\nu\Delta W + W = p$, można zapisać w postaci rozwiązania podstawowego jako

$$W = K_\nu \star p, \quad \text{gdzie } -\nu\Delta K_\nu + K_\nu = \delta_0.$$

Zatem model (9) jest równaniem nielokalnym, a ponieważ $K_\nu \to \delta_0$, przejście do granicy $\nu \to 0$ stanowi przejście nielokalne-do-lokalnego pomiędzy prawami prędkości Brinkmana a Darcy'ego. W tym sensie pytanie, czy rozwiązania układu (9) aproksymują rozwiązania (6), wpisuje się w fundamentalny i szeroko badany problem aproksymacji nieliniowych równań dyfuzji.

W ciągu ostatnich dekad powstała obszerna literatura ujawniająca głębokie związki między równaniami dyspersji nielokalnej a lokalnymi modelami nieliniowej dyfuzji. Prototypowym przykładem jest równanie agregacji

$$\partial_t n = \operatorname{div}(n\,\nabla K_\epsilon \star n),$$

szeroko badane w kontekstach zachowań zbiorowych i układów oddziałujących cząstek. Gdy jądro interakcji K_ϵ staje się coraz bardziej zlokalizowane, oczekuje się, że rozwiązania zbiegną do rozwiązań

$$\partial_t n = \operatorname{div}(n\,\nabla \delta_0 \star n) = \operatorname{div}(n\nabla n).$$

Ta granica jest ewidentnie osobliwa — odzwierciedla przejście od transportu do dyfuzji — i zapewnia ścisły pomost pomiędzy mikroskopowymi mechanizmami interakcji a makroskopowym opisem kontinuum.

Po stronie analitycznej, uzyskano znaczące wyniki dotyczące przejścia nielokalne-do-lokalnego dla jednogatunkowych równań dyfuzji. Wczesne deterministyczne aproksymacje cząstkami pojawiły się w [24], następnie rozwinięto je w [45], a w pełni ścisłe dowody można znaleźć w [9, 14]. Te wysiłki osiągnęły punkt kulminacyjny w bardzo niedawnej pracy Carrillo, Esposito i Wu [13], która zapewnia kompleksowy schemat nielokalnych aproksymacji ogólnych równań dyfuzji zdegenerowanej. Charakterystyczną cechą tych podejść jest wykorzystanie techniki podwójnego wygładzenia, pozwalającej odtworzyć strukturę dyssypacji entropii lokalnego równania granicznego.

Pomimo sukcesów, metody te napotykają poważne ograniczenia przy rozszerzeniu na wielogatunkowe układy krzyżowo-dyfuzyjne, szczególnie takie bez autodyfuzyjności lub ze sprzężeniem poprzez wspólne ciśnienie populacyjne (lub zawierające wyrazy wzrostu), jak na przykład

$$\begin{cases} \partial_t n^1 = \operatorname{div}(a_{11}\, n^{(1)}\nabla n^{(1)} + a_{12}\, n^{(1)}\nabla n^{(2)}) \\ \partial_t n^2 = \operatorname{div}(a_{21}\, n^{(2)}\nabla n^{(1)} + a_{22}\, n^{(2)}\nabla n^{(2)}). \end{cases} \tag{10}$$

Istnieje tylko kilka wyników dotyczących aproksymacji nielokalnej takich układów [9, 27], dla szczególnych sił interakcji $a_{ij} > 0$. Ze względu na swoją symetrię i słabą paraboliczność, tego typu równania krzyżowo-dyfuzyjne odgrywają ważną rolę w modelowaniu układów uwzględniających efekt wykluczenia objętościowego (size-exclusion), polegający na tym, że składowe mają skończony rozmiar i konkurują o dostępną przestrzeń. Powyższe własności prowadzą do charakterystycznych zjawisk, takich jak segregacja i powstawanie ostrych interfejsów, i oznaczają, że rozwiązania zazwyczaj nie wykazują lepszej regularności niż wahanie ograniczone. Opracowano szereg narzędzi analitycznych do badania istnienia i zwartosci dla tych układów, w tym oszacowania typu Aronsona-Bénilana [8, 38, 40] oraz argumenty dotyczące zbieżności norm [39, 46].

4.5 Praca [A] — Tempo zbieżności dla modelu Darcy'ego

Omówimy teraz wyniki uzyskane w pracy [A], w której ustanowiono *tempo zbieżności* dla granicy nieściśliwej nieliniowych równań reakcji–dyfuzji typu ośrodka porowatego. Wyniki tej pracy naturalnie wpisują się w szerszą tematykę niniejszej rozprawy, jaką jest badanie granic osobliwych łączących mechaniczne modele oparte na gęstości, z ograniczeniami na ciśnienie, z ich nieściśliwymi odpowiednikami. Nowość pracy [A] polega na uzyskaniu *ilościowych* oszacowań błędu w zależności od parametru ściśliwości w relacji ciśnienie-gęstość — zagadnienia, które do tej pory pozostawało w dużej mierze otwarte. O ile granica nieściśliwa (lub tzw. granica „sztywnego ciśnienia") równań typu ośrodka porowatego jest obecnie dobrze rozumiana w sensie jakościowym — m.in. dzięki pracom [12, 43, 50, 52], wspomnianym w Podrozdziale 4.2 — o tyle niemal nic nie było wiadomo na temat tego, *jak szybko* rozwiązania zbiegają do granicznego problemu typu Hele-Shaw.

Ogólna postać równania ewolucyjnego rozważanego w tym kontekście to

$$\partial_t n - \operatorname{div}\big(n\nabla p\big) - \operatorname{div}\big(n\nabla V\big) = n\, g, \qquad \text{w } (0,T)\times\mathbb{R}^d, \tag{11}$$

gdzie $n = n(t,x) \geq 0$ oznacza gęstość komórek, $p = p(n)$ jest ciśnieniem, $V = V(t,x)$ jest zadanym zewnętrznym potencjałem dryfu (reprezentującym na przykład ruch chemotaktyczny), a $g = g(t,x)$ jest tempem wzrostu. Zauważmy, że w porównaniu z ogólnym modelem (1) rozpatrujemy jedynie przypadek liniowych wyrazów reakcji postaci $ng(t,x)$, gdzie tempo wzrostu jest zadaną funkcją czasu i przestrzeni. Nadal dopuszczamy wybór $g \equiv 0$, co pozwala otrzymać tempo zbieżności dla klasycznego *mesa problem*. Rozważane są dwie rodziny praw ciśnienia:

$$\text{Prawo potęgowe:} \qquad p_k(n) = \frac{k}{k-1} n^{k-1},$$

$$\text{Prawo zatłoczenia:} \qquad p_\varepsilon(n) = \frac{\varepsilon n}{1-n},$$

a granica nieściśliwa odpowiada, odpowiednio, granicom $k \to \infty$ oraz $\varepsilon \to 0$.

Założenia i główne wyniki W dalszej części skupimy się na przypadku ciśnienia danego prawem potęgowym. Przypadek ciśnienia osobliwego jest w dużej mierze analogiczny i różnice omówimy później. Przyjmujemy następujące założenia strukturalne dla równania (11):

- *Dane początkowe.* Rozważamy ciąg $(n_k^{\text{in}})_k$ nieujemnych funkcji całkowalnych taki, że istnieje n_∞^{in} oraz zbiór zwarty $K \subset \mathbb{R}^d$, dla których

$$\begin{cases} n_k^{\text{in}} \to n_\infty^{\text{in}}, \quad \text{w } L^1(\mathbb{R}^d), \\ \operatorname{supp}(n_k^{\text{in}}) \subset K, \quad \text{dla każdego } k, \\ p^{\text{in}} := \dfrac{k}{k-1}(n_k^{\text{in}})^k \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{jednostajnie względem } k. \end{cases}$$

- *Potencjał dryfu.* Potencjał $V = V(t,x)$ spełnia następujące oszacowanie

$$D^2 V \geq \left(\lambda + \frac{1}{2}\Delta V\right) I_d, \quad \text{dla pewnego } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

gdzie I_d oznacza macierz jednostkową rozmiaru $(d \times d)$. Warunek ten jest w szczególności spełniony, gdy drugie pochodne V są ograniczone: jeśli D^2V jest ograniczona z dołu, a ΔV jest ograniczony z góry, to (12) zachodzi.

- *Wyraz reakcji.* Tempo wzrostu $g = g(t,x)$ spełnia

$$g_+ \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^d), \quad \Delta g \geq 0,$$

gdzie $g_+ := \max(0,g)$ oznacza część dodatnią funkcji. Inne, nierównoważne założenia mogą zastąpić hipotezę subharmoniczności. Przykładowo, można nałożyć warunek

$$(\Delta g)_- \in L^\infty(0,T; L^{d/2}(\mathbb{R}^d)) \quad \text{lub} \quad \nabla g \in L^\infty(0,T; L^d(\mathbb{R}^d)).$$

Każde z tych założeń umożliwia zastosowanie odpowiednich nierówności funkcyjnych do kontrolowania wyrazów pochodzących od członu wzrostu.

Przy powyższych założeniach istenieją słabe rozwiązania równania (11) takie, że $n_k, p_k \in L^\infty(0,T; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$, jednostajnie względem k. Ponadto, dla każdego $t > 0$ istnieje zbiór zwarty $K(t)$ taki, że $\operatorname{supp}(p_k(t)) \subset K(t)$. Korzystając z tych własności możemy udowodnić następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 (Tempo zbieżności w $\dot{H}^{-1}$)**.** *Niech $d \geq 3$. Przy powyższych założeniach istnieje graniczna gęstość $n_\infty \in C([0,T]; L^1(\mathbb{R}^d))$ taka, że*

$$\sup_{t \in [0,T]} \|n_k(t) - n_\infty(t)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)} \lesssim \sqrt{T}\, k^{-1/2} + \|n_k^{\text{in}} - n_\infty^{\text{in}}\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)}.$$

Przez $\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)$ oznaczamy przestrzeń dualną do jednorodnej przestrzeni Sobolewa $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ dystrybucji temperowanych, których gradient jest całkowalny z kwadratem. W warunkach wyższej regularności możemy wykorzystać powyższe twierdzenie do wyprowadzenia tempa zbieżności w przestrzeniach Lebesgue'a. W tym celu zauważmy, że równanie (11) posiada własność propagowania regularności w przestrzeni BV.

- *Regularność w BV.* Przyjmijmy następujące dodatkowe założenia

$$n_k^{\text{in}} \in BV(\mathbb{R}^d), \quad \Delta(n_k^{\text{in}})^k \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

oraz

$$\|D^2 V\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)} + \|\nabla V\|_{L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)} + \|\nabla \Delta V\|_{L^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)} \leq C.$$

W tej sytuacji można pokazać, że ciąg rozwiązań $(n_k)_k$ jest jednostajnie ograniczony w przestrzeni $L^\infty(0,T; BV(\mathbb{R}^d))$. Wówczas możemy wykazać, że:

Twierdzenie 2 (Tempo zbieżności w $L^{4/3}$)**.** *Załóżmy dodatkowo jednostajne oszacowanie gęstości w przestrzeni $L^\infty(0,T;BV(\mathbb{R}^d))$. Wówczas zachodzi*

1.
$$\sup_{t\in[0,T]} \|n_k(t)-n_\infty(t)\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^d)} \lesssim T^{1/4}\,k^{-1/4} + \|n_k^{\mathrm{in}} - n_\infty^{\mathrm{in}}\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.$$

2.
$$\sup_{t\in[0,T]} \|n_k(t)-n_\infty(t)\|_{L^{p}(\mathbb{R}^d)} \lesssim T^{\alpha(p)}\,k^{-\alpha(p)} + \|n_k^{\mathrm{in}} - n_\infty^{\mathrm{in}}\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^{2\alpha(p)},$$

dla $1\le p<\infty$, gdzie
$$\alpha(p) = \begin{cases} 1/4, & \text{gdy } p\in[1,4/3),\\ 1/3p, & \text{gdy } p\in[4/3,\infty).\end{cases}$$

Twierdzenie 2 jest prostym wnioskiem z Twiedzenia 1 oraz poniższej nierówności interpolacyjnej, wykazanej w [17, 18],
$$\|f\|_{L^{4/3}(\mathbb{R}^d)} \le C(d)\,\|f\|_{BV(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\,\|f\|_{\dot H^{-1}(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.$$
Wówczas, tempo zbieżności w L^p wynika z założenia o jednostajnie zwartym nośniku dla $p<4/3$ oraz z interpolacji z jednostajnym oszacowaniem w L^∞ dla $p\in(4/3,\infty)$.

Kluczową własnością granicy $k\to\infty$ jest tożsamość wysycenia $p_\infty(1-n_\infty)=0$. Wynika ona w prosty sposób z definicji ciśnienia, $p_k=\frac{k-1}{k}n_k^{k-1}$, pod warunkiem, że ciągi $(n_k)_k$ oraz $(p_k)_k$ są silnie zbieżne. Ciekawym produktem ubocznym naszej metody dowodu Twierdzenia 1 jest to, że możemy wyprowadzić tę tożsamość przy użyciu jedynie słabych topologii.

Twierdzenie 3. *Istnieje funkcja $p_\infty\in L^\infty((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ taka, że, z dokładnością do podciągu, p_k zbiega do p_∞ $\star$-słabo oraz tożsamość*
$$p_\infty(1-n_\infty)=0$$
jest spełniona prawie wszędzie w $(0,T)\times\mathbb{R}^d$.

Omówienie wcześniejszej literatury Pierwszy ilościowy wynik zbieżności dla rozwiązań równania (11) w granicy $k\to\infty$ został uzyskany w pracy [1] (w przypadku $g\equiv 0$). Autorzy wykorzystują interpretację ewolucji jako przepływu gradientowego w metryce 2–Wassersteina oraz przybliżają rozwiązania za pomocu schmatu JKO. Wyprowadzają oni tempo zbieżności dla aproksymacji w czasie dyskretnym, a w efekcie otrzymują wielomianowe tempo zbieżności na poziomie ciągłym:
$$\sup_{t\in[0,T]} W_2(n_k(t),n_\infty(t)) \le C(T)\,k^{-1/24}.$$

Ten wynik wymaga, aby potencjał $V=V(x)$, zależny tylko od przestrzeni, spełniał następujące warunki regularności i wypukłości: istnieje $\lambda\in\mathbb{R}$ taka, że
$$D^2V\ge\lambda\,I_d,\qquad \inf_{x\in\mathbb{R}^d} V(x)=0,\qquad \|\Delta V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\le C.$$

Ponadto, wymagają oni aby dane początkowe miały skończoną energię, $\int Vn^{\mathrm{in}}<\infty$, oraz drugi moment.

Chociaż równanie (11) nie jest przepływem gradientowym w przestrzeni $\dot H^{-1}$, nasze podejście dopuszcza obecność liniowych członów reakcyjnych postaci $ng(t,x)$ — w tym niekonserwatywnym przypadku nie można stosować teorii Wassersteina. Ponadto, ponieważ pracujemy bezpośrednio na poziomie ciągłym, dowód naszego wyniku jest istotnie prostszy niż w pracy [1].

Podobna strategia jak w [1] została następnie rozszerzona na przypadek nielokalnego potencjału oddziaływania: w pracy [19] człon $\operatorname{div}(n\nabla V)$ zostaje zastąpiony przez $\operatorname{div}(n\nabla\mathcal{N}\star n)$, gdzie $\mathcal{N}$ oznacza potencjał newtonowski. Autorzy uzyskują wielomianowe tempo zbieżności rzędu $k^{-1/144}$. Niedawna praca [21] omawia pewne ulepszenia naszych wyników z [A], przede wszystkim w zakresie założeń strukturalnych. W szczególności wyprowadzają oni tempa zbieżności tego samego rzędu $k^{-1/2}$ *jednorodne w czasie* oraz bez założenia zwartego nośnika danych początkowych. Ich podejście jest zbliżone do naszego w tym sensie, że — mimo iż pracują w metryce Wassersteina — bezpośrednio obliczają ewolucję czasową $W_2(n_{k_1}, n_{k_2})$, zamiast korzystać z dyskretyzacji czasowych.

Strategia dowodu Niech $d \geq 3$. Kluczowym pomysłem stojącym za dowodem Twierdzenia 1 jest obliczenie pochodnej czasowej różnicy $\|n_{k_1}(t) - n_{k_2}(t)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)}$ dla $1 < k_1 < k_2$ oraz wyprowadzenie nierówności typu Gronwalla. To bezpośrednie podejście prowadzi do zaskakująco prostego dowodu naszego głównego wyniku, dzięki strukturze dyfuzyjnej rozważanego problemu.

Dokładniej, niech $\varphi_i := \mathcal{N} \star n_{k_i}$, gdzie $\mathcal{N}$ oznacza potencjał newtonowski (rozwiązanie fundamentalne równania Laplace'a w $\mathbb{R}^d$). Wówczas, ponieważ $n_{k_i} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, mamy $\nabla\varphi_i \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Ponadto $\nabla\varphi_i$ reprezentuje półnormę $\dot{H}^{-1}$ funkcji n_{k_i}:

$$\|n_{k_i}(t)\|_{\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla\varphi_i(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Rozważmy teraz równanie

$$\partial_t(n_{k_1} - n_{k_2}) = \Delta(n_{k_1}^{k_1} - n_{k_2}^{k_2}) + \operatorname{div}((n_{k_1} - n_{k_2})\nabla V) + (n_{k_1} - n_{k_2})g.$$

Po pomnożeniu przez $\varphi_1 - \varphi_2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2|^2\,\mathrm{d}x = &\int_{\mathbb{R}^d}(n_{k_1}^{k_1} - n_{k_2}^{k_2})(n_{k_2} - n_{k_1})\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^d}(n_{k_1} - n_{k_2})\nabla(\varphi_1 - \varphi_2)\cdot\nabla V\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^d}(n_{k_1} - n_{k_2})(\varphi_1 - \varphi_2)\,g\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{13}$$

Założenia poczynione względem g oraz V gwarantują, że dwa ostatnie człony mogą zostać sprowadzone do identycznego członu jak po lewej stronie nierówności. Wynika to ze standardowych narzędzi analizy funkcjonalnej, takich jak nierówności Gagliardo-Nirenberga czy Sobolewa. Informacja o tempie zbieżności jest zawarta wyłącznie w operatorze dyfuzji. Dla uproszczenia załóżmy, że $n_{k_i} \leq 1$. Wówczas

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}(n_{k_1}^{k_1} - n_{k_2}^{k_2})(n_{k_2} - n_{k_1})\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^d}(n_{k_1}^{k_1} - n_{k_2}^{k_2})[(n_{k_2} - 1) + (1 - n_{k_1})]\,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} n_{k_1}^{k_1}(1 - n_{k_1})\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^d} n_{k_2}^{k_2}(1 - n_{k_2})\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{k_1}\int_{\mathbb{R}^d} n_{k_1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{k_2}\int_{\mathbb{R}^d} n_{k_2}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

gdzie użyliśmy elementarnej nierówności $s^k(1-s) \leq \frac{1}{k}s$ dla $s \in [0,1]$. W konsekwencji, dzięki wspólnym oszacowaniom w $L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^d))$, z (13) wnioskujemy następujące oszacowanie

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2|^2\,\mathrm{d}x \leq C(k_1^{-1} + k_2^{-1}) + C\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla\varphi_1 - \nabla\varphi_2|^2\,\mathrm{d}x.$$

Stosując lemat Gronwalla, biorąc pierwiastek kwadratowy po obu stronach nierówności oraz przechodząc do granicy $k_2 \to \infty$, otrzymujemy tempo zbieżności zapowiedziane w Twierdzeniu 1.

Odnotujmy jeszcze, że przypadek $d = 2$ również może zostać objęty powyższą strategią (prowadząc do tych samych temp zbieżności); jednakże nie można w ogólności zagwarantować, że $\nabla\phi_i$ należy do $L^2(\mathbb{R}^d)$. Dla uproszczenia pomijamy tutaj szczegóły i odsyłamy do pracy [A].

Przypadek ciśnienia singularnego Jak zaznaczono wcześniej, w pracy [A] możemy również rozpatrywać domknięcie równania (11) osobliwym prawem ciśnienia postaci

$$p_\varepsilon = \frac{\varepsilon n}{1-n},$$

które często pojawia się w modelach ruchu tłumu oraz wzrostu tkanek. W tym przypadku $p_\varepsilon(n)$ wymusza górne ograniczenie $n_\varepsilon < 1$ na gęstość nawet dla dodatnich $\varepsilon > 0$. Z tego powodu nie wymagamy, aby dane początkowe miały wspólnie zwarty nośnik. Co ciekawe, pomimo odmiennego jakościowo charakteru tego prawa ciśnienia, w granicy $\varepsilon \to 0$ można wyprowadzić bardzo podobny problem typu Hele-Shaw. W istocie, człon dyspersyjny w (11) można przepisać w postaci

$$\operatorname{div}(n_\varepsilon \nabla p_\varepsilon) = \Delta H_\varepsilon(n_\varepsilon), \quad H_\varepsilon(s) := \frac{\varepsilon s}{1-s} + \varepsilon \log(1-s).$$

Dzięki tej strukturze możemy zastosować rozumowanie analogiczne do przedstawionego powyżej, aby wykazać tempo zbieżności rzędu co najmniej $\sqrt{\varepsilon}$ w normie $\dot{H}^{-1}$.

4.6 Praca [B] — Nieściśliwa granica dla dwugatunkowego modelu Brinkmana

W niniejszym podrozdziale przedstawiamy wyniki pracy [B], której głównym celem jest analiza granicy nieściśliwej dla modelu dwugatunkowego sprzężonego poprzez prawo Brinkmana. Dokładniej, rozważamy następujący układ równań opisujących ewolucję dwóch gęstości populacji $n_k^{(1)} = n_k^{(1)}(t,x)$ oraz $n_k^{(2)} = n_k^{(2)}(t,x)$:

$$\begin{cases} \partial_t n_k^{(1)} - \operatorname{div}\big(n_k^{(1)} \nabla W_k\big) = n_k^{(1)}\, G^{(1)}(p_k), \\ \partial_t n_k^{(2)} - \operatorname{div}\big(n_k^{(2)} \nabla W_k\big) = n_k^{(2)}\, G^{(2)}(p_k), \end{cases} \tag{14}$$

gdzie W_k spełnia równanie Brinkmana

$$-\nu \Delta W_k + W_k = p_k, \tag{15}$$

a ciśnienie zadane jest prawem potęgowym

$$p_k = \frac{k}{k-1} n_k^{k-1}, \qquad n_k := n_k^{(1)} + n_k^{(2)}. \tag{16}$$

Zakładamy, że funkcje wzrostu $G^{(i)}$, $i = 1, 2$, posiadają następujące własności:

$$\begin{cases} \bullet \ \text{regularność:} & G^{(i)} \in C^1(\mathbb{R}) \\ \bullet \ \text{monotoniczność:} & \partial_p G^{(i)} \le -\alpha < 0, \quad \text{dla pewnej } \alpha > 0; \\ \bullet \ \text{ciśnienie maksymalne:} & \max\limits_{i=1,2} G^{(i)}(P_H) = 0, \quad \text{dla pewnego } P_H > 0. \end{cases} \tag{17}$$

Są to standardowe założenia, które przyjmiemy również w pracach [B]–[E]. Parametr $\nu > 0$ jest ustalony i opisuje lepkość tkanki, jak wyjaśniono w podrozdziale 4.3. Wreszcie, układ jest wyposażony w nieujemne dane początkowe $n_k^{(i),\mathrm{in}} \ge 0$, które są jednostajnie ograniczone w $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Ponadto zakładamy, że ciśnienie początkowe nie przekracza ciśnienia maksymalnego:

$$p_k^{\mathrm{in}} := \frac{k}{k-1}\Big(n_k^{(1),\mathrm{in}} + n_k^{(2),\mathrm{in}}\Big)^{k-1} \le P_H.$$

Ostatni warunek gwarantuje, że to samo ograniczenie jest prawdziwe w dowolnym późniejszym czasie — wynika to z zasady maksimum dla równania ciśnienia. W konsekwencji również gęstości są wspólnie ograniczone w $L^\infty(0,T; L^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Główny wynik Rezultatem pracy [B] jest wykazanie, że dowolne słabe rozwiązanie $(n_k^{(1)}, n_k^{(2)}, p_k, W_k)$ powyższego układu Brinkmana zbiega silnie (z dokładnością do podciągu) przy $k \to \infty$ do granicy

$(n^{(1)}_\infty,\, n^{(2)}_\infty,\, p_\infty,\, W_\infty)$, która jest rozwiązaniem poniższego układu:

$$\begin{cases} \partial_t n^{(i)}_\infty - \operatorname{div}(n^{(i)}_\infty \nabla W_\infty) = n^{(i)}_\infty G^{(i)}(p_\infty), \quad i = 1,2, \\ -\nu \Delta W_\infty + W_\infty = p_\infty, \\ p_\infty\,(n_\infty - 1) = 0, \qquad n_\infty = n^{(1)}_\infty + n^{(2)}_\infty, \end{cases} \tag{18}$$

z relacją komplementarności

$$p_\infty \Big(W_\infty - p_\infty + \nu n^{(1)}_\infty G^{(i)}(p_\infty) + \nu n^{(2)}_\infty G^{(2)}(p_\infty) \Big) = 0. \tag{19}$$

Pierwsze równanie w (18) spełnione jest w sensie dysterybucji, podczas gdy pozostałe są prawdziwe prawie wszędzie w $(0,T)\times\mathbb{R}^d$. Mówiąc bardziej ściśle, dowodzimy następującego twierdzenia.

Twierdzenie 4 (Granica nieściśliwa)**.** *Dla $k>1$ niech $(n^{(1)}_k,\, n^{(2)}_k,\, p_k,\, W_k)$ będzie słabym rozwiązaniem dwugatunkowego modelu Brinkmana z warunkiem początkowym $(n^{(1),\mathrm{in}}_k, n^{(2),\mathrm{in}}_k)$. Załóżmy, że*

$$n^{(\mathrm{i}),\mathrm{in}}_k \to n^{(\mathrm{i}),\mathrm{in}}_\infty, \quad \textit{silnie w } L^1(\mathbb{R}^d),$$

dla pewnych funkcji $n^{(\mathrm{i}),\mathrm{in}}_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $i=1,2$. Wówczas istnieją funkcje $n^{(i)}_\infty$ oraz p_∞ należące do $L^\infty(0,T;L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$ takie, że

$$\begin{aligned} n^{(i)}_k &\to n^{(i)}_\infty, \quad \textit{silnie w } L^1(0,T;L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)), \\ p_k &\to p_\infty, \quad \textit{silnie w } L^1(0,T;L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

Ponadto,

$$W_k \to W_\infty \quad \textit{silnie w } L^1(0,T;W^{1,q}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)),\ \ 1\le q<\infty,$$

gdzie $W_\infty = K_\nu \star p_\infty$ (a K_ν oznacza rozwiązanie podstawowe równania Brinkmana w $\mathbb{R}^d$). Wreszcie, czwórka $(n^{(1)}_\infty, n^{(2)}_\infty, p_\infty, W_\infty)$ spełnia równania (18) *oraz* (19)*.*

Nowość i porównanie z literaturą Twierdzenie 4 ustanawia ścisłe powiązanie pomiędzy opisem dynamiki dwóch populacji $n^{(i)}_k$ a geometrycznym modelem o swobodnym brzegu typu Hele-Shaw. Blisko spokrewnione modele były szeroko badane w literaturze. Najbardziej bezpośrednio nasz wynik rozszerza analizę granicy nieściśliwej z [44, 53] na przypadek wielu oddziałujących gatunków; zob. także [51] dla modelu z aktywnym ruchem.

Podobnie jak w (15), w powyższych pracach pole prędkości spełnia prawo Brinkmana. Następnie model został rozszerzony na prędkości spełniające ściśliwe równania Naviera-Stokesa, uwzględniając liniowy człon wzrostu i ciśnienie typu potęgowego [57]. W tym ujęciu autorzy dowodzą granicy nieściśliwej. Jednakże specyficzna liniowa struktura członu wzrostu pozwala im połączyć jedynie słabą zbieżność ciśnienia z silną zbieżnością gęstości. Pierwsza jest uzyskiwana poprzez renormalizację i przycięcie, natomiast druga wynika z nielokalnego kryterium zwartości. W tym zakresie nasze podejście zasadniczo się różni, ponieważ musimy wykazać silną zwartość ciśnienia, aby uwzględnić nieliniowe funkcje wzrostu $G(p)$, pamiętając przy tym, że ciśnienie generowane jest przez sumę dwóch gatunków, a nie jedyną gęstość.

Blisko spokrewniony układ dwugatunkowy, ale bez proliferacji i ze stacjonarną wersją równania Naviera-Stokesa zamiast prawa Brinkmana, był analizowany w [7]. Nowość ich podejścia polega na uwzględnieniu dodatkowego członu tarcia, który wymaga delikatnej analizy. Dowód przebiega w dwóch etapach: najpierw wykazują stabilność słabo-ciągową za pomocą nielokalnego kryterium zwartości, podobnie jak w metodzie stosowanej w [B]; następnie konstruują rozwiązania przybliżone we współrzędnych Lagrange'a i stosują odpowiednią regularyzację. Usuwając ją, otrzymują ostatecznie rozwiązanie w zmiennych Eulera. Niemniej jednak, w tej pracy nie rozważano granicy nieściśliwej; uwaga skupiona była wyłącznie na istnieniu słabych rozwiązań.

Sprzężenie dwóch równań dla poszczególnych gatunków poprzez prawo Brinkmana, napędzane teraz przez *wspólne* ciśnienie populacyjne, zasadniczo zmienia zachowanie układu, a strategia sformułowania kinetycznego zastosowana w [53] nie może być bezpośrednio użyta. Inne podejście jest możliwe w przypadku jednowymiarowym. Nasz argument w [22] opiera się na jednorodnych ograniczeniach BV dla każdego gatunku. W rezultacie jesteśmy w stanie wykazać zwartosć nieliniowej rodziny $(\phi_k(p_k))_k$ ciśnienia, gdzie $\phi_k \to \mathrm{Id}$ gdy $k \to \infty$. To ostatecznie wystarcza, aby wyprowadzić silną zbieżność samego ciśnienia. Niestety, łatwo zauważyć, że podejście BV zawodzi w wyższych wymiarach, co wymaga zastosowania nowych technik, aby rozszerzyć nasz wynik poza jeden wymiar przestrzenny.

Nawet w przypadku Darcy'ego, czyli gdy $\nu = 0$, charakter układu powoduje istotne trudności analityczne [8, 15, 38]. Tutaj można ostatecznie wywalczyć trochę wyższą regularność ciśnienia, która jest wystarczająca, aby zapewnić silną zwartosć gradientu. Podobne trudności pojawiają się również, gdy ciśnienie nie jest dane prawem potęgowym, lecz wybucha przy skończonym progu [16, 23]. Wspólną cechą tych prac jest szczegółowa analiza równania spełnianego przez ciśnienie populacyjne, co umożliwia dowód istnienia rozwiązań wraz z jednorodnymi oszacowaniami względem parametru sztywności k.

Głównym wkładem pracy [B] jest połączenie technik opracowanych dla przypadku jednego gatunku w dowolnych wymiarach przestrzennych z tymi dla przypadku dwugatunkowego w jednym wymiarze. W połączeniu z nielokalnym kryterium zwartości wprowadzonym w [3, 6] daje to niezbędną zwartosć do przeprowadzenia nieściśliwej granicy.

Główne kroki dowodu Nasza strategia jest następująca. Różniczkując (16) w czasie i korzystając z równań ciągłości (14), wyprowadzamy równanie na ciśnienie

$$\partial_t p_k - \nabla p_k \cdot \nabla W_k = \frac{k-1}{\nu}\, p_k \Big(W_k - p_k + \nu r_k G^{(1)}(p_k) + \nu(1-r_k)G^{(2)}(p_k) \Big), \tag{20}$$

gdzie $r_k = n_k^{(1)}/n_k$ oznacza odsetek populacji. Choć prawa strona jest jednostajnie ograniczona w $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ (co samo w sobie stanowi jedno z głównych technicznych oszacowań), to takie ograniczenie jest niewystarczające dla standardowych metod zwartościowych. Mówiąc ogólnie, idea stojąca za podejściem kinetycznym polega na przejściu do granicy w (20) w sensie miar oraz analizie miary defektu wynikającej z prawej strony równania. Jest to trudne, ponieważ nieliniowości zawierają czynnik r_k (który nie występuje w przypadku jednego gatunku). Adaptacja techniki zastosowanej przez Perthame–Vauchelet [53] byłaby jednak możliwa *gdyby* ułamek populacji zbiegał silnie. To z kolei byłoby gwarantowane przez silną zbieżność poszczególnych gęstości $n_k^{(i)}$ — co zatem musi stanowić nasz pierwszy krok.

<u>Zwartość gęstości</u> W tym celu stosujemy nielokalne kryterium zwartości wprowadzone przez parę Belgacem–Jabin [3] i dalej rozwinięte przez parę Bresch–Jabin [6]. Jest ono równoważne klasycznemu kryterium Kołmogorowa; jednak zamiast kontrolować przesunięcia przestrzenne, kontroluje się splot z odpowiednim osobliwym jądrem. Mówiąc dokładniej, niech

$$\mathcal{K}_h(z) = \frac{\phi(z)}{(|z|^2 + h^2)^{d/2}},$$

gdzie $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ jest nieujemna oraz radialnie malejąca, $\phi \equiv 1$ na $B_1(0)$ oraz $\operatorname{supp}\phi \subset B_2(0)$. Można wówczas wykazać następujące kryterium: jeśli ciąg $(u_\ell)_\ell$, ograniczony jednostajnie w $L^p(\mathbb{R}^d)$, spełnia

$$\lim_{h\to 0}\, \limsup_{\ell\to\infty}\, |\log h|^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\, |u_\ell(x) - u_\ell(y)|^p \, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0, \tag{21}$$

wówczas ciąg $(u_\ell)_\ell$ jest zwarty w $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Odwrotnie, jeśli ciąg $(u_\ell)_\ell$ jest zwarty (globalnie) w $L^p(\mathbb{R}^d)$, to spełniona jest granica w (21).

Jak po raz pierwszy wykazano w [3], kryterium to stanowi potężne narzędzie w analizie liniowych i nieliniowych równań ciągłości: zakładając, że dane początkowe są zwarte, oblicza się ewolucję czasową całki w (21), prowadząc do nierówności Gronwalla. Poniżej przedstawiamy krótki zarys głównych kroków wymaganych w naszym przypadku.

Korzystając z równania (14) dla gęstości $n_k^{(i)}$, obliczamy

$$
\begin{aligned}
&\partial_t\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big| + \operatorname{div}_x\Big(-\nabla W_k(x)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\Big)\\
&\quad + \operatorname{div}_y\Big(-\nabla W_k(y)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\Big)\\
&= -\frac{1}{2}(\Delta W_k(x)+\Delta W_k(y))\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big| \\
&\quad + \frac{1}{2}(\Delta W_k(x)-\Delta W_k(y))\Big(n_k^{(i)}(x)+n_k^{(i)}(y)\Big)\operatorname{sign}\Big(n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big)\\
&\quad + \Big(n_k^{(i)}(x)G^{(i)}(p_k(x)) - n_k^{(i)}(y)G^{(i)}(p_k(y))\Big)\operatorname{sign}\Big(n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big).
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Mnożąc przez jądro $\mathcal{K}_h(x-y)$, całkując wzlgędem x i y, oraz używając symetrii, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= -\int_{\mathbb{R}^{2d}} \nabla\mathcal{K}_h(x-y)\cdot(\nabla W_k(x)-\nabla W_k(y))\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad - 2\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Delta W_k(x)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)(\Delta W_k(x)-\Delta W_k(y))n_k^{(i)}(x)\operatorname{sign}\Big(n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Big(n_k^{(i)}(x)G^{(i)}(p_k(x))-n_k^{(i)}(y)G^{(i)}(p_k(y))\Big)\operatorname{sign}\Big(n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Są teraz dwie zasadnicze trudności: oszacowanie ostatnich dwóch wyrazów oraz oszacowanie „komutatora” zawierającego $\nabla\mathcal{K}_h$. (Odnotujmy, że drugi wyraz po prawej stronie jest prosty, gdyż ΔW_k jest jednostajnie ograniczony.) Zacznijmy z tym drugim.

Gdyby pole prędkości było jednostajnie lipschitzowskie, to komutator można by oszacować bezpośrednio przez

$$
\operatorname{Lip}(\nabla W_k)\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,
$$

i ten wyraz stanowiłby część nierówności Gronwalla. Ponieważ nie dysponujemy taką regularnością, musimy zastosować bardziej wyrafinowane oszacowania, aby poradzić sobie z tym członem. W tym celu wprowadzamy wagę transportową υ_k, spełniającą równanie dualne

$$
\partial_t\upsilon_k - \nabla\upsilon_k\cdot\nabla W_k = -\lambda B_k\,\upsilon_k, \qquad \upsilon_k(0,x)\equiv 1, \tag{24}
$$

gdzie B_k jest wyrazem tłumiącym, który wybierzemy później, a $\lambda>0$ jest dużym parametrem. Zauważmy, że $0\le\upsilon_k\le 1$.

W związku z tym modyfikujemy obliczenia prowadzące do (23), mnożąc (22) również przez $(\upsilon_k(x)+\upsilon_k(y))$. Konsekwencją wprowadzenia takiej zależnej od czasu wagi jest to, że w równaniu (23) pojawia się dodatkowy człon

$$
\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|(\partial_t\upsilon_k(x)-\nabla W_k(x)\cdot\nabla\upsilon_k(x))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{25}
$$

Wracając do komutatora, zapisujemy teraz

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2d}} \nabla \mathcal{K}_h(x-y)\cdot(\nabla W_k(x)-\nabla W_k(y))\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\upsilon_k(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\big(D_{|x-y|}\nabla W_k(x)+D_{|x-y|}\nabla W_k(y)\big)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\upsilon_k(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^{d}} \mathcal{K}_h(z)\|D_{|z|}\nabla W_k(\cdot)-D_{|z|}\nabla W_k(\cdot+z)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\,\mathrm{d}z \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)D_{|x-y|}\nabla W_k(x)\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\upsilon_k(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{26}$$

Użyliśmy tutaj najpierw nierówności

$$|u(x)-u(y)| \lesssim |x-y|(D_{|x-y|}u(x)+D_{|x-y|}u(x)),$$

gdzie

$$D_\delta u(x) := \frac{1}{\delta}\int_{|z|\le\delta} \frac{|\nabla u(x+z)|}{|z|^{d-1}}\,\mathrm{d}z;$$

a następnie dodaliśmy i odjęliśmy odpowiedni wyraz, aby uzyskać różnicę $D_{|x-y|}\nabla W_k(y)-D_{|x-y|}\nabla W_k(x)$, i ostatecznie zastosowaliśmy nierówność Cauchy'ego-Schwartza. Człon penalizacyjny w (24) jest wybrany tak, aby dla dostatecznie dużego λ ostatni człon w (26) został wchłonięty przez (25). Wykorzystując odpowiednie oszacowania typu square-function można wykazać, że pozostały człon jest rzędu $|\log h|^{1/2}$. Pomysł zastosowania wag został po raz pierwszy wprowadzony przez Brescha i Jabina [6] w kontekście równań Naviera-Stokesa dla cieczy ściśliwej.

Oszacowanie ostatnich dwóch wyrazów po prawej stronie (23) jest nieco prostsze, jednak wymaga dodatkowego pomysłu, aby domknąć wszystkie oszacowania. W szczególności wydaje się, że niemożliwe jest bezpośrednie uzyskanie zwartosci poszczególnych gęstości $n_k^{(i)}$. Zamiast tego musimy rozważać propagację zwartosci dla $n_k^{(1)}$, $n_k^{(2)}$ oraz $n_k^{(1)}+n_k^{(2)}$ *jednocześnie*. Ze względu na nieliniową strukturę ciśnienia (które jest funkcją *całkowitej* gęstości populacji), podejście to umożliwia uzyskanie korzystnych zniesień. Na przykład, korzystając z prawa Brinkmana, możemy zapisać

$$(\Delta W_k(x)-\Delta W_k(y))n_k^{(i)}(x)\mathrm{sign}\Big(n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big) \lesssim |W_k(x)-W_k(y)|+\nu^{-1}|p_k(x)-p_k(y)|n_k^{(i)}(x),$$

i nie mamy żadnej kontroli nad wyrazem zawierającym różnicę ciśnień. Z drugiej strony, przy wyprowadzeniu równania (23) dla *całkowitej* gęstości otrzymujemy wyraz

$$(\Delta W_k(x)-\Delta W_k(y))n_k(x)\mathrm{sign}(n_k(x)-n_k(y)) \approx (\text{wyraz z } W_k) - \nu^{-1}|p_k(x)-p_k(y)|n_k(x),$$

gdzie wykorzystujemy fakt, że ciśnienie ma ten sam znak co gęstość. Gdy dodamy zatem wszystkie trzy oszacowania, problematyczny człon znika.

Ostatecznie otrzymujemy następującą własność gęstosci:

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{k\to\infty} |\log h|^{-1}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\,\Big|n_k^{(i)}(x)-n_k^{(i)}(y)\Big|\,(\upsilon_k(x)+\upsilon_k(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Nie jest to jeszcze wystarczające do stwierdznia zwartości, gdyż pod całką mamy wagi. Ich usunięcie jest możliwe, ponieważ jesteśmy w stanie kontrolować miarę zbioru gdzie waga jest mała. Dokładniej, można wykazać, że

$$\Big|\Big\{x\in\mathbb{R}^d \,:\, \upsilon_k(x)\le\eta\Big\}\Big| \le \frac{1}{|\log\eta|}\int_{\mathbb{R}^d} n_k^{(i)}(x)|\log\upsilon_k(x)|\,\mathrm{d}x \le \frac{C}{|\log\eta|},$$

gdzie ostatnia całka jest jednostajnie ograniczona dzięki dualnej naturze równań na $n_k^{(i)}$ oraz υ_k (zob.

Proposition 4.5 w [B]). Rozkładając dziedzinę $\mathbb{R}^{2d}$ w odpowieni sposób otrzymujemy teraz

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \ |\log h|^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y) \ \left|n_k^{(i)}(x) - n_k^{(i)}(y)\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\lesssim \frac{1}{\eta} \limsup_{k\to\infty} \ |\log h|^{-1} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y) \ \left|n_k^{(i)}(x) - n_k^{(i)}(y)\right| (\upsilon_k(x) + \upsilon_k(y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{1}{|\log \eta|} \\
&\lesssim \frac{\omega(h)}{\eta} + \frac{1}{|\log \eta|}.
\end{aligned}$$

Ponieważ $\omega(h) \to 0$ przy $h \to 0$, to wybór $\eta = \omega(h)^{1/2}$ gwarantuje, że oba wyrazy znikają przy $h \to 0$.

<u>Zwartość ciśnienia i sformułowanie kinetyczne</u> Wróćmy teraz do równania na ciśnienie (20) i wprowadźmy oznaczenie

$$Q_k := W_k - p_k + \nu r_k G^{(1)}(p_k) + \nu(1-r_k)G^{(2)}(p_k).$$

Wtedy po prawej stronie równania (20) mamy wyraz $\nu^{-1}(k-1)p_kQ_k$. Z oszacowania a priori wiemy, że $p_kQ_k \to 0$ silnie w $L^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$. Z drugiej strony,

$$p_kQ_k = 0 \iff p_k = 0 \ \text{ lub } \ Q_k = 0,$$

a drugi warunek jest równoważny z

$$p_k = H_{r_k}(W_k),$$

gdzie rodzina funkcji $H_r(W)$ jest zdefiniowana przez

$$H_r(W) := \left[\mathrm{Id} - \nu r G^{(1)}(\cdot) - \nu(1-r)G^{(2)}(\cdot)\right]^{-1}(W).$$

Sugeruje to, że jedyną przeszkodą dla silnej zwartosci są oscylacje p_k wokół dwóch wartości $p_k \approx 0$ oraz $p_k \approx H_{r_k}(W_k)$. Wykorzystując lokalne silne zbieżności r_k oraz W_k, możemy wywnioskować, że te oscylacje nie mogą utrzymać się w granicy (w przeciwnym razie warunek $p_kQ_k \to 0$ zostałby naruszony).

Aby ściśle przeprowadzić ten program, wprowadzamy funkcję kinetyczną

$$\chi_k(t,x;\xi) = \mathbf{1}_{\{0<\xi<p_k(t,x)\}},$$

i wybieramy podciąg, taki że χ_k zbiega $\star$-słabo w L^∞ do pewnej funkcji granicznej $\chi(t,x;\xi)$. Wykorzystując silną zwartość r_k oraz W_k, wraz z ograniczeniem $p_k|Q_k| \lesssim 1/k$, pokazujemy, że wszystkie dopuszczalne słabe granice są postaci

$$S(p_k) \overset{\star}{\rightharpoonup} S(0)(1-f) + S(H_{r_\infty}(W_\infty))\,f, \tag{27}$$

dla pewnej funkcji mierzalnej f spełniającej $0 \le f(t,x) \le 1$. Ponieważ dla dowolnej gładkiej funkcji S możemy napisać

$$S(p_k) - S(0) = \int_0^\infty S'(\xi)\,\chi_k(t,x;\xi)\,d\xi,$$

wynika stąd, że

$$\chi(t,x;\xi) = f(t,x)\mathbf{1}_{\{0<\xi<H_{r_\infty(t,x)}(W_\infty(t,x))\}}. \tag{28}$$

W szczególności, biorąc $S(p) = p$, otrzymujemy identyfikację

$$p_\infty(t,x) = f(t,x)H_{r_\infty(t,x)}(W_\infty(t,x)), \tag{29}$$

gdzie p_∞ jest $\star$-słabą granicą p_k.

Pozostaje jeszcze scharakteryzować funkcję f. W tym celu, z równania (20) wyprowadzamy, że χ_k

spełnia równanie:

$$\partial_t \chi_k - \operatorname{div}(\chi_k \nabla W_k) + \chi_k \frac{W_k - \xi}{\nu} - \frac{1}{\nu}\int_\xi^\infty \chi_k(t,x;\eta)\,\mathrm{d}\eta = \mu_k,$$

gdzie

$$\mu_k(t,x;\xi) = \frac{k-1}{\nu}\, p_k Q_k\, \delta_{\{\xi = p_k\}}.$$

Miary μ_k są jednostajnie ograniczone w przestrzeni skończonych miar Radona. Możemy teraz przejść do granicy $k \to \infty$ w powyższym równaniu i, korzystając z (28), wywnioskować następujące równanie na f

$$\partial_t f - \nabla f \cdot \nabla W_\infty = \mu + \chi H_{r_\infty}(W_\infty)\frac{1-f}{\nu} \geq 0,$$

gdzie μ jest słabą granicą μ_k w sensie miar dodatnich. Teraz wykorzystujemy strukturę transportową ostatniego równania, argumentując, że nośnik p_k propaguje się wzdłuż przepływu generowanego przez $-\nabla W_k$. Fakt ten, w połączeniu z silną zbieżnością przepływu, pozwala nam stwierdzić, że $f = \mathbf{1}_{\{p_\infty > 0\}}$. Ta identyfikacja, wraz z (29) i (27), wystarcza do wydedukowania silnej zbieżności p_k w $L^1_{\mathrm{loc}}((0,T)\times\mathbb{R}^d)$.

4.7 Praca [C] — Brinkman–to–Darcy

Przedstawimy teraz wyniki pracy [C], w której udowadniamy, że dwugatunkowy układ Brinkmana, wprowadzony w pracy [B], stanowi dobre przybliżenie dwugatunkowego modelu Darcy'ego, podobnego do tego analizowanego w [A]. Skupiamy się na przypadku liniowego ciśnienia $p(n) = n$, jednak nie jest trudno dostosować naszą metodę, aby uwzględnić ciśnienie typu potęgowego $p(n) \sim n^k$, przyjmowane wcześniej. Rozważmy zatem następujący układ równań opisujących ewolucję dwóch gęstości populacji $n_\nu^{(i)} = n_\nu^{(i)}(t,x)$, $i = 1,2$:

$$\begin{cases} \partial_t n_\nu^{(1)} - \operatorname{div}\big(n_\nu^{(1)} \nabla W_\nu\big) = n_\nu^{(1)}\, G^{(1)}(n_\nu), \\ \partial_t n_\nu^{(2)} - \operatorname{div}\big(n_\nu^{(2)} \nabla W_\nu\big) = n_\nu^{(2)}\, G^{(2)}(n_\nu), \\ \qquad -\nu \Delta W_\nu + W_\nu = n_\nu, \quad n_\nu = n_\nu^{(1)} + n_\nu^{(2)}. \end{cases} \tag{30}$$

W przeciwieństwie do rozważnego wcześniej układu (14), parametr $\nu > 0$ nie jest już ustalony i będziemy badać zwartość rodziny rozwiązań $(n_\nu^{(i)})_{\nu>0}$ dla $i = 1,2$.

Założenia i główny wynik Funkcje wzrostu $G^{(i)}$ spełniają te same założenia co w [B], zob. (17) (są gładkie, ściśle malejące i każda z nich ma pierwiastek). Ponieważ nasza metoda przejścia do granicy $\nu \to 0$ opiera się na strukturach entropijnych równań pierwotnych i granicznych, musimy nałożyć odpowiednie założenia na dane początkowe, aby móc propagować kontrolę nad entropią. Najpierw wprowadzamy funkcjonał entropii

$$\mathcal{H}[f] := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\log f(x) - 1)\,\mathrm{d}x.$$

Załóżmy, że dane są nieujemne funkcje $n_\nu^{(1),\mathrm{in}}, n_\nu^{(2),\mathrm{in}}, n_0^{(1),\mathrm{in}}, n_0^{(2),\mathrm{in}}$ takie, że

$$\begin{cases} n_\nu^{(i),\mathrm{in}} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d), \text{ jednostajnie}, \\ |x|^2\, n_\nu^{(i),\mathrm{in}} \in L^1(\mathbb{R}^d), \text{ jednostajnie}, \end{cases}$$

oraz

$$\begin{cases} n_\nu^{(i),\mathrm{in}} \rightharpoonup n_0^{(i),\mathrm{in}}, \text{ słabo w } L^1(\mathbb{R}^d), \\ H[n_0^{\mathrm{in}}] \geq \limsup\limits_{\nu \to 0} H[n_\nu^{\mathrm{in}}], \end{cases}$$

gdzie $n_\nu^{\mathrm{in}} := n_\nu^{(1),\mathrm{in}} + n_\nu^{(2),\mathrm{in}}$ oraz $n_0^{\mathrm{in}} := n_0^{(1),\mathrm{in}} + n_0^{(2),\mathrm{in}}$. Zauważmy, że powyższe założenia implikują, że

$n_0^{(i),\mathrm{in}}$ należą do $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ i mają skończony drugi moment. Ponadto, ograniczenie w $L^1 \cap L^\infty$ oraz jednostajnie skończony drugi moment zapewniają, że

$$\sup_{\nu>0} \int_{\mathbb{R}^d} n_\nu^{\mathrm{in}}\, K_\nu \star n_\nu^{\mathrm{in}} \,\mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{oraz} \qquad \sup_{\nu>0} \int_{\mathbb{R}^d} n_\nu^{\mathrm{in}} |\log n_\nu^{\mathrm{in}}| \,\mathrm{d}x < \infty.$$

W szczególności, entropia w czasie początkowym jest skończona. Można pokazać, że powyższe własności są propagowane w czasie. Przy tych założeniach możemy sformułować następujące twierdzenie.

Twierdzenie 5. *Niech $(n_\nu^{(1)}, n_\nu^{(2)}, W_\nu)_{\nu>0}$ będzie ciągiem słabych rozwiązań układu (30) z warunkiem początkowym $(n_\nu^{(1),\mathrm{in}}, n_\nu^{(2),\mathrm{in}})$. Istnieje wówczas podciąg oraz funkcje $n_0^{(i)}$, $i = 1, 2$, takie, że*

$$n_0^{(i)} \in L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d)),$$

oraz

$$\begin{aligned} n_\nu^{(i)} &\to n_0^{(i)}, && \textit{silnie w } L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d)),\\ W_\nu &\to n_0, && \textit{silnie w } L^2(0,T; H^1(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

Ponadto, granica $(n_0^{(1)}, n_0^{(2)})$ jest słabym rozwiązaniem poniższego dwugatunkowego układu Darcy'ego

$$\begin{cases} \partial_t n_0^{(1)} - \mathrm{div}\big(n_0^{(1)} \nabla n_0\big) = n_0^{(1)}\, G^{(1)}(n_0),\\ \partial_t n_0^{(2)} - \mathrm{div}\big(n_0^{(2)} \nabla n_0\big) = n_0^{(2)}\, G^{(2)}(n_0), \end{cases} \tag{31}$$

gdzie $n_0 = n_0^{(1)} + n_0^{(2)}$, z warunkiem początkowym $(n_0^{(1),\mathrm{in}}, n_0^{(2),\mathrm{in}})$.

Nowość w kontekście nielokalnych aproksymacji Jak wyjaśniono w podrozdziale 4.4, możliwość ścisłego powiązania nielokalnego układu typu Brinkmana z lokalnym układem typu Darcy'ego z dyfuzją krzyżową stanowi istotny problem zarówno z punktu widzenia zastosowań, jak i teorii istnienia rozwiązań dla zdegenerowanych układów parabolicznych typu (10). Z perspektywy modelowania, Twierdzenie 5 wyjaśnia zależność między dwoma szeroko stosowanymi opisami dynamiki tkanki i uzasadnia stosowanie modeli bezlepkościowych jako granicy modeli lepkościowych o bardziej regularnej prędkości.

Matematycznie jest to problem dalece nietrywialny: układ Brinkmana jest typu transportowego, podczas gdy układ Darcy'ego wykazuje zdegenerowaną dyfuzję i wyższą regularność. Kluczowe znaczenie ma fakt, że istniejące techniki zbieżności nielokalnej-do-lokalnej wydają się niewystarczające w tym przypadku. Metody oparte na optymalnym transporcie i wygładzaniu, skuteczne w niektórych przypadkach jednogatunkowych [9, 13, 14], nie pozwalają uwzględnić członów wzrostu ani sprzężenia wielu gatunków poprzez wspólne ciśnienie. Z kolei podejścia wariacyjne opracowane dla modeli wzrostu tkanki [25, 41] nie odnoszą się do granic nielokalno–lokalnych. Ponadto, bezpośrednia zwartość gęstości jest niedostępna z powodu powstawania frontów pomiędzy gatunkami i efektów segregacji. Nowość naszego podejścia polega na wykorzystaniu struktury entropii, wspólnej dla lepkościowego układu Brinkmana oraz jego granicy bezlepkościowej.

Zamiast szukać silnej zwartosci gęstości, wykazujemy silną zbieżność pola prędkości poprzez porównanie nierówności dyssypacji entropii dla układu lepkościowego z tożsamością entropijną dla równania granicznego. Strategia ta, inspirowana wcześniejszymi pracami nad granicą nieściśliwą i przybliżeniem parabolicznym [39, 46], pozwala przezwyciężyć brak oszacowań na pochodne i ściśle uzasadnić przejście z układu Brinkmana do Darcy'ego.

W ten sposób nasza praca wypełnia wyraźną lukę w literaturze: dostarcza pierwszego ścisłego wyprowadzenia układu dyfuzji krzyżowej typu porous medium z kwadratową nieliniowością i członem wzrostu jako granicy bezlepkościowej nielokalnego modelu Brinkmana. Opracowujemy przy tym narzędzia, które bez wątpienia można zastosować do szerszej klasy układów dyspersji wielogatunkowej.

Warto na przykład wspomnieć, że bardzo podobny pomysł pozwala udowodnić odpowiednik Twierdzenia 5 w przypadku nieliniowych praw ciśnienia [28].

Strategia dowodu Główną trudnością w uzyskaniu wystarczającej zwartosci względem parametru lepkości jest brak jakiejkolwiek kontroli wyższego rzędu nad polem prędkości $-\nabla W_\nu$, która wynikałaby z równania eliptycznego, jakie ono spełnia. Bez takiej kontroli dysponujemy wystarczającą informacją jedynie aby wywnioskować słabą zbieżność (pod)ciągów interesujących nas wielkości. Dość łatwo można wyprowadzić jednostajne ograniczenia w $L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^d))$ dla rozwiązania $(n_\nu^{(1)}, n_\nu^{(2)})$ układu (30). W szczególności, założenia dotyczące szybkości reakcji umożliwiają zastosowanie zasady maksimum dla całkowitej gęstości populacji, a w konsekwencji poszczególne gęstości są wspólnie ograniczone w $L^\infty(0,T;L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Te ograniczenia w L^p dla gęstości implikują ich słabą prezwartość, co jest niewystarczające do przejścia do granicy w nieliniowych członach (30). Dla członu transportowego, na przykład, musimy wykazać albo silną zwartosć poszczególnych gęstości i słabą zwartosć pola prędkości, albo słabą zwartosć poszczególnych gęstości i silną zwartosć pola prędkości. Chociaż wykazanie, że pole prędkości jest słabo prezwarte, można osiągnąć z nierówności entropijnej, jak wyjaśniono poniżej, poprawa zbieżności poszczególnych gęstości okazuje się trudnym problemem. Dlatego przyjmujemy drugą strategię i dowodzimy silnej zbieżności pola prędkości.

Dowód silnej zwartosci W_ν w $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ bez jakiejkolwiek jednostajnej kontroli drugiej pochodnej stanowi zatem główne wyzwanie w pracy [C]. Nasza strategia opiera się na ustaleniu najpierw równania granicznego dla łącznej gęstości n_0 oraz wykorzystaniu jego struktury do wywnioskowania silnej zwartosci pola prędkości poprzez porównanie *nierówności* dyssypacji entropii dla n_ν z *równością* dyssypacji entropii dla n_0. Dokładniej, najpierw pokazujemy, że całkowita gęstość populacji n_ν spełnia nierówność

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}[n_\nu(T)] - \mathcal{H}[n_\nu^{\mathrm{in}}] - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} n_\nu \Delta W_\nu \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\qquad\le \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} \log n_\nu \left[n_\nu^{(1)} G^{(1)}(n_\nu) + n_\nu^{(2)} G^{(2)}(n_\nu)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{32}$$

Dzięki jednoznacznej kontroli nad $n_\nu|\log n_\nu|$, wynika stąd, że

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} n_\nu \Delta W_\nu \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \le C, \tag{33}$$

jednostajnie względem ν. Ta ograniczoność wyrazu dysspacji ma dwie kluczowe konsekwencje. Po pierwsze, korzytając z równania Brinkmana możemy porównać tę wielkość z $|\nabla W_\nu|^2$:

$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} n_\nu \Delta W_\nu \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla W_\nu|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} |\Delta W_\nu|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \ge \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla W_\nu|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,$$

i w ten sposób otrzymujemy wspólne ograniczenie prędkości ∇W_ν w przestrzeni $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$. W połączeniu z ograniczeniem na pochodną czasową $\partial_t W_\nu$ i lematem Aubin-Lionsa, daje nam to słabą zwartość W_ν w $L^2(0,T;L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d))$. Korzystając teraz z faktu, że $W_\nu = K_\nu \star n_\nu$, łatwo można zidentyfikować, że granicą jest funkcja n_0 (czyli słaba granica ciągu $(n_\nu)_\nu$). Ponadto, wybierając podciąg mamy $\nabla W_\nu \rightharpoonup \nabla n_0$ w $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$.

Po drugie, korzystając znów z (33) możemy przenieść zwartość W_ν na n_ν. Istotnie, mamy

$$\begin{aligned} \|n_\nu - W_\nu\|^2_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} (W_\nu - n_\nu)(W_\nu - n_\nu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} \nu\Delta W_\nu (W_\nu - n_\nu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &= -\nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla W_\nu|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t - \nu\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} n_\nu \Delta W_\nu \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ &\le -C\nu. \end{aligned}$$

Ta informacja jest wystarczająca do stwierdzenia, że graniczna gęstość całkowita spełnia równanie

$$\partial_t n_0 - \operatorname{div}(n_0 \nabla n_0) = n_0^{(1)} G^{(1)}(n_0) + n_0^{(2)} G^{(2)}(n_0),$$

a w konsekwecji równość entropijną

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[n_0(T)] - \mathcal{H}[n_0^{\mathrm{in}}] &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla n_0|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \log n_0 \left[n_0^{(1)} G^{(1)}(n_0) + n_0^{(2)} G^{(2)}(n_0) \right] \mathrm{d}x \,\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{34}$$

Przy założeniu, że $\mathcal{H}[n_0^{\mathrm{in}}]$ dominuje $\mathcal{H}[n_\nu^{\mathrm{in}}]$, możemy porównać (32) oraz (34), co prowadzi do

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla W_\nu|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla n_0|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}t + \mathcal{E}_\nu.$$

Błąd $\mathcal{E}_\nu$ zawiera różnicę pomiędzy entropiami w czasie końcowym oraz różnicę członów wzrostu. Ta pierwsza ma odpowiedni znak dzięki wypukłości funkcjonału entropii; ta druga znika w granicy, czego można wykazac za pomocą standardowych narzędi teorii miary. Tym sposobem otrzymujemy następującą własność górnej półciągłości

$$\limsup_{\nu \to 0} \|\nabla W_\nu\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \|\nabla n_0\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))}.$$

W połączeniu z półciągłością dolną zapewnianą przez słabą zbieżność, implikuje to zbieżność norm, a w konsekwencji zbieżność w silnej topologii $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$.

4.8 Praca [D] — Rozszerzenie anizotropowe

Artykuł [D] stanowi naturalną kontynuację programu zapoczątkowanego w [C], gdzie obecnie próbujemy dostosować podobną strategię do skonstruowania nielokalnego przybliżenia zdegenerowanego układu dyfuzji krzyżowej z dyfuzją anizotropową. Rozważamy następujący lokalny model dwóch gatunków dla ewolucji gęstości $n_0^{(i)} = n_0^{(i)}(t,x)$, $i = 1, 2$,

$$\begin{cases} \partial_t n_0^{(1)} - \operatorname{div}\big(n_0^{(1)} A \nabla n_0\big) = n_0^{(1)} G^{(1)}(n_0), \\ \partial_t n_0^{(2)} - \operatorname{div}\big(n_0^{(2)} A \nabla n_0\big) = n_0^{(2)} G^{(2)}(n_0), \\ \qquad n_0 = n_0^{(1)} + n_0^{(2)}, \end{cases} \tag{35}$$

gdzie $A = A(t,x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ jest daną funkcją macierzową. Układ ten wpasowuje się w ogólną postać (1) z anizotropową wersją prawa Darcy'ego

$$\mathbf{v}(t,x) = -A(t,x) \nabla p(t,x).$$

W pracy [D] konstruujemy nielokalne przybliżenie (35) podobne do układ Brinkmana (30) z przypadku izotropowego $A = \mathrm{Id}$. Dokładniej, rozważamy następujący układ

$$\begin{cases} \partial_t n_\nu^{(1)} - \operatorname{div}\big(n_\nu^{(1)} A \nabla W_\nu\big) = n_\nu^{(1)} G^{(1)}(n_\nu), \\ \partial_t n_\nu^{(2)} - \operatorname{div}\big(n_\nu^{(2)} A \nabla W_\nu\big) = n_\nu^{(2)} G^{(2)}(n_\nu), \\ \quad -\nu \operatorname{div}(A \nabla W_\nu) + W_\nu = n_\nu, \end{cases} \tag{36}$$

i badamy granicę $\nu \to 0$. Odnotujmy, że w pracy [D] użwamy oznaczenia m_ν zamiast W_ν — zmieniamy je tutaj, aby zachować spójność z resztą tego rozdziału.

Założenia i główny wynik Funkcje $G^{(i)}$ nadal spełniają standardowe założenia (17), a jedyny pierwiastek funkcji $G^{(i)}$ oznaczamy tutaj przez $\bar{n}^{(i)} > 0$. Dane początkowe również spełniają analogiczne warunki jak w [C]: niech $n^{(i),\text{in}}$, $i = 1, 2$, będą nieujemnymi funkcjami takimi, że

- $n^{(i),\text{in}} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$,
- $0 \le n^{(i),\text{in}} \le \bar{n}^{(i)}$,
- $|x|^2(n^{(1),\text{in}} + n^{(2),\text{in}}) \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Zwróćmy uwagę, że dla uproszczenia przyjmujemy dane początkowe stałe względem ν. Możliwe są oczywiście bardziej ogólne wybory ciągów danych. Wreszcie, od tensora A wymagamy następującej eliptyczności i regularności:

- $A \in W^{1,\infty}(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d)) \cap L^{\frac{2q}{q-d}}(0, T; \dot{W}^{1,q}(\mathbb{R}^d))$, dla pewnego $q \ge d$,
- $A(t, x)$ jest symetryczna dla p.w. $(t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^d$,
- $A(t, x)$ jest λ-jednostajnie eliptyczna: $\exists \lambda > 0 : \xi^T A(t, x)\xi \ge \lambda|\xi|^2$, dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}^d$ oraz p.k. (t, x).

Przy tych założeniach możemy wykazać następującą regularność pola prędkości $-A\nabla W_\nu$, dla każdego $\nu > 0$:

$$A\nabla W_\nu \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^d)), \quad \operatorname{div}(A\nabla W_\nu) \in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}^d)).$$

W konsekwencji nie jest trudno skonstruować słabe rozwiązania układu (36) z jednostajną kontrolą normy $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$. Naszym głównym wynikiem jest teraz wykazanie, że te słabe rozwiązania zbiegają, przy $\nu \to 0$, do słabego rozwiązania anizotropowego układu dyfuzji krzyżowej (35).

Twierdzenie 6. *Dla $\nu > 0$, niech $(n_\nu^{(1)}, n_\nu^{(2)}, W_\nu)$ będzie słabym rozwiązaniem układu* (36) *z warunkiem początkowym $(n^{(1),\text{in}}, n^{(2),\text{in}})$. Wówczas istnieje podciąg, taki że*

$$\begin{aligned} n_\nu^{(i)} &\overset{\star}{\rightharpoonup} n_0^{(i)}, && \star\text{-}\textit{słabo w } L^\infty(0, T; L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)),\ i = 1, 2,\\ n_\nu &\to n_0, && \textit{silnie w } L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^d)),\\ W_\nu &\to n_0, && \textit{silnie w } L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^d)), \end{aligned}$$

gdzie $n_0 = n_0^{(1)} + n_0^{(2)}$, oraz $(n_0^{(1)}, n_0^{(2)})$ jest słabym rozwiązaniem układu (35) *z warunkiem początkowym $(n^{(1),\text{in}}, n^{(2),\text{in}})$.*

Motywacja i nowość Układ dyfuzji krzyżowej w (31) ma postać

$$\partial_t n^{(i)} = D^{(i)} \operatorname{div}(n^{(i)}\nabla(n^{(1)} + n^{(2)})), \qquad i = 1, 2,$$

gdzie współczynniki dyfuzji $D^{(1)} = D^{(2)}$ są takie same dla obu gatunków i stałe. Układy tej postaci zaproponowano w [10] do modelowania chorób zakaźnych oraz w [37] do modelowania dynamiki populacji z efektem przeciwdziałania przeludnieniu. Gdy współczynniki $D^{(i)}$ zależą od przestrzeni i/lub od rozwiązań, układ przyjmuje postać

$$\partial_t n^{(i)} = \operatorname{div}(n^{(i)} D^{(i)}\nabla(n^{(1)} + n^{(2)})), \qquad i = 1, 2.$$

Z punktu widzenia modelowania, taka anizotropia jest istotna w zastosowaniach takich jak dynamika populacji, epidemiologia czy wzrost tkanki, gdzie ruch jest kształtowany przez heterogeniczne środowisko lub preferowane kierunki. Jak wspomniano wcześniej, w ostatnich latach przedstawiono szereg ogólnych wyników dotyczących dobrego postawienia problemów w przypadku izotropowym [15, 38–40, 46], stosując strategie od transportu optymalnego po teorię regularności równań parabolicznych i metody dyssypacji energii. Artykuły [C] i [E] w przedstawionym cyklu również poświęcone są rozwojowi takich metod. Wyniki obejmujące anizotropowy układ dyfuzji krzyżowej pozostają jednak nadal nieliczne.

W [42] autorzy stosują strategię wprowadzoną w [C] do klasy układów anizotropowych na ograniczonych dziedzinach, wygładzonych dodatkowym członem $\Delta n^{(i)}$. Jednak ze względu na silne założenia dotyczące macierzy dyfuzji, fizycznie istotny szczególny przypadek anizotropowego prawa Darcy'ego $\mathbf{v} = A\nabla p$ nie jest objęty. W pracy [D] wypełniamy tę lukę, nawet przy braku samodyfuzji.

Najważniejszym wynikiem tej pracy jest to, że implikuje istnienie słabych rozwiązań dla lokalnego układu (35), co samo w sobie jest nietrywialne. Należy przy tym przyznać, że układ (36) jest niefizyczny, ponieważ zawiera tensor A zarówno w równaniu ewolucji gęstości, jak i w równaniu pola prędkości. Wyprowadzenie i analiza bardziej biologicznie realistycznego anizotropowego układu Brinkmana stanowi bardzo ciekawy otwarty problem, który zamierzamy podjąć w naszej przyszłej pracy.

Strategia dowodu Dowód Twierdzenia 6 podąża podobną drogą jak Twierdzenie 5. Jednakże, obecność anizotropii wymaga dodatkowej uwagi i bardziej skomplikowanych obliczeń. Kluczowym krokiem jest ustalenie tożsamości entropijnej spełnianej przez słabe rozwiązania układu (36). W tej pracy koncentrujemy się w mniejszym stopniu na tym, w jaki sposób słabe rozwiązania układu Brinkmana są konstruowane za pomocą aproksymacji parabolicznej. Zamiast tego w pełniejszy sposób wykorzystujemy regularność pola prędkości, aby pokazać, że *każde* słabe rozwiązanie (36) spełnia *równość* entropijną. Osiągamy to poprzez odpowiednią procedurę wygładzania oraz klasyczne oszacowania komutatorów. Następnie korzystamy z jednorodnej kontroli nad członem dyssypacji entropii, aby wywnioskować silną zbieżność całkowitej gęstości oraz słabą zbieżność ∇W_ν. Właściwości te są wystarczające do przejścia do granicy w równaniu dla całkowitej gęstości populacji. Ponadto pozwalają wyprowadzić odpowiadającą tożsamość entropijną dla równania granicznego. Wreszcie porównujemy dwie tożsamości entropijne, aby poprawić słabą zbieżność ∇W_ν i wywnioskować silną zbieżność pola prędkości.

Formalnie, główną ideę dowodu można podsumować następująco. Dodając równania dla poszczególnych gęstości i testując logarytmem $\log n_\nu$, otrzymujemy tożsamość entropijną, z członem dyssypacyjnym

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} n_\nu \operatorname{div}(A\nabla W_\nu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq C,$$

który, dzięki anizotropowemu równaniu Brinkmana oraz eliptyczności A, kontroluje normę ∇W_ν w przestrzeni L^2. To implikuje, że $\nabla W_\nu \rightharpoonup \nabla n_0$ oraz $W_\nu \to n_0$. Ponadto,

$$\nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} n_\nu \operatorname{div}(A\nabla W_\nu)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \to 0,$$

co, ponownie z powodu równania Brinkmana, implikuje, że n_ν i W_ν mają tę samą granicę w L^2, tzn. $n_\nu \to n_0$. Na koniec, porównując tożsamości entropijne dla $\nu > 0$ i $\nu = 0$, wnioskujemy

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla W_\nu \cdot A\nabla W_\nu\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \nabla n_0 \cdot A\nabla n_0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \omega(\nu),$$

gdzie $\omega(\nu) \to 0$ przy $\nu \to 0$. Wynikająca stąd własność półciągłości górnej, w połączeniu z półciągłością dolną normy L^2, prowadzi do zbieżności $\|\nabla W_\nu\|_{L^2} \to \|\nabla n_0\|_{L^2}$. Wraz ze słabą zbieżnością implikuje to silną zbieżność w L^2 pola ∇W_ν.

4.9 Praca [E] — Stratyfikacja fenotypowa

Na koniec opisujemy wyniki uzyskane w artykule [E]. Naszym celem były dwie kwestie. Po pierwsze, proponujemy model typu Brinkmana, w którym populacja komórek jest strukturyzowana za pomocą ciągłej zmiennej fenotypowej $a \in [0, 1]$, i wyprowadzamy ten model jako granicę układu N-gatunkowego, analogicznego do wersji dwugatunkowej (30), gdy liczba gatunków dąży do nieskończoności. Po drugie, badamy związek z fenotypowo strukturyzowanym modelem Darcy'ego, zaproponowanym w [20].

Oznaczenia i założenia Niech $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, oznacza całkowitą liczbę rozróżnialnych gatunków. W granicy struktury ciągłej oczekujemy funkcji szybkości wzrostu parametryzowanej przez zmienną fenotypową. W związku z tym rozważamy

$$G : \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad (n,a) \mapsto G(n;a),$$

i definiujemy

$$G_N^{(i)}(n) := G(n; iN^{-1}),$$

dla $i = 1, \ldots, N$. Zakładamy następujące własności funkcji G, analogicznie do (17):

- regularność: $G \in C^1(\mathbb{R} \times [0,1])$,
- monotoniczność: $\max_{a\in[0,1]} \partial_n G(\cdot\,; a) \leq -\alpha < 0$ dla pewnego $\alpha > 0$,
- gęstość maksymalna: $\forall a \in [0,1]$ istnieje $n^\star(a) > 0$ takie, że $G(n^\star(a); a) = 0$ oraz $\bar{n} := \sup_{a\in[0,1]} n^\star(a) < \infty$.

Podobnie konstuujemy dane początkowe. Niech

$$n^{\mathrm{in}} : \mathbb{R}^d \times [0,1] \to [0,\infty), \quad (x,a) \mapsto n^{\mathrm{in}}(x;a),$$

będzie daną funckcją Carathéodory'ego taką, że dla wszystkich $a \in [0,1]$

$$n^{\mathrm{in}}(\cdot\,; a) \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad n^{\mathrm{in}}(x;a) \leq \bar{n}.$$

Ponadto zakładamy, że

$$\sup_{a\in[0,1]} \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2\, n^{\mathrm{in}}(x;a)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Ostatecznie kładziemy

$$n_N^{(i),\mathrm{in}}(x) := n^{\mathrm{in}}\left(x; iN^{-1}\right).$$

W tym rozdziale będziemy zajmować się ciągami funkcji $(f_N^{(i)})_{i=1,\ldots,N}$, dla których wprowadzamy zmienną fenotypową poprzez następującą interpolację:

$$f_N(t,x;a) := \sum_{i=1}^N f_N^{(i)}(t,x)\mathbf{1}_{\left(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}\right]}(a). \tag{37}$$

Ponadto, rozważamy uśrednione wielkości

$$\underline{f}_N(t,x) := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N f_N^{(i)}(t,x), \tag{38}$$

dla których obserwujemy, że

$$\underline{f}_N(t,x) = \sum_{i=1}^N f_N^{(i)}(t,x)\int_{i/N}^{i+1/N} 1\,\mathrm{d}a = \int_0^1 f_N(t,x;a)\,\mathrm{d}a.$$

Punkt wyjścia Rozważmy następujący układ N-gatunkowy, gdzie $n_{\nu,N}^{(i)} = n_{\nu,N}^{(i)}(t,x)$ oznacza gęstość i-tej populacji, dla $i = 1, \ldots, N$,

$$\begin{cases} \partial_t n_{\nu,N}^{(i)} - \operatorname{div}\Big(n_{\nu,N}^{(i)}\nabla W_{\nu,N}\Big) &= n_{\nu,N}^{(i)} G_N^{(i)}(\underline{n}_{\nu,N}), \\ n_{\nu,N}^{(i)}(0,x) &= n_N^{(i),\mathrm{in}}(x), \\ -\nu\Delta W_{\nu,N} + W_{\nu,N} &= \underline{n}_{\nu,N}, \end{cases} \tag{39}$$

gdzie *(uśredniona) całkowita gęstość populacyjna* $\underline{n}_{\nu,N}$ jest zdefiniowana wzorem (38). Zaletą wprowadzenia wielkości interpolowanych jak w (37) jest możliwość zapisania układu (39) w następujący zwięzły sposób

$$\begin{cases} \partial_t n_{\nu,N} - \operatorname{div}(n_{\nu,N}\nabla W_{\nu,N}) &= n_{\nu,N} G_N(\underline{n}_{\nu,N}; a), \\ n_{\nu,N}(0,x;a) &= n_N^{\text{in}}(x;a). \\ -\nu\Delta W_{\nu,N} + W_{\nu,N} &= \underline{n}_{\nu,N}. \end{cases} \tag{40}$$

Układy graniczne W oparciu o układ (40) interesują nas dwie granice — granica fenotypu ciągłego ($N \to \infty$) oraz granica bezlepkościowa ($\nu \to 0$). Jeśli chodzi o pierwszą z nich, przechodząc formalnie z $N \to \infty$, otrzymujemy fenotypowo stratyfikowany lepkoelastyczny model wzrostu tkanki postaci

$$\begin{cases} \partial_t n_{\nu,\infty} - \operatorname{div}(n_{\nu,\infty}\nabla W_{\nu,\infty}) &= n_{\nu,\infty} G(\underline{n}_{\nu,\infty}; a), \\ n_{\nu,\infty}(0,x;a) &= n^{\text{in}}(x;a), \\ -\nu\Delta W_{\nu,\infty} + W_{\nu,\infty} &= \underline{n}_{\nu,\infty}, \\ \underline{n}_{\nu,\infty} &= \int_0^1 n_{\nu,\infty}\,\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{41}$$

Z kolei przechodząc z $\nu \to 0$, otrzymujemy bezlepkościowy układ N-gatunkowy, analogiczny do (31),

$$\begin{cases} \partial_t n_{0,N} - \operatorname{div}\big(n_{0,N}\nabla \underline{n}_{0,N}\big) &= n_{0,N} G_N(\underline{n}_{0,N}; a), \\ n_{\nu,N}(0,x;a) &= n_N^{\text{in}}(x;a). \end{cases} \tag{42}$$

Jednak najsilniejszym wynikiem pracy [E] jest uzyskanie zwartości wystarczającej do przejścia do granicy *łącznej* i otrzymania fenotypowo stratyfikowanego modelu bezlepkościowego.

$$\begin{cases} \partial_t n_{0,\infty} - \operatorname{div}\big(n_{0,\infty}\nabla \underline{n}_{0,\infty}\big) &= n_{0,\infty} G(\underline{n}_{0,\infty}; a), \\ n_{0,\infty}(0,x;a) &= n^{\text{in}}(x;a), \\ \underline{n}_{0,\infty} &= \int_0^1 n_{0,\infty}\,\mathrm{d}a. \end{cases} \tag{43}$$

Główne wyniki Możemy teraz sformuować główne rezultaty pracy [E].

Twierdzenie 7 (Granica ciągłego fenotypu). *Niech $\nu > 0$ będzie ustalone. Dla $N \in \mathbb{N}$, niech $(n_{\nu,N}^{(i)}, W_{\nu,N})_{i=1}^N$ będzie słabym rozwiązaniem układu* (39). *Wówczas istnieje funkcja $n_{\nu,\infty} : \mathbb{R}^d \times [0,T] \times [0,1] \to [0,\infty)$ taka, że*

$$n_{\nu,\infty}(\cdot,\cdot,a) \in L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad \textit{dla p.w. } a \in [0,1],$$

oraz, z dokładnością do podciągu

$$\begin{aligned} n_{\nu,N} &\overset{\star}{\rightharpoonup} n_{\nu,\infty}, && \star\text{-}\textit{słabo w } L^\infty(0,T; L^p(\mathbb{R}^d)),\ 1 \le p \le \infty, \\ \underline{n}_{\nu,N} &\to \underline{n}_{\nu,\infty}, && \textit{silnie w } L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^d)), \\ W_{\nu,N} &\to W_{\nu,\infty} := K_\nu \star \underline{n}_{\nu,\infty}, && \textit{silnie w } L^2(0,T; H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

Granica $(n_{\nu,\infty}, W_{\nu,\infty})$ jest słabym rozwiązaniem układu (41).

Twierdzenie 8 (Łączona granica). *Niech $\nu = \nu(N)$ będzie dowolnym ciągiem takim, że $\nu(N) \to 0$ gdy $N \to \infty$. Dla $N \in \mathbb{N}$ niech $(n_{\nu(N),N}^{(i)}, W_{\nu(N),N})_{i=1}^N$ będzie słabym rozwiązaniem układu* (39), *spełniającym nierówność entropijną* (45). *Wówczas istnieje funkcja $n_{0,\infty} : \mathbb{R}^d \times [0,T] \times [0,1] \to [0,\infty)$ taka, że*

$$n_{0,\infty}(\cdot,\cdot;a) \in L^\infty(0,T; L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)), \quad \textit{dla p.w. } a \in [0,1],$$

i

$$\underline{n}_{0,\infty} := \int_0^1 n_{0,\infty}\,\mathrm{d}a \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)),$$

oraz, z dokładnością do podciągu,

$$\begin{aligned} n_{\nu(N),N} &\overset{\star}{\rightharpoonup} n_{0,\infty}, && \star\text{-słabo w } L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^d)),\ 1\le p\le\infty,\\ \underline{n}_{\nu(N),N} &\to \underline{n}_{0,\infty}, && \text{silnie w } L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)),\\ W_{\nu(N),N} &\to \underline{n}_{0,\infty}, && \text{silnie w } L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)). \end{aligned}$$

Funkcja graniczna $n_{0,\infty}$ jest słabym rozwiązaniem układu (43).

Motywacja i nowość Heterogeniczność fenotypowa odgrywa fundamentalną rolę w wielu układach biologicznych, w szczególności we wzroście tkanek i rozwoju nowotworów. Różne subpopulacje komórek często wykazują odmienne właściwości wzrostu, przeżywalności i migracji, a ich interakcja poprzez wspólne zasoby oraz nacisk mechaniczny w decydujący sposób kształtuje zachowanie zbiorowe. Modele matematyczne, które w sposób jawny uwzględniają taką heterogeniczność — powszechnie określane jako modele populacji strukturyzowanych (*structured population models*) — stanowią zatem kluczowe narzędzia współczesnej biologii matematycznej.

Klasycznym punktem wyjścia dla modelowania fenotypowo strukturyzowanego są równania typu Lotki–Volterry z ciągłą zmienną cechy fenotypowej

$$\begin{cases} \partial_t n(t;a) = \Delta_a n(t;a) + n(t;a)R(\underline{n};a),\\ \underline{n}(t) = \displaystyle\int_0^1 n(t;a)\,\mathrm{d}a, \end{cases}$$

gdzie mutacje są modelowane poprzez dyfuzję w przestrzeni fenotypów, a selekcja poprzez zależną od fenotypu funkcję wzrostu [47, 48]. Modele te można rozszerzyć o strukturę przestrzenną, albo poprzez liniową dyfuzję z mobilnością zależną od cechy, albo poprzez nieliniowe mechanizmy dyspersji napędzane ciśnieniem mechanicznym — co prowadzi do wprowadzenia w powyższym równaniu członu $\mathrm{div}_x(D(a)n(t,x;a)\nabla p)$.

Głównym wkładem pracy [E] jest ustanowienie ścisłego pomostu pomiędzy modelami wzrostu tkanek z dyskretną liczbą gatunków a modelami z ciągłą strukturą fenotypową, a także jednoczesne wyjaśnienie relacji pomiędzy opisami lepkosprężystymi (typu Brinkmana) i bezlepkościowymi (typu Darcy'ego). Punktem wyjścia jest N-gatunkowy układ Brinkmana z fenotypowo zależnymi funkcjami wzrostu oraz wspólnym ciśnieniem populacyjnym. Analizujemy zachowanie słabych rozwiązań tego układu w granicy, gdy liczba gatunków dąży do nieskończoności.

W pierwszym kroku dokonujemy przejścia do granicy ciągłego fenotypu $N\to\infty$ przy ustalonej lepkości. Prowadzi to do nowego, lepkosprężystego modelu wzrostu tkanek z ciągłą zmienną fenotypową, co stanowi ścisłe matematyczne uzasadnienie opisów z ciągłym cechowaniem jako granic układów z dyskretną liczbą gatunków. Choć modele Darcy'ego z ciągłą strukturą fenotypową były wcześniej proponowane na poziomie formalnym [20], brakowało dotąd rygorystycznego wyprowadzenia z układów o skończonym N.

Następnie dowodzimy istnienia granicy łącznej, w której lepkość dąży do zera jednocześnie z dążeniem liczby gatunków do nieskończoności. W wyniku otrzymujemy bezlepkościowy model typu Darcy'ego z ciągłą zmienną fenotypową, dostarczając ścisłego połączenia pomiędzy czterema paradygmatami modelowania: fenotypami dyskretnymi i ciągłymi oraz mechaniką tkanek lepkosprężystą i porowatą.

Z matematycznego punktu widzenia kluczową innowacją techniczną jest wyprowadzenie nierówności entropowych oraz własności zwartości, które są stabilne względem tych jednoczesnych granic. Zapewnia to ścisłe podstawy matematyczne dla stosowania modeli Darcy'ego i Brinkmana z ciągłą strukturą fenotypową w zastosowaniach biologicznych oraz prowadzi do rozwoju narzędzi analitycznych, które mogą znaleźć zastosowanie w szerszej klasie modeli populacji strukturalnych, obejmujących interakcje mechaniczne i heterogeniczność fenotypową.

Strategia dowodów Dowody Twierdzeń 7 oraz 8 opierają się na starannej adaptacji metod rozwiniętych w pracach [C] i [B]. W szczególności, nielokalne kryterium zwartości jest wykorzystywane do uzasadnienia granicy $N \to \infty$, natomiast porównanie tożsamości entropowych prowadzi do uzyskania zwartości jednocześnie względem parametrów ν oraz N. Naszym pierwszym wynikiem jest istnienie słabych rozwiązań N-gatunkowego lepkosprężystego układu (39), oraz, co najważniejsze, wykazanie kluczowych jednostajnych oszacowań niezależnych od N.

Lemat 9 (Istnienie rozwiązań)**.** *Dla dowolnego* $\nu > 0$ *i* $N \geq 2$ *istnieje słabe rozwiązanie* $(n_{\nu,N}^{(i)}, W_{\nu,N})_{i=1}^N$ *układu* (39) *takie, że*

1. $n_{\nu,N}^{(i)} \in L^\infty(0,T;L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$*, jednostajnie względem* ν *i* N*,*
2. $\exists C > 0$ *takie, że* $0 \leq n_{\nu,N}^{(i)} \leq C$*, jednostajnie względem* ν *i* N*,*
3. $W_{\nu,N} \in L^\infty(0,T;L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d))$*,jednostajnie względem* ν *i* N*,*
4. $W_{\nu,N} \in L^\infty(0,T;W^{1,q}(\mathbb{R}^d)) \cap L^\infty(0,T;W^{2,r}(\mathbb{R}^d))$*, dla* $1 \leq q \leq \infty$*,* $1 < r < \infty$*, jednoznacznie względem* N*,*

oraz takie, że $n_{\nu,N} = \sum_{i=1}^N n_{\nu,N}^{(i)}(t,x)\mathbf{1}_{(\frac{i-1}{N},\frac{i}{N}]}(a)$ *spełnia układ* (40).

Aby udowodnić powyższy lemat, rozważamy paraboliczną regularyzację układu (39) przez wprowadzenie wyrazu $-\epsilon\Delta n_{\nu,N}^{(i)}$ w równaniu gęstości. Pojawiają się wówczas dwa delikatne punkty analityczne: oszacowanie górne dla $n_{\nu,N}^{(i)}$ oraz przejście do granicy $\epsilon \to 0$. Po pierwsze, standardowy argument prowadzi do zasady maksimum $\underline{n}_{\epsilon,\nu,N} \leq \bar{n}$ (przypomnijmy, że $\bar{n}$ jest ciśnieniem homeostatycznym). Ograniczenie w L^∞ dla $n_{\nu,N}^{(i)}$ wynika następnie z porównania z ograniczonym nadrozwiązaniem $\frac{1}{\bar{n}}\|n_{\nu,N}^{\text{in}}\|_{L^\infty}\underline{n}(t,x)e^{2\|G\|_{L^\infty}t}$, patrz Proposition 3.2 w [E].

Aby przejść do granicy $\epsilon \to 0$, stosujemy kryterium zwartości (21). Podobnie jak w [B], dowodzimy zwartości każdej z funkcji $n_{\epsilon,\nu,N}^{(i)}$ oraz przeskalowanej całkowitej gęstości populacji $\underline{n}_{\epsilon,\nu,N}$ jednocześnie. W tym celu rozważamy wielkości

$$\underline{Q}_h = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\big|\underline{n}_{\epsilon,\nu,N}(x) - \underline{n}_{\epsilon,\nu,N}(y)\big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

oraz

$$Q_h = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y) \int_0^1 |n_{\epsilon,\nu,N}(x) - n_{\epsilon,\nu,N}(y)|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

i stosujemy metodę podwajania zmiennych do równań na $n_{\epsilon,\nu,N}^{(i)}$, aby wyprowadzić nierówność typu Gronwalla postaci

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[Q_h(t) + \underline{Q}_h(t)\Big] &\lesssim \frac{\epsilon}{h^2} + |\log h|^{1/2} + \Big[Q_h(t) + \underline{Q}_h(t)\Big] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)|W_{\epsilon,\nu,N}(x) - W_{\epsilon,\nu,N}(y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{44}$$

Pierwszy wyraz po prawej stronie wynika z członu parabolicznego, a drugi z oszacowania komutatora

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} \nabla\mathcal{K}_h(x-y)\cdot(\nabla W_{\epsilon,\nu,N}(x) - \nabla W_{\epsilon,\nu,N}(y)) \int_0^1 |n_{\epsilon,\nu,N}(x) - n_{\epsilon,\nu,N}(y)|\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zauważmy, że

$$Q_h = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Big|n_{\epsilon,\nu,N}^{(i)}(x) - n_{\epsilon,\nu,N}^{(i)}(y)\Big|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Zatem, lemat Gronwalla zastosowany do nierówności (44), w połączeniu ze zwartością danych początkowych oraz potencjału prędkości $W_{\epsilon,\nu,N}$, prowadzą do

$$\lim_{h\to 0}\limsup_{\epsilon\to 0} |\log h|^{-1} \sup_{t\in[0,T]} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{K}_h(x-y)\Big|n^{(i)}_{\epsilon,\nu,N}(x)-n^{(i)}_{\epsilon,\nu,N}(y)\Big| \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

dla każdego $i=1,\dots,N$, co z kolei implikuje lokalną silną zwartość każdej gęstości $n^{(i)}_{\epsilon,\nu,N}$ przy $\epsilon\to 0$.

Dysponując istnieniem słabych rozwiązań, dowodzimy teraz, że (przeskalowana) całkowita gęstość populacji spełnia następującą nierówność entropijną:

Lemat 10 (Nierówność entropijna). *Niech $(n^{(i)}_{\nu,N}, W_{\nu,N})_{i=1}^N$ będzie słabym rozwiązaniem skonstuowanym w Lemacie 9. Wówczas zachodzi następująca nierówność:*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}[\underline{n}_{\nu,N}(T)] - \mathcal{H}[\underline{n}^{\mathrm{in}}_{\nu,N}] - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} \underline{n}_{\nu,N}\Delta W_{\nu,N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \\ \le \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} \log \underline{n}_{\nu,N}\int_0^1 n_{\nu,N} G_N(\underline{n}_{\nu,N};a)\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{45}$$

gdzie przypominamy oznaczenie

$$\mathcal{H}[f] \coloneqq \int_{\mathbb{R}^d} f(x)(\log f(x)-1)\,\mathrm{d}x.$$

Dzięki wspólnym ograniczeniom z Lematu 9, nierówność (45) zapewnia jednostajną kontrolę nad wyrazem dyssypacji $-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\underline{n}_{\nu,N}\Delta W_{\nu,N}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$. Co kluczowe, ograniczenie to jest jednostajne zarówno względem ν, jak i N. Dlatego możemy wybrać *dowolny* ciąg $\nu=\nu(N)$ tak, aby $\nu(N)\to 0$ przy $N\to\infty$, i przeprowadzić wspólną granicę. Schemat rozumowania jest podobny do kroków opisanych w pracy [C]: (a) wykorzystujemy termin dyssypacji, aby wywnioskować silną zbieżność potencjału prędkości, a stąd całkowitej gęstości; (b) wyprowadzamy równanie dla granicznej całkowitej gęstości oraz odpowiadającą mu równość entropijną; (c) na podstawie porównania struktur entropijnych dedukujemy silną zbieżność prędkości. Stąd wynika Twierdzenie 8.

Główny pomysł dowodu Twierdzenia 7 polega na powrocie do nierówności (44). Możemy zauważyć, że dzięki wspólnym ograniczeniom z Lematu 9, wszystkie stałe ukryte pod symbolem $\lesssim$ są *niezależne od* N. (Zależność od ν jest niekorzystna, ponieważ przy wyprowadzeniu (44) wykorzystujemy pochodne wyższego rzędu $W_{\epsilon,\nu,N}$.) Dlatego, przy ustalonym $\nu>0$, możemy scałkować w czasie i przejść do granicy $N\to\infty$ w (44), uzyskując silną zwartość gęstości $n^{(i)}_{\nu,N}$ względem N. To daje wystarczającą informację, aby wyprowadzić słabą postać układu (41).

Na koniec warto odnotować dwie mniejsze obserwacje. Po pierwsze, rozwiązania $n_{\nu,\infty}$ układu (41) również spełniają odpowiednią nierówność entropijną, co pozwala zastosować metody z pracy [C] do wykonania granicy $\nu\to 0$ dla fenotypowo ustrukturyzowanego modelu Brinkmana. Po drugie, dzięki zastosowaniu lematu Aubin-Lionsa przeprowadzamy granicę $N\to\infty$ na poziomie modelu Darcy'ego, wyprowadzając układ (43) z (42).

4.10 Literatura

[1] D. Alexander, I. Kim, and Y. Yao. Quasi-static evolution and congested crowd transport. *Nonlinearity*, 27(4):823–858, 2014.

[2] G. Allaire. Homogenization of the Navier-Stokes equations and derivation of Brinkman's law. In *Mathématiques appliquées aux sciences de l'ingénieur (Santiago, 1989)*, pages 7–20. Cépaduès, Toulouse, 1991.

[3] F. B. Belgacem and P.-E. Jabin. Compactness for nonlinear continuity equations. *Journal of Functional Analysis*, 264(1):139–168, 2013.

[4] P. Bénilan and M. G. Crandall. The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$. *Indiana University Mathematics Journal*, 30(2):161–177, 1981.

[5] D. Bresch, T. Colin, E. Grenier, B. Ribba, and O. Saut. A viscoelastic model for avascular tumor growth. *Conference Publications*, 2009(Special):101–108, 2009.

[6] D. Bresch and P.-E. Jabin. Global existence of weak solutions for compressible Navier-Stokes equations: thermodynamically unstable pressure and anisotropic viscous stress tensor. *Annals of Mathematics*, 188(2):577–684, 2018.

[7] D. Bresch, P. B. Mucha, and E. Zatorska. Finite-energy solutions for compressible two-fluid stokes system. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 232:987–1029, 2018.

[8] F. Bubba, B. Perthame, C. Pouchol, and M. Schmidtchen. Hele-Shaw limit for a system of two reaction-(cross-)diffusion equations for living tissues. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Dec 2019.

[9] M. Burger and A. Esposito. Porous medium equation and cross-diffusion systems as limit of nonlocal interaction. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 235:113347, 2023.

[10] S. N. Busenberg and C. C. Travis. Epidemic models with spatial spread due to population migration. *Journal of Mathematical Biology*, 16(2):181–198, 1983.

[11] H. Byrne and D. Drasdo. Individual-based and continuum models of growing cell populations: a comparison. *Journal of Mathematical Biology*, 58(4):657–687, 2009.

[12] L. A. Caffarelli and A. Friedman. Asymptotic behavior of solutions of $u_t = \Delta u^m$ as $m \to \infty$. *Indiana University Mathematics Journal*, 36(4):711–728, 1987.

[13] J. Carrillo, A. Esposito, and J. S.-H. Wu. Nonlocal approximation of nonlinear diffusion equations. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 63(4):100, 2024.

[14] J. A. Carrillo, K. Craig, and F. S. Patacchini. A blob method for diffusion. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, 58:1–53, 2019.

[15] J. A. Carrillo, S. Fagioli, F. Santambrogio, and M. Schmidtchen. Splitting schemes and segregation in reaction cross-diffusion systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 50(5):5695–5718, 2018.

[16] A. Chertock, P. Degond, S. Hecht, and J.-P. Vincent. Incompressible limit of a continuum model of tissue growth with segregation for two cell populations. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 16(5):5804–5835, 2019.

[17] E. Cinti and F. Otto. Interpolation inequalities in pattern formation. *Journal of Functional Analysis*, 271(11):3348–3392, 2016.

[18] A. Cohen, W. Dahmen, I. Daubechies, and R. DeVore. Harmonic analysis of the space BV. *Revista Matemática Iberoamericana*, 19:235–263, 2003.

[19] K. Craig, I. Kim, and Y. Yao. Congested aggregation via Newtonian interaction. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 227(1):1–67, 2018.

[20] N. David. Phenotypic heterogeneity in a model of tumour growth: existence of solutions and incompressible limit. *Communications in Partial Differential Equations*, 48(4):678–710, 2023.

[21] N. David, A. R. Mészáros, and F. Santambrogio. Improved convergence rates for the Hele-Shaw limit in the presence of confining potentials. *Journal de l'École polytechnique — Mathématiques*, 13:41–71, 2026.

[22] T. Dębiec and M. Schmidtchen. Incompressible limit for a two-species tumour model with coupling through Brinkman's law in one dimension. *Acta Applicandae Mathematicae*, 169(1):593–611, 2020.

[23] P. Degond, S. Hecht, and N. Vauchelet. Incompressible limit of a continuum model of tissue growth for two cell populations. *Network and Heterogeneous Media*, 15(1):57–85, 2020.

[24] P. Degond and F.-J. Mustieles. A deterministic approximation of diffusion equations using particles. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(2):293–310, 1990.

[25] S. Di Marino and L. Chizat. A tumor growth model of Hele-Shaw type as a gradient flow. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 26:103, 2020.

[26] D. Donatelli and K. Trivisa. On a nonlinear model for tumor growth: Global in time weak solutions. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 16(4):787–803, 2014.

[27] M. Doumic, S. Hecht, B. Perthame, and D. Peurichard. Multispecies cross-diffusions: From a nonlocal mean-field to a porous medium system without self-diffusion. *Journal of Differential Equations*, 389:228–256, 2024.

[28] C. Elbar and J. Skrzeczkowski. On the inviscid limit connecting Brinkman's and Darcy's models of tissue growth with nonlinear pressure. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 27(2):28, 2025.

[29] C. M. Elliott, M. A. Herrero, J. R. King, and J. R. Ockendon. The mesa problem: diffusion patterns for $u_t = \nabla \cdot (u^m \nabla u)$ as $m \to +\infty$. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 37(2):147–154, 1986.

[30] C. M. Elliott and V. Janovský. A variational inequality approach to Hele-Shaw flow with a moving boundary. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, 88:93–107, 1981.

[31] A. Friedman. A hierarchy of cancer models and their mathematical challenges. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - B*, 4(1):147–159, 2004.

[32] A. Friedman. Mathematical analysis and challenges arising from models of tumor growth. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 17(supp01):1751–1772, 2007.

[33] A. Friedman and F. Reitich. Analysis of a mathematical model for the growth of tumors. *Journal of Mathematical Biology*, 38(3):262–284, 1999.

[34] O. Gil and F. Quirós. Convergence of the porous media equation to Hele-Shaw. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 44(8):1111–1131, 2001.

[35] H. Greenspan. On the growth and stability of cell cultures and solid tumors. *Journal of Theoretical Biology*, 56(1):229–242, 1976.

[36] H. P. Greenspan. Models for the growth of a solid tumor by diffusion. *Studies in Applied Mathematics*, 51(4):317–340, 1972.

[37] M. E. Gurtin and A. Pipkin. A note on interacting populations that disperse to avoid crowding. *Quarterly of Applied Mathematics*, 42(1):87–94, 1984.

[38] P. Gwiazda, B. Perthame, and A. Świerczewska-Gwiazda. A two-species hyperbolic–parabolic model of tissue growth. *Communications in Partial Differential Equations*, 44(12):1605–1618, 2019.

[39] M. Jacobs. Existence of solutions to reaction cross diffusion systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 55(6):6991–7023, 2023.

[40] M. Jacobs. Lagrangian solutions to the porous media equation and reaction diffusion systems. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 57(4):3806–3839, 2025.

[41] M. Jacobs, I. Kim, and J. Tong. Darcy's law with a source term. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 239(3):1349–1393, 2021.

[42] A. Jüngel, M. Vetter, and A. Zurek. A nonlocal regularization of a generalized Busenberg-Travis cross-diffusion system. *arXiv preprint arXiv:2407.01123*, 2024.

[43] I. Kim and N. Požár. Porous medium equation to Hele-Shaw flow with general initial density. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(2):873–909, 2018.

[44] I. Kim and O. Turanova. Uniform convergence for the incompressible limit of a tumor growth model. *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Analyse Non Linéaire*, 35(5):1321–1354, 2018.

[45] P.-L. Lions and S. Mas-Gallic. Une méthode particulaire déterministe pour des équations diffusives non linéaires. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 332(4):369–376, 2001.

[46] J.-G. Liu and X. Xu. Existence and incompressible limit of a tissue growth model with autophagy. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 53(5), 2021.

[47] T. Lorenzi, K. J. Painter, and C. Villa. Phenotype structuring in collective cell migration: a tutorial of mathematical models and methods. *Journal of Mathematical Biology*, 90(6):61, 2025.

[48] A. Lorz, S. Mirrahimi, and B. Perthame. Dirac mass dynamics in multidimensional nonlocal parabolic equations. *Communications in Partial Differ. Equations*, 36(4-6):1071–1098, 2011.

[49] J. S. Lowengrub, H. B. Frieboes, F. Jin, Y.-L. Chuang, X. Li, P. Macklin, S. M. Wise, and V. Cristini. Nonlinear modelling of cancer: bridging the gap between cells and tumours. *Nonlinearity*, 23(1):R1, dec 2009.

[50] A. Mellet, B. Perthame, and F. Quirós. A Hele-Shaw problem for tumor growth. *Journal of Functional Analysis*, 273(10):3061–3093, 2017.

[51] B. Perthame, F. Quirós, M. Tang, and N. Vauchelet. Derivation of a Hele-Shaw type system from a cell model with active motion. *Interfaces and Free Boundaries*, 16:489–508, 2014.

[52] B. Perthame, F. Quirós, and J. L. Vázquez. The Hele-Shaw asymptotics for mechanical models of tumor growth. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 212(1):93–127, 2014.

[53] B. Perthame and N. Vauchelet. Incompressible limit of a mechanical model of tumour growth with viscosity. *Philosophical Transactions of the Royal Society A*, 373(2050):20140283, 16, 2015.

[54] S. Richardson. Hele-Shaw flows with a free boundary produced by the injection of fluid into a narrow channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 56(4):609–618, 1972.

[55] T. Roose, S. J. Chapman, and P. K. Maini. Mathematical models of avascular tumor growth. *SIAM Review*, 49(2):179–208, 2007.

[56] K. Trivisa and F. Weber. A convergent explicit finite difference scheme for a mechanical model for tumor growth. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 51(1):35–62, 2017.

[57] N. Vauchelet and E. Zatorska. Incompressible limit of the Navier-Stokes model with a growth term. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 163:34–59, 2017.

[58] J. L. Vázquez. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory.* Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007.

[59] X. Zheng, S. M. Wise, and V. Cristini. Nonlinear simulation of tumor necrosis, neo-vascularization and tissue invasion via an adaptive finite-element/level-set method. *Bulletin of Mathematical Biology*, 67(2):211–259, 2005.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej instytucji.

Po ukończeniu studiów doktoranckich na Uniwersytecie Warszawskim w październiku 2020 odbyłem staż podoktorski na Sorbonne Université, gdzie byłem zatrudniony przez dwa lata do października 2022. Byłem tam członkiem Laboratoire Jacques-Louis Lions i pracowałem w grupie prof. Benoît Perthame. Wcześniej, spędziłem tam sześciomiesięczny staż w ramach programu NAWA im. Iwanowskiej (wrzesień 2019 – marzec 2020).

Od października 2022 jestem zatrudniony jako adiunkt na Uniwersytecie Warszawskim: najpierw przez dwa lata jako adiunkt badawczy, a obecnie, od października 2024, jako adiunkt im. Samuela Eilenberga. W latach 2024–2025 byłem kierownikiem ze strony polskiej dwuletniego projektu NAWA Wspólne Projekty Badawcze, celem którego jest wsparcie mobilności naukowców w realizacji projektów badawczych, realizowanych wspólnie przez partnerów z Polski i Niemiec (finansowanie ze strony niemieckiej zapewnia DAAD).

Po uzyskaniu stopnia doktora odbyłem następujące staże i wizyty studyjne:

1. Dresden Junior Fellow na TU Dresden (Faculty of Mathematics, Institute of Scientific Computing), Niemcy. Czas trwania: 6 miesięcy (04.2024–10.2024).

2. Dwa staże badawcze na The Pennsylvania State University (Department of Mathematics), State College, PA, USA. Opiekun: Prof. Pierre-Emmanuel Jabin. Czas trwania: 3 tygodnie (02.2024) oraz 4 tygodnie (10.2022).

3. Dwa staże badawcze na University of Oxford (Oxford Centre for Nonlinear Partial Differential Equations), UK. Opiekun: Prof. Endre Süli. Czas trwania: 2 tygodnie (11.2023) oraz 3 miesiące (10.2021–01.2022).

4. Oberwolfach Research Fellow, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Niemcy. Czas trwania: 2 tygodnie (09.2023).

Uczestniczyłem również w 16 konferencjach lub warsztatach, gdzie wygłosiłem 12 zaproszonych referatów. Pełna lista wystąpień konferencyjnych oraz staży, również tych przed uzyskaniem stopnia doktora, znajduje się w załączniku „Wykaz osiągnięć naukowych”. Ponadto, wygłosiłem zaproszone referaty na następujących seminariach:

1. Seminarium Równań Różniczkowych, Instytut Matematyczny PAN, 01.2025 & 12.2020.

2. Oxford PDE Seminar, University of Oxford, 11.2023.

3. Nečas PDE Seminar, Instytut Matematyczny, Czeska Akademia Nauk, 12.2022.

4. Oberseminar Analysis, Technical University Dresden, 12.2022.

5. Computational and Applied Mathematics Colloquium, Penn State University, USA, 10.2022.

6. Analysis Seminar, Universität Ulm, 06.2019.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę.

6.1 Dydaktyka

1. Ćwiczenia do wykładów prowadzonych na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski:

    - Analiza matematyczna II (dla informatyków), 2025/2026.

- Wybrane zagadnienia z analizy funkcjonalnej, 2025/2026, 2024/2025.
- Analiza funkcjonalna, 2024/2025, 2018/2019.
- Równanie transportu i przepływy płynów ściśliwych, 2018/2019.
- Nieliniowa analiza funkcjonalna 2017/2018.
- Analiza matematyczna I (dla informatyków), 2017/2018.

2. Inne ćwiczenia:
   - Matematyka, Wydział Chemii UW, 2024/2025.
   - Matematyka, Wydział Geologii UW, 2016/2017.
   - Równania różniczkowe zwyczajne, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska, 2016/2017.
3. Cykl wykładów *Transport equation: renormalisation and quantitative regularity estimates*, Graduate lecture series on Applied Analysis, TU Dresden, 2024
4. Nauczyciel matematyki i fizyki, The Swan School, Warszawa (IB Diploma Programme), 2014–2017
5. Supervisor, Warwick Mathematics Institute, University of Warwick, 2013/2014 (opieka nad kilkuosobową grupą studentów oraz sprawdzanie ich prac domowych z Analizy, Algebry liniowej i Równań różniczkowych).

6.2 Opieka nad studentami

Jestem obecnie promotorem pracy magisterskiej pod tytułem „A viscoelastic tissue growth model with a singular pressure law"; spodziewany termin obrony: czerwiec 2026.

6.3 Organizacja

1. Międzynarodowa konferencja *Mathematical Biology: Analysis and Applications*, Uniwersytet Warszawski, Warszawa, lipiec 2025. Członek komitetu organizacyjnego.
2. Międzynarodowa konferencja *95th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM)*, Poznań, kwiecień 2025. Zaproszony członek komitetu organizacyjnego (Co-Chair) sekcji *Applied Analysis.*
3. Tematyczny Program Badawczy *Hyperbolic conservation laws and fluid dynamics*, Uniwersytet Warszawski, Inicjatywa Doskonałości - Uczelnia Badawcza (IDUB), sierpień 2023–sierpień 2024. Członek komitetu organizacyjnego.
4. Międzynarodowa konferencja *International Congress on Industrial and Applied Mathematics (ICIAM)*, Tokio, Japonia, sierpień 2023. Współorganizator minisympozjum *Asymptotic approaches to multi-scale PDEs in mathematical physics.*
5. Międzynarodowa szkoła *Structured population models*, Uniwersytet Warszawski, maj 2023. Członek komitetu organizacyjnego.
6. Tematyczny Program Badawczy *PDEs in Mathematical Biology*, University of Warsaw, Uniwersytet Warszawski, Inicjatywa Doskonałości - Uczelnia Badawcza (IDUB), styczeń–grudzień 2023. Członek komitetu organizacyjnego.
7. Międzynarodowa konferencja *SIAM Conference on Analysis of Partial Differential Equations*, Berlin, Niemcy (online), marzec 2022. Współorganizator minisympozjum *Population dynamics: individual-based and continuum models.*

8. Międzynarodowa konferencja *Mathematical challenges in modelling population dynamics*, Laboratoire Jacques-Louis Lions, Sorbonne Université, Paryż, Francja, luty 2022. Członek komitetu organizacyjnego.

9. Międzynarodowa konferencja *Mathematical Analysis in Broad Understanding*, Uniwersytet Warszawski, październik 2018. Członek lokalnego komitetu organizacyjnego.

10. Międzynarodowa konferencja *Transport phenomena in mathematical biology*, IMPAN, Warszawa, styczeń 2018. Członek komitetu organizacyjnego.

11. Międzynarodowa konferencja *Current Topics in Kinetic Theory*, IMPAN, Warszawa, marzec 2017. Członek lokalnego komitetu organizacyjnego.

7 Inne informacje

7.1 Stypendia i nagrody

1. Stypendium Ministra Nauki dla wybitnych młodych naukowców, 2024–2027.

2. Wyróżnienie, Międzynarodowa Nagroda im. Stefana Banacha za wybitną pracę doktorską w dziedzinie nauk matematycznych, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 2021.

3. Stypendium START, Fundacja na rzecz Nauki Polskiej (FNP), 2020–2021.

4. Laureat programu im. Iwanowskiej, Narodowa Agencja Wymiany Akademickiej (NAWA), 2019–2020.

5. Stypendium doktorskie ETIUDA, Narodowe Centrum Nauki (NCN), 2019–2020.

6. Stypendium mobilnościowe dla doktorantów, Zintegrowany Program Rozwoju, Uniwersytet Warszawski, 2018–2020.

7. Nagroda dla młodych matematyków za najlepszy referat wygłoszony na XLVI Konferencji Zastosowań Matematyki, Polskie Towarzystwo Matematyczne, 2017.

7.2 Aktywność recenzencka

Recenzent dla następujących czasopism: *Communications in PDE, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Journal of Mathematical Fluid Mechanics, Journal of Mathematical Physics, Journal of Nonlinear Science, Nonlinearity, Kinetic & Related Models, Communications on Pure and Applied Analysis, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh A, Acta Applicandae Mathematicae, Applied Mathematics Letters, Mathematische Nachrichten, Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen, Acta Mathematica Scientia, Colloquium Mathematicum.*

7.3 Inne rezultaty badawcze

7.3.1 Rozprawa doktorska

Moja rozprawa doktorska stanowi zbiór wyników dotyczących matematycznej analizy szerokiej klasy równań różniczkowych cząstkowych motywowanych zagadnieniami fizyki i biologii matematycznej. Tematy, które badamy, są różnorodne ze względu na własności jakościowe oraz zastosowania — jednakże wspólną ich cechą jest potrzeba starannego rozwijania całego wachlarza metod słabej zbieżności i zwartości, nieodzownych przy analizie zjawisk nieliniowych.

W pierwszej części rozprawy badamy związek pomiędzy regularnością a wielkościami zachowywanymi dla pewnych równań obecnych w mechanice płynów. Głównymi wynikami są tutaj warunki wystarczające do zapewnienia spełnienia lokalnej równości energetycznej przez słabe rozwiązania układu Eulera-Kortewega, oraz ściśliwych układów Eulera i Naviera-Stokesa w zdegenerowanym przypadku występowania obszarów próżni.

Następnie badamy podstawowe równanie w dziedzinie dynamiki populacji ze strukturą, a mianowicie równanie wzrostu-podziału. Jest to liniowe równanie całkowo-różniczkowe opisujące współzawodnictwo pomiędzy procesami wzrostu komórkowego a fragmentacją. Głównym wynikiem tej części rozprawy jest wykazanie, że rozwiązanie pochodzące z danych początkowych w przestrzeni nieujemnych miar Radona zbiega, w odpowiedniej normie z wagą, do stanu stacjonarnego.

W ostatniej części rozprawy rozważamy dwugatunkowy model wzrostu komórek z prędkością zadaną przez prawo Brinkmana — tożsamy z modelem (14)–(15), ale w jednym wymiarze przestrzennym. Są to badania nad nieściśliwą granicą poprzedzające pracę [B] opisaną w Rozdziale 4. W tym przypadku dowód opiera się na propagowaniu regularności w przestrzeni BV.

7.3.2 Inne publikacje — dobre postawienie i koncepcje rozwiązań w mechnice cieczy

Poniżej opiszemy pokrótce wyniki uzyskane w następujących publikacjach, niebędących częścią rozprawy doktorskiej ani osiągnięcia habilitacyjnego:

[O1] T. Dębiec, J. Skipper, E. Wiedemann, *A General Convex Integration Scheme for the Isentropic Compressible Euler Equations*, Journal of Hyperbolic Differential Equations **20**(1) (2023), 95–117, doi.org/10.1142/S0219891623500042

[O2] J. A. Carrillo, T. Dębiec, P. Gwiazda, A. Świerczewska-Gwiazda, *Dissipative measure-valued solutions to the Euler-Poisson equation*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **56**(1) (2024), 304–335, doi.org/10.1137/22M1525983

[O3] T. Dębiec, E. Süli, *Corotational Hookean Models of Dilute Polymeric Fluids: Existence of Global Weak Solutions, Weak-Strong Uniqueness, Equilibration and Macroscopic Closure*, SIAM Journal on Mathematical Analysis **55**(1) (2023), 310–346, doi.org/10.1137/22M149867X

[O4] T. Dębiec, E. Süli, *On a class of generalised solutions to the kinetic Hookean dumbbell model for incompressible dilute polymeric fluids: existence and macroscopic closure*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **249** (2025), 43, doi.org/10.1007/s00205-025-02115-x

Wypukłe całkowanie dla ściśliwego układu Eulera W pracy [O1] rozważamy izoentropowy ściśliwy układ Eulera w przestrzeni $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$,

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0, \\ \partial_t m + \operatorname{div}\left(\dfrac{m \otimes m}{\rho}\right) + \nabla p(\rho) = 0, \end{cases} \tag{46}$$

gdzie $\rho = \rho(t,x)$ oznacza gęstość cieczy, a $m = m(t,x)$ jej pęd. Ciśnienie p jest nieujemną, ściśle wypukłą funkcją gęstości i zakładamy, że $\rho \geq \underline{\rho} > 0$ dla pewnej dolnej wartości $\underline{\rho}$.

W ostatnich latach pojawiło się wiele prac poświęconych niejednoznaczności tego układu w klasie słabych rozwiązań. Nawet przy uwzględnieniu odpowiedniego warunku entropijnego może istnieć nieskończenie wiele słabych rozwiązań wychodzących z tych samych danych początkowych. W istocie zbiór danych początkowych, dla których takie niejednoznaczne rozwiązania istnieją, jest gęsty w przestrzeni energetycznej.

W pracy [O1] przedstawiamy charakteryzację otoczki Λ-wypukłej zbioru konstytutywnego dla układu (46). Taki zbiór konstytutywny pojawia się przy przeformułowaniu układu Eulera jako liniowego układu równań różniczkowych cząstkowych sprzężonego z punktowymi nieliniowymi więzami.

Dokładniej, rozważamy następujący liniowy układ równań

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div} m = 0, \\ \partial_t m + \operatorname{div} M + \nabla Q = 0, \end{cases}$$

a zbiorem konstytutywnym dla układu Eulera (46) nazywamy wówczas zbiór stanów (ρ, m, M, Q), dla których spełnione są poniższe nieliniowe ograniczenia

$$M = m \otimes m - \frac{1}{d}|m|^2 I_d, \qquad Q = p(\rho) + \frac{1}{d}\frac{|m|^2}{\rho}.$$

Taki formalizm oraz geometryczna analiza zbioru konstytutywnego umożliwiły badanie ściśliwego układu Eulera poprzez połączenie analizy fal płaskich Tartara z metodą całkowania wypukłego. To pionierskie podejście zostało po raz pierwszy zastosowane do *nieściśliwych* równań Eulera przez De Lellisa i Székelyhidiego, ukazując głębokie zjawiska niejednoznaczności słabych rozwiązań równań dynamiki płynów.

Dotychczas uzyskane wyniki w przypadku ściśliwym rozwijały się zasadniczo w dwóch kierunkach: albo traktowano równania Eulera dla cieczy ściśliwej jako układ „kawałkami” nieściśliwy i wykorzystywano analizę geometryczną rozwiniętą w przypadku nieściśliwym jako swoistą czarną skrzynkę (do tej kategorii należą wszystkie rezultaty oparte na zagadnieniach Riemanna); albo też ustalano z góry gęstość i manipulowano zbiorem konstytutywnym zależnym od tej zadanej funkcji. W obu tych podejściach „dzikie” rozwiązania ściśliwych równań Eulera, wykazują oscylacje — a tym samym niejednoznaczność — wyłącznie w polu prędkości. Pełna analiza geometryczna zbioru konstytutywnego odpowiadającego w pełni ściśliwemu przypadkowi nie została dotąd przeprowadzona. W konsekwencji, aktualny stan badań pozostawiał otwartym pytanie, czy oscylacje w gęstości mogłyby prowadzić do odmiennych scenariuszy.

W pracy [O1] zamykamy to zagadnienie poprzez analizę „pełnego” zbioru konstytutywnego oraz wykazanie, że każdy stan należący do otoczki Λ-wypukłej ściśliwego zbioru konstytutywnego może zostać zapisany jako Λ-wypukła kombinacja stanów, w których oscyluje pęd (i tylko on). Innymi słowy, same oscylacje pędu (a zatem także oscylacje prędkości) wystarczają do opisu zbioru rozwiązań osiągalnych metodą wypukłego całkowania. Powyższy rezultat uzupełniliśmy dwoma konstrukcyjnymi twierdzeniami, które pokazują, że każde podrozwiązanie przyjmujące wartości w otoczce Λ-wypukłej zbioru konstytutywnego generuje dokładne rozwiązania, które są, w odpowiednim sensie, rezydualne wśród podrozwiązań. Stanowi to nowy punkt wyjścia do konstruowania „dzikich” rozwiązań równań Eulera dla ośrodka ściśliwego.

Rozwiązania o wartościach miarowych dla układu Eulera-Poissona W pracy [O2] badamy pewną klasę bezciśnieniowych układów Eulera-Poissona z oddziaływaniami nielokalnymi oraz tłumieniem. W szczególności, w ograniczonej gładkiej dziedzinie $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ rozważamy następujący układ równań dla gęstości $\rho = \rho(t,x)$, prędkości $u = u(t,x)$ oraz potencjału $\Phi = \Phi(t,x)$:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}(\rho u \otimes u) = -\gamma\, \rho u - \rho\, \nabla\Phi - \rho\, x, \\ -\Delta\Phi = \rho - \dfrac{1}{|\Omega|}\displaystyle\int_\Omega \rho \,\mathrm{d}x, \end{cases} \tag{47}$$

gdzie $\gamma > 0$ jest współczynnikiem tarcia. Układ ten można interpretować jako hydrodynamiczny model typu Eulera z nielokalnymi siłami odpychania–przyciągania oraz efektami wyrównywania wynikającymi ze sprzężenia Poissona. W zastosowaniach, tego rodzaju układy pojawiają się zarówno w fizyce matematycznej, jak i w naukach społecznych, jako modele dynamiki kolektywnej oraz zjawisk samoorganizacji typowych dla układów cząstek oddziałujących. Są one istotne m.in. w fizyce plazmy, astrofizyce (ośrodki samograwitujące) oraz w modelach ruchu zbiorowego w biologii.

Zajmujemy się zagadnieniem istnienia globalnych rozwiązań powyższego układu w szerokiej klasie danych początkowych. Ponieważ wykazanie istnienia rozwiązań dystrybucyjnych dla dowolnych danych początkowych o skończonej energii jest w zasadzie niemożliwe, popularnym kierunkiem badań jest osłabienie pojęcia rozwiązania do pewnej „bardzo słabej" koncepcji, która omija subtelne problemy zwartości, występujące notorycznie w nieliniowych układach równań różniczkowych cząstkowych.

Obecnie za najbardziej istotne takie uogólnienie uważa się pojęcie *dyssypatywnych rozwiązań miarowych*. Mówiąc skrótowo, składają się one z klasycznej miary Younga (rodziny sparametryzowanych miar probabilistycznych na przestrzeni stanów), uzupełnionej o odpowiednie miary defektowe, które uwzględniają możliwe koncentracje masy, pędu lub energii, oraz które spełniają układ (47) w pewnym uśrednionym sensie. „Dyssypatywność" oznacza tutaj, że zachodzi miarowa wersja nierówności energetycznej

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}\int_\Omega \rho|u|^2 + |\nabla\Phi|^2 + \rho|x|^2\,\mathrm{d}x + \gamma\int_\Omega \rho|u|^2\,\mathrm{d}x \le 0.$$

Koncepcja ta przyciągnęła znaczną uwagę ze względu na zaskakującą własność spełniania zasady słabo-mocnej jednoznaczności. W tym kontekście oznacza to, że każde dyssypatywne rozwiązanie miarowe wychodzące z deterministycznych danych początkowych pokrywa się z jednoznacznym rozwiązaniem gładkim tak długo, jak długo to ostatnie istnieje. Jest to własność niezwykle istotna dla koncepcji rozwiązań, które — jak rozwiązania miarowe — z założenia wydają się bardzo słabe.

Pierwszym wynikiem pracy [O2] jest istnienie globalnych w czasie dyssypatywnych rozwiązań miarowych. Następnie, definiując odpowiedni funkcjonał relatywnej energii, wyprowadzamy nierówność relatywnej energii, która umożliwia porównanie rozwiązania miarowego z rozwiązaniem klasycznym wychodzącym z tych samych danych początkowych. Prowadzi to do wyniku (częściowej) słabo-mocnej jednoznaczności. Było to pierwsza praca badająca rozwiązania miarowe dla układu hydrodynamicznego obejmującego oddziaływania nielokalne oraz brak ciśnienia.

Kinetyczne modele przepływów polimerowych Płyny polimerowe są płynami złożonymi, składającymi się z rozpuszczalnika, w którym rozpuszczone są długie łańcuchy molekularne (polimery). W odróżnieniu od płynów newtonowskich, których reakcja na naprężenie zależy liniowo od szybkości odkształcenia, płyny polimerowe wykazują zarówno właściwości lepkie, jak i sprężyste. Ta lepkosprężystość wynika z mikrostruktury łańcuchów polimerowych: podczas przepływu łańcuchy ulegają rozciąganiu, orientacji i relaksacji, wywierając sprężyste naprężenia na otaczający je rozpuszczalnik.

Typowym punktem wyjścia dla mikro–makroskopowych modeli rozcieńczonych płynów polimerowych jest układ Naviera-Stokesa-Fokkera-Plancka (NSFP). W tym ujęciu nieściśliwe równania Naviera-Stokesa na pole prędkości $u(t,x)$ są sprzężone z równaniem Fokkera-Plancka na funkcję gęstości prawdopodobieństwa $\psi(t,x,q)$ określoną na dziedzinie fizycznej Ω oraz w przestrzeni konfiguracji D, opisującej konfigurację cząsteczki polimeru, często idealizowanej jako tzw. „hantla" z wektorem orientacji q. Dodatkowe naprężenie polimerowe pojawia się w równaniu pędu poprzez wzór Kramersa

$$\tau(t,x) = \int_D \psi(t,x,q)\,(q\otimes q)\,\mathrm{d}q - \left(\int_D \psi(t,x,q)\,\mathrm{d}q\right)\mathrm{Id},$$

a pełny układ odzwierciedla równowagę pomiędzy adwekcją hydrodynamiczną, dyssypacją, siłami sprężystymi oraz dyfuzją zarówno w zmiennych fizycznych, jak i w zmiennych konfiguracyjnych. Prowadzi to do następującej ogólnej postaci układu NSFP

$$\begin{cases} \partial_t u + (u\cdot\nabla_x)u - \nu\Delta_x u + \nabla_x p = \operatorname{div}_x \tau, \\ \operatorname{div}_x u = 0, \\ \partial_t\psi + u\cdot\nabla_x\psi + \operatorname{div}_q\big((\nabla_x u)\,q\,\psi\big) - \mu\Delta_x\psi = \operatorname{div}_q\big(M\nabla_q(\psi/M)\big), \end{cases} \tag{48}$$

gdzie $\nu > 0$ jest lepkością rozpuszczalnika, $\mu \ge 0$ jest współczynnikiem dyfuzji środka masy, $M(q)$ jest zadanym Makswellianem, a τ spełnia powyższą tożsamość Kramersa. Układ (48) opisuje mikro–makroskopowe sprzężenie: człon adwekcji w przestrzeni konfiguracji w równaniu Fokkera-Plancka modeluje rozciąganie polimerów przez gradient prędkości płynu, natomiast dodatkowe naprężenie w równaniu pędu reprezentuje sprzężenie zwrotne deformacji polimerów z dynamiką płynu.

Na poziomie formalnym, scałkowanie równania kinetycznego względem $q \otimes q$ prowadzi do makroskopowych modeli typu Oldroyda-B, w których ewolucja tensora naprężeń polimerowych jest zadana przez pochodną konwekcyjną odzwierciedlającą deformację płynu. Ścisłe uzasadnienie tej równoważności na poziomie słabych rozwiązań stanowi jednak trudny problem i w najbardziej ogólnych przypadkach nadal pozostaje otwarty. Pomimo że modele tego typu odgrywają kluczową rolę w reologii i zastosowaniach, ich analiza matematyczna napotyka istotne trudności wynikające z nieliniowego sprzężenia pomiędzy stopniami swobody płynu i polimerów oraz z braku odpowiednich oszacowań a priori w trzech wymiarach przestrzennych.

Model korotacyjny Powszechnie stosowane uproszczenie modelu mikro–makroskopowego polega na założeniu, że człon adwekcyjny w przestrzeni konfiguracji wykorzystuje część antysymetryczną gradientu prędkości (tzw. tensor wirowości), zamiast pełnego gradientu. To „korotacyjne” przybliżenie często upraszcza analizę poprzez eliminację pewnych nieliniowych sprzężeń oraz umożliwia uzyskanie silniejszych oszacowań a priori dla funkcji gęstości prawdopodobieństwa. W ujęciu makroskopowym analogiczne uproszczenia prowadzą do korotacyjnych wariantów modelu Oldroyda-B, w których pochodna konwekcyjna zostaje zastąpiona bardziej przystępną w analizie pochodną rotacyjną. W pracy [O3] przedstawiamy kompleksowe badanie korotacyjnego układu NSFP oraz jego makroskopowego odpowiednika — korotacyjnego modelu Oldroyda-B. Wykazujemy istnienie globalnych w czasie słabych rozwiązań dla szerokiej klasy danych początkowych oraz pokazujemy, że spełniają one pewną postać zasady słabo-mocnej jednoznaczności. Ponadto szacujemy tempo zbieżności do stanu równowagi oraz dowodzimy domknięcia makroskopowego modelu kinetycznego.

Rozwiązania uogólnione dla ogólnego układu NSFP W pracy [O4] dowodzimy kilku wyników o istnieniu globalnych rozwiązań dla kinetycznego modelu NSFP (48) z liniowym potencjałem sprężystości, zadanym przez prawo Hooke'a. Wprowadzamy pojęcie *uogólnionych rozwiązań dyssypatywnych*, które jest złagodzeniem klasycznego pojęcia słabego rozwiązania i pozwala na obecność miary defektu w bilansie pędu, aby uwzględnić potencjalny brak zwartości w polimerowej składowej tensora naprężeń. Dowodzimy globalnego istnienia takich uogólnionych rozwiązań dla wymiarów przestrzennych $d \geq 2$, pokazując również, że spełniają one nierówność energetyczną kontrolującą zarówno energię kinetyczną płynu, jak i funkcję entropii związaną z gęstością prawdopodobieństwa.

Co najważniejsze, jesteśmy w stanie zidentyfikować miarę *defektu dyssypatywnego*, która dominuje nad wyżej wymienioną miarą koncentracji i spełnia odpowiednią nierówność energetyczną — mianowicie nierówność energetyczną związaną z makroskopowym modelem Oldroyda-B.

Znaczenie tej „dodatkowej” nierówności energetycznej polega na tym, że pozwala ona na sformułowanie twierdzenia o warunkowej regularności: jeśli uogólnione rozwiązanie dyssypatywne ma wystarczająco regularne pole prędkości, to w rzeczywistości jest ono słabym rozwiązaniem pierwotnego modelu kinetycznego. Ponadto w dwóch wymiarach przestrzennych wykazujemy ścisłe domknięcie makroskopowe: przy odpowiednich założeniach o regularności danych początkowych tensor naprężeń polimerowych uzyskany z gęstości prawdopodobieństwa ψ spełnia dyfuzyjny makroskopowy układ Oldroyda-B, a miary defektów zanikają. W dwóch wymiarach daje to ścisłe powiązanie między kinetycznym opisem mikro–makro a jego makroskopowym odpowiednikiem i rozszerza wcześniejsze wyniki dotyczące globalnego istnienia na znacznie szerszą klasę danych początkowych.

Podpisany elektronicznie przez
Tomasz Dębiec; Uniwersytet Warszawski
03.02.2026
13:41:27 +01'00'