

UNIwersytet WarsZawski

Wydział Matematyki,  
Informatyki i Mechaniki

Instytut Matematyki

Piotr Kucharski

Autoreferat



2024

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Imię i nazwisko</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce</b>	<b>5</b>
4.1	Wprowadzenie . . . . .	7
4.2	Korzenie korespondencji: stany BPS związane z węzłami . . . . .	10
4.3	Korespondencja węzeł-kołczan . . . . .	11
4.4	Geometryczne i fizyczne interpretacje korespondencji . . . . .	12
4.5	Struktura korespondencji węzeł-kołczan . . . . .	13
4.6	Generalizacja: korespondencja między trójrozmaiłościami i kołczanami . . . . .	17
<b>5</b>	<b>Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.</b>	<b>19</b>
5.1	Zagraniczne staże podoktorskie . . . . .	19
5.2	Kierowanie grantami realizowanymi w zagranicznych ośrodkach naukowych . . . . .	20
5.3	Prezentacje na konferencjach międzynarodowych i seminariach organizowanych za granicą . . . . .	20
5.4	Międzynarodowe staże, workshopy i szkoły . . . . .	22
5.5	Bieżące uczestnictwo w międzynarodowych zespołach badawczych . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.</b>	<b>26</b>
6.1	Osiągnięcia dydaktyczne . . . . .	26
6.2	Osiągnięcia organizacyjne . . . . .	27
6.3	Osiągnięcia w popularyzacji nauki . . . . .	29
<b>7</b>	<b>Inne osiągnięcia</b>	<b>32</b>
7.1	Inne publikacje oraz preprinty . . . . .	32
7.2	Granty realizowane w polskich ośrodkach naukowych . . . . .	34

# 1 Imię i nazwisko

Piotr Jan Kucharski

# 2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe lub artystyczne

- Doktor nauk fizycznych
  - Instytucja: Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
  - Rok: 2017
  - Tytuł rozprawy doktorskiej: *Węzły i niezmienniki BPS*
  - Promotor: prof. Piotr Sułkowski
  
- Magister fizyki teoretycznej
  - Instytucja: Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
  - Rok: 2013
  
- Licencjat z fizyki w ramach studiów indywidualnych
  - Instytucja: Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
  - Rok: 2011

### 3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych lub artystycznych

- Uniwersytet Warszawski,  
Instytut Matematyki
  - Adiunkt
  - 2022 – teraz
  
- University of Amsterdam (Holandia),  
Korteweg-de Vries Institute for Mathematics and Institute of Physics
  - Postdoctoral researcher
  - 2021 – 2022
  
- California Institute of Technology (USA),  
Division of Physics, Mathematics and Astronomy
  - Postdoctoral scholar
  - 2018 – 2021
  
- Uppsala University (Szwecja),  
Department of Mathematics
  - Postdoctoral researcher
  - 2017 – 2018

## 4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce

- Tytuł cyklu powiązanych tematycznie artykułów naukowych:

Korespondencja węzeł-kołczan:  
struktura, intepretacje i generalizacje

- Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b ustawy:<sup>1</sup>

- [hab1] J. Jankowski, P. Kucharski, H. Larraguivel, D. Noshchenko, and P. Sulkowski, *Quiver diagonalization and open BPS states*, *Commun. Math. Phys.* 402 (2023) 1, 1551–1584, [arXiv:2212.04379].
- [hab2] T. Ekhholm, P. Kucharski, and P. Longhi, *Knot homologies and generalized quiver partition functions*, *Lett. Math. Phys.* 113 (2023) 6, 117, [arXiv:2108.12645].
- [hab3] T. Ekhholm, A. Gruen, S. Gukov, P. Kucharski, S. Park, and P. Sulkowski,  *$\hat{Z}$  at large  $N$ : from curve counts to quantum modularity*, *Commun. Math. Phys.* 396 (2022) 1, 143–186, [arXiv:2005.13349].
- [hab4] T. Ekhholm, A. Gruen, S. Gukov, P. Kucharski, S. Park, M. Stosic, and P. Sulkowski, *Branches, quivers, and ideals for knot complements*, *J. Geom. Phys.* 177 (2021) 104520, [arXiv:2110.13768].
- [hab5] J. Jankowski, P. Kucharski, H. Larraguivel, D. Noshchenko, and P. Sulkowski, *Permutohedra for knots and quivers*, *Phys. Rev. D* 104 (2021) 086017, [arXiv:2105.11806].

---

<sup>1</sup>Wszystkie prace były pisane w języku angielskim, stąd taki język przyjęto w tej liście.

- [hab6] P. Kucharski,  
*Quivers for 3-manifolds: the correspondence, BPS states,  
and 3d  $\mathcal{N} = 2$  theories,*  
*JHEP* 09 (2020) [arXiv:2005.13394].
  
- [hab7] T. Ekhholm, P. Kucharski, and P. Longhi,  
*Multi-cover skeins, quivers, and 3d  $\mathcal{N} = 2$  dualities,*  
*JHEP* 02 (2020) 018, [arXiv:1910.06193].
  
- [hab8] T. Ekhholm, P. Kucharski, and P. Longhi,  
*Physics and geometry of knots-quivers correspondence,*  
*Commun. Math. Phys.* 379 (2020) 2, 361–415, [arXiv:1811.03110].
  
- [hab9] P. Kucharski, M. Reineke, M. Stosic, and P. Sulkowski,  
*Knots-quivers correspondence,*  
*Adv. Theor. Math. Phys.* 23 (2019) 7, 1849–1902, [arXiv:1707.04017].
  
- [hab10] P. Kucharski, M. Reineke, M. Stosic, and P. Sulkowski,  
*BPS states, knots, and quivers*  
*Phys. Rev. D* 96 (2017), 121902(R) [arXiv: 1707.02991].
  
- [hab11] P. Kucharski, and P. Sulkowski,  
*BPS counting for knots and combinatorics on words,*  
*JHEP* 11 (2016) 120, [arXiv:1608.06600].
  
- [hab12] S. Garoufalidis, P. Kucharski, and P. Sulkowski,  
*Knots, BPS states, and algebraic curves,*  
*Commun. Math. Phys.* 346 (2016) 1, 75–113, [arXiv:1504.06327].

## 4.1 Wprowadzenie

Przez wiele lat teorię reprezentacji kołczanów i teorię węzłów rozwijano w zupełnym oderwaniu od siebie. Wyniki Gabriela, Auslandera i Reitena były niezależne od dzieł Aleksandra, Briggsa i Redemeistera. Odległość dzieląca węzły i kołczany nieco się zmniejszyła, gdy do obu dziedzin wkroczyło podejście zakorzenione w fizyce matematycznej. W swojej przełomowej pracy [1] Witten wprowadził trójwymiarową interpretację niezmienników węzłów – Jonesa i HOMFLY-PT [2, 3, 4] – przy użyciu teorii Cherna-Simonsa. Z drugiej strony rozważania na temat algebr stanów BPS [5] i teorii Donaldsona-Thomasa [6, 7] zainspirowały Kontsevicha i Soibelmana do skonstruowania kohomologicznych algebr Halla i motywicznych niezmienników Donaldsona-Thomasa [8, 9].

Kluczową ideą cyklu powiązanych tematycznie artykułów naukowych składających się na osiągnięcie naukowe jest korespondencja między węzłami a symetrycznymi kołczanami, która w nowy sposób połączyła istotne gałęzie matematyki. Dwie najstarsze publikacje [hab11, hab12] to badania stanów BPS powiązanych z węzłami, które stanowią korzenie korespondencji (patrz rozdz. 4.2). Kolejne dwa artykuły [hab9, hab10] wprowadzają korespondencję węzeł-kołczan i udowadniają ją dla szerokiej klasy węzłów (patrz rozdz. 4.3). Publikacje [hab2, hab8] dostarczają interpretacji korespondencji w kategoriach zliczeń dysków holomorficzy i trójwymiarowych teorii supersymetrycznych, co podsumowano w rozdz. 4.4. Artykuły [hab1, hab5, hab7] zawierają analizę struktur utworzonych przez kołczany odpowiadające temu samemu węzłowi oraz leżącą u ich podstaw operację zakorzenioną w relacjach skein dla granic dysków (patrz rozdz. 4.5). Publikacje [hab3, hab4, hab6] uogólniają korespondencję węzeł-kołczan na przypadek trójrozmaitości będących dopełnieniami węzłów oraz opisują relacje z krzywymi kwantowymi i niezmiennikami trójrozmaitości zamkniętych, co omówiono w rozdz. 4.6.

Pozostała część tej sekcji zawiera przegląd niezbędnych informacji wstępnych z teorii węzłów i teorii reprezentacji kołczanów.

### Wstęp – teoria węzłów

Jeśli  $K \subset S^3$  jest węzłem, to jego niezmiennik HOMFLY-PT<sup>2</sup>  $P_K(a, q)$  można obliczyć z diagramu węzła poprzez relacje skein [3, 4]. Kolorowe niezmienniki HOMFLY-PT  $P_{K,R}(a, q)$  [1, 10, 11] zależą również od reprezentacji grupy Liego  $SU(N)$  i także dopuszczają diagramatyczny opis w kategoriach standardowych niezmienników splotów będących satelitami  $K$ .

---

<sup>2</sup>W zredukowanej normalizacji niezmiennik HOMFLY-PT jest wielomianem. Zwykle będę używał normalizacji nieredukowanej, dla której jest on funkcją wymierną.

Niezmienniki HOMFLY-PT można traktować jako deformację  $a$  wielomianu Jonesa  $J_K(q)$  [2] – są one równe dla  $a = q^2$  odpowiadającego grupie  $SU(2)$ .

Dalsze udoskonalenie ('refinement') niezmienników węzłów było motywowane programem kategoryfikacji, zapoczątkowanym przez konstrukcję homologii Khovanova, której stopniowana ('graded') charakterystyka Eulera jest dana przez  $J_K(q)$  [12]. Deformacja  $t$  niezmiennika HOMFLY-PT, nazywana superwielomianem [13], jest stopniowanym wielomianem Poincarego homologii HOMFLY-PT [14, 15]:<sup>3</sup>

$$\mathcal{P}_K(a, q, t) = \sum_{i,j,k \in \mathbb{Z}} a^i q^j t^k \dim \mathcal{H}_{i,j,k}(K). \quad (1)$$

Istnieje również kolorowa homologia HOMFLY-PT [16], której stopniowany wielomian Poincarego (innymi słowy: kolorowy superwielomian)  $\mathcal{P}_{K,R}(a, q, t)$  redukuje się do kolorowego wielomianu HOMFLY-PT dla  $t = -1$ .

Kolorowe niezmienniki HOMFLY-PT dla reprezentacji całkowicie symetrycznych  $S^r$  (które dla uproszczenia będą oznaczone jako  $R = r$ ) można złożyć w szereg generujący HOMFLY-PT

$$P_K(\lambda, a, q) = \sum_{r \geq 0} P_{K,r}(a, q) \lambda^{-r}, \quad (2)$$

który pozwala zdefiniować niezmienniki Labastidy-Mariño-Ooguriego-Vafy (LMOV) [17, 18, 19]. Jeśli rozważymy pletystyczną funkcję wykładniczą, zdefiniowaną dla  $f(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$  i  $a_0 = 0$  jako

$$\text{Exp}[f(t)] = \exp \left[ \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} f(t^k) \right] = \prod_{n \geq 0} (1 - t^n)^{a_n}, \quad (3)$$

wtedy (2) możemy przepisać jako

$$P_K(\lambda, a, q) = \text{Exp} \left[ \frac{N_K(\lambda, a, q)}{1 - q^2} \right]; \quad (4)$$

$N_K(\lambda, a, q)$  jest funkcją generującą niezmienniki LMOV  $N_{K,r,i,j}$ :

$$N_K(\lambda, a, q) = \sum_{r \geq 0} \sum_{i,j \in \mathbb{Z}} N_{K,r,i,j} \lambda^{-r} a^i q^j \quad (5)$$

a formuła (4) pochodzi z konstrukcji fizycznej, w której niezmienniki LMOV są zliczeniami stanów BPS w systemie M-bran związanym z węzłem  $K$  [17]. Ta interpretacja sugeruje, że

---

<sup>3</sup>Wszystkie relacje z homologiami są rozważane dla normalizacji zredukowanej, w której  $\mathcal{P}(a, q, t)$  są wielomianami.



$N_{K,r,i,j} \in \mathbb{Z}$ , co jest treścią hipotezy LMOV [17, 18, 19].

Z geometrycznego punktu widzenia szereg generujący HOMFLY-PT i niezmienniki LMOV można interpretować odpowiednio jako funkcję podziału Gromova-Wittena i zliczenia krzywych holomorficzych [17, 20, 21, 22]. Jedną z konsekwencji tej relacji jest przypuszczenie, że wielomian augmentacji ('augmentation polynomial') homologii kontaktowej węzła [23, 24] można zidentyfikować (z dokładnością do czynnika) za pomocą  $a$ -zdeformowanych (' $a$ -deformed') wielomianów  $A$  [20, 25, 26, 27]. Oryginalne wielomiany  $A$  zostały wprowadzone w [28] jako wielomiany definiujące krzywych algebraicznych związanych z węzłami. Wielomiany  $A$  i ich deformację  $a$  można przekształcić w operatory anihilujące odpowiednio niezmienniki Jonesa i HOMFLY-PT pokolorowane reprezentacjami całkowicie symetrycznymi [29, 30, 31]:

$$\hat{A}_K(\hat{\mu}, \hat{\lambda}, q)J_{K,r}(q) = 0, \quad \hat{A}_K(\hat{\mu}, \hat{\lambda}, a, q)P_{K,r}(a, q) = 0, \quad (6)$$

gdzie  $\hat{\mu}$  i  $\hat{\lambda}$  są operatorami spełniającymi relację komutacyjną  $\hat{\mu}\hat{\lambda} = q\hat{\lambda}\hat{\mu}$  działającymi na  $P_{K,r}(a, q)$  następująco:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \hat{\mu}P_{K,r}(a, q) &= q^r P_{K,r}(a, q), \\ \hat{\lambda}P_{K,r}(a, q) &= P_{K,r+1}(a, q). \end{aligned} \quad (7)$$

Istnieje również deformacja  $t$  równania (6), w której superwielomian  $A$ , oznaczany jako  $\hat{A}_K(\hat{\mu}, \hat{\lambda}, a, q, t)$ , anihiluje kolorowe superwielomiany  $\mathcal{P}_{K,r}(a, q, t)$  [26].

## Wstęp – teoria reprezentacji kołczanów

Kołczan  $Q$  to skierowany graf, tj. para  $(Q_0, Q_1)$ , gdzie  $Q_0$  jest skończonym zbiorem wierzchołków, a  $Q_1$  skończonym zbiorem strzałek pomiędzy nimi. Macierz sąsiedztwa  $Q$  to macierz  $|Q_0| \times |Q_0|$  z elementami  $C_{ij}$  równymi liczbie strzałek z  $i$  do  $j$ . Jeśli  $C_{ij} = C_{ji}$ , to mówimy że kołczan jest symetryczny. Jeśli ustalimy kołczan  $Q$  i ciało  $\mathbb{F}$ , reprezentacja  $V$  kołczanu  $Q$  przypisuje przestrzeń  $\mathbb{F}$ -wektorową  $V_i$  o wymiarze  $d_i$  każdemu wierzchołkowi  $i \in Q_0$  i  $\mathbb{F}$ -liniowe przekształcenie każdej strzałce  $\alpha \in Q_1$ . Wymiary wszystkich przestrzeni wektorowych danej reprezentacji można wygodnie podsumować wektorem wymiarów  $\mathbf{d} = (d_i)_{i \in Q_0}$ .

Najłatwiejsza droga do zdefiniowania motywicznych niezmienników Donaldsona-Thomasa (DT) dla symetrycznych kołczanów prowadzi przez motywiczny szereg generujący zdefinio-

---

<sup>4</sup>Działanie  $\hat{\mu}$  i  $\hat{\lambda}$  na  $J_{K,r}(q)$  jest identyczne.

wany jako

$$P_Q(\mathbf{x}, q) = \sum_{\mathbf{d}} (-q)^{\mathbf{d} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{d}} \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{d}}}{(q^2; q^2)_{\mathbf{d}}} = \sum_{d_1, \dots, d_{|Q_0|} \geq 0} (-q)^{\sum_{i,j=1}^{|Q_0|} C_{ij} d_i d_j} \prod_{i=1}^{|Q_0|} \frac{x_i^{d_i}}{(q^2; q^2)_{d_i}}, \quad (8)$$

gdzie mianownik jest iloczynem symboli  $q$ -Pochhammera:

$$(z; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - zq^k). \quad (9)$$

Jeśli przepiszemy (8) jako

$$P_Q(\mathbf{x}, q) = \text{Exp} \left[ \frac{\Omega_Q(\mathbf{x}, q)}{1 - q^2} \right], \quad (10)$$

to  $\Omega_Q(\mathbf{x}, q)$  jest szeregiem generującym niezmienniki DT  $\Omega_{Q, \mathbf{d}, s}$  [8, 9]:

$$\Omega_Q(\mathbf{x}, q) = \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{N}Q_0, s \in \mathbb{Z}} \Omega_{Q, \mathbf{d}, s} \mathbf{x}^{\mathbf{d}} q^s. \quad (11)$$

Niezmienniki DT można również wprowadzić jako liczby Bettiego homologii przecięciowej ('intersection homology') przestrzeni modułów wszystkich reprezentacji półprostych kołczanu  $Q$  o wektorze wymiarów  $\mathbf{d}$  lub jako liczby Chowa-Bettiego przestrzeni modułów wszystkich reprezentacji prostych kołczanu  $Q$  o wektorze wymiarów  $\mathbf{d}$  [32, 33]. W przypadku kołczanów z jednym wierzchołkiem i  $m$  pętlami, niezmienniki DT mają interpretację kombinatoryczną w kategoriach nieprzemiennych schematów Hilberta [34]. Efimov udowodnił, że dla dowolnego symetrycznego kołczanu  $Q$  niezmienniki DT są liczbami całkowitymi [35].<sup>5</sup>

## 4.2 Korzenie korespondencji: stany BPS związane z węzłami

Korzenie korespondencji węzeł-kołczan tkwią w badaniach nad relacją między wielomianami  $A$  a niezmiennikami LMOV [hab11, hab12].

Głównym wynikiem mojej pracy z S. Garoufalidisem i P. Sułkowskim [hab12] było wyrażenie (pewnej wersji) niezmienników LMOV w kategoriach funkcji, która rozwiązuje równanie

$$A_K(\mu, \lambda, a, q) = 0,$$

---

<sup>5</sup>Zależność niezmienników DT od znaku jest również znana i przy nieco innej definicji można udowodnić, że są one nieujemne [35]. Jednak ze względu na fakt, że wchodzi one w korespondencję węzeł-kołczan w kombinacjach liniowych, które nie zachowują znaku, skupię się tylko na ich całkowitości.

będące granicą  $q \rightarrow 1$  (nazywaną również granicą klasyczną) równania (6). Analizując formę tego wyrażenia, przypuszczaliśmy, że pewna wersja  $N_{K,r,i,j}$  powinna być podzielna przez  $r$ , co zostało później udowodnione w [36]. Pokazaliśmy również związek pomiędzy  $a$ -zdeformowanymi wielomianami  $A$  a funkcjami hipergeometrycznymi i liczbami Catalana. To proste kombinatoryczne twierdzenie okazało wierzchołkiem góry lodowej, która powoli odsłaniała się w naszych późniejszych pracach.

W [hab11], razem z moim promotorem P. Sułkowskim, badałem związek pomiędzy zdeformowanymi wielomianami  $A$  a niezmiennikami LMOV w bardziej ogólny sposób, bez rozważania granicy klasycznej. Skonstruowaliśmy model kombinatoryczny oparty na języku formalnym, którego struktura była zakodowana w zdeformowanym wielomianie  $A$  danego węzła. Z drugiej strony, funkcja generująca związana z rozważanym modelem kodowała pewną wersję niezmienników LMOV. Jednak najbardziej znaczącym rezultatem [hab11] było zauważenie, że model kombinatoryczny oparty na zdeformowanym wielomianie  $A$  danego węzła jest równoważny kombinatoryce zdegenerowanej kohomologicznej algebry Halla pewnego kołczanu opisanego przez Reinekego w [34]. Początkowo relacja ta wydawała się przypadkowa (była badana dalej w [37] bez prób formułowania ogólnych stwierdzeń), ale wkrótce okazała się bardzo głęboka i istotna.

### 4.3 Korespondencja węzeł-kołczan

Razem z M. Reinekem, P. Sułkowskim i M. Stošiciem skupiłem się na pytaniu, czy relację znaną w [hab11] można przenieść na ogólny poziom teorii węzłów i teorii reprezentacji kołczanów, co doprowadziło do sformułowania korespondencji węzeł-kołczan:<sup>6</sup>

**Twierdzenie 1.** [hab9, 40] *Dla każdego węzła drzewiastego  $K$  istnieje symetryczny kołczan  $Q$  i liczby całkowite  $\{a_i, q_i\}_{i \in Q_0}$  (zadające zamianę zmiennych) takie, że szereg generujący HOMFLY-PT dla  $K$  jest równy motywicznemu szeregowi generującemu dla  $Q$ :*

$$P_K(\lambda, a, q) = P_Q(\mathbf{x}, q)|_{x_i = \lambda^{-1} a^{a_i} q^{q_i - c_{ii}}}. \quad (12)$$

W [hab9] udowodniliśmy korespondencję węzeł-kołczan dla wszystkich węzłów skreconych, węzłów torycznych  $(2, 2p + 1)$  i węzłów z co najwyżej 6 skrzyżowaniami. Później Stošić i Weidrich przedstawili dowód dla wszystkich węzłów wymiernych [39] i węzłów drzewiastych [40].

---

<sup>6</sup>Korespondencję zaprezentowano równolegle w dwóch artykułach. Pełną analizę przedstawiono w [hab9], natomiast [hab10] stanowiło krótkie podsumowanie najważniejszych wyników. Korespondencję można także sformułować dla splotów (sploty drzewiaste to domknięcia płatanin ('tangles') algebraicznych wprowadzonych przez Conwaya [38]).

W [hab9, hab10] postawiliśmy hipotezę, że Twierdzenie 1 obowiązuje dla wszystkich węzłów.

Korespondencję węzeł-kołczan można również sformułować na poziomie szeregów generujących niezmienniki LMOV oraz DT (zob. (10) i (4)):

$$N_K(\lambda, a, q) = \Omega_Q(\mathbf{x}, q)|_{x_i = \lambda^{-1} a^{a_i} q^{q_i - C_{ii}}}. \quad (13)$$

Ponieważ udowodniono, że niezmienniki DT kołczanów symetrycznych są liczbami całkowitymi [35], powyższe dowody okazały się eleganckim i skutecznym sposobem udowodnienia całkowitości niezmienników LMOV:

**Wniosek 2.** [hab9, hab10] *Korespondencja węzeł-kołczan automatycznie implikuje hipotezę LMOV.*

Oprócz relacji między niezmiennikami LMOV i DT, korespondencja węzeł-kołczan niesie informacje o kategoryfikacji niezmienników HOMFLY-PT [hab9, hab10]. Okazuje się, że każdemu wierzchołkowi kołczanu odpowiada generator homologii HOMFLY-PT, a liczby całkowite  $a_i, q_i$  z zamiany zmiennych są równe stopniom  $a$  i  $q$  dla danego generatora. Ponadto liczba pętli dołączonych do danego wierzchołka jest równa stopniowi homologicznemu odpowiedniego generatora:

$$C_{ii} = t_i. \quad (14)$$

Warto zauważyć, że kołczan wyznaczony jest wyłącznie przez niezmienniki HOMFLY-PT, więc na innej ścieżce rozwoju mógłby służyć jako reguła wskazująca właściwą konstrukcję homologii HOMFLY-PT.

## 4.4 Geometryczne i fizyczne interpretacje korespondencji

Ponieważ niezmienniki LMOV są zakorzenione w zliczaniu stanów kwantowych lub, równoważnie, krzywych holomorficznych, naturalnym było poszukiwanie geometrycznych i fizycznych interpretacji korespondencji węzeł-kołczan. W Uppsali wraz z innym postdokim P. Longhim udało mi się namówić mojego promotora T. Ekholma do pracy nad tym problemem.

W [hab8] badaliśmy geometrię rozwiązanego konifoldu ('resolved conifold')<sup>7</sup>, w której funkcja podziału Gromova-Wittena zliczająca wszystkie (rozłączone) uogólnione krzywe holomorficzne kończące się na podrozmaitości konormalnej  $L_K$  odtwarza szereg generujący

---

<sup>7</sup>Rozwiązany konifold to wiązka całkowita ('total bundle')  $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ . Podrozmaitość konormalna do  $K$ , oznaczana jako  $L_K$ , jest podrozmaitością lagranżowską przypisaną do węzła  $K$  – szczegóły konstrukcji opisane są w [17, 21, 22].

HOMFLY-PT [17, 21, 22]. Pokazaliśmy, że geometryczne znaczenie korespondencji węzeł-kołczan jest takie, że całe spektrum krzywych holomorficzyńch kończących się na  $L_K$  może zostać wygenerowane przez skończoną liczbę dysków holomorficzyńch odpowiadających wierzchołkom kołczanu. Przecięcia i samoprzecięcia brzegów dysków odpowiadają strzałkom i pętłom kołczanu, podczas gdy  $a_i$  jest drugą klasą homologii dysku powiązanego z wierzchołkiem  $i$ , a  $q_i - C_{ii}$  jest liczbą jego przecięć z czterowymiarowym łańcuchem z brzegiem równym  $2 \cdot L_K$ . Z fizycznego punktu widzenia korespondencję można rozumieć jako dualność pomiędzy teoriami supersymetrycznymi 3d  $\mathcal{N} = 2$ : jedną związaną z węzłem, wprowadzoną w [41, 42], a drugą związaną z kołczanem, opisaną przez nas w [hab8]. Niezmienniki LMOV są zliczeniami stanów kwantowych w pierwszej, podczas gdy niezmienniki DT są takimi zliczeniami w drugiej, a równanie [41, 42] oznacza, że są to dwa zliczenia tego samego widma stanów. Podobnie (12) można interpretować jako równość funkcji podziału obu teorii.

W [hab2] jeszcze udoskonaliliśmy interpretacje z [hab8] i wykorzystaliśmy je jako naczelnę zasadę przy proponowaniu uogólnienia (12) na poziom skategoryzowany. Głównym nowym aspektem interpretacji geometrycznej była złożona struktura dysków holomorficzyńch wynikająca z rozciągania symplektycznej teorii pola (‘symplectic field theory stretching’) [43]. Bazując na tej interpretacji, zaproponowaliśmy uogólnienie (12) na przypadek wielokrotnie nawiniętych dysków (które występują dla węzłów takich jak  $9_{42}$  i  $10_{132}$ , jak pokazaliśmy w [hab8]) oraz wielomianów Poincarego homologii HOMFLY-PT, czyli superwielomianów. Z drugiej strony badanie symetrii teorii 3d  $\mathcal{N} = 2$  powiązanej z węzłem ujawniło fizyczne pochodzenie zależności (14). Pokazaliśmy także, jak różniczka kasująca (‘cancelling differential’) kolorowej homologii HOMFLY-PT [16] jest reprezentowana w kołczanie i jak wielomian  $A$  każdego węzła spełniającego (12) można przekształcić w krzywą kwantową brany torycznej w  $\mathbb{C}^3$  (zob. [44, 45, 46]) przy użyciu zmiennych nieprzemiennejch.

## 4.5 Struktura korespondencji węzeł-kołczan

Kiedy wprowadziliśmy korespondencję węzeł-kołczan w [hab9], zauważyliśmy, że dla  $10_{124}$  – czyli węzła torycznego (3,5) – istnieją dwa odpowiadające sobie kołczany tej samej wielkości, które różnią się pozycją jednej pary strzałek. W [hab7] pokazaliśmy, że analogiczne zjawisko można zaobserwować także dla węzła ósemkowego i wyjaśnić za pomocą transformacji kołczanów i parametrów generujących, którą nazwaliśmy rozplątaniem (‘unlinking’). Opierając się na interpretacjach z [hab8] i relacjach skein z [22], zdefiniowaliśmy ją następująco:

**Definicja 3.** [hab7] Rozważmy symetryczny kołczan  $Q$  z macierzą sąsiedztwa  $C$  oraz wektor parametrów generujących  $\mathbf{x}$  dane wzorem

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1i} & \cdots & C_{1j} & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1i} & \cdots & C_{ii} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{im} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ C_{1j} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{jj} & \cdots & C_{jm} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1m} & \cdots & C_{im} & \cdots & C_{jm} & \cdots & C_{mm} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m].$$

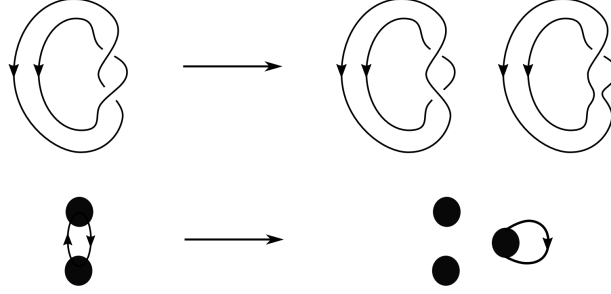
Rozplątanie wierzchołków  $i$  oraz  $j$  to operator  $U(ij)$  działający na  $C$  i  $\mathbf{x}$ , który usuwa jedną parę strzałek pomiędzy  $i$  oraz  $j$  i tworzy nowy wierzchołek z następującymi strzałkami i parametrami generującymi<sup>8</sup>:

$$U(ij)C = \begin{bmatrix} C_{11} & \cdot & C_{1i} & \cdot & C_{1j} & \cdot & C_{1m} & C_{1i} + C_{1j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{1i} & \cdot & C_{ii} & \cdot & C_{ij} - 1 & \cdot & C_{im} & C_{ii} + C_{ij} - 1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{1j} & \cdot & C_{ij} - 1 & \cdot & C_{jj} & \cdot & C_{jm} & C_{ij} - 1 + C_{jj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ C_{1m} & \cdot & C_{im} & \cdot & C_{jm} & \cdot & C_{mm} & C_{im} + C_{jm} \\ C_{1i} + C_{1j} & \cdot & C_{ii} + C_{ij} - 1 & \cdot & C_{ij} - 1 + C_{jj} & \cdot & C_{im} + C_{jm} & C_{ii} + C_{jj} + 2C_{ij} - 1 \end{bmatrix},$$

$$U(ij)\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_m, q^{-1}x_i x_j]. \quad (16)$$

Najprostszy przykład rozplątania wraz z jego przedstawieniem w postaci relacji skein dla brzegów dysków holomorficzych przedstawiono na Rysunku 1.

<sup>8</sup>W celu zaoszczędzenia miejsca używamy jednej kropki zamiast  $\cdots$  do oznaczenia pominiętych kolumn macierzy.



Rysunek 1: Przykład rozplątania i jego geometryczna reprezentacja pokazująca pochodzenie nazwy [hab7].

W [hab7] udowodniliśmy kluczową właściwość rozplątania:

**Twierdzenie 4.** [hab7] *Rozplątanie zachowuje motywiczny szereg generujący dowolnego kołczanu symetrycznego  $Q$ :*

$$P_Q(\mathbf{x}, q) = P_{U(ij)Q}(U(ij)\mathbf{x}, q). \quad (17)$$

Konsekwencje tego twierdzenia obejmują nowe dualności pomiędzy teoriami 3d  $\mathcal{N} = 2$  i nowe wcielenie relacji przekraczania ściany ('wall-crossing relations') wprowadzonych przez Kontsevicha i Soibelmana w [8, 9]. Co więcej, (17) w połączeniu z (12) może zostać użyte do wygenerowania równoważnych kołczanów, które odpowiadają temu samemu węzłowi i tworzą bardzo skomplikowane struktury.

Razem z J. Jankowskim, H. Larraguívelem, D. Noshchenką i P. Sułkowskim szczegółowo zbadałem te struktury w [hab5]. Znaleźliśmy warunki, które gwarantują, że zamiana miejscami pozadiagonalnego elementu macierzy sąsiedztwa (co opisuje zmianę pozycji pary strzałek wspomnianą wcześniej) prowadzi do innego kołczanu odpowiadającego temu samemu węzłowi:

**Twierdzenie 5.** [hab5] *Rozważmy kołczan  $Q$  odpowiadający węzłowi  $K$  oraz inny kołczan  $Q'$  z taką samą liczbą wierzchołków i tą samą zmianą zmiennych związaną z korespondencją węzeł-kołczan. Jeśli  $Q$  i  $Q'$  są powiązane sekwencją rozłącznych transpozycji, z których każda zamienia pozadiagonalne elementy macierzy sąsiedztwa:*

$$C_{ab} \leftrightarrow C_{cd}, \quad C_{ba} \leftrightarrow C_{dc}, \quad (18)$$

dla pewnych parami różnych  $a, b, c, d, \in Q_0$ , takich że

$$x_a x_b = x_c x_d \quad (19)$$

oraz

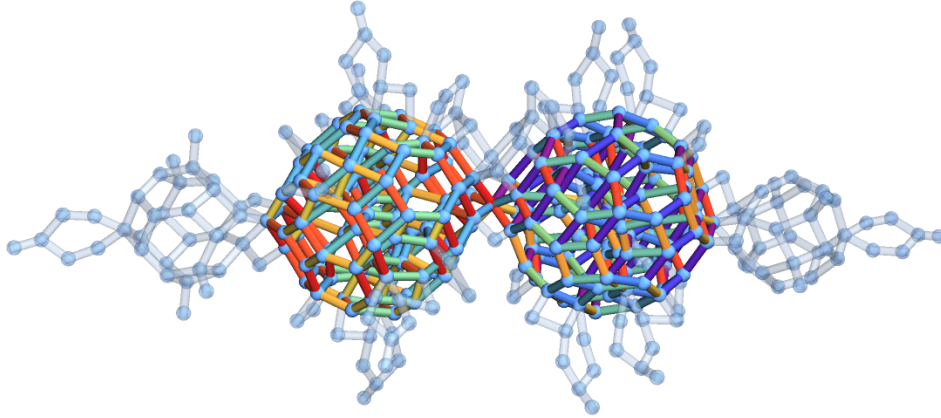
$$C_{ab} = C_{cd} - 1, \quad C_{ai} + C_{bi} = C_{ci} + C_{di} - \delta_{ci} - \delta_{di}, \quad \forall i \in Q_0, \quad (20)$$

lub

$$C_{cd} = C_{ab} - 1, \quad C_{ci} + C_{di} = C_{ai} + C_{bi} - \delta_{ai} - \delta_{bi}, \quad \forall i \in Q_0, \quad (21)$$

wówczas szeregi generujące  $Q$  oraz  $Q'$  – po zastosowaniu zmiany zmiennych związanej z korespondencją węzeł-kołczan – są równe:  $P_Q = P_{Q'}$ .

Pokazaliśmy również, że jeśli iteracyjnie zastosujemy takie transpozycje i przedstawimy powstającą strukturę jako graf (z kołczanami i transpozycjami przypisanymi odpowiednio do wierzchołków i krawędzi), to taki graf składa się z permutocjanów (tj.  $(n-1)$ -wymiarowych wielościanów, których wierzchołki odpowiadają permutacjom  $n$  elementów, krawędzie zaś transpozycjom sąsiednich elementów). Przykład takiego grafu dla węzła  $11_1$  przedstawiono na Rysunku 2.



Rysunek 2: Graf przedstawiający równoważne kołczany odpowiadające węzłowi  $11_1$ . Wyróżnione obiekty to rzuty czterowymiarowych permutocjanów [hab5].

W [hab1] rozważyliśmy pytanie dotyczące wyniku (zwykle nieskończonego) procesu rozplątywania wszystkich strzałek łączących różne wierzchołki symetrycznego kołczanu, co można rozumieć jako diagonalizację macierzy sąsiedztwa:

**Definition 6.** [hab1] Kołczan diagonalny to taki, w którym wszystkie strzałki są pętlami, tzn. wszystkie wierzchołki są rozłączone.

Główny wynik był następujący:<sup>9</sup>

<sup>9</sup>Twierdzenie 7 zostało udowodnione dla uogólnienia standardowego kołczanu, które składa się z dwóch rodzajów strzałek (zwykłych i „ujemnych”), ale tutaj skupię się na standardowych kołczanach.



**Twierdzenie 7.** [hab1] *Dla każdego symetrycznego kołczanu  $Q$  istnieje diagonalny kołczan  $Q^{(\infty)}$  oraz zbiór równań  $\{x_i^{(\infty)} = x_i^{(\infty)}(x_1, \dots, x_{|Q_0|}, q)\}_{i \in Q_0^{(\infty)}}$  takie, że motywiczne szeregi generujące  $Q$  i  $Q^{(\infty)}$  są równe po identyfikacji parametrów generujących zadanej przez ten zbiór:*

$$P_Q(\mathbf{x}, q) = P_{Q^{(\infty)}}(\mathbf{x}^{(\infty)}, q) \Big|_{x_i^{(\infty)} = x_i^{(\infty)}(x_1, \dots, x_{|Q_0|}, q)}. \quad (22)$$

Ponieważ kohomologiczna algebra Halla, niezmienniki DT i ich model kombinatoryczny dla kołczanów z jednym wierzchołkiem i  $m$  pętlami są znane [34], twierdzenie to otworzyło możliwość przeniesienia ich na dowolny kołczan symetryczny. W [hab1] zostało to zrobione dla niezmienników DT i ich modelu kombinatorycznego, wraz z fizyczną interpretacją w kategoriach teorii 3d  $\mathcal{N} = 2$  oraz jak dotąd najbardziej efektywnym algorytmem obliczania niezmienników LMOV.

## 4.6 Generalizacja: korespondencja między trójrozmaitościami i kołczanami

Podczas mojego stażu podoktorskiego w California Institute of Technology wraz z grupą, która obejmowała wszystkich moich opiekunów (P. Sułkowskiego, T. Ekholma i S. Gukova) oraz doktorantów z Caltechu (A. Gruena i S. Parka), pracowałem nad niezmiennikami dopełnień węzłów w  $S^3$  wprowadzonymi przez Gukova i Manolescu [47] nazywanymi  $F_K$ . W [hab3] zdefiniowaliśmy ich  $a$ -deformację, która opisuje zachowanie tych niezmienników dla grupy  $SU(N)$  dla dużego  $N$ , i udowodniliśmy istnienie  $a$ -zdeformowanego  $F_K$  dla dopełnień węzłów torycznych  $(2, 2p+1)$ . Odkryliśmy również, że są one bezpośrednio powiązane z kolorowymi niezmiennikami HOMFLY-PT, co umożliwiło zapisanie jawnych formuł zadających opisane wyżej niezmienniki. Z drugiej strony, wykorzystaliśmy tę relację, aby w połączeniu z zliczeniami holomorficznych pierścieni kołowych na dopełnieniach węzłów [21, 22, 48] podać interpretację  $a$ -zdeformowanego  $F_K$  w kategoriach zliczeń krzywych holomorficznych.

Podczas pracy nad [hab3] zauważyłem, że związek między  $a$ -zdeformowanymi niezmiennikami  $F_K$  a kolorowymi niezmiennikami HOMFLY-PT można wykorzystać do uogólnienia korespondencji węzeł-kołczan dla dopełnień węzłów w  $S^3$ . Doprowadziło to do [hab6], w którym udowodniłem następujące twierdzenie:

**Twierdzenie 8.** [hab6] *Dla dowolnego  $M_{T(2,2p+1)}$  – dopełnienia węzła torycznego  $(2, 2p+1)$  w  $S^3$  – istnieje symetryczny kołczan  $Q$  i liczby całkowite  $\{n_i, a_i, q_i\}_{i \in Q_0}$  (zadające zamianę zmiennych) takie, że  $a$ -zdeformowany niezmiennik  $F_K$  dla  $M_{T(2,2p+1)}$  jest równy szeregowi*

generującemu dla  $Q$ :

$$F_{T(2,2p+1)}(\mu, a, q) = P_Q(\mathbf{x}, q)|_{x_i = \mu^{n_i} a^{a_i} q^{q_i}}. \quad (23)$$

Postawiłem również hipotezę, że analogiczne twierdzenie powinno obowiązywać dla dopełnienia dowolnego węzła w  $S^3$  i pokazałem, że Twierdzenie 8 implikuje istnienie analogów niezmienników LMOV dla dopełnień węzłów torycznych  $(2, 2p + 1)$  w  $S^3$  (i potencjalnie – dla wszystkich dopełnień węzłów). Ponadto przeanalizowałem fizyczną interpretację Twierdzenia 8 pod kątem struktury teorii 3d  $\mathcal{N} = 2$  powiązanych z obiema stronami korespondencji.

Wyniki, które otrzymałem w [hab6], zachęciły T. Ekholma, A. Gruena, S. Gukowa, S. Parka, M. Stośiça i P. Sułkowskiego do włączenia się w badania korespondencji między dopełnieniami węzłów i kołczanami. W [hab4] odkryliśmy, że dla każdego dopełnienia węzła istnieje rodzina niezmienników  $F_K$ , która bijektywnie odpowiada gałęziom wielomianu  $A$  odpowiedniego węzła (badane wcześniej  $F_K$  zawsze odpowiadało do gałęzi abelowej). Otrzymaliśmy jawne wzory na niezmienniki  $F_K$  dla różnych gałęzi oraz dopełnień węzłów i wykorzystaliśmy je do udowodnienia korespondencji z kołczanami w tych przypadkach. Ponadto wykorzystaliśmy podejście  $R$ -macierzowe opracowane w [49, 50], aby udowodnić twierdzenie analogiczne do Twierdzenia 8 dla grupy  $SU(2)$  i większej klasy węzłów:

**Twierdzenie 9.** [hab4] *Dla dowolnego  $M_K$  – dopełnienia homogenicznego węzła warkoczowego ('homogeneous braid knot')  $K$  w  $S^3$  – istnieje symetryczny kołczan  $Q$  i liczby całkowite  $\{n_i, q_i\}_{i \in Q_0}$  (zadające zamianę zmiennych) takie że niezmiennik  $F_K$  dla  $M_K$  jest równy szeregowi generującemu dla  $Q$ :*

$$F_K(\mu, q) = P_Q(\mathbf{x}, q)|_{x_i = \mu^{n_i} q^{q_i}}. \quad (24)$$

Oprócz tego zdefiniowaliśmy (kwantowe) wielomiany  $B$  i ideały  $AB$ , będące analogami i uogólnieniami wielomianów  $A$ , w których zmienna  $a$  staje się operatorem tworzącym dualną parę z  $\hat{b}$ , podobnie do  $\hat{\mu}$  i  $\hat{\lambda}$  z (7).<sup>10</sup> Omówiliśmy także geometryczną interpretację wielomianów  $B$  i ideałów  $AB$  w kategoriach zliczeń krzywych holomorficznych, co otworzyło drogę do traktowania krzywych zamkniętych razem z otwartymi. Na koniec pokazaliśmy, że wzór zadający chirurgię Dehna, podany w [47], umożliwia przekształcenie kołczanów związanych z dopełnieniami węzłów na kołczany związane z zamkniętymi trójrozmaićciami poprzez niezmienniki  $\hat{Z}$  [51, 52], które są szeroko badanymi obiektami mającymi interesujące relacje z teorią liczb i algebraami operatorów wierzchołkowych [53, 54, 55, 56, 57, pub1].

---

<sup>10</sup>Operator  $\hat{a}$  działa poprzez mnożenie przez  $a = q^N$ , natomiast  $\hat{b}$  powoduje przesunięcie  $N \rightarrow N + 1$ . Operatory  $(\hat{a}, \hat{b})$  działają na rząd  $N$  w sposób całkowicie analogiczny do działania  $(\hat{\mu}, \hat{\lambda})$  na reprezentację  $r$ .

**Uwaga** Szczegółowa ocena mojego wkładu w każdą publikację dostępna jest w Wykazie osiągnięć naukowych albo artystycznych, stanowiących znaczny wkład w rozwój określonej dyscypliny.

## 5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

### 5.1 Zagraniczne staże podoktorskie

- University of Amsterdam (Holandia),  
Korteweg-de Vries Institute for Mathematics and Institute of Physics
  - Staż podoktorski w latach 2021-2022
  - Współpraca naukowa z prof. Mirandą Cheng, jej studentem Davide Passaro oraz dr Ioaną Coman-Lohi
  
- California Institute of Technology (USA),  
Division of Physics, Mathematics and Astronomy
  - Staż podoktorski w latach 2018-2021
  - Współpraca naukowa z prof. Sergiejem Gukowem oraz jego studentami: Angusem Gruenem i Sunghyukiem Parkiem
  
- Uppsala University (Szwecja),  
Department of Mathematics
  - Staż podoktorski w latach 2017-2018
  - Współpraca naukowa z prof. Tobiasem Ekholmem i dr. Pietro Longhim

## 5.2 Kierowanie grantami realizowanymi w zagranicznych ośrodkach naukowych

- *Niezmienniki topologiczne, stany BPS i kołczany – spójny opis w ramach kwantowej teorii pola*
  - Typ projektu: *Mobilność Plus*
  - Instytucja finansująca: Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego
  - Miejsce realizacji: California Institute of Technology (USA)
  - Termin realizacji: 2018 – 2021
  - Fundusze: 608 400 zł
  - Rola: główny badacz

## 5.3 Prezentacje na konferencjach międzynarodowych i seminariach organizowanych za granicą

- *Knot-quiver correspondence: structures and interpretations*
  - Seminarium, George Washington University, USA, 04/2024
  - Seminarium, Academia Sinica, Tajwan, 11/2023
- *Unlinking symmetric quivers*
  - Konferencja *DT invariants for symmetric quivers: algebra, combinatorics, and topology*, IRMA Strasbourg, Francja, 09/2023
- *Knot-quiver correspondence: a modern perspective*
  - Seminarium, LMU Munich, Niemcy, 04/2023
  - Seminarium, Northeastern University, USA, 04/2023

- *Quivers for 3-manifolds*
  - Konferencja *String Math 2022*, Warszawa, 07/2022
  
- *Quantum topology, strings, and quivers*
  - Seminarium, University of Amsterdam, Holandia, 09/2021
  
- *Knots-quivers correspondence*
  - Seminarium, University of Guadalajara, Meksyk, 08/2019
  - Seminarium, California Institute of Technology, USA, 04/2019
  - Seminarium, University of Heidelberg, Niemcy, 03/2018
  - KAWS 2018, Interational Centre for Theoretical Sciences, Bangalore, Indie, 01/2018
  
- $\hat{Z}$  *invariants at rational  $\tau$* 
  - Konferencja *Mathematics and Physics of Knots*,  
Mittag-Leffler Institute, Sztokholm, Szwecja, 06/2019
  
- *Science upside down: physics applied in math*
  - Konferencja *Los Angeles Postdoctoral Research Symposium*,  
University of California Los Angeles, USA, 06/2019
  
- *Knots-quivers correspondence – a physical perspective*
  - Seminarium, ETH Zurich, Szwajcaria, 02/2019
  
- *Physics and geometry of knots-quivers correspondence*
  - Konferencja *Quantum Fields, Knots, and Strings*, Warszawa, 09/2018
  - Konferencja *Combinatorics of Moduli Spaces, Cluster Algebras, and Topological Recursion*, Moskwa, Rosja, 06/2018

- *Extremal A-polynomials*
  - Seminarium, University of Heidelberg, Niemcy, 03/2018
  
- *Knots, (extremal) A-polynomials, and BPS invariants*
  - Konferencja *Physics and knot homologies*, Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, Cambridge, Wielka Brytania, 04/2017
  
- *Knots and BPS states*
  - Seminarium, King’s College London, Wielka Brytania, 11/2016
  
- *BPS invariants from (extremal) A-polynomials,*
  - Konferencja *Strings 2016*, Pekin, Chiny, 08/2016
  
- *Knots, BPS states, and algebraic curves*
  - Konferencja *Combinatorics of Moduli Spaces, Hurwitz Numbers, and Cohomological Field Theories*, Moskwa, Rosja, 06/2016
  
- *New look on LMOV invariants*
  - Konferencja *Group Theory and Knots*, Natal, Brazylia, 11/2014

## 5.4 Międzynarodowe staże, workshopy i szkoly

- Workshop *A Deep-Learning Era of Particle Theory*
  - Mainz Institute for Theoretical Physics, Moguncja, Niemcy, 06/2022
  
- Workshop *Knots, Strings, Symplectic Geometry and Dualities*
  - Mittag-Leffler Institute, Sztokholm, Szwecja, 09/2020 – 12/2020

- Workshop *Quantum knot invariants and Supersymmetric Gauge Theories*
  - Kavli Institute for Theoretical Physics, Santa Barbara, USA, 11/2018 – 12/2018
  
- Workshop *Categorification in Mathematical Physics*
  - Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, USA, 04/2018
  
- *Introductory workshop: Enumerative Geometry Beyond Numbers*
  - Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, USA, 01/2018
  
- *Kavli Asian Winter School on Strings, Particles, and Cosmology*
  - International Centre for Theoretical Sciences, Bangalore, India, 01/2018
  
- *Pre-StringMath Summer School*
  - University of Hamburg, Niemcy, 07/2017
  
- Staż na King's College London (UK)
  - Czas trwania: 10/2016 – 01/2017
  - Opiekun naukowy: prof. Neil Lambert
  
- Workshop *Knot homologies, BPS states, and SUSY gauge theories*
  - Simons Center for Geometry and Physics, Stony Brook, USA, 05/2015
  
- *Spring School on Superstring Theory and Related Topics*
  - International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Włochy, 03/2015-04/2015

- Workshop *Quantum Curves and Quantum Knot Invariants*
  - Banff International Research Station, Banff, Kanada, 06/2014
  
- International School *Stringtheory.pl/2014*
  - Uniwersytet Warszawski, 04/2014
  
- International School *String Steilkurs*
  - DESY, Hamburg, Niemcy, 03/2014
  
- *CERN Winter School on Supergravity, Strings and Gauge Theory*
  - CERN, Genewa, Szwajcaria, 02/2014
  
- Staż w DESY, Hamburg (Niemcy)
  - Czas trwania: 07/2012 – 09/2012
  - Opiekun naukowy: dr. Ingo Kirsch
  
- *Utrecht Summer School in Theoretical Physics*
  - Utrecht University, Holandia, 08/2011

## 5.5 Bieżące uczestnictwo w międzynarodowych zespołach badawczych

- Zespół badawczy skupiający się na zastosowaniu uczenia maszynowego do hipotezy Andrewsa-Curtisa
  - prof. Sergei Gukov (California Institute of Technology, USA i Dublin Institute for Advanced Studies, Irlandia)
  - dr. Anibal Medina-Mardones (Western University, Kanada)
  - dr. Ali Shehper (Rutgers University, USA)



- Bartłomiej Lewandowski (Uniwersytet Warszawski)
- Zespół badawczy skupiający się na relacji między kołczanami związanymi z czterowymiarowymi i trójwymiarowymi teoriami supersymetrycznymi
  - dr. Sunghyuk Park (Harvard University, USA)
  - dr. Pietro Longhi (Uppsala University, Szwecja)
  - dr. Dmitry Noshchenko (Dublin Institute for Advanced Studies, Irlandia)
  - prof. Piotr Sułkowski (Uniwersytet Warszawski)
  - dr. Hélder Larraguível (Uniwersytet Jagielloński)
- Zespół badawczy skupiający się na nowych równoważnościach kołczanów, ich interpretacjach algebraicznych oraz relacjach z teorią liczb
  - prof. Boris Feigin (Hebrew University of Jerusalem, Izrael)
  - prof. Vladimir Dotsenko (University of Strasbourg, Francja)
  - prof. Miranda Cheng (University of Amsterdam, Holandia i Academia Sinica, Tajwan)
  - dr. Dmitry Noshchenko (Dublin Institute for Advanced Studies, Irlandia)
- Zespół badawczy skupiający się na relacjach między homologami węzłów a symetrycznymi kołczanami
  - prof. Ramadevi Pichai (Indian Institute of Technology Bombay, Indie)
  - dr. Marko Stošić (Technical University of Lisbon, Portugalia)
  - dr. Dmitry Noshchenko (Dublin Institute for Advanced Studies, Irlandia)
  - dr. Vivek Kumar Singh (New York University Abu Dhabi, ZEA)
  - Sachin Chauchan (Indian Institute of Technology Bombay, Indie)

## 6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.

### 6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

- Promotorstwo pracy magisterskiej Bartłomieja Lewandowskiego na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (w trakcie realizacji)
- Teoria węzłów – 30 godzin seminarium monograficznego
- Calculus – 45 godzin wykładów i ćwiczeń
- Algebra z geometrią – 30 godzin zajęć
- Matematyka dla optyków okularowych – 45 godzin zajęć
- Metody matematyczne fizyki – 45 godzin zajęć
- Mechanika klasyczna, program rozszerzony – 45 godzin zajęć
- Elektrodynamika – 45 godzin zajęć
- Algebra z geometrią – 30 godzin zajęć
- Rachunek różniczkowy – 90 godzin zajęć

## 6.2 Osiągnięcia organizacyjne

- Semestr Simonsa *Knots, homologies, and physics*
  - Instytut Matematyczny PAN, Warszawa
  - 03/2024 – 06/2024
  - Organizator, wspólnie z dr. hab. Maciejem Borodziakiem, dr. Wojciechem Politarczykiem i prof. Piotrem Sułkowskim, z pomocą Jakuba Paligi i Bartłomieja Lewandowskiego
  - Serie wykładów (niektóre organizowane we współpracy z Uniwersytetem Warszawskim):
    - \* prof. R. Pichai (Indian Institute of Technology Bombay, Indie)  
*Chern-Simons Field Theory Invariants: Knots, Links and Three-Manifolds*
    - \* prof. M. Powell (University of Glasgow, Wielka Brytania)  
*Symmetries of 4-manifolds*
    - \* prof. W. Li (Chinese Academy of Sciences, Chiny)  
*Introduction to quiver BPS algebras*
    - \* dr. D. Noshchenko (Dublin Institute for Advanced Studies)  
*Quivers, Nahm sums and hidden symmetries in knot homologies*
    - \* prof. I. Dai (University of Texas at Austin, USA)  
*Floer homology and symmetries of knots and manifolds*
    - \* prof. S. Gukov (Caltech, USA oraz Dublin IAS)  
*Categorification of quantum invariants: from knots to 3-manifolds*
    - \* prof. J. Przytycki (George Washington University, USA)  
*Introduction to Skein Modules and their Khovanov type categorification*
    - \* prof. M. Stoffregen (Michigan State University, USA)  
*A tour of monopole Floer Spectra*
    - \* dr. M. Stosic (Technical University of Lisbon, Portugalia)  
*Knot quantum invariants, graphs, and combinatorics*
    - \* prof. V. Dotsenko (University of Strasbourg, Francja)  
*Introduction to Koszul duality*
    - \* prof. M. Hogancamp (Northeastern University, USA)  
*Link homology and how to compute it*

- Integralną częścią Semestru Simonsa były długoterminowe wizyty wykładowców wymienionych powyżej oraz następujących naukowców:
  - \* S. Chauchan (Indian Institute of Technology Bombay, Indie)
  - \* dr. S. Cheng (Fudan University, Chiny)
  - \* dr. A. Mallick (Rutgers University, USA)
  - \* dr. I. Matkovic (Uppsala University, Szwecja)
  - \* dr. S. Park (Harvard University, USA)
  
- *Summary Workshop: Knots, homologies, and physics*
  - Instytut Matematyczny PAN (we współpracy z Uniwersytetem Warszawskim i Fundacją Simonsa)
  - 05/2024
  - Organizator, wspólnie z dr. hab. Maciejem Borodzikiem, dr. Alberto Cavallo, dr. Wojciechem Politarczykiem, prof. Piotrem Sułkowskim i prof. Henrykiem Żołądkiem, z pomocą Jakuba Paligi i Bartłomieja Lewandowskiego
  
- *Learning Workshop: Knots, homologies, and physics*
  - Uniwersytet Warszawski (we współpracy z Instytutem Matematycznym PAN i Fundacją Simonsa)
  - 03/2024
  - Organizator, wspólnie z dr. hab. Maciejem Borodzikiem, dr. Alberto Cavallo, dr. Wojciechem Politarczykiem, prof. Piotrem Sułkowskim i prof. Henrykiem Żołądkiem, z pomocą Jakuba Paligi i Bartłomieja Lewandowskiego
  
- *Learning Workshop on BPS States and 3-Manifolds*
  - International Centre for Theoretical Physics, Triest, Włochy
  - 02/2023 – 03/2023
  - Organizator, wspólnie z prof. Sergiejem Gukowem i dr. Pawłem Putrowem

- Workshop *Computer science for knotty math problems*
  - Dublin Institute for Advanced Studies, Dublin, Irlandia
  - 11/2022
  - Organizator, wspólnie z prof. Sergiejem Gukowem
  
- Rada Naukowa Instytutu Fizyki Teoretycznej
  - Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
  - 10/2016 – 09/2017
  - Członek rady
  
- Wydziałowa Komisja do spraw Jakości Kształcenia
  - Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
  - 10/2016 – 09/2017
  - Członek komisji
  
- Wybory Dziekana
  - Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki
  - 04/2016 – 06/2016
  - Elektor reprezentujący doktorantów

### 6.3 Osiągnięcia w popularyzacji nauki

- Warsztaty *Rubber world of topology*
  - Crane Country Day School, Santa Barbara, USA, 12/2018

- Physics Cafe *Knots and physics*
  - Wheeler Opera House, Aspen, USA, 03/2018
  
- Prezentacja *Czas i jego rola* w ramach popularnonaukowego wydarzenia *Światy równoległe – fizycy kontra humaniści*,
  - Uniwersytet Warszawski, 10/2016
  
- Współzałożyciel (wraz z K. Nesterukiem) Stowarzyszenia Popularyzatorów Idei Naukowych SPIN
  - Uniwersytet Warszawski, 12/2008 – 09/2013
  
- Wykład *Trudne pytania: pierwsza pomoc dla rodziców dociekliwych dzieci*
  - XVI Festiwal Nauki, Uniwersytet Warszawski, 09/2012
  
- Wykład *Fizyka w obrazkach*
  - XVI Festiwal Nauki, Uniwersytet Warszawski, 09/2012
  
- Warsztaty *Fizyka dla dzieci* (z J. Dziekańską)
  - Szkoła Podstawowa w Łysinach, 11/2011
  
- Warsztaty *Co jest w pudełku? Sekrety fizyków*
  - XV Festiwal Nauki, Uniwersytet Warszawski, 09/2011
  - Szkoła Podstawowa w Pobyłkowie Dużym, 03/2011
  
- Publikacja *Przeciagi i podkręcanie piłki, czyli prawo Bernoulliego*
  - Neutrino 12 (2011) 14, 03/2011

- Wykład *Od wahadeł sprzężonych do masera amoniakalnego*
  - XII Festiwal Nauki i Sztuki, Uniwersytet w Siedlcach, 10/2010
  - XV Festiwal Nauki, Uniwersytet Warszawski, 09/2010
  - V LO w Warszawie, 05/2009
  
- Wykład *Interferencja: od prążków do kwantów* (z J. Zielińską)
  - XII Festiwal Nauki i Sztuki, Uniwersytet w Siedlcach, 10/2010
  - XV Festiwal Nauki, Uniwersytet Warszawski, 09/2010
  
- Warsztaty *Niezwykłe szczególna teoria względności* (z M. Godziszewskim)
  - VI Wakacyjne Warsztaty Wielodyscyplinarne, Olsztyn, 08/2010
  
- Wykład *LHC – w poszukiwaniu fundamentów Wszechświata*
  - Liceum w Serocku, 04/2010
  - Gimnazjum w Serocku, 04/2010
  - II LO w Kędzierzynie-Koźlu, 02/2009
  
- Publikacja *Zakręcenie – popularyzacja nauki okiem SPIN-u* (z K. Nesterukiem)
  - Foton 107 (2009) 75, 12/2009
  
- Wykład *Co znaczą równania?*
  - XXXIII LO w Warszawie, 09/2009
  
- Wykład *Czym jest światło?* (z K. Nesterukiem)
  - V LO w Warszawie, 06/2009
  - XIV LO w Warszawie, 04/2009

## 7 Inne osiągnięcia

### 7.1 Inne publikacje oraz preprinty

- Struktury stojące za korespondencją węzeł-kołczan
  - [pre1] V. Dotsenko, E. Feigin, P. Kucharski, and M. Reineke  
*Categorification of quiver diagonalization and Koszul algebras*,  
[arXiv:2402.12768].
  - [pre2] P. Kucharski, H. Larraguivel, D. Noshchenko, and P. Sulkowski,  
*Unlinking symmetric quivers*,  
[arXiv:2312.14905].
  
- Przecięcie topologii i teorii liczb
  - [pre3] M.C.N. Cheng, I. Coman, P. Kucharski, D. Passaro, and G. Sgroi  
*3d Modularity Revisited*,  
[arXiv:2403.14920].
  - [pub1] P. Kucharski,  
 *$\hat{Z}$  invariants at rational  $\tau$* ,  
*JHEP* 09 (2019) 092, [arXiv:1906.09768].
  
- Fizyka teoretyczna
  - [pub2] P. Kucharski, N. Lambert, M. Owen,  
*The (2,0) superalgebra, null M2-branes and Hitchin's system*,  
*JHEP* 10 (2017), 126 [arXiv:1706.00232].
  - [pub3] I. Kirsch, P. Kucharski,  
*Spin- $k/2$  – spin- $k/2$   $SU(2)$  two-point functions on the torus*,  
*Nucl. Phys.* B869 (2013) 315-325 [arXiv:1211.0121].



## Struktury stojące za korespondencją węzeł-kołczan

Najnowsze wyniki dotyczące struktur stojących za korespondencją węzeł-kołczan są opisane w preprintach [pre1, pre2].

W [pre1] wraz z V. Dotsenką, E. Feiginem i M. Reinekiem skategoryzowałem rozplątywanie i zaplątywanie wprowadzone w [hab7] na poziom algebr kwadratowych  $\mathcal{A}_Q$  związanych z symetrycznymi kołczanami (zob. [58]). To umożliwiło nam reinterpretację diagonalizacji kołczanu z [hab1] jako izomorfizm między  $\mathcal{A}_Q$  a iloczynem tensorowym algebr związanych z kołczanami z jednym wierzchołkiem i  $m$  pętłami. Ponieważ dla takich kołczanów algebry kwadratowe są algebrami Koszula [58], ten izomorfizm dowodzi koszulności  $\mathcal{A}_Q$ , co postawiono jako hipotezę w [58].

W [pre2], wraz z H. Larraguívelem, D. Noshchenko i P. Sułkowskim, badałem klasy równoważności kołczanów, które można przekształcić w siebie nawzajem za pomocą rozplątywania. Przeanalizowaliśmy monoid złożony z operatorów rozplątania (zob. Definicja 3) i udowodniliśmy, że wszystkie tożsamości operatorów w tym monoidzie można wyprowadzić z trzech podstawowych relacji. Ponadto pokazaliśmy, że dowolne dwie sekwencje rozplątania można uzupełnić innymi sekwencjami w taki sposób, że tworzą one tożsamość operatorów. Użyliśmy tych twierdzeń, aby udowodnić, że wszystkie kołczany, które są powiązane przez transpozycje z Twierdzenia 5, mogą być sukcesywnie rozplątywane do jednego kołczanu, który zawiera informacje o całej klasie równoważności i jest nazywany kołczanem uniwersalnym. Uogólniliśmy także ten wynik na kołczany, które nie odpowiadają węzłom, co może mieć znaczenie dla kohomologicznych algebr Halla, wierzchołkowych algebr Liego i ich algebr dualnych w sensie Koszula oraz algebr operatorów wierzchołkowych.

## Przecięcie topologii i teorii liczb

W [pre3] wraz z M.C.N. Cheng, I. Coman, D. Passarem i G. Sgroiem skupiłem się na wzajemnym oddziaływaniu topologicznych i teoriolicebnych właściwości niezmienników  $\hat{Z}$  opisujących trójwymiarowe rozmaitości zamknięte [51, 52]. Udowodniliśmy, że przestrzeń wektorowa rozpięta przez niezmienniki  $\hat{Z}$  dowolnej sfery Brieskorna (z liniami Wilsona i bez) jest izomorficzna z reprezentacją Weila metaplektycznej grupy  $\widetilde{SL}_2(\mathbb{Z})$ ; analogiczną relację dla dowolnej zamkniętej trójwymiarowej rozmaitości postawiliśmy jako hipotezę. Ponadto zweryfikowaliśmy hipotezę fałszywości-sztuczności ('false-mock conjecture' zaproponowaną w [53]) dla nieskończonej rodziny trójwymiarowych rozmaitości (sfer Brieskorna  $\Sigma(2, 3, 6r + 1)$ ).

W [pub1] porównałem dwa aspekty niezmienników  $\hat{Z}$  opisujących trójwymiarowych rozmaitości zamknięte [51, 52]. Z jednej strony niezmienniki  $\hat{Z}$  redukują się do niezmienników

Wittena-Reshetikhina-Turaeva rozmaitości trójwymiarowych [1, 11] dla  $q \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{k}}$  [52, 53]. Z drugiej strony właściwości modularne niezmienników  $\hat{Z}$  sugerują, że wszystkie pierwiastki jedności są traktowane na równi [59]. W [pub1] rozwiązałem tę rozbieżność i zaproponowałem relację między niezmiennikami  $\hat{Z}$  a niezmiennikami Wittena-Reshetikhina-Turaeva dla dowolnego pierwiastka jedności, po czym sprawdziłem ją w jawnych obliczeniach dla różnych rozmaitości.

## Fizyka teoretyczna

W [pub2] wraz z N. Lambertem i M. Owenem badałem system wzajemnie oddziałujących równań z szesnastoma supersymetriami i symetrią  $R$  daną przez  $SO(2) \times SO(6)$ , gdzie pola zależą od dwóch wymiarów przestrzennych i jednego wymiaru zerowego, który jest wyprowadzony z reprezentacji sześciowymiarowej superalgebry  $(2, 0)$ . Naszym głównym wynikiem było pokazanie, że dla szczególnego wyboru pól dynamika może być zredukowana do ruchu na przestrzeni modułów rozwiązań systemu Hitchina [62].

W [pub3] wraz z I. Kirschem badałem klasę funkcji dwupunktowych na torusie dla operatorów podstawowych w modelu Wessa-Zumino-Wittena  $SU(2)$  na całkowitym poziomie  $k$ . Głównym wynikiem tej pracy było jawne wyrażenie dla bloków prądów ('current blocks') funkcji dwupunktowych torusa spin- $k/2$ -spin- $k/2$  dla wszystkich  $k$  przy użyciu metody opisanej w [60, 61].

## 7.2 Granty realizowane w polskich ośrodkach naukowych

- *Topologia kwantowa i uczenie głębokie*
  - Typ projektu: *SONATA*
  - Instytucja finansująca: Narodowe Centrum Nauki
  - Miejsce realizacji: Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski
  - Termin realizacji: 2023 – 2026 (w trakcie realizacji)
  - Fundusze: 1 258 000 zł
  - Rola: główny badacz

## Literatura

- [1] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, *Commun. Math. Phys.* **121** (1989), no. 3 351–399.
- [2] V. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **12** (1985) 103–111.
- [3] J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P. J. Freyd, W. B. R. Lickorish, and D. N. Yetter, *A new polynomial invariant of knots and links*, *Bull. Am. Math. Soc.* **12** (1985), no. 2 239–246.
- [4] J. Przytycki and P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, *Kobe J. Math.* **4** (1987) 115–139.
- [5] J. A. Harvey and G. W. Moore, *On the algebras of BPS states*, *Commun. Math. Phys.* **197** (1998) 489–519, [[hep-th/9609017](#)].
- [6] S. Donaldson and R. Thomas, *Gauge theory in higher dimensions*, in *The geometric universe: science, geometry and the work of Roger Penrose*. Oxford University Press, 1998.
- [7] R. Thomas, *A holomorphic Casson invariant for Calabi-Yau 3-folds, and bundles on  $K3$  fibrations*, *J. Diff. Geom.* **53** (1999) 367–438. [arXiv:math/9806111](#).
- [8] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Stability structures, motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations*, [arXiv:0811.2435](#).
- [9] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Cohomological Hall algebra, exponential Hodge structures and motivic Donaldson-Thomas invariants*, *Commun. Num. Theor. Phys.* **5** (2011) 231–352, [[arXiv:1006.2706](#)].
- [10] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, *Comm. Math. Phys.* **127** (1990), no. 1 1–26.
- [11] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, *Invent. Math.* **103** (1991) 547–597.
- [12] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, *Duke Math. J.* **101** (2000) 359–426.

- [13] N. M. Dunfield, S. Gukov, and J. Rasmussen, *The superpolynomial for knot homologies*, *Experiment. Math.* **15** (2006), no. 2 129–159, [[math/0505662](#)].
- [14] M. Khovanov and L. Rozansky, *Matrix factorizations and link homology*, [math/0401268](#).
- [15] M. Khovanov and L. Rozansky, *Matrix factorizations and link homology II*, [math/0505056](#).
- [16] S. Gukov and M. Stosic, *Homological algebra of knots and BPS states*, *Proc. Symp. Pure Math.* **85** (2012) 125–172, [[arXiv:1112.0030](#)].
- [17] H. Ooguri and C. Vafa, *Knot invariants and topological strings*, *Nucl.Phys.* **B577** (2000) 419–438, [[hep-th/9912123](#)].
- [18] J. M. F. Labastida and M. Marino, *Polynomial invariants for torus knots and topological strings*, *Comm. Math. Phys.* **217** (2001), no. 2 423–449, [[hep-th/0004196](#)].
- [19] J. M. F. Labastida, M. Marino, and C. Vafa, *Knots, links and branes at large  $N$* , *JHEP* **11** (2000) 007, [[hep-th/0010102](#)].
- [20] M. Aganagic, T. Ekhholm, L. Ng, and C. Vafa, *Topological strings, D-model, and knot contact homology*, *Adv.Theor.Math.Phys* **18** (2014), no. 4 827–956, [[arXiv:1304.5778](#)].
- [21] T. Ekhholm and L. Ng, *Higher genus knot contact homology and recursion for colored HOMFLY-PT polynomials*, *Adv.Theor.Math.Phys.* **24** (2020), no. 8 2067–2145, [[arXiv:1803.04011](#)].
- [22] T. Ekhholm and V. Shende, *Skein on branes*, [arXiv:1901.08027](#).
- [23] L. Ng, *Framed knot contact homology*, *Duke Math. J.* **141** (2008), no. 2 365–406, [[math/0407071](#)].
- [24] L. Ng, *Combinatorial knot contact homology and transverse knots*, *Adv. Math.* **227** (2011), no. 6 2189–2219, [[arXiv:1010.0451](#)].
- [25] M. Aganagic and C. Vafa, *Large  $N$  duality, mirror symmetry, and a  $Q$ -deformed  $A$ -polynomial for knots*, [arXiv:1204.4709](#).
- [26] H. Fuji, S. Gukov, and P. Sulkowski, *Super- $A$ -polynomial for knots and BPS states*, *Nucl. Phys. B* **867** (2013) 506, [[arXiv:1205.1515](#)].

- [27] H. Fuji, S. Gukov, P. Sulkowski, and M. Stosic, *3d analogs of Argyres-Douglas theories and knot homologies*, *JHEP* **01** (2013) 175, [[arXiv:1209.1416](#)].
- [28] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. D. Long, and P. B. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, *Invent. Math.* **118** (1994), no. 1 47–84.
- [29] S. Garoufalidis, *On the characteristic and deformation varieties of a knot*, *Geometry and Topology Monographs* **7** (2004) 291–304, [[math/0306230](#)].
- [30] S. Gukov, *Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A-polynomial*, *Comm. Math. Phys.* **255** (2005), no. 3 577–627, [[hep-th/0306165](#)].
- [31] S. Garoufalidis, A. D. Lauda, and T. T. Q. Le, *The colored HOMFLYPT function is q-holonomic*, *Duke Math. J.* **167** (2018), no. 3 397–447, [[arXiv:1604.08502](#)].
- [32] S. Meinhardt and M. Reineke, *Donaldson-Thomas invariants versus intersection cohomology of quiver moduli*, *J. Reine Angew. Math.* **2019** (2019), no. 754 143–178, [[arXiv:1411.4062](#)].
- [33] H. Franzen and M. Reineke, *Semi-stable Chow-Hall algebras of quivers and quantized Donaldson-Thomas invariants*, *Alg. Number Th.* **12** (2018), no. 5 1001–1025, [[arXiv:1512.03748](#)].
- [34] M. Reineke, *Degenerate Cohomological Hall algebra and quantized Donaldson-Thomas invariants for m-loop quivers*, *Doc. Math.* **17** (2012) 1. [arXiv:1102.3978](#).
- [35] A. I. Efimov, *Cohomological Hall algebra of a symmetric quiver*, *Compos. Math.* **148** (2012), no. 4 1133–1146, [[arXiv:1103.2736](#)].
- [36] E. Basor, B. Conrey, and K. E. Morrison, *Knots and ones*, [arXiv:1703.00990](#).
- [37] W. Luo and S. Zhu, *Integrality structures in topological strings I: framed unknot*, [arXiv:1611.06506](#).
- [38] J. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, in *Computational Problems in Abstract Algebra* (J. Leech, ed.), pp. 329–358. Pergamon, 1970.
- [39] M. Stosic and P. Wedrich, *Rational links and DT invariants of quivers*, *Int. Math. Res. Not.* **2021** (2019), no. 6 4169–4210, [[arXiv:1711.03333](#)].

- [40] M. Stosic and P. Wedrich, *Tangle addition and the knots-quivers correspondence*, *J. London Math. Soc.* **104** (2020), no. 1 341–361, [arXiv:2004.10837].
- [41] Y. Terashima and M. Yamazaki, *Semiclassical analysis of the 3d/3d relation*, *JHEP* **2011** (2011), no. 8 [arXiv:1106.3066].
- [42] T. Dimofte, D. Gaiotto, and S. Gukov, *Gauge theories labelled by three-manifolds*, *Comm. Math. Phys.* **325** (2014), no. 2 367–419, [arXiv:1108.4389].
- [43] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer, *Introduction to symplectic field theory*, in *Visions in Mathematics*, vol. Special Volume, Part II, pp. 560–673. Birkhaeuser Basel, 2000.
- [44] M. Aganagic and C. Vafa, *Mirror symmetry, D-branes and counting holomorphic discs*, hep-th/0012041.
- [45] M. Aganagic, A. Klemm, and C. Vafa, *Disk instantons, mirror symmetry and the duality web*, *Z. Naturforsch.* **A57** (2002) 1–28, [hep-th/0105045].
- [46] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino, and C. Vafa, *Topological strings and integrable hierarchies*, *Commun. Math. Phys.* **261** (2006) 451–516, [hep-th/0312085].
- [47] S. Gukov and C. Manolescu, *A two-variable series for knot complements*, *Quantum Topol.* **1** (2021) 1–109, [arXiv:1904.06057].
- [48] L. Diogo and T. Ekhholm, *Augmentations, annuli, and Alexander polynomials*, arXiv:2005.09733.
- [49] S. Park, *Large color R-matrix for knot complements and strange identities*, *J. Knot Theor. Ramifications* **29** (2020), no. 14 2050097, [arXiv:2004.02087].
- [50] S. Park, *Inverted state sums, inverted Habiro series, and indefinite theta functions*, arXiv:2106.03942.
- [51] S. Gukov, P. Putrov, and C. Vafa, *Fivebranes and 3-manifold homology*, *JHEP* **07** (2017) 071, [arXiv:1602.05302].
- [52] S. Gukov, D. Pei, P. Putrov, and C. Vafa, *BPS spectra and 3-manifold invariants*, *J. Knot Theory Ramif.* **29** (2020), no. 02 2040003, [arXiv:1701.06567].

- [53] M. C. N. Cheng, S. Chun, F. Ferrari, S. Gukov, and S. M. Harrison, *3d modularity*, *JHEP* **10** (2019) 010, [[arXiv:1809.10148](#)].
- [54] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas, *Quantum modular forms and plumbing graphs of 3-manifolds*, *J. Combin. Theory Ser. A* **170** (2020) 105145, 32, [[arXiv:1810.05612](#)].
- [55] K. Bringmann, K. Mahlburg, and A. Milas, *Higher depth quantum modular forms and plumbed 3-manifolds*, *Lett. Math. Phys.* **110** (2019), no. 10 2675–2702, [[arXiv:1906.10722](#)].
- [56] H.-J. Chung, *BPS invariants for 3-manifolds at rational level  $K$* , *JHEP* **02** (2021) 083, [[arXiv:1906.12344](#)].
- [57] M. C. N. Cheng, S. Chun, B. Feigin, F. Ferrari, S. Gukov, S. M. Harrison, and D. Passaro, *3-Manifolds and VOA Characters*, [arXiv:2201.04640](#).
- [58] V. Dotsenko, E. Feigin, and M. Reineke, *Koszul algebras and Donaldson-Thomas invariants*, *Lett. Math. Phys.* **112** (2022) 106, [[arXiv:2111.07588](#)].
- [59] R. Lawrence and D. Zagier, *Modular forms and quantum invariants of 3-manifolds*, *Asian J. Math.* **3** (1999) 93–108.
- [60] N. J. Hitchin, *The self-duality equations on a Riemann surface*, *Proc. Lond. Math. Soc.* **55** (1987) 59–131.
- [61] S. D. Mathur, S. Mukhi, and A. Sen, *Correlators of primary fields in the  $SU(2)$  WZW theory on Riemann surfaces*, *Nuclear Physics B* **305** (1988), no. 2 219–270.
- [62] S. D. Mathur, S. Mukhi, and A. Sen, *Differential equations for correlators and characters in arbitrary rational conformal field theories*, *Nuclear Physics B* **312** (1989), no. 1 15–57.