AUTOREFERAT

PIOTR SZEWCZAK

1. Dyplomy i stopnie naukowe

Doktor nauk matematycznych 2015
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie
Tytuł rozprawy: *GO-przestrzenie i parazwartość w iloczynach kartezjańskich*
Promotr: dr hab. Kazimierz Alster

Magister matematyki 2008
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie
Tytuł rozprawy: *Klasa przestrzeni, których iloczyn kartezjański z dwolną przestrzenią parazwartą jest parazwarty*
Promotr: dr hab. Kazimierz Alster

2. Zatrudnienie w jednostkach naukowych

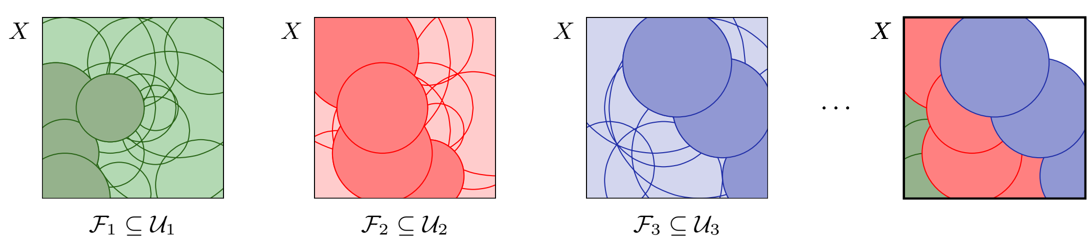
Adiunkt . . . . 10.2016 – obecnie
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

Stanowisko podoktorskie . . . . 02.2016 – 01.2017
Uniwersytet Bar–Ilan, Izrael

Asystent . . . . 10.2008 – 09.2016
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego w Warszawie

3. Opis osiągnięć naukowych: Kombinatoryczne własności pokryciowe

3.1. **Wprowadzenie.** W 1924 roku Menger [32] zaobserwował, że każda przestrzeń metryczna X, która jest *σ-zawarta* (jest przeliczalną sumą swoich podzbiorów zwartych) ma taką własność, że dla dowolnej bazy $\mathcal{B}$ tej przestrzeni istnieją zbiory $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}$, takie że $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(B_n) = 0$ oraz $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Menger postawił hipotezę [32], że własność ta charakteryzuje σ-zwartość w klasie przestrzeni metrycznych. Hurewicz [26] przedstawił własność Mengera w równoważnej postaci bez odwoływania się do metryki: dla dowolnego ciągu $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2, \ldots$ pokryć otwartych danej przestrzeni topologicznej istnieją zbiory skończone $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2, \ldots$, takie że rodzina $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ jest pokryciem otwartym danej przestrzeni. Tym samym definicja własności Mengera została rozszerzona na wszystkie przestrzenie topologiczne. Sierpiński [26] wykazał, że *zbiór Łuzina*, czyli nieprzeliczalna podprzestrzeń prostej rzeczywistej z naturalną topologią, której przecięcie z dowolnym zbiorem pierwszej kategorii na prostej jest co najwyżej przeliczalne, stanowi kontrprzykład dla hipotezy Mengera. Istnienie zbioru Łuzina jest niesprzeczne z ZFC a jego konstrukcja jest na przykład możliwa przy założeniu, że zachodzi hipoteza continuum. W 2006 roku Bartoszyński i Tsaban [9], wykorzystując idee z pracy Fremlina i Millera [21], przedstawili jednolitą konstrukcję w ZFC podprzestrzeni prostej, która ma własność Mengera i nie jest σ-zwarta.



Schemat własności Mengera

To krótki zarys własności Mengera będącej jedną z klasycznych i jednocześnie najważniejszych własności rozważanych w prezentowanej tematyce. *Kombinatoryczne własności pokryciowe* są własnościami topologicznymi opartymi na schematach generowania pokrycia danej przestrzeni topologicznej z ciągu pokryć tej przestrzeni [48]. Pochodzą one z różnych obszarów matematyki jak topologia, teoria mnogości, teoria wymiaru, teoria miary czy teoria przestrzeni funkcyjnych oraz umożliwiają stosowanie metod każdej z tych dziedzin w pozostałych.

Przez *przestrzeń* rozumiemy nieskończoną przestrzeń topologiczną Tichonowa. *Pokryciem* danej przestrzeni nazywamy rodzinę zbiorów, której suma jest całą przestrzenią. Niech $\mathcal{U}$ będzie pokryciem przestrzeni X. Pokrycie $\mathcal{U}$ jest *γ-pokryciem*, jeżeli jest nieskończone oraz dla każdego punktu $x \in X$ zbiór $\{\, U \in \mathcal{U} : x \notin U \,\}$ jest skończony. Pokrycie $\mathcal{U}$ jest *ω-pokryciem*, jeżeli $X \notin \mathcal{U}$ oraz dla każdego zbioru skończonego $F \subseteq X$ istnieje zbiór $U \in \mathcal{U}$, taki że $F \subseteq U$. Niech O, Γ, Ω będą rodzinami wszystkich pokryć otwartych, γ-pokryć otwartych oraz ω-pokryć otwartych danej przestrzeni. Dla ustalonych rodzin $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \{\mathrm{O}, \Gamma, \Omega\}$ definiujemy następujące własności[1], które dana przestrzeń może posiadać.

$\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: dla każdego ciągu $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots \in \mathcal{A}$ istnieją elementy $U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2, \ldots$, takie że $\{\, U_n : n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathcal{B}$,

$\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: dla każdego ciągu $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots \in \mathcal{A}$ istnieją zbiory skończone skończone $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2, \ldots$, takie że $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n \in \mathcal{B}$,

$\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$: dla każdego ciągu $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots \in \mathcal{A}$, istnieją zbiory skończone skończone $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2, \ldots$, takie że $\{\, \bigcup \mathcal{F}_n : n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathcal{B}$.

Zgodnie z tą notacją przestrzeń ma własność Mengera, jeśli spełnia $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$. Rozważane własności pokryciowe zostały wprowadzone w powyższej formie przez Scheepersa [48], który przedstawił relacje zachodzące pomiędzy nimi w postaci diagramu nazywanego dzisiaj diagramem Scheepersa. Skrajne własności w diagramie należą do klasycznych i były wprowadzone przez Mengera ($\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$) [32, 26], Hurewicza ($\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \Gamma)$) [26, 27], Rothbergera ($\mathsf{S}_1(\mathrm{O}, \mathrm{O})$) [43], Gerlitsa i Nagy'ego ($\mathsf{S}_1(\Omega, \Gamma)$ (ta ostatnia również znana jako własność γ) [23]. Inne własności były rozważane przez Arhangel'skiĭego ($\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Omega)$) [1], Sakai'ego ($\mathsf{S}_1(\Omega, \Omega)$) [44], Bukovský'ego ($\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$) [14] oraz innych w powiązaniu z badaniami nad lokalnymi własnościami przestrzeni funkcyjnych.

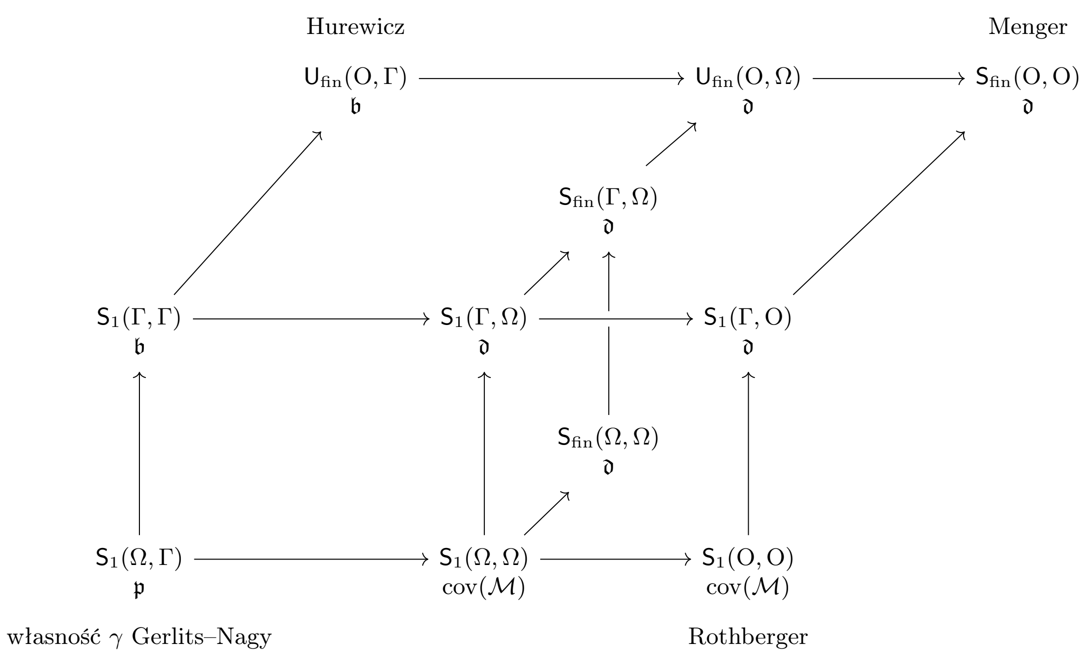


Diagram Scheepersa. Trywialne własności oraz te, które są równoważne w ZFC, nie zostały w nim ujęte.

[1]Własności $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ oraz $\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ można również definiować dla dowolnych rodzin zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$.

Rozważane własności nazywamy *kombinatorycznymi*, gdyż są one ściśle powiązane ze strukturą kombinatoryczną przestrzeni *Baire'a* $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ [41] (w $\mathbb{N}$ przyjmujemy topologię dyskretną a w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ topologię produktową). Na przykład zerowymiarowa przestrzeń Lindelöfa ma własność Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy ciągły obraz Y tej przestrzeni w $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nie jest dominujący [27], tzn. istnieje funkcja $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, taka że dla dowolnej funkcji $f \in Y$ zbiór $\{\, n : f(n) < g(n) \,\}$ jest nieskończony. Dla każdej własności z diagramu definiujemy tzw. *krytyczną liczbę kardynalną* tj. minimalną moc podprzestrzeni $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, która nie posiada danej własności. Ponieważ $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nie ma własności Mengera, najsłabszej z powyższych własności, więc dla wszystkich tych własności krytyczne liczby kardynalne są dobrze określone i zostały one zapisane w diagramie. Dla własności Mengera krytyczną liczbą kardynalną jest liczba dominująca $\mathfrak{d}$. Oznacza to w szczególności, że każda podprzestrzeń $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mocy mniejszej niż $\mathfrak{d}$ jest Mengera i to bez względu na jej strukturę. Definicje użytych w dalszej części tej prezentacji liczb kardynalnych takich jak $\operatorname{cov}(\mathcal{M}), \operatorname{cof}(\mathcal{M}), \mathfrak{g}, \mathfrak{r}, \mathfrak{g}$ oraz ich własności można znaleźć w pracy Blassa [12]. Kombinatoryka odgrywa również kluczową rolę w konstruowaniu przestrzeni posiadających rozważane własności. Szczególna uwaga skierowana jest na specjalne *podzbiory prostej* czyli przestrzenie homeomorficzne z podprzestrzeniami prostej rzeczywistej z naturalną topologią.

Kombinatoryczne własności pokryciowe znalazły zastosowania w innych obszarach: w teorii przestrzeni funkcyjnych [52], forcingu [18], teorii Ramsey'a w algebrze [65], kombinatoryce podprzestrzeni dyskretnych [2], w hiperprzestrzeniach z topologią Vietorisa [30], produktach przestrzeni Lindelöfa [3] i produktach przestrzeni parazwartych [56].

3.2. **Produkty zbiorów Mengera** [57, 59]**.** Todorčević [68, §3] udowodnił że w ZFC istnieją ogólne przestrzenie topologiczne posiadające własność γ, których produkt nie ma własności Mengera. Rezultat ten pokazuje, że żadna z własności występujących w diagramie nie jest zamknięta na skończone produkty. W klasie podzbiorów prostej sytuacja jest dużo bardziej subtelna i zależy ona od przyjętej aksjomatyki teoriomnogościowej. Przez *zbiór* posiadający własność topologiczną **P** rozumiemy przestrzeń z klasy podzbiorów prostej (posiadającą własność **P**). Przy założeniu, że zachodzi hipoteza continuum, Miller, Tsaban i Zdomskyy [36] skonstruowali dwa zbiory posiadające własność γ, których produkt nie jest Mengera. W kontraście do tego rezultatu, w modelu Lavera [31] zbiory posiadające własności z najniższego rzędu w diagramie są przeliczalne [31]. W tym przypadku, w trywialny sposób, własności te są zamknięte na skończone produkty w klasie podzbiorów prostej.

Problem, czy w ZFC istnieją zbiory Mengera, których produkt nie ma własności Mengera został zasugerowany przez Scheepersa (*Open problems in Topology* [69, Problem 6.7]). Just, Miller, Scheepers i Szeptycki udowodnili, że istnieją takie zbiory przy założeniu, że zachodzi hipoteza continuum [28, Theorem 3.7]. Następnie Scheepers i Tsaban, pokazali w oparciu o podobne metody, że wystarczy założenie $\operatorname{cov}(\mathcal{M}) = \operatorname{cof}(\mathcal{M})$ [53, Theorem 49]. *Zbiór* $\operatorname{cov}(\mathcal{M})$*-Łuzina* to przestrzeń homeomorficzna z podzbiorem prostej X, takim że $|X| \geq \operatorname{cov}(\mathcal{M})$ oraz $|X \cap M| < \operatorname{cov}(\mathcal{M})$ dla dowolnego zbioru M pierwszej kategorii. Zbiory z przytoczonych przykładów są zbiorami $\operatorname{cov}(\mathcal{M})$-Łuzina (każdy taki zbiór jest nawet dziedzicznie Rothbergera; istnienie takich zbiorów jest niezależne od ZFC). Inną konstrukcję takich zbiorów zaproponowali Repovš i Zdomskyy [42, Proposition 3.4] przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ (dokładny opis struktury tych zbiorów zostanie przedstawiony w dalszej części). W trakcie badań, których rezultaty zostały zaprezentowane poniżej, Zdomskyy [73] udowodnił, że w modelu Millera produkt dowolnych dwóch zbiorów Mengera jest Mengera. Wynik ten pokazuje, że do istnienie zbiorów Mengera, których produkt nie jest Mengera niezbędne są dodatkowe założenia teoriomnogościowe.

Utożsamiamy kostkę Cantora $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z rodziną $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ wszystkich podzbiorów zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Ponieważ kostka Cantora jest homeomorficzna ze zbiorem Cantora na prostej, więc każda podprzestrzeń $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ jest elementem klasy podzbiorów prostej. Niech $[\mathbb{N}]^\infty$ będzie rodziną wszystkich nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ oraz Fin rodziną wszystkich skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$. Każdy zbiór $a \in [\mathbb{N}]^\infty$ identyfikujemy z ciągiem rosnącym jego elementów, elementem przestrzeni Baire'a $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Zatem zachodzi inkluzja zbiorów $[\mathbb{N}]^\infty \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Ponadto topologia przestrzeni $[\mathbb{N}]^\infty$ jest zgodna z topologią podprzestrzeni indukowaną przez $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. W zależności od kontekstu elementy przestrzeni $[\mathbb{N}]^\infty$ będziemy nazywali zbiorami lub funkcjami. Niech κ będzie liczbą kardynalną nieskończoną. Dla funkcji $a, b \in [\mathbb{N}]^\infty$ piszemy $a \leq^* b$, jeżeli zbiór $\{\, n : b(n) < a(n) \,\}$ jest skończony. Zbiór $X \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ jest *κ-nieograniczony*, jeżeli $|X| \geq \kappa$ oraz dla dowolnej funkcji $b \in [\mathbb{N}]^\infty$ zachodzi $|\{\, x \in X : x \leq^* b \,\}| < \kappa$. Przestrzeń X jest *$\mathfrak{d}$-skoncentrowana*, jeżeli $|X| \geq \mathfrak{d}$ oraz istnieje zbiór przeliczalny $D \subseteq X$, taki że $|X \setminus U| < \mathfrak{d}$ dla dowolnego zbioru otwartego U w X zawierającego D. W ZFC istnieje zbiór $\mathfrak{d}$-nieograniczony X i wtedy $X \cup \mathrm{Fin}$ jest zbiorem $\mathfrak{d}$-skoncentrowanym. Kontrprzykład dla hipotezy Mengera, który skonstruowali w ZFC Bartoszyński i Tsaban [9], ma taką właśnie postać. Zaznaczmy też, że każdy zbiór $\mathfrak{d}$-skoncentrowany jest Mengera [70, Corollary 1.14] i nie jest σ-zwarty. Wspomniane wyżej w kontekście produktów przykłady zbiorów Mengera są $\mathfrak{d}$-skoncentrowane.

Czysto kombinatoryczne podejście do problemu produktów zbiorów Mengera umożliwiło wskazanie nowych przykładów przy słabszych założeniach teoriomnogościowych niż dotąd wymienione, niektóre z tych założeń są sprzeczne z hipotezą continuum. Zastosowano tu całkowicie nową konstrukcję dowodową.

Jeżeli $X \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$, to traktujemy X jako przestrzeń z topologią podprzestrzeni $\mathrm{P}(\mathbb{N})$.

Twierdzenie 3.1 ([57, Theorem 2.7]). *Niech $\kappa \in \{\mathrm{cf}(\mathfrak{d}), \mathfrak{d}\}$ oraz $X \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ będzie zbiorem zawierającym zbiór κ-nieograniczony. Wtedy istnieje zbiór $\mathfrak{d}$-skoncentrowany $Y \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ (w szczególności będący zbiorem Mengera), taki że produkt $X \times Y$ nie ma własności Mengera.*

Opiszemy teraz wybrane założenia teoriomnogościowe, które zapewniają istnienie zbiorów Mengera spełniających założenia twierdzenia 3.1. Załóżmy, że $\mathfrak{d}$ jest liczbą singularną i niech $X \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ będzie zbiorem $\mathrm{cf}(\mathfrak{d})$-nieograniczonym o mocy $\mathrm{cf}(\mathfrak{d})$ (zbiór taki istnieje w ZFC [57, dyskusja przed lematem 2.6]). Wtedy X jest *trywialnym* zbiorem Mengera, tzn. jego moc jest mniejsza od liczby kardynalnej $\mathfrak{d}$ krytycznej dla własności Mengera. Jest to pierwszy w literaturze przykład trywialnego zbioru Mengera, którego iloczyn ze zbiorem Mengera nie jest Mengera. Inne założenie to nierówność $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$, która pozwala na konstrukcję zbioru Mengera w $[\mathbb{N}]^\infty$, który jest $\mathfrak{d}$-nieograniczony [57, Theorem 3.3, Theorem 3.2]. Zaznaczmy również, że singularność liczby $\mathfrak{d}$ pociąga za sobą nierówność $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$ [57, dyskusja w dowodzie (2)⇒ (1) Theorem 3.3]. Nierówność $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$ wynika zarówno z równości $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ (wykorzystanej przez Scheepersa i Tsabana) jak i $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ (wykorzystanej przez Repovša i Zdomskyy'ego).

W związku z twierdzeniem 3.1 i jego konsekwencjami pojawiło się pytanie, czy nierówność $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$ jest warunkiem koniecznym do istnienie dwóch zbiorów Mengera, których produkt nie jest Mengera. Metody użyte w dowodzie twierdzenia 3.1 zostały rozwinięte w innej pracy [59, Theorem 2.12], aby wykazać następujący rezultat, który dostarcza odpowiedzi negatywnej. Niech $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O}))$ będzie minimalną mocą rodziny podzbiorów $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ posiadających własność Mengera, której suma nie jest Mengera.

Twierdzenie 3.2 ([59, Theorem 2.12]). *Niech $X \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ będzie zbiorem zawierającym zbiór $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O}))$-nieograniczony. Wtedy istnieje zbiór Mengera $Y \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$, taki że produkt $X \times Y$ nie ma własności Mengera.*

W ZFC istnieje zbiór $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O}))$-nieograniczony o mocy $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O}))$[59, Lemma 2.15]. Jeżeli więc $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})) < \mathfrak{d}$, to X w twierdzeniu 3.1 może być trywialnym zbiorem Mengera. Nierówność $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})) < \mathfrak{d}$ jest spełniona na przykład w modelu Blassa–Shelaha ([59, Theorem 2.12], [13]) lub gdy $\mathfrak{d}$ jest liczbą singularną [64, Corollary 2.3(3)]. Zaznaczmy też, że w modelu Blassa–Shelaha zachodzi nierówność $\mathfrak{d} > \mathfrak{r}$.

Główne osiągnięcia

- Jeżeli $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$ lub $\mathrm{add}(\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})) < \mathfrak{d}$, to istnieją zbiory Mengera X i Y, których produkt $X \times Y$ nie ma własności Mengera.

3.3. **Produkty zbiorów Mengera z silnymi własnościami** [59, 61]. Przy pewnych założeniach możliwe jest, aby zbiory X i Y z końca poprzedniego podrozdziału miały dodatkowe silniejsze własności, na przykład aby wszystkie skończone potęgi tych zbiorów były Mengera lub aby były one dziedzicznie Mengera. Wyniki badań w tym obszarze poprzedzimy potrzebnymi notacjami.

Przez *ultrafiltr* na $\mathbb{N}$ rozumiemy maksymalny w sensie inkluzji niepusty zbiór $U \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$, taki że dla dowolnych $a, b \in U$ zachodzi $a \cap b \in U$ oraz dla dowolnych $a \in U$ oraz $b \in \mathrm{P}(\mathbb{N})$, jeżeli $a \subseteq b$, to $b \in U$. Niech $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ będzie ultrafiltrem. Dla funkcji $a, b \in [\mathbb{N}]^\infty$ piszemy $a \leq_U b$, jeżeli $\{\, n : a(n) \leq b(n) \,\} \in U$. Zbiór $A \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ jest *$\leq_U$-ograniczony*, jeżeli istnieje funkcja $b \in [\mathbb{N}]^\infty$, taka że $a \leq_U b$ dla wszystkich funkcji $a \in A$. Niech $\mathfrak{b}(U)$ będzie minimalną mocą podzbioru $[\mathbb{N}]^\infty$, który nie jest $\leq_U$-ograniczony. Zachodzą nierówności $\mathfrak{b} \leq \mathfrak{b}(U) \leq \mathrm{cf}(\mathfrak{d})$. Zbiór $X \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ nazywamy *U-skalą*, jeżeli $|X| \geq \mathfrak{b}(U)$ oraz dla dowolnej funkcji $b \in [\mathbb{N}]^\infty$ zachodzi $|\{\, x \in X : x \leq_U b \,\}| < \mathfrak{b}(U)$. W ZFC istnieje U-skala [71, Lemma 2.9] i jeśli X jest U-skalą, to wszystkie skończone potęgi zbioru $X \cup \mathrm{Fin}$ są Mengera [71, Theorem 4.5].

Wróćmy do rezultatu Repovša i Zdomskyy'ego [42, Theorem 3.3]. Udowodnili oni, że przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ istnieją U-skala X i V-skala Y dla pewnych ultrafiltrów $U, V \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$, takie że produkt $(X \cup \mathrm{Fin}) \times (Y \cup \mathrm{Fin})$ nie ma własności Mengera (w szczególności wszystkie skończone potęgi zbiorów $X \cup \mathrm{Fin}$ oraz $Y \cup \mathrm{Fin}$ są Mengera). W toku dalszych prac wykazano, że teza ta zachodzi przy słabszym założeniu ale dowód jest dużo bardziej złożony.

Twierdzenie 3.3 ([59, Theorem 2.5(3)])**.** *Załóżmy, że* $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$ *i* $\mathfrak{d}$ *jest liczbą regularną. Istnieją wtedy* U*-skala* X *i* V*-skala* Y *dla pewnych ultrafiltrów* $U, V \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$*, takie że produkt* $(X \cup \mathrm{Fin}) \times (Y \cup \mathrm{Fin})$ *nie jest Mengera.*

Twierdzenie 3.3 znajduje zastosowanie w produktach przestrzeni funkcyjnych. Niech Y będzie przestrzenią i dla dowolnego elementu $y \in Y$ zdefiniujmy $\Omega_y := \{ A \subseteq Y : y \in \overline{A} \}$. Przestrzeń Y posiada *przeliczalną ciasność wiatrakową* [1], jeśli dla dowolnego $y \in Y$ spełnia $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega_y, \Omega_y)$ czyli dla dowolnego $y \in Y$ oraz zbiorów $A_1, A_2, \ldots \subseteq Y$, takich że $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$ istnieją zbiory skończone $F_1 \subseteq A_1$, $F_2 \subseteq A_2$, $\ldots$, takie że $y \in \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n}$. Zdefiniowana tu własność jest uogólnieniem pierwszego aksjomatu przeliczalności. Dla przestrzeni X niech $\mathrm{C_p}(X)$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych o wartościach rzeczywistych określonych na X z topologią zbieżności punktowej. Jeżeli X jest przestrzenią metryczną ośrodkową, to przestrzeń $\mathrm{C_p}(X)$ posiada przeliczalną ciasność wiatrakową wtedy i tylko wtedy, gdy X spełnia $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Omega)$ [52, Theorem 35] (równoważnie wszystkie skończone potęgi X są Mengera [28, Theorem 3.9]). Jeżeli więc X i Y są zbiorami z twierdzenia 3.3, to przestrzenie $\mathrm{C_p}(X \cup \mathrm{Fin})$ i $\mathrm{C_p}(Y \cup \mathrm{Fin})$ posiadają przeliczalną ciasność wiatrakową ale ich produkt $\mathrm{C_p}(X \cup \mathrm{Fin}) \times \mathrm{C_p}(Y \cup \mathrm{Fin})$ nie ma tej własności [59, Proposition 3.1(1)].

Zakładając równość $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathfrak{c}$, wielu autorów niezależnie wykazało, że istnieją dwa zbiory $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$-Łuzina, których wszystki skończone potęgi są Rothbergera i których produkt nie jest Mengera ([64, Proposition 3.1], [28, strona 205], [51, Theorem 13], [29, Rozdział 3], [8, Theorem 4]). Metody z teorii kategorii użyte w tych konstrukcjach posiadają istotne ograniczenia, które uniemożliwiają osłabienie założeń. Naturalnym pytaniem było, czy można udowodnić istnienie takich zbiorów przy założeniu $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ (które pozwala na konstrukcję zbioru $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$-Łuzina). Wykazano, że odpowiedź jest pozytywna ale przy dodatkowym założeniu, że liczba $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ jest regularna. W szczególności następujący wynik udowadnia istnienie takich zbiorów w modelu Sacksa [47, 10], gdzie $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M}) = \aleph_1 < \mathfrak{c}$. W modelu tym metody z teorii kategorii zawodzą. Technika podejścia do tego problemu jest całkowicie inna od stosowanych wcześniej i wykorzystuje metody kombinatoryczne.

Twierdzenie 3.4 ([61, Theorem 2.1])**.** *Załóżmy, że* $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ *oraz liczba* $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ *jest regularna. Istnieją* U*-skala* X *i* V*-skala* Y *dla pewnych ultrafiltrów* $U, V \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$*, takie że* $X \cup \mathrm{Fin}$ *i* $Y \cup \mathrm{Fin}$ *są zbiorami* $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$*-Łuzina oraz produkt* $(X \cup \mathrm{Fin}) \times (Y \cup \mathrm{Fin})$ *nie ma własności Mengera*

Dla ultrafiltrów U i V z twierdzenia 3.4 zachodzi $\mathfrak{b}(U) = \mathfrak{b}(V) = \mathrm{cov}(\mathcal{M})$ i stąd wszystkie skończone potęgi zbiorów $X \cup \mathrm{Fin}$ oraz $Y \cup \mathrm{Fin}$ z tego twierdzenia są Rothbergera [59, Lemma 2.21]. Obserwacja ta w połączeniu z twierdzeniem 3.4 znajduje zastosowanie w produktach przestrzeni funkcyjnych [61, Corollary 4.1].

Główne osiągnięcia

- Jeżeli $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$ oraz liczba $\mathfrak{d}$ jest regularna, to istnieją dwa zbiory, których wszystkie skończone potęgi są Mengera i których produkt nie ma własności Mengera.
- Jeżeli $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ i $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$ jest liczbą regularną, to istnieją dwa zbiory $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$-Łuzina, których wszystkie skończone potęgi są Rothbergera i których produkt nie ma własności Mengera.

3.4. **Własność Mengera parametryzowana półfiltrami** [57]**.** *Półfiltrem* [4] nazywamy zbiór $S \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$, taki że dla dowolnych zbiorów $s \in S$ oraz $b \in [\mathbb{N}]^\infty$, jeżeli zbiór $b \setminus s$ jest skończony, to $b \in S$. Przykładami półfiltrów są $[\mathbb{N}]^\infty$, filtr cF ko-skończonych podzbiorów $\mathbb{N}$ oraz każdy ultrafiltr zawarty w $[\mathbb{N}]^\infty$. Niech S będzie półfiltrem. Dla funkcji $a, b \in [\mathbb{N}]^\infty$ piszemy $a \leq_S b$, jeżeli $\{ n : a(n) \leq b(n) \} \in S$. Zbiór $A \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ jest $\leq_S$*-ograniczony*, jeżeli istnieje funkcja $b \in [\mathbb{N}]^\infty$, taka że $a \leq_S b$ dla wszystkich funkcji $a \in A$. Niech $\mathfrak{b}(S)$ będzie minimalną mocą podzbioru $[\mathbb{N}]^\infty$, który nie jest $\leq_S$-ograniczony. Zachodzą równości $\mathfrak{b}(\mathrm{cF}) = \mathfrak{b}$ oraz $\mathfrak{b}([\mathbb{N}]^\infty) = \mathfrak{d}$.

Niech S będzie półfiltrem. Przestrzeń X jest S*-Mengera*, jeżeli dla każdego ciągu $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots$ pokryć otwartych X istnieją podrodziny skończone $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{U}_1$, $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{U}_2$, $\ldots$, takie że dla każdego $x \in X$ zachodzi $\{ n : x \in \bigcup \mathcal{F}_n \} \in S$. Własność $[\mathbb{N}]^\infty$-Mengera jest własnością Mengera oraz własność cF-Mengera jest własnością Hurewicza. Zachodzą następujące implikacje:

$$\text{Hurewicz} \longrightarrow S\text{-Menger} \longrightarrow \text{Menger}.$$

Własność S-Mengera posiada następującąą charakteryzację kombinatoryczną. Dla przestrzeni X funkcja $\Psi\colon X \to [\mathbb{N}]^\infty$ jest *górnie ciągła*, jeżeli zbiory $\{ x \in X : \Psi(x)(n) \leq m \}$ są otwarte dla dowolnych liczb naturalnych n oraz m. W klasie przestrzeni Lindelöfa przestrzeń X jest S-Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy każdy górnie ciągły obraz przestrzeni X w $[\mathbb{N}]^\infty$ jest $\leq_S$-ograniczony. [35, Theorem 7.3]. Zawężając klasę do zerowymiarowych przestrzeni Lindelöfa, w zacytowanym tu twierdzeniu zamiast górnie ciągłych obrazów wystarczy rozważać ciągłe obrazy. Jednak w ogólnym przypadku nie jest to możliwe. Rozważane tu własności pokryciowe są dziedziczne na podzbiory domknięte. Podprzestrzeń płaszczyzny

$$X := ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]) \cup (\mathbb{R} \times \{1\}) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

nie jest Mengera, gdyż przestrzeń $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}$ (homeomorficzna z $[\mathbb{N}]^\infty$) jest domkniętym podzbiorem X i nie ma własności Mengera. Ponieważ zbiór X jest spójny, więc każdy ciągły obraz przestrzeni X w $[\mathbb{N}]^\infty$ jest singletonem.

Następujący lemat stanowi kluczowe narzędzie w rozważaniu produktów przestrzeni posiadających własność Mengera parametryzowaną półfiltrami zarówno w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa [57, Sections 5 and 6] jak i wszystkich przestrzeni [58]. Wynik ten jest uogólnieniem lematu udowodnionego przez Millera, Tsabana i Zdomskyy'ego [35, Lemma 6.3] do klasy wszystkich przestrzeni topologicznych. Wcześniejszy dowód [35, Lemma 6.3] nie ma zastosowania do tej ogólniejszej sytuacji, dlatego też konieczne było użycie innych metod.

Lemat 3.5 ([57, Lemma 5.1])**.** *Niech $X \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$, Y będzie dowolną przestrzenią oraz $\Psi\colon (X \cup \mathrm{Fin}) \times Y \to [\mathbb{N}]^\infty$ będzie funkcją górnie ciągłą. Wtedy istnieje funkcja górnie ciągła $\Phi\colon Y \to [\mathbb{N}]^\infty$, taka że dla dowolnych punktów $x \in X$ i $y \in Y$ oraz liczby naturalnej n:*

$$\text{jeżeli } \Phi(y)(n) \leq x(n), \text{ to } \Psi(x,y)(n) \leq \Phi(y)(n).$$

Dla czytelności prezentowanych wyników ograniczymy się do pokazania zastosowań lematu 3.5 dla własności U-Mengera dla ultrafiltrów $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa. Tsaban i Zdomskyy udowodnili, że w przypadku pewnych specjalnych U-skal X dla ultrafiltrów $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ wszystkie skończone potęgi zbioru $X \cup \mathrm{Fin}$ są U-Mengera [71, Theorem 4.5]. Wynik ten jest szczególnym przypadkiem następującego, dużo ogólniejszego twierdzenia.

Twierdzenie 3.6 ([57, Theorem 5.3(2)])**.** *Niech $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ będzie ultrafiltrem oraz X będzie U-skalą. W klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ jest produktowalnie U-Mengera.*

Jeżeli $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, to dla dowolnego ultrafiltra $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ własność U-Mengera jest równoważna własności Mengera w klasie podzbiorów prostej [66, dowód Theorem 3.7]. W kontraście do tego wyniku otrzymano następujący rezultat.

Twierdzenie 3.7 ([57, Theorem 6.9])**.** *Załóżmy, że $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ oraz U jest ultrafiltrem. W klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöf istnieje zbiór produktowalnie U-Mengera, który nie jest Hurewicza i nie jest produktowalnie Mengera. Ponadto własność U-Mengera jest istotnie silniejsza od własności Hurewicza oraz istotnie słabsza od własności Mengera w klasie podzbiorów prostej.*

Główne osiągnięcia

- Lemat o produktach i funkcjach górnie ciągłych.
- Dla dowolnego ultrafiltra $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ oraz U-skali X zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ jest produktowalnie U-Mengera w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa.
- Jeżeli $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$, to w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa dla dowolnego ultrafiltra $U \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ własność U-Mengera jest istotnie słabsza od własności Hurewicza oraz istotnie silniejsza od własności Mengera.

3.5. **Rozdzielenie własności Mengera i Scheepersa** [59]**.** W teorii kombinatorycznych własności pokryciowych jeden z problemów dotyczy ustalania dodatkowych relacji pomiędzy własnościami z diagramu Scheepersa w klasie podzbiorów prostej. Na przykład, przy założeniu $\mathfrak{u} < \mathfrak{g}$, własności Mengera i Scheepersa $\mathsf{U}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \Omega)$ są równoważne w tej klasie. Z drugiej strony przy założeniu $\mathrm{cov}(\mathcal{M}) = \mathrm{cof}(\mathcal{M})$ istnieje zbiór $\mathrm{cov}(\mathcal{M})$-Łuzina (posiada więc własność Mengera), który nie jest Scheepersa [53, Theorem 32]. Metody kombinatoryczne, które doprowadziły do udowodnienia wymienionych wyżej rezultatów zostały zastosowane i w tym kontekście.

Główne osiągnięcia

- Jeżeli $\mathfrak{d} \leq \mathfrak{r}$, to istnieje zbiór Mengera, który nie jest Scheepersa [59, Theorem 2.1].

3.6. **Produktowalność** [57, 58]. Niech **P** będzie własnością topologiczną. Przestrzeń X jest *produktowalnie* **P** *w danej klasie przestrzeni*, jeśli dla dowolnej przestrzeni Y z danej klasy posiadającej własność **P** produkt $X \times Y$ posiada własność **P**. Przestrzeń jest *produktowalnie* **P**, jeśli jest produktowalnie **P** w klasie wszystkich przestrzeni.

Miller, Tsaban i Zdomskyy udowodnili przy założeniu $\mathfrak{d} = \aleph_1$, że w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa każdy zbiór produktowalnie Lindelöfa jest produktowalnie Mengera oraz produktowalnie Hurewicza [35, Theorem 8.2]. Poniższy wynik pokazuje relację pomiędzy zbiorami produktowalnie Mengera i produktowalnie Hurewicza w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa przy założeniu $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. Dowód tego rezultatu wykorzystuje twierdzenie 3.1.

Twierdzenie 3.8 ([57, Theorem 4.8(2)]). *Załóżmy, że $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. W klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa każdy zbiór produktowalnie Mengera jest produktowalnie Hurewicza.*

Prowadzone badania dotyczyły również produktowalności własności w klasie wszystkich przestrzeni. Przy założeniu $\mathfrak{d} = \aleph_1$, Aurichi i Tall [3], uogólniając kilka wcześniejszych wyników, pokazali, że każda przestrzeń produktowalnie Lindelöfa ma własność Hurewicza. Poniższe twierdzenie uogólnia rezultat Aurichi'ego i Talla.

Twierdzenie 3.9 ([58, Theorem 3.14]). *Załóżmy, że $\mathfrak{d} = \aleph_1$. Każda przestrzeń produktowalnie Lindelöfa jest produktowalnie Mengera i każda przestrzeń produktowalnie Mengera jest produktowalnie Hurewicza.*

Naturalnym pytaniem jest czy w twierdzeniu 3.9 klasy przestrzeni produktowalnie Lindelöfa, produktowalnie Mengera i produktowalnie Hurewicza są różne. Niech $X = \{ x_\alpha : \alpha < \mathfrak{d} \}$ będzie *skalą dominującą* w $[\mathbb{N}]^\infty$, tzn. dla dowolnej funkcji $x \in [\mathbb{N}]^\infty$ istnieje liczba porządkowa $\alpha < \mathfrak{d}$, taka że $x \leq^* x_\alpha$ oraz $x_\alpha \leq^* x_\beta$ dla dowolnych liczb porządkowych $\alpha < \beta < \mathfrak{d}$ (zbiór taki istnieje, gdy $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$ [70, Lemma 1.4]). Miller, Tsaban i Zdomskyy pokazali, że w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ jest produktowalnie Hurewicza i produktowalnie Mengera [35, Theorem 6.5(1), Theorem 6.2]. Metoda rzutowań wykorzystana w jednym z tych wyników [35, Theorem 6.2] została zastosowana w połączeniu z tzw. uzwarceniami Dedekinda pewnych specjalnych przestrzeni do udowodnienia następującego rezultatu. Stanowi to nowe podejście w rozważanej problematyce.

Twierdzenie 3.10 ([58, Lemma 3.4, Corollary 3.6]). *Niech X będzie skalą dominującą w $[\mathbb{N}]^\infty$ mocy $\aleph_1$ i niech $(X \cup \mathrm{Fin})_M$ będzie zbiorem $X \cup \mathrm{Fin}$ z taką topologią, że punkty z X są izolowane a otoczenia punktów z Fin są takie same jak w naturalnej topologii dziedziczonej z $\mathrm{P}(\mathbb{N})$. Wtedy przestrzeń $(X \cup \mathrm{Fin})_M$ jest produktowalnie Mengera i nie jest produktowalnie Lindelöfa.*

Podkreślmy również, że niesprzecznym z $\mathfrak{d} = \aleph_1$ jest istnienie przestrzeni produktowalnie Mengera, która nie jest produktowalanie Hurewicza [58, Proposition 3.15(2)].

Główne osiągnięcia

- Załóżmy, że $\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. W klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa każda przestrzeń produktowalnie Mengera jest produktowalnie Hurewicza.
- Załóżmy, że $\mathfrak{d} = \aleph_1$. Każda przestrzeń produktowalnie Lindelöfa jest produktowalnie Mengera i każda przestrzeń produktowalnie Mengera jest produktowalnie Hurewicza. Żadna z tych implikacji nie jest odwracalna.

3.7. **Nieograniczone wieże** [62]. Zwróciliśmy już uwagę, że jeśli X jest zbiorem $\mathfrak{d}$-nieograniczonym, to $X \cup \mathrm{Fin}$ jest zbiorem Mengera. Bartoszyński i Shelah [7] pokazali, że jeśli $X = \{ x_\alpha : \alpha < \mathfrak{b} \} \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ jest zbiorem, który nie jest $\leq^*$-ograniczony w $[\mathbb{N}]^\infty$ oraz $x_\alpha \leq^* x_\beta$ dla dowolnych liczb porządkowych $\alpha < \beta < \mathfrak{b}$, to zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ jest Hurewicza. Jest to pierwsza jednolita konstrukcja w ZFC zbioru Hurewicza, który nie jest σ-zwarty, będąc jednocześnie kontrprzykładem do hipotezy Hurewicza [26], że w klasie przestrzeni metrycznych σ-zwartość jest równoważna własności Hurewicza. Przywołane tu zbiory są przykładami nietrywialnych zbiorów Mengera i Hurewicza, odpowiednio. Nie zawsze konstrukcja takich nietrywialnych zbiorów dla danej własności jest możliwa. W modelu Lavera zbiory posiadające własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ mają moc mniejszą niż $\mathfrak{b}$ [34, Corollary 4.4], są więc one trywialne w odniesieniu do własności $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$. W modelu tym podobna sytuacja dotyczy własności γ, która charakteryzuje zbiory przeliczalne w klasie podzbiorów prostej [31].

Nie zawsze struktura kombinatoryczna zbiorów posiadających daną własność **P** z diagramu zapewnia, że ich produkt również ma własność **P**. Wyniki z podrozdziału 3.2 pokazują, że przy pewnych założeniach istnieją zbiory $\mathfrak{d}$-nieograniczone X i Y, takie że produkt $(X \cup \mathrm{Fin}) \times (Y \cup \mathrm{Fin})$ nie jest Mengera. Z drugiej strony zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ z wyniku Bartoszyńskiego i Shelaha jest nawet produktowalnie Hurewicza w klasie przestrzeni dziedzicznie Lindelöfa [57, Theorem 5.4]. Przedstawimy teraz wyniki badań dotyczące produktów nietrywialnych zbiorów posiadających własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ lub własność γ o specyficznej strukturze kombinatorycznej.

Niech κ będzie liczbą kardynalną nieskończoną. Zbiór $\{ x_\alpha : \alpha < \kappa \} \subseteq [\mathbb{N}]^\infty$ jest *κ-nieograniczoną wieżą* [34], jeżeli nie jest $\leq^*$-ograniczony oraz zbiory $x_\alpha \setminus x_\beta$ są skończone dla dowolnych liczb porządkowych $\beta < \alpha < \kappa$. Jeśli X jest $\mathfrak{b}$-nieograniczoną wieżą (zbiór taki istnieje na przykład przy założeniu $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ lub $\mathfrak{b} < \mathfrak{d}$ [34, Lemma 2.2]), to zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ posiada własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ [34, Proposition 2.5]. Niech $\mathrm{add}(\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma))$ będzie minimalną mocą rodziny podzbiorów $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ posiadających własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$, której suma nie ma tej własności. Miller i Tsaban pokazali, że przy założeniu $\mathrm{add}(\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)) = \mathfrak{b}$ każda skończona potęga zbioru $X \cup \mathrm{Fin}$ ma własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ [34, Theorem 2.8]. Niech Γ_{Bor} będzie rodziną wszystkich przeliczalnych γ-pokryć składających się ze zbiorów borelowskich danej przestrzeni. Miller, Tsaban i Zdomskyy udowodnili, że jeśli X jest $\mathfrak{b}$-nieograniczoną wieżą a Y jest zbiorem posiadającym własność $\mathsf{S}_1(\Gamma_{\mathrm{Bor}}, \Gamma_{\mathrm{Bor}})$, to produkt $(X \cup \mathrm{Fin}) \times Y$ ma własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ [36, Theorem 7.1]. Przykładem zbioru posiadającego własność $\mathsf{S}_1(\Gamma_{\mathrm{Bor}}, \Gamma_{\mathrm{Bor}})$ jest *zbiór Sierpińskiego* ([28, Theorem 2.9], [70, Theorem 2.4]), tzn. nieprzeliczalny podzbiór prostej, którego przecięcie z każdym zbiorem miary Lebesgue'a zero na prostej jest co najwyżej przeliczalne. W toku badań uogólnione zostały wszystkie wspomniane tu wyniki.

Twierdzenie 3.11 ([62, Theorem 3.1])**.** *Niech n będzie liczbą naturalną, $X_1, \dots, X_n$ będą $\mathfrak{b}$-nieograniczonymi wieżami oraz Y będzie zbiorem posiadającym własność $\mathsf{S}_1(\Gamma_{\mathrm{Bor}}, \Gamma_{\mathrm{Bor}})$. Wtedy produkt*

$$(X_1 \cup \mathrm{Fin}) \times \cdots \times (X_n \cup \mathrm{Fin}) \times Y$$

ma własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$.

Własności $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ i $\mathsf{S}_1(\Gamma_{\mathrm{Bor}}, \Gamma_{\mathrm{Bor}})$ są powiązane z lokalnymi własnościami przestrzeni funkcyjnych. Niech X będzie przestrzenią. Ciąg $f_1, f_2, \dots \in \mathrm{C_p}(X)$ zbiega *quasinormalnie* do funkcji stale równej zero $\mathbf{0}$, jeżeli istnieje ciąg liczb rzeczywistych dodatnich $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$ zbiegający do zera, taki że dla dowolnego punktu $x \in X$ mamy $|f_n(x)| < \epsilon_n$ dla wszystkich liczb naturalnych n z wyjątkiem skończenie wielu. Przestrzeń X jest *QN-przestrzenią* (*wQN-przestrzenią*), jeżeli dowolny ciąg $f_1, f_2, \dots \in \mathrm{C_p}(X)$ punktowo zbieżny do $\mathbf{0}$, jest zbieżny (posiada podciąg zbieżny) quasinormalnie do $\mathbf{0}$. Na podstawie przełomowego rezultatu Tsabana i Zdomskyy'ego [67, Theorem 2], każdy podzbiór $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ jest QN-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia $\mathsf{S}_1(\Gamma_{\mathrm{Bor}}, \Gamma_{\mathrm{Bor}})$. Ponadto każda doskonale normalna przestrzeń spełniająca $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ jest wQN-przestrzenią [16, Theorem 7]. QN-przestrzenie, wQN-przestrzenie i ich modyfikacje były intensywnie badane przez Bukovský'ego, Haleša, Recława, Sakai'ego i Scheepersa [15, 16, 17, 24, 45, 46, 50].

Tsaban i Orensthein pokazali, że jeśli X jest $\mathfrak{p}$-nieograniczoną wieżą (której istnienie jest równoważne równości $\mathfrak{p} = \mathfrak{b}$ [39, Lemma 3.3]), to zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ posiada własność γ ([39, Theorem 3.6], [40, Theorem 6]). Miller, Tsaban i Zdomskyy udowodnili, że jeśli X jest $\aleph_1$-nieograniczoną wieżą, to zbiór $X \cup \mathrm{Fin}$ jest produktowalnie γ w klasie podzbiorów prostej [36, Theorem 2.8]. Wyniki te zostały uogólnione do następującej postaci.

Twierdzenie 3.12 ([62, Theorem 4.1(1)])**.** *Jeżeli n jest liczbą naturalną, $X_1, \dots, X_n$ są $\mathfrak{p}$-nieograniczonymi wieżami, to produkt*

$$(X_1 \cup \mathrm{Fin}) \times \cdots \times (X_n \cup \mathrm{Fin})$$

ma własność γ.

Twierdzenie 3.13 ([62, Theorem 4.1(2)])**.** *Jeżeli X jest $\mathfrak{p}$-nieograniczoną wieżą i każdy podzbiór* $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ *mocy mniejszej niż $\mathfrak{p}$ jest produktowalnie γ w klasie podzbiorów prostej, to* $X \cup \mathrm{Fin}$ *jest produktowalnie γ w klasie podzbiorów prostej.*

Główne osiągnięcia

- Jeżeli n jest liczbą naturalną, $X_1, \dots, X_n$ są $\mathfrak{b}$-nieograniczonymi wieżami i Y jest zbiorem posiadającym własność $\mathsf{S}_1(\Gamma_{\mathrm{Bor}}, \Gamma_{\mathrm{Bor}})$, to produkt

$$(X_1 \cup \mathrm{Fin}) \times \cdots \times (X_n \cup \mathrm{Fin}) \times Y$$

  ma własność $\mathsf{S}_1(\Gamma, \Gamma)$.
- Jeżeli n jest liczbą naturalną i $X_1, \dots, X_n$ są $\mathfrak{p}$-nieograniczonymi wieżami to

$$(X_1 \cup \mathrm{Fin}) \times \cdots \times (X_n \cup \mathrm{Fin})$$

ma własność γ.

- Jeżeli X jest $\mathfrak{p}$-nieograniczoną wieżą i każdy podzbiór $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ mocy mniejszej niż $\mathfrak{p}$ jest produktowalnie γ w klasie podzbiorów prostej, to $X \cup \mathrm{Fin}$ jest produktowalnie γ w klasie podzbiorów prostej.

3.8. **Zbiory zero-addytywne** [60]**.** Przestrzeń $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ wraz z działaniem różnicy symetrycznej $\oplus$ jest grupą topologiczną. W $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ rozważamy produktową miarę Lebesgue'a. Zbiór $X \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$ nazywamy *zero-addytywnym*, jeżeli dla dowolnego zbioru miary zero $N \subseteq \mathrm{P}(\mathbb{N})$ zbiór $X \oplus N := \{\, x \oplus y : x \in X, y \in N \,\}$ ma miarę zero. Galvin i Miller przy założeniu, że zachodzi aksjomat Martina, udowodnili, że istnieje zbiór mocy $\mathfrak{p}$ posiadający własność γ, którego każdy ciągły obraz w $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ jest zero-addytywny [22, Theorem 7]. Bartoszyński i Recław [6] przy założeniu $\mathfrak{p} = \mathfrak{c}$ skonstruowali zbiór mocy $\mathfrak{p}$ posiadający własność γ, który nie jest zero-addytywny. Idee z dowodów twierdzeń z poprzedniego podrozdziału w połączeniu z charakteryzację kombinatoryczną Shelaha zbiorów zero-addytywnych [54] oraz związanymi z nią wynikami Zindulki [74] pozwoliły na osłabienie założeń we wspomnianych wynikach przy jednoczesnym zastosowaniu innych technik dowodowych.

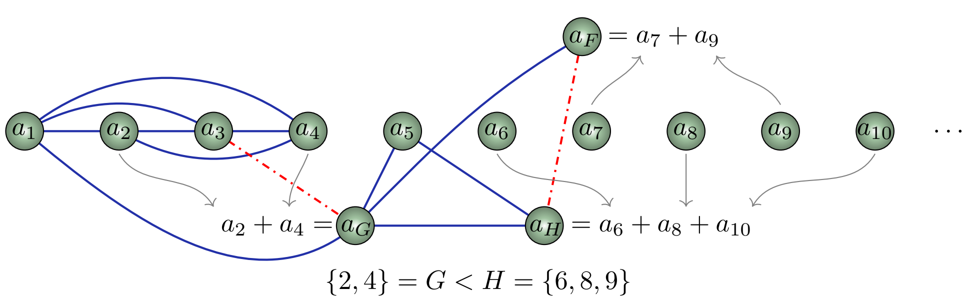
Niech $\mathrm{non}(\mathcal{N}_{\mathrm{add}})$ będzie minimalną mocą podzbioru $\mathrm{P}(\mathbb{N})$, który nie jest zero-addytywny.

Główne osiągnięcia

- Załóżmy, że $\mathfrak{p} = \mathrm{non}(\mathcal{N}_{\mathrm{add}}) = \mathfrak{c}$. Istnieje podzbiór $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ mocy $\mathfrak{p}$ posiadający własność γ, którego wszystkie ciągłe obrazy w $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ są zero-addytywne, i który zawiera homeomorficzną kopię zbioru, który nie jest zero-addytywny [60, Theorem 2.2].
- Załóżmy, że $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \mathrm{non}(\mathcal{N})$. Istnieje podzbiór $\mathrm{P}(\mathbb{N})$ mocy $\mathfrak{p}$ posiadający własność γ, który nie jest zero-addytywny [60, Theorem 3.1].

3.9. **Twierdzenia o kolorowaniu** [55]**.** *Kolorowaniem* zbioru niepustego X nazywamy dowolną funkcję $\chi\colon X \to \{1,\dots,k\}$ dla pewnej liczby naturalnej k. Dla danego kolorowania χ zbioru X zbiór $A \subseteq X$ jest χ-*monochromatyczny*, jeśli istnieje liczba naturalna i, taka że $\chi[A] = \{i\}$ (jeśli kolorowanie χ jasno wynika z kontekstu, to zbiór A nazywamy *monochromatycznym*). Słynne twierdzenie Hindmana [25] mówi, że dla dowolnego kolorowania zbioru $\mathbb{N}$ istnieje zbiór nieskończony $A \subseteq \mathbb{N}$, taki że wszystkie skończone sumy parami różnych elementów z A mają ten sam kolor. Uogólnienie tego twierdzenia do wyższych wymiarów poprzedzimy potrzebnymi notacjami. Przez $[\mathbb{N}]^2$ oznaczamy zbiór wszystkich dwuelementowych podzbiorów $\mathbb{N}$, równoważnie jest to zbiór wszystkich krawędzi w grafie zupełnym o wierzchołkach w zbiorze $\mathbb{N}$. Niech $\mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ będzie zbiorem wszystkich skończonych podzbiorów niepustych zbioru $\mathbb{N}$. Niech $+$ będzie zwykłym działaniem dodawania w $\mathbb{N}$ oraz ustalmy ciąg $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$. Dla zbioru $G = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$, gdzie n jest liczbą naturalną oraz $i_1 < \cdots < i_n$ definiujemy $a_G := a_{i_1} + \cdots + a_{i_n}$ Dla zbiorów $G, H \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ piszemy $G < H$, jeżeli $\max G < \min F$. Ciąg $a_1, a_2, \ldots$ nazywamy *właściwym*, jeśli dla dowolnych zbiorów $G, H \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$, takich że $G < H$, zachodzi $a_H \neq a_G$. *Grafem sumowalnym* ciągu właściwego $a_1, a_2, \ldots \in \mathbb{N}$ nazywamy zbiór

$$\{\, \{a_G, a_H\} : G, H \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N}), G < H \,\}.$$



Schemat grafu sumowalnego ciągu właściwego $a_1, a_2, \ldots$

Uogólnieniem twierdzenia Hindmana jest twierdzenie Millikena–Taylora [37, 63], że dla dowolnego kolorowania zbioru $[\mathbb{N}]^2$ istnieje ciąg właściwy w $\mathbb{N}$, którego graf sumowalny jest monochromatyczny.

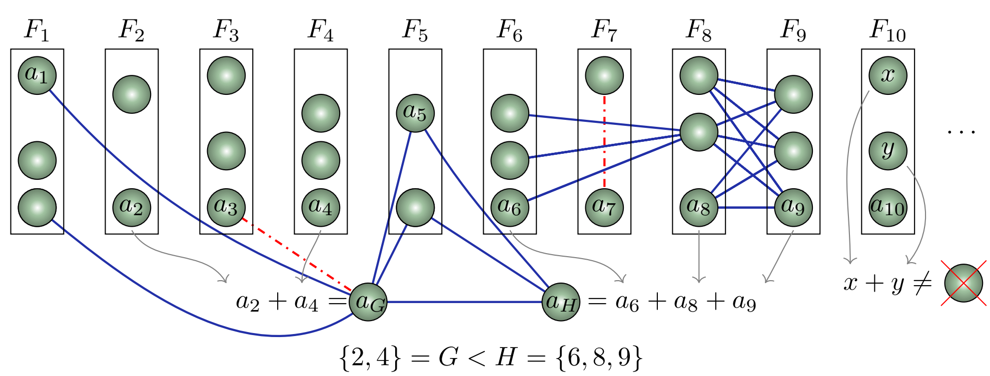
W dowodach twierdzeń o podobnym charakterze przydatnym narzędziem jest *uzwarcenie Čecha–Stone'a* $\beta\mathbb{N}$ przestrzeni $\mathbb{N}$ z topologią dyskretną, tj. zbiór wszystkich ultrafiltrów na $\mathbb{N}$ z topologią generowaną przez zbiory postaci $\{\, p \in \beta\mathbb{N} : A \in p\,\}$, gdzie $A \subseteq \mathbb{N}$. Działanie zwykłego dodawania $+$ w $\mathbb{N}$ można rozszerzyć do działania na $\beta\mathbb{N}$, oznaczanego również przez $+$, tak że dla każdego $q \in \beta\mathbb{N}$ funkcja na $\beta\mathbb{N}$ określona wzorem $p \mapsto p + q$ jest ciągła. Zbiór $\mathbb{N}$ z działaniem $+$ jest *półgrupą* tzn. działanie to jest łączne. Również $\beta\mathbb{N}$ z rozszerzonym działaniem $+$ jest półgrupą. Na podstawie lematu Ellisa–Numakury [20, 38] każda niepusta zwarta podpółgrupa $\beta\mathbb{N}$ zawiera *ultrafiltr idempotentny*, tzn. istnieje w tej podpółgrupie ultrafiltr e, taki że $e + e = e$. Dowody wymienionych wyżej w tym podrozdziale twierdzeń można oprzeć o istnienie ultrafiltru idempotentnego w $\beta\mathbb{N}$.

Ultrafiltr $p \in \beta\mathbb{N}$ jest *duży* dla niepustej rodziny $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$, jeżeli dla dowolnego zbioru $A \in p$ istnieje zbiór $R \in \mathcal{R}$, taki że $R \subseteq A$. Ultrafiltr $p \in \beta\mathbb{N}$ jest *duży dla ciągu* $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots \subseteq \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ niepustych rodzin, jeśli jest duży dla każdej rodziny z tego ciągu. Na przykład istnieje w $\beta\mathbb{N}$ ultrafiltr idempotentny duży dla ciągu $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots \subseteq \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ rodzin wszystkich rosnących ciągów arytmetycznych (utożsamiamy ciąg z jego zbiorem wartości) długości $1, 2, \ldots$, odpowiednio [19, Lemma 2]. *Grafem dzielnym* ciągu $F_1, F_2, \ldots \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ parami rozłącznych zbiorów nazywamy zbiór

$$\big\{\, \{a, b\} : a \in F_i, b \in F_j, i \neq j, i, j \in \mathbb{N}\,\big\}.$$

Niech $F_1, F_2, \ldots \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ będzie ciągiem zbiorów, takim że wszystkie ciągi w produkcie $F_1 \times F_2 \times \cdots$ są właściwe. *Grafem sumowalnym dzielnym ciągu* $F_1, F_2, \ldots \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ nazywamy zbiór

$$\left\{\, \{a_G, a_H\} : a_1, a_2, \ldots \in F_1 \times F_2 \times \cdots, G, H \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N}), G < H \,\right\}$$



Schemat grafu sumowalnego dzielnego ciągu $F_1, F_2, \ldots$

Następujące twierdzenie Bergelsona i Hindmana [11] pokazuje, że struktura zbiorów monochromatycznych przy kolorowaniach $[\mathbb{N}]^2$ może być bardzo bogata. Dla dowolnego kolorowania zbioru $[\mathbb{N}]^2$ istnieją rosnące ciągi arytmetyczne $R_1, R_2, \ldots \in \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ długości $1, 2 \ldots$, odpowiednio, takie że wszystkie ciągi w $R_1 \times R_2 \times \cdots$ są właściwe oraz graf sumowalny dzielny ciągu $R_1, R_2, \ldots$ jest monochromatyczny.

Powyższe definicje oraz lemat Ellisa–Numakury można rozszerzyć, zastępując zbiór $\mathbb{N}$ dowolnym zbiorem nieskończonym S z działaniem łącznym $+$ określonym na S i rozważając S jako przestrzeń z topologią dyskretną. Do tego szerszego ujęcia za chwilę powrócimy.

Dla pewnych kombinatorycznych własności pokryciowych istnieją ich charakteryzacje przy użyciu kolorowań. Pokażemy to na przykładzie własności Mengera. Pokrycie przestrzeni jest *λ-pokryciem*, jeżeli jest nieskończone i każdy element przestrzeni należy do nieskończenie wielu zbiorów z tego pokrycia. Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową z topologią τ. Przestrzeń X posiada własność Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego kolorowania zbioru $[\tau]^2$ oraz ω-pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X istnieją parami rozłączne zbiory $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots \in \mathrm{Fin}(\mathcal{U})$, takie że $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{F}_n$ jest λ-pokryciem X oraz graf dzielny ciągu $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots$ jest monochromatyczny ([48, Theorem 10], [28, Theorem 6.2]). Tsaban jako pierwszy udowodnił twierdzenie dotyczące kolorowań związanych z półgrupą będącą topologią przestrzeni wraz z działaniem sumy teoriomnogościowej $\cup$ [65, Theorem 4.6]. Niech X będzie przestrzenią Mengera z topologią τ. Wtedy dla dowolnego nieskończonego pokrycia otwartego $\mathcal{U}$ przestrzeni X oraz dowolnego kolorowania zbioru $[\tau]^2$, istnieją parami rozłączne zbiory $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots \subseteq \mathcal{U}$, takie że $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ jest λ-pokryciem X, ciąg $\bigcup \mathcal{F}_1, \bigcup \mathcal{F}_2, \ldots$ jest właściwy oraz graf sumowalny ciągu

$\bigcup \mathcal{F}_1, \bigcup \mathcal{F}_2, \dots$ jest monochromatyczny. Zaznaczmy, że twierdzenie Millikena–Taylora jest wnioskiem z twierdzenia Tsabana [65, Example 4.7]. Jednym z kluczowych narzędzi używanym przez Tsabana w dowodach obok ultrafiltrów idempotentnych są gry topologiczne.

Dla niepustych rodzin zbiorów $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ definiujemy grę $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, w której bierze udział dwóch graczy Alicja i Bob[2]. W pierwszej rundzie Alicja wybiera zbiór $A_1 \in \mathcal{A}$ a Bob odpowiada zbiorem skończonym $F_1 \subseteq A_1$. W drugiej rundzie Alicja wybiera zbiór $A_2 \in \mathcal{A}$ a Bob odpowiada zbiorem skończonym $F_2 \subseteq A_2$, itd. W trakcie rozgrywki tworzony jest ciąg

$$(A_1, F_1, A_2, F_2, \dots),$$

gdzie $A_n \in \mathcal{A}$ oraz F_n jest podzbiorem skończonym A_n dla każdej liczby naturalnej n. Bob wygrywa grę, jeżeli suma $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ jest elementem rodziny $\mathcal{B}$. W przeciwnym razie grę wygrywa Alicja. Jeżeli Alicja nie ma strategii zwycięskiej w grze $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, to zachodzi $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. W pewnych przypadkach prawdziwa jest również implikacja odwrotna. Hurewicza pokazał, że przestrzeń X ma własność Mengera $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$ wtedy i tylko wtedy, gdy Alicja nie ma strategii zwycięskiej w grze $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$ [26]. Podobna sytuacja zachodzi również dla innych kombinatorycznych własności pokryciowych i odpowiadającym im gier. Zauważmy również, że Bob ma strategię zwycięską w grze $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}([\mathbb{N}]^\infty, [\mathbb{N}]^\infty)$, co jest kluczowym faktem, jeśli z poniższego twierdzenia wnioskujemy twierdzenia o kolorowaniach związanych z liczbami naturalnymi.

Dla zbioru S niech $[S]^\infty$ będzie rodziną wszystkich nieskończonych podzbiorów S.

Twierdzenie 3.14 ([55, Theorem 2.2]). *Niech S będzie półgrupą. Załóżmy, że rodzina $\mathcal{A} \subseteq [S]^\infty$ zawiera ultrafiltr idempotentny duży dla ciągu $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots \subseteq \mathrm{Fin}(S)$ oraz $\mathcal{B} \subseteq [S]^\infty$ jest rodziną, taką że Alicja nie ma strategii zwycięskiej w grze $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Wtedy dla dowolnego kolorowania zbioru $[S]^2$ istnieją skończone rodziny $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{R}_1, \mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{R}_2, \dots$ oraz zbiory $F_1 \subseteq \bigcup \mathcal{F}_1, F_2 \subseteq \bigcup \mathcal{F}_2, \dots$ posiadające następujące własności.*

(1) *Zbiór $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ jest elementem rodziny $\mathcal{B}$.*
(2) *Wszystkie ciągi w produkcie $\bigcup \mathcal{F}_1 \times \bigcup \mathcal{F}_2 \times \cdots$ są właściwe.*
(3) *Graf sumowalny dzielny ciągu $\bigcup \mathcal{F}_1, \bigcup \mathcal{F}_2, \dots$ jest monochromatyczny.*

Twierdzenie 3.14 ma wiele zastosowań, które zostały szczegółowo zaprezentowane w pracy o kolorowaniach [55]. Tutaj zaprezentujemy dwa przykłady. Wnioskiem z twierdzenia 3.14 jest powyższe twierdzenie Bergelsona i Hindmana [11]. Do tego celu przyjmujemy, że półgrupą S jest zbiór $\mathbb{N}$ z działaniem dodawania $+$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = [\mathbb{N}]^\infty$ oraz $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots \subseteq \mathrm{Fin}(\mathbb{N})$ jest ciągiem rodzin wszystkich rosnących ciągów arytmetycznych o wyrazach naturalnych długości $1, 2, \dots$, odpowiednio oraz ustalmy kolorowanie zbioru $[\mathbb{N}]^2$. Rodzina $[\mathbb{N}]^\infty$ zawiera ultrafiltr idempotentny duży dla ciągu $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ [19, Lemma 2]. Ponieważ Bob ma strategię zwycięską w grze $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}([\mathbb{N}]^\infty, [\mathbb{N}]^\infty)$, więc założenia twierdzenia 3.14 są spełnione. Wtedy zbiory $\bigcup \mathcal{F}_1, \bigcup \mathcal{F}_2, \dots$ z tezy twierdzenia 3.14 zawierają ciągi arytmetyczne $R_1, R_2, \dots$ długości $1, 2, \dots$, odpowiednio. W szczególności graf sumowalny dzielny ciągu R_1, $R_2, \dots$ jest monochromatyczny.

Innym wnioskiem z twierdzenia 3.14 jest implikacja w twierdzeniu dotyczącym charakteryzacji własności Mengera przy użyciu kolorowań, które zostało wyżej przytoczone. Niech X będzie przestrzenią metryczną ośrodkową posiadającą własność Mengera i niech $\mathcal{U}$ będzie ω-pokryciem otwartym X. Możemy założyć, że $\mathcal{U}$ jest rodziną przeliczalną. Ponumerujmy jej elementy $\mathcal{U} = \{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ i przyjmijmy, że półgrupą S w twierdzeniu 3.14 jest zbiór $\mathcal{U}$ z działaniem $(U_i, U_j) \mapsto U_{\max\{i,j\}}$, gdzie $i, j \in \mathbb{N}$. Niech $\mathcal{A} := \{ \mathcal{V} \in \Omega : \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \}$ oraz $\mathcal{B}$ będzie rodziną λ-pokryć otwartych X. Dla liczby naturalnej n definiujemy $\mathcal{R}_n := \{\{U_n\}, \{U_{n+1}\}, \dots\}$. Wtedy rodzina $\mathcal{A}$ zawiera ultrafiltr idempotentny duży dla ciągu $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots$ [55, Example 3.11(3)]. Niech Λ będzie rodziną wszystkich λ-pokryć otwartych danej przestrzeni. Własność Mengera $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathrm{O}, \mathrm{O})$ jest równoważna własności $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Lambda)$ i stąd Alicja nie ma strategii zwycięskiej w grze $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Lambda)$ na X [49, Theorem 5]. Wtedy zbiory $F_1, F_2, \dots \subseteq \mathcal{U}$ z tezy twierdzenia 3.14 są skończone i parami rozłączne oraz graf sumowalny dzielny ciągu $F_1, F_2, \dots$ jest tym samym co graf dzielny tego ciągu (co wynika z przyjętego działania półgrupowego).

Twierdzenia udowodnione w różnych artykułach przez Scheepersa i jego współautorów mają następującą strukturę. Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą niepustymi rodzinami zbiorów. Wtedy własność $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ ($\mathsf{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$) jest równoważna temu, że dla dowolnego kolorowania zbioru $[\bigcup \mathcal{A}]^2$ oraz dowolnego zbioru $A \in \mathcal{A}$ istnieją parami rozłączne zbiory skończone $F_1, F_2, \dots \subseteq A$ (zbiór nieskończony $F \subseteq A$), takie że graf dzielny ciągu $F_1, F_2, \dots$ (graf $[F]^2$) jest monochromatyczny. Sytuacja ta zachodzi dla własności pokryciowych: $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega, \Lambda)$ (równoważnej własności Mengera),

[2] W podobny sposób definiowana jest gra $\mathsf{G}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, która jest modyfikacją gry $\mathsf{G}_{\mathrm{fin}}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, gdzie zbiory wybierane przez Boba są singletonami.

$\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega,\Omega)$, $\mathsf{S}_1(\Omega,\Gamma)$, $\mathsf{S}_1(\Omega,\Omega)$, $\mathsf{S}_1(\Omega,\Lambda)$ (równoważnej własności Rothbergera) oraz dla lokalnych własności przestrzeni $\mathrm{C_p}(X)$, gdzie X jest przestrzenią metryczną ośrodkową: przeliczalnej ścisłości wiatrakowej $\mathsf{S}_{\mathrm{fin}}(\Omega_{\mathbf{0}},\Omega_{\mathbf{0}})$, *silnej przeliczlanej ścisłości wiatrakowej* $\mathsf{S}_1(\Omega_{\mathbf{0}},\Omega_{\mathbf{0}})$ oraz własności *silnie Frechet–Urysohna* $\mathsf{S}_1(\Omega_{\mathbf{0}},\Gamma_{\mathbf{0}})$ (gdzie $\Gamma_{\mathbf{0}} := \{\, A \subseteq \mathrm{C_p}(X) : \big(\exists\, f_1, f_2, \ldots \in A\big)\big(\lim_{n\to\infty} f_n = \mathbf{0}\big) \,\}$). W każdym z tych przypadków jedna z implikacji jest wnioskiem z twierdzenia 3.14 (bądź jego wersji dla gry $\mathsf{G}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ [55, Theorem 2.2]). W artykule, którego wyniki są przedmiotem tego podrozdziału zaproponowano również jednolite dowody implikacji odwrotnych.

Główne osiągnięcia

- Twierdzenia o kolorowaniach zbioru krawędzi w grafach zupełnych o wierzchołkach w nieskończonej półgrupie. Rezultat jest wspólnym uogólnieniem dla wyników
  - Millikena–Taylora, Deubera–Hindmana i Bergelsona–Hindmana dla liczb naturalnych,
  - Scheepersa i Tsabana dla kombinatorycznych własności pokryciowych,
  - Scheepersa dla lokalnych własności w przestrzeniach funkcyjnych.

Literatura

[1] A. Arkhangel'skiĭ, *Hurewicz spaces, analytic sets and fan tightness of function spaces,* Dokl. Akad. Nauk SSSR **287** (1986), 525–528.
[2] L. Aurichi, *D-spaces, topological games, and selection principles*, Topology Proceedings **36** (2010), 107–122.
[3] L. Aurichi, F. Tall, *Lindelöf spaces which are indestructible, productive, or D*, Topology and its Applications **159** (2012), 331–340.
[4] T. Banakh, L. Zdomskyy, *The Coherence of Semifilters: a Survey*, in: **Selection Principles and Covering Properties in Topology** (L. Kočinac, ed.), Quaderni di Matematica **18**, Seconda Universita di Napoli, Caserta, 2006, 53–99.
[5] T. Bartoszyński, H. Judah, *Set Theory: On the structure of the real line*, A. K. Peters, Massachusetts (1995).
[6] T. Bartoszyński, I. Recław, *Not every γ-set is strongly meager*, Contemporary Mathematics **192** (1996), 25–29.
[7] T. Bartoszyński, S. Shelah, *Continuous images of sets of reals*, Topology and its Applications **116** (2001), 243–253.
[8] T. Bartoszyński, S. Shelah, B. Tsaban, *Additivity Properties of Topological Diagonalizations*, Journal of Symbolic Logic **68** (2003), 1254–1260.
[9] T. Bartoszyński, B. Tsaban, *Hereditary topological diagonalizations and the Menger-Hurewicz Conjectures*, Proceedings of the American Mathematical Society **134** (2006), 605–615.
[10] J. Baumgartner, R. Laver, *Iterated perfect set forcing*, Annals of Mathematical Logic **17** (1979), 271–288.
[11] V. Bergelson, N. Hindman, *Ultrafilters and multidimensional Ramsey theorems*, Combinatorica **9** (1989), 1–7.
[12] A. Blass, *Combinatorial cardinal characteristics of the continuum*, in: **Handbook of Set Theory** (M. Foreman, A. Kanamori, eds.), Springer, 2010, 395–489.
[13] A. Blass, S. Shelah, *Ultrafilters with small generating sets*, Israel Journal of Mathematics **65** (1989), 259–271.
[14] L. Bukovský, *Selection principle* S_1 *and combinatorics of open covers*, Topology and its Applications **258** (2019), 239–250.
[15] L. Bukovský, J. Haleš, *QN-spaces, wQN-spaces and covering properties*, Topology and its Applications **154** (2007), 848–858.
[16] L. Bukovský, *On* wQN_* *and* wQN^* *spaces*, Topology and its Applications **156** (2008), 24–27.
[17] L. Bukovský, I. Recław, M. Repický, *Spaces not distinguishing convergences of real-valued functions*, Topology and its Applications **112** (2001), 13–40.
[18] D. Chodounsky, D. Repovš, L. Zdomskyy, *Mathias forcing and combinatorial covering properties of filters*, Journal of Symbolic Logic, **80** (2015), 1398–1410.
[19] W. Deuber, N. Hindman, *Partitions and sums of (m,p,c)-sets*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **45** (1987), 300–302.
[20] R. Ellis, *Distal transformation groups*, Pacific Journal of Mathematics **8** (1958), 401–405.
[21] D. Fremlin, A. Miller, *On some properties of Hurewicz, Menger and Rothberger*, Fundamenta Mathematicae **129** (1988), 17–33.
[22] F. Galvin, A. Miller, *γ-sets and other singular sets of real numbers*, Topology and its Applications **17** (1984), 145–155.
[23] J. Gerlits, Zs. Nagy, *Some properties of $C(X)$, I,* Topology and its Applications **14** (1982), 151–161.
[24] J. Haleš, *On Scheepers' conjecture*, Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica **46** (2005), 27–31.
[25] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition of* $\mathbb{N}$, Journal of Combinatorial Theory, Series A **17** (1974), 1–11.
[26] W. Hurewicz, *Über eine Verallgemeinerung des Borelschen Theorems*, Mathematische Zeitschrift **24** (1925), 401–421.
[27] W. Hurewicz, *Über Folgen stetiger Funktionen*, Fundamenta Mathematicae **9** (1927), 193–204.
[28] W. Just, A. Miller, M. Scheepers, P. Szeptycki, *The combinatorics of open covers II*, Topology and its Applications **73** (1996), 241–266.
[29] A. Krawczyk, H. Michalewski, *Linear metric spaces close to being σ-compact*, Technical Report 46 (2001) of the Institute of Mathematics, Warsaw University.
[30] M. Krupski, *Games and hereditary Baireness in hyperspaces and spaces of probability measures*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu **21** (2022), 851–868..
[31] R. Laver, *On the consistency of Borel's conjecture*, Acta Mathematicae **137** (1976), 151–169.
[32] K. Menger, *Einige Überdeckungssätze der Punktmengenlehre*, Sitzungsberichte der Wiener Akademie **133** (1924), 421–444.

[33] A. Miller, *A nonhereditary Borel-cover γ-set*, Real Analysis Exchange **29** (2003), 601 – 606.

[34] A. Miller, B. Tsaban, *Point-cofinite covers in Laver's model*, Proceedings of the American Mathematical Society **138** (2010) 3313–3321.

[35] A. Miller, B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Selective covering properties of product spaces*, Annals of Pure and Applied Logic **165** (2014), 1034–1057.

[36] A. Miller, B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Selective covering properties of product spaces, II: γ spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **368** (2016), 2865–2889.

[37] K. Milliken, *Ramsey's theorem with sums or unions*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **18** (1975), 276–290.

[38] K. Numakura, *On bicompact semigroups*, Mathematical Journal of Okayama University **1** (1952), 99–108.

[39] T. Orenshtein, B. Tsaban, *Linear σ-additivity and some applications*, Transactions of the American Mathematical Society **363** (2011), 3621–3637.

[40] A. Osipov, P. Szewczak, B. Tsaban, *Strongly sequentially separable function spaces, via selection principles*, Topology and its Applications, **270** (2020), 106942.

[41] I. Recław, *Every Luzin set is undetermined in the point-opened game*, Fundamenta Mathematicae **144** (1994), 43–54.

[42] D. Repovš, L. Zdomskyy, *On M-separability of countable spaces and function spaces*, Topology and its Applications **157** (2010), 2538–2541.

[43] F. Rothberger, *Eine Verschärfung der Eigenschaft C*, Fundamenta Mathematicae **30** (1938), 50–55.

[44] M. Sakai, *Property C" and function spaces*, Proceedings of the American Mathematical Society **104** (1988), 917–919.

[45] M. Sakai, *The sequence selection properties of* $\mathrm{C_p}(X)$, Topology and its Applications **154** (2007), 552–560.

[46] M. Sakai, *Selection principles and upper semicontinuous functions*, Colloquium Mathematicum **117** (2009), 251–256..

[47] G. Sacks, *Forcing with perfect closed sets*, in: **Axiomatic Set Theory** (D. Scott, ed.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Vol. XIII, Part I, American Mathematical Society, Providence, RI, 1971, 331–355.

[48] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers. I. Ramsey theory*, Topology and its Applications **69** (1996), 31–62.

[49] M. Scheepers, *Open covers and partition relations*, Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), 577–581.

[50] M. Scheepers, *Sequential convergence in* $\mathrm{C_p}(X)$ *and a covering property*, East-West Journal of Mathematics **1** (1999), 207–214.

[51] M. Scheepers, *The length of some diagonalization games*, Archive for Mathematical Logic **38** (1999), 103–122.

[52] M. Scheepers, *Combinatorics of open covers, VI. Selectors for sequences of dense sets*, Quaestiones Mathematicae **22** (1999), 109–130.

[53] M. Scheepers, B. Tsaban, *The combinatorics of Borel covers*, Topology and its Applications **121** (2002), 357–382.

[54] S. Shelah, *Every null-additive set is meager-additive*, Israel Journal of Mathematics **89** (1995), 357–376.

[55] P. Szewczak, *Abstract colorings, games and ultrafilters*, Topology and its Applications **335** (2023), 108595.

[56] P. Szewczak, *Productivity of paracompactness and closed images of real GO-spaces*, Topology and its Applications **222** (2017), 254–273.

[57] P. Szewczak, B. Tsaban, *Products of Menger spaces: a combinatorial aproach*, Annals of Pure and Applied Logic **168** (2017), 1–18.

[58] P. Szewczak, B. Tsaban, *Products of general Menger spaces*, Topology and its Applications **255** (2019), 41–55.

[59] P. Szewczak, B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Finite powers and products of Menger sets*, Fundamenta Mathematicae **253** (2021), 257–275.

[60] P. Szewczak, T. Weiss, *Null sets and combinatorial covering properties*, Journal of Symbolic Logic, **87** (2022), 1231 – 1242, doi:10.1017/jsl.2021.51.

[61] P. Szewczak, G. Wiśniewski, *Products of Luzin-type sets with combinatorial properties*, Topology and its Applications **264** (2019), 420–433.

[62] P. Szewczak, M. Włudecka, *Unbounded towers and products*, Annals of Pure and Applied Logic **172** (2021), 102900.

[63] A. Taylor, *A canonical partition relation for finite subsets of ω*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **21** (1976), 137–146.

[64] B. Tsaban, *Additivity numbers of covering properties*, in: **Selection Principles and Covering Properties in Topology** (L. Kocinac, editor), Quaderni di Matematica 18, Seconda Universita di Napoli, Caserta 2006, 245–282.

[65] B. Tsaban, *Algebra, selections, and additive Ramsey theory*, Fundamenta Mathematicae **240** (2018), 81–104.

[66] B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Combinatorial images of sets of reals and semifilter trichotomy*, Journal of Symbolic Logic **73** (2008), 1278–1288.

[67] B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Hereditarily Hurewicz spaces and Arhangel'skiĭ sheaf amalgamations*, Journal of the European Mathematical Society **12** (2012), 353–372.

[68] S. Todorčević, *Aronszajn orderings*, Publications de l'Insitut Mathematique **57** (1995), 29–46.

[69] B. Tsaban, *Selection Principles and special sets of reals*, in: **Open Problems in Topology II** (E. Pearl, ed.), Elsevier B.V. 2007, 91–108.

[70] B. Tsaban, *Menger's and Hurewicz's Problems: Solutions from "The Book" and refinements*, Contemporary Mathematics **533** (2011), 211–226.

[71] B. Tsaban, L. Zdomskyy, *Scales, fields, and a problem of Hurewicz*, Journal of the European Mathematical Society **10** (2008), 837–866.

[72] L. Zdomskyy, *A semifilter approach to selection principles*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **46** (2005), 525–539.

[73] L. Zdomskyy, *Products of Menger spaces in the Miller model*, Advances in Mathematics **335** (2018), 170–179.

[74] O. Zindulka, *Strong measure zero and the like via selection principles*, Conference Frontiers of Selection Principles, Poland, 2017, plenary lecture, slides available at: `http://selectionprinciples.com/Talks/Zindulka.pdf`.

4. Aktywność naukowa

Granty.

Kierownik polskiej części projektu .... 08.2022 – 07.2025
Grant Weave–Unisono, Narodowe Centrum Nauki/Austriacki Fundusz Nauki (FWF)

Kierowanie trzyosobowym zespołem badawczym polskiej części projektu w ramach trzyletniego grantu bilateralnego realizowanego z Politechniką Wiedeńską. Kierownik dwuosobowego zespołu badawczego austriackiej części projektu: prof. Lyubomyr Zdomskyy.

Projekt: *Teoriomnogościowe aspekty selekcji topologicznych.*

Numer projektu: 2021/03/Y/ST1/00122

Wartość polskiej części grantu: 955 458 PLN.

Odczyty naukowe na zaproszenie.

Boise Extravaganza in Set Theory 06.2019
Ashland, Oregon, USA

Odczyt: *Selection principles in mathematics*

Frontiers of Selection Principles 08.2017
Warszawa, Polska

Seria 5 wykładów: *Introduction to selection principles*

Odczyt plenarny: *Products of Menger spaces and the Scheepers property*

Workshop on Selection Principles in Mathematics 09.2016
Chengdu, Chiny

Seria 5 wykładów: *Selection principles in mathematics*

Staże naukowe

Roczny staż naukowy .... 02.2016 – 01.2017
Uniwersytet Bar–Ilan, Izrael

Roczny staż podoktorski w ramach grantu Kolmana–Sorefa pod kierunkiem naukowym prof. Boaza Tsabana.

Realizowany projekt: *Coherent Omission of Intervals.*

Miesięczny staż naukowy 10.2016
Centrum Badawcze Kurta Gödla Logiki Matematycznej, Uniwersytet Wiedeński, Austria

Miesięczny staż naukowy na zaproszenie i pod kierunkiem prof. Lyubomyra Zdomskyy'ego.

Realizowany projekt: *Products of Menger sets.*

5. Osiągnięcia organizacyjne

Przewodniczący komitetu organizacyjnego 08.2017
Konferencja Frontiers of Selection Principles, Warszawa, Polska

Przewodniczący komitetu organizacyjnego wspólnie z prof. Boazem Tsabanem oraz prof. Lyubomyrem Zdomskyym. Konferencja była w pełni dedykowana kombinatorycznym własnościom pokryciowym, wzięło w niej udział ponad 60 badaczy z ponad 15 krajów. Konferencja była poprzedzona tygodniem warsztatowym skierowanym do studentów i młodych badaczy.

Komitet redakcyjny 2020
Pismo: Topology and its Applications, wydawnictwo: Elsevier

Członek komitetu redakcyjnego (wspólnie z Boazem Tsabanem i Lyubomyrem Zdomskyy'm) specjalnego numeru czasopisma *Topology and its Applications* związanego z konferencją Frontiers of Selection Principles. Link do wydania: `https://www.sciencedirect.com/journal/topology-and-its-applications/special-issue/108JC10LKMT`.