Autoreferat

Paweł Rzążewski

1 Imię i nazwisko

Paweł Rzążewski

2 Dyplomy i stopnie

2008 inżynier informatyki
Tytuł: *Problem przydziału prac*
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
Promotor: dr Konstanty Junosza-Szaniawski

2010 magister inżynier informatyki, specjalizacja: metody sztucznej inteligencji
Tytuł: *Algorytmiczne aspekty etykietowania* $L(2,1)$
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska
Promotor: dr Konstanty Junosza-Szaniawski

2015 doktor nauk matematycznych w zakresie informatyki, specjalizacja: algorytmika
Tytuł: *Exact algorithms for graph-theoretic frequency assignment problems*
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski
Promotorzy: prof. Zbigniew Lonc i dr Konstanty Junosza-Szaniawski

3 Zatrudnienie

2010 - 2017 asystent (stanowisko badawczo-dydaktyczne)
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

2016 - 2017 postdoc (stanowisko badawcze)
Institute for Computer Science and Control, Węgierska Akademia Nauk (MTA SZTAKI)

2017- teraz adiunkt (stanowisko badawczo-dydaktyczne)
Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych, Politechnika Warszawska

2019 - teraz adiunkt (stanowisko badawcze)
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

4 Opis osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt 2 Ustawy

Osiągnięcie zatytułowane

Program optymalności w problemach homomorfizmu grafów

składa się z cyklu pięciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1. pkt 2b Ustawy:

[OR21b] Karolina Okrasa and Paweł Rzążewski. Fine-grained complexity of the graph homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. *SIAM J. Comput.*, 50(2):487–508, 2021.

[OPR20] Karolina Okrasa, Marta Piecyk, and Paweł Rzążewski. Full complexity classification of the list homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. In Fabrizio Grandoni, Grzegorz Herman, and Peter Sanders, editors, *28th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2020, September 7-9, 2020, Pisa, Italy (Virtual Conference)*, volume 173 of *LIPIcs*, pages 74:1–74:24. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2020.

[FMR22] Jacob Focke, Dániel Marx, and Paweł Rzążewski. Counting list homomorphisms from graphs of bounded treewidth: tight complexity bounds. In Joseph (Seffi) Naor and Niv Buchbinder, editors, *Proceedings of the 2022 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2022, Virtual Conference / Alexandria, VA, USA, January 9 - 12, 2022*, pages 431–458. SIAM, 2022.

[OR21a] Karolina Okrasa and Paweł Rzążewski. Complexity of the list homomorphism problem in hereditary graph classes. In Markus Bläser and Benjamin Monmege, editors, *38th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2021, March 16-19, 2021, Saarbrücken, Germany (Virtual Conference)*, volume 187 of *LIPIcs*, pages 54:1–54:17. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021.

[ACDR22] Tara Abrishami, Maria Chudnovsky, Cemil Dibek, and Paweł Rzążewski. Polynomial-time algorithm for maximum independent set in bounded-degree graphs with no long induced claws. In Niv Buchbinder Joseph (Seffi) Naor, editor, *Proceedings of the 2022 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2022, Virtual Conference, January 9-12, 2022*, pages 1448–1470. SIAM, 2022.

W pozostałej części tej sekcji omówione są wyniki zawarte w pracach włączonych do dzieła. W niniejszym dokumencie staramy się przedstawić ogólny opis wyników i raczej przekazać intuicje na temat metod, niż pokazywać szczegóły techniczne. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do oryginalnych prac. Prace [FMR22, ACDR22] są dostępne w wolnym dostępie na stronie wydawcy. Prace [OPR20, OR21a] są dostępne w wolnym dostępie na stronie wydawcy w wersji skróconej (konferencyjnej). Pełne wersje tych prac są dostępne w serwisie arXiv [95, 97]. Wreszcie, wstępna wersja pracy [OR21b] ukazała się w materiałach konferencji SODA 2020 i jest dostępna w wolnym dostępie na stronie wydawcy [98]. Uaktualniona wersja jest dostępna bezpłatnie w serwisie arXiv [96].

Uwaga. *Ze względu na brak polskojęzycznej literatury w tematyce rozprawy, a co za tym idzie, powszechnie przyjętej polskiej terminologii, zachęcamy Czytelnika do zapoznania się z sekcjami 4 i 5.1 w anglojęzycznej wersji tego dokumentu (*Summary of Professional Accomplishments*).*

4.1 Wprowadzenie

Homomorfizmem z grafu G w graf H nazywamy funkcję ze zbioru wierzchołków grafu G w zbiór wierzchołków grafu H, która zachowuje krawędzie. Jeśli G ma homomorfizm w H, zapisujemy to jako $G \to H$. Dla ustalonego grafu H, w *problemie homomorfizmu* grafów, oznaczanego jako $\textsc{Hom}(H)$, dla danego grafu G chcemy zdecydować, czy G ma homomorfizm w H. W niniejszym dokumencie G i H zawsze będą używane w takim właśnie kontekście, a graf H zawsze będzie ustalony (w szczególności jego rozmiar traktujemy jako stałą). Liczbę wierzchołków grafu G zawsze będziemy oznaczali przez n.

W *problemie listowego homomorfizmu*, oznaczanym jako $\textsc{LHom}(H)$, instancja składa się z grafu G i *funkcji list* $L : V(G) \to 2^{V(H)}$. Zadanie polega na zdecydowaniu, czy istnieje homomorfizm z G w H, który zachowuje listy L, tj. każdy wierzchołek z G jest zmapowany na jakiś wierzchołek ze swojej listy. Zazwyczaj w kontekście listowych homomorfizmów dopuszczamy pętle na wierzchołkach grafu H. Graf nazywamy *zwrotnym* (ang. *reflexive*), jeśli każdy jego wierzchołek ma pętlę. Jeśli żaden wierzchołek grafu nie ma pętli, mówimy, że graf ten jest *przeciwzwrotny* (ang. *irreflexive*).

Na homomorfizmy grafów można patrzeć jako na uogólnienie kolorowań grafów: jeśli H jest grafem pełnym o k wierzchołkach, to problem $\textsc{Hom}(H)$ jest równoważny problemowi k-Coloring, czyli pytaniu o istnienie poprawnego k-kolorowania danego grafu. Podobnie, listowe homomorfizmy uogólniają listowe kolorowania.

Pojęcie homomorfizmów grafów jest bardzo elastyczne i może być uogólniane na różne sposoby, obejmując wiele znanych problemów obliczeniowych. Na przykład, dla danego grafu G możemy szukać największego podgrafu indukowanego, który ma homomorfizm w ustalony graf H. Zauważmy, że dla $H = K_1$ problem ten jest równoważny problemowi szukania największego zbioru niezależnego (Max Independent Set), zaś dla $H = K_2$ otrzymujemy problem szukania największego indukowanego podgrafu dwudzielnego, który jest równoważny szukaniu najmniejszego zbioru rozcinającego wszystkie cykle nieparzyste (Min Odd Cycle Transversal). Jeśli szukamy największego (niekoniecznie indukowanego) podgrafu, który ma homomorfizm w H, wtedy przypadek $H = K_2$ jest równoważny dobrze znanemu problemowi Max Cut.

Tematyką łączącą ciąg prac wchodzących w skład osiągnięcia naukowego jest badanie, w jaki sposób wyniki uzyskane dla różnych konkretnych problemów obliczeniowych przenoszą się na ich uogólnienia jako warianty problemu $\textsc{Hom}(H)$. Celem jest uzyskanie dychotomii i ścisłych oszacowań złożoności. Skupimy się na dwóch typach pytań:

1. Dla każdego grafu H, jaka jest najlepsza stała c_H, dla której dany wariant problemu $\textsc{Hom}(H)$ może być rozwiązany w czasie $c_H^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$, zakładając, że graf G jest dany razem z dekompozycją drzewiastą o szerokości co najwyżej t? (patrz sekcja 4.2)

2. Dla jakich grafów H i F dany wariant problemu $\textsc{Hom}(H)$ może zostać efektywnie rozwiązany w klasie grafów, które nie zawierają F jako indukowanego podgrafu? (patrz sekcja 4.3)

Inne wyniki w podobnej tematyce, nieuwzględnione w osiągnięciu, są omówione w sekcji 5.1.1.

4.2 Ścisłe ograniczenia złożoności dla grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej

Znane meta-twierdzenie Courcelle'a [29] mówi, że każdy problem, który można wyrazić w logice CMSO_2 (Counting Monadic Second-Order), może być efektywnie rozwiązany dla grafów o ograniczonej szerokości drzewiastej. Dokładniej mówiąc, może być rozwiązany w czasie $f(t) \cdot n$, gdzie t jest ograniczeniem na szerokość drzewiastą, a f jest pewną funkcją zależną od formuły CMSO_2 opisującej dany problem. Okazuje się jednak, że funkcja f, która wynika z dowodu twierdzenia Courcelle'a, jest bardzo szybko rosnąca. Z drugiej strony, często możemy zaprojektować znacznie szybsze algorytmy, dedykowane dla konkretnych problemów [7, 31, 32, 109]. W szczególności, dla wielu naturalnych problemów NP-trudnych funkcja f jest postaci c^t, dla pewnej stałej c.

W swojej przełomowej pracy Lokshtanov, Marx i Saurabh [83] pokazali bardzo silne dolne ograniczenia na złożoność wielu klasycznych problemów, parametryzowanych przez szerokość drzewiastą. Założenie z teorii złożoności, na którym oparli swoje wyniki, to tzw. Silna Hipoteza o Czasie Wykładniczym (ang. *Strong Exponential Time Hypothesis*, w skrócie SETH) [66, 67]. Mówi ona, że nie istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego ustalonego k, każda instancja problemu k-$\textsc{Sat}$ o n zmiennych może być rozwiązana w czasie $(2-\varepsilon)^n \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Lokshtanov, Marx i Saurabh [83] pokazali między innymi, że zakładając SETH, dla każdego $q \geqslant 3$, problemu q-$\textsc{Coloring}$ dla grafów o n wierzchołkach i szerokości drzewiastej co najwyżej t nie da się rozwiązać w czasie $(q-\varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla żadnego $\varepsilon > 0$. To dolne ograniczenie ściśle odpowiada standardowemu algorytmowi opartemu o programowanie dynamiczne na dekompozycji drzewiastej, który działa w czasie $q^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

Skoro problem q-$\textsc{Coloring}$ jest równoważny problemowi $\textsc{Hom}(K_q)$, naturalnym kierunkiem badań jest próba uzyskania podobnych ścisłych ograniczeń dla problemu $\textsc{Hom}(H)$ i jego wariantów. Dokładniej mówiąc, dla każdego „interesującego" grafu H chcemy znaleźć stałą c_H, dla której rozważany problem, ograniczony do instancji danych z dekompozycją drzewiastą o szerokości co najwyżej t:

- może być rozwiązany w czasie $c_H^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$, ale
- nie może być rozwiązany w czasie $(c_H - \varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$, dla żadnego $\varepsilon > 0$, przy założeniu jakiegoś standardowego założenia z teorii złożoności.

Konkretne problemy rozważane w tym kontekście to $\textsc{Hom}(H)$, $\textsc{LHom}(H)$ i $\#\textsc{LHom}(H)$, czyli zliczeniowy wariant $\textsc{LHom}(H)$. Instancja tego ostatniego problemu jest taka sama jak w problemie $\textsc{LHom}(H)$, czyli jest to graf G z listami $L : V(G) \to 2^{V(H)}$, natomiast naszym zadaniem jest policzenie, ile jest homomorfizmów z G w H, które zachowują listy L.

We wszystkich rozważanych przypadkach koniecznym warunkiem, by graf H był „interesujący", jest to, żeby definiował problem trudny obliczeniowo. Czasami możemy jednak założyć też inne własności grafu H.

W każdym z trzech rozważanych wariantów problemu $\textsc{Hom}(H)$ udało nam się odpowiedzieć na postawione pytanie. Pomimo oczywistego podobieństwa w sformułowaniu zadań badawczych, rozwiązanie w każdym przypadku okazało się inne i otrzymanie go wymagało użycia narzędzi istotnie różniących się od tych, których użyto w pozostałych dwóch przypadkach.

W następnych trzech podsekcjach zawsze zakładamy, że G jest n-wierzchołkowym grafem danym razem z dekompozycją drzewiastą o szerokości t i liczbie węzłów ograniczonych wielomianową funkcją n. Ponadto zakładamy, że zarówno G i H są spójne, bo łatwo jest zredukować ogólny przypadek do takiego.

4.2.1 Złożoność problemu Hom(H) (praca [OR21b]).

Pierwszym omówionym problemem jest po prostu Hom(H). Dychotomia dotycząca złożoności problemu została pokazana przez Hella i Nešetřila [62]: Hom(H) da się rozwiązać w czasie wielomianowym, jeśli graf H jest dwudzielny lub ma wierzchołek z pętlą, a w przeciwnym przypadku problem jest NP-trudny. Graf, który jest przeciwzwrotny (czyli nie ma wierzchołków z pętlami) i nie jest dwudzielny nazwiemy *nietrywialnym.* Ponadto możemy założyć, że graf H jest *rdzeniem* (ang. *core*), czyli nie ma homomorfizmu w swój właściwy podgraf. Istotnie, jeśli H ma homomorfizm w H' i H' jest podgrafem grafu H, do problemy Hom(H) i Hom(H') są równoważne. Dlatego w tej podsekcji skupimy się na przypadku, że H jest nietrywialnym rdzeniem.

Główną rolę w pracy [OR21b] odgrywa pewna operacja składania grafów. *Iloczynem prostym* grafów H_1 i H_2 nazywamy graf $H_1 \times H_2$, zdefiniowany jako:

$$\begin{aligned} V(H_1 \times H_2) =& V(H_1) \times V(H_2) \\ E(H_1 \times H_2) =& \{(uv)(u'v') \mid uu' \in E(H_1) \text{ i } vv' \in E(H_2)\}. \end{aligned}$$

Grafy H_1, H_2 są *czynnikami* grafu $H_1 \times H_2$. Definicja iloczynu prostego rozszerza się w sposób naturalny na większą liczbę czynników. Dla $p \geqslant 1$, przez H^p oznaczamy graf uzyskany jako iloczyn prosty p kopii grafu H. Zauważmy, że każda funkcja $\phi : V(H^p) \to V(H)$ określona jako rzut na dowolną ustaloną współrzędną jest homomorfizmem.

Nietrywialny graf jest *nierozkładalny*, jeśli nie może być wyrażony jako iloczyn prosty nietrywialnych grafów. Okazuje się, że każdy nietrywialny graf H może być jednoznaczny sposób (z dokładnością do zmiany kolejności czynników) przedstawiony jako iloczyn prosty grafów nierozkładalnych $H_1, \ldots, H_p$ (być może $p = 1$). Iloczyn prosty $H_1 \times \ldots \times H_p$ będziemy nazywać *rozkładem bazowym* grafu H (formalnie rozkładem bazowym jest ciąg czynników tego iloczynu).

Zastanówmy się teraz, w jaki sposób można rozwiązać problem Hom(H). Standardowy algorytm oparty na programowaniu dynamicznym na dekompozycji drzewiastej o szerokości t ma złożoność $|V(H)|^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Okazuje się jednak, że w pewnych przypadkach to proste podejście może być poprawione. Łatwo zweryfikować, że $G \to H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_p$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i \in [p]$ zachodzi $G \to H_i$. Zatem jeśli H ma rozkład bazowy $H_1 \times \ldots \times H_p$, to sprawdzenie, czy $G \to H$, sprowadza się sprawdzenia, czy $G \to H_i$ dla każdego $i \in [p]$. Podsumowując, w tym przypadku problem Hom(H) możemy rozwiązać w czasie $\max_{i \in [p]} |V(H_i)|^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Głównym wynikiem pracy [OR21b] jest pokazanie, że powyższa obserwacja jest zasadniczo jedynym algorytmicznym narzędziem, które może zostać użyte do rozwiązania problemu Hom(H) parametryzowanego przez szerokość drzewiastą grafu wejściowego.

Rozważmy najpierw klasę tzw. grafów *rzutowych* (ang. *projective*). Są to grafy H, dla których, dla każdego $p \geqslant 1$, każdy homomorfizm z H^p w H jest rzutem na jedną ze współrzędnych, ewentualnie złożonym z automorfizmem H. Podkreślmy dwa fakty dotyczące grafów rzutowych. Po pierwsze, mimo że ich definicja wydaje się bardzo techniczna, jest to klasa bardzo szeroka: prawie każdy graf jest rzutowym rdzeniem [61, 87]. Po drugie, każdy graf rzutowy jest nierozkładalny.

Twierdzenie 4.2.1.1. *Niech H będzie ustalonym spójnym nietrywialnym rzutowym rdzeniem o k wierzchołkach. Niech n i t będą, odpowiednio, liczbą wierzchołków i szerokością drzewiastą grafu wejściowego G.*

(a) Problem Hom(H) może być rozwiązany w czasie $k^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

(b) Problem Hom(H) nie może być rozwiązany w czasie $(k - \varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla żadnego $\varepsilon > 0$, przy założeniu SETH.

Wynik algorytmiczny w Twierdzeniu 4.2.1.1 wynika bezpośrednio z dyskusji powyżej. Dolne ograniczenie pokazane jest przez redukcję z problemu k-Coloring. Kluczowym elementem dowodu jest konstrukcja *gadżetu krawędzi*: grafu F z dwoma wybranymi wierzchołkami x, y o następujących własnościach:

- dla każdego homomorfizmu z F w H, wierzchołki x i y zmapowane są na różne wierzchołki z H,
- każde mapowanie x, y na różne wierzchołki z H może zostać rozszerzone do homomorfizmu z F w H.

Konstrukcja gadżetu oparta jest na wykorzystaniu narzędzi z algebraicznej teorii grafów. Pokazujemy, że graf $F = H^{k(k-1)}$ z odpowiednio wybranymi wierzchołkami x, y istotnie ma wymagane własności (oczywiście przy założeniu, że graf H jest rzutowy). Warto być może wspomnieć, że narzędzia algebraiczne są często stosowane w badaniu homomorfizmów: pomagają one uchwycić pewne globalne własności grafów.

Przejdźmy teraz do kolejnego szczególnego przypadku, kiedy graf H nie jest nierozkładalny, czyli ma rozkład bazowy $H_1 \times \ldots \times H_p$ dla pewnego $p \geqslant 2$. Załóżmy bez straty ogólności, że $|V(H_1)| \geqslant |V(H_i)|$ dla każdego $i \in [p]$. W pracy definiujemy pewną podklasę grafów rzutowych, nazwaną grafami *prawdziwie rzutowymi*. Definicja ta jest dość techniczna, więc pominiemy ją w niniejszym dokumencie. Pokazujemy, że przy dodatkowym założeniu, że graf H_1 jest prawdziwie rzutowy, jesteśmy w stanie skonstruować gadżet krawędzi podobny jak w poprzednim przypadku. Jako wniosek otrzymujemy, że w rozważanym przypadku problem $\textsc{Hom}(H)$ nie może być rozwiązany w czasie $(|V(H_1)| - \varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla żadnego $\varepsilon > 0$ (znowu przy założeniu SETH). To dolne ograniczenie ściśle odpowiada złożoności algorytmu omówionego powyżej.

Podsumowując, dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.2.1.2. *Niech H będzie ustalonym spójnym nietrywialnym rdzeniem z rozkładem bazowym $H_1 \times \ldots \times H_p$, gdzie $k = |V(H_1)| \geqslant |V(H_i)|$ dla każdego $i \in [p]$ oraz graf H_1 jest prawdziwie rzutowy. Niech n i t będą, odpowiednio, liczbą wierzchołków i szerokością drzewiastą grafu wejściowego G.*

(a) Problem Hom(H) może być rozwiązany w czasie $k^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

(b) Problem Hom(H) nie może być rozwiązany w czasie $(k - \varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla żadnego $\varepsilon > 0$, przy założeniu SETH.

Dość zaskakujący jest fakt, że pytanie o złożoność problemu w pozostałych przypadkach okazuje się być blisko powiązane z dwoma hipotezami z algebraicznej teorii grafów z początku XXI wieku, postawionymi przez Larose'a i Tardifa [81] i przez Larose'a [80]. Zakładając te dwie hipotezy, każdy nietrywialny rdzeń jest albo rzutowy, albo jest iloczynem prostym prawdziwie rzutowych grafów nierozkładalnych. Oznacza to, że przypadki rozważane w Twierdzeniach 4.2.1.1 i 4.2.1.2 pokrywa wszystkie „interesujące” grafy H.

Wkładem habilitanta było znalezienie ogólnego schematu dowodów dolnych ograniczeń i naszkicowanie dowodów poszczególnych kroków, w tym rozważenie grafów rzutowych jako szczególnego przypadku oraz definicja grafów prawdziwie rzutowych.

4.2.2 Złożoność problemu LHom(H) (praca [OPR20]).

Kolejnym rozważanym problemem jest $\textsc{LHom}(H)$. Przypomnijmy, że w tym problemie dopuszczamy w grafie H wierzchołki z pętlami. Dychotomia dotycząca złożoności problemu $\textsc{LHom}(H)$ została pokazana w trzech krokach: najpierw dla zwrotnych grafów H przez Federa i Hella [49], potem dla przeciwzwrotnych grafów H przez Federa, Hella i Huanga [50], i wreszcie dla wszystkich grafów H, znów przez Federa, Hella i Huanga [51]. Klasa grafów, dla których problem $\textsc{LHom}(H)$ da się rozwiązać w czasie wielomianowym, nazywana jest *grafami biłukowymi* (ang. *bi-arc graphs*). Zatem grafy, które będą dla nas „interesujące” w tej sekcji, nie są biłukowe. Oznaczmy ich klasę jako $\mathcal{H}$.

Rozważmy instancję (G, L) problemu $\textsc{LHom}(H)$. Zauważmy, że można założyć, że dla każdego $v \in V(G)$ jego lista $L(v)$ jest *zbiorem nieporównywalnym*, tj. nie zawiera takich wierzchołków $a, b \in V(H)$, że każdy sąsiad a jest także sąsiadem b. Faktycznie, jeśli istnieje homomorfizm z G w H, który mapuje $v \in V(G)$ na a, wtedy mapując v na b otrzymamy inny homomorfizm z G w H. Zatem możemy bezpiecznie usunąć wierzchołek a z listy $L(v)$. Podsumowując, naturalnym górnym ograniczeniem na złożoność algorytmu rozwiązującego $\textsc{LHom}(H)$ jest $i(H)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$, gdzie $i(H)$ oznacza rozmiar największego zbioru nieporównywalnego w H. Zauważmy, że $i(H)$ może być dowolnie mniejsze niż $|V(H)|$, więc ta prosta obserwacja daje nam już poprawę w stosunku do podejścia naiwnego.

Okazuje się jednak, że $i(H)$ nadal nie jest „właściwym” parametrem. Okrasa, Piecyk i habilitant [OPR20] zdefiniowali nowy parametr grafowy $i^*(H)$ i pokazali następujące twierdzenie.

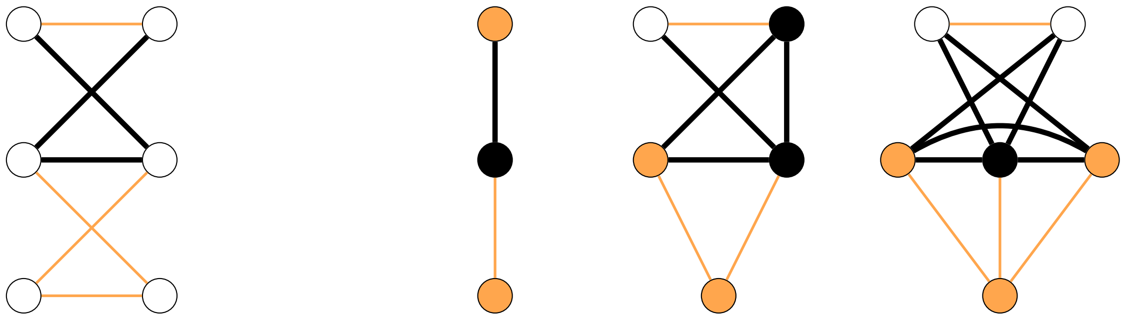
Twierdzenie 4.2.2.1. *Niech H będzie ustalonym grafem spójnym w $\mathcal{H}$ i niech $k = i^*(H)$. Niech n i t będą, odpowiednio, liczbą wierzchołków i szerokością drzewiastą grafu wejściowego G.*

(a) Problem LHom(H) może być rozwiązany w czasie $k^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

(b) Problem LHom(H) nie może być rozwiązany w czasie $(k - \varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla żadnego $\varepsilon > 0$, przy założeniu SETH.

Rozważmy najpierw przypadek, że graf H jest przeciwzwrotny i dwudzielny. Możemy wtedy bezpiecznie założyć, że graf G także jest dwudzielny: w przeciwnym przypadku nie istnieją żadne homomorfizmy z G w H. Co więcej, klasy dwudzielności G przechodzą na różne klasy dwudzielności H. Możemy zatem łatwo zredukować przypadek dwudzielny do takiego, w którym dla każdego wierzchołka z G, jego lista jest zawarta w odpowiedniej klasie dwudzielności H. Podsumowując, podstawa funkcji wykładniczej w złożoności obliczeniowej algorytmu może zostać ograniczona przez rozmiar największego zbioru nieporównywalnego zawartego w jednej klasie dwudzielności H.

Okazuje się jednak, że jest jeszcze jedna obserwacja, która może zostać wykorzystana do rozwiązania LHom(H). Odkryliśmy pewną dekompozycję grafu H, która pozwala rozbić problem na mniejsze podproblemy, rozwiązać je niezależnie, a następnie z tych częściowych wyników otrzymać ostateczną odpowiedź, rozwiązując jeszcze jedną, prostszą instancję problemu listowego homomorfizmu. Mówimy, że graf H jest *dekomponowalny*, jeśli jego wierzchołki mogą być podzielone w sposób pokazany na Rysunku 1a; ściśle mówiąc, musimy jeszcze założyć, że kombinacje niektórych zbiorów są niepuste, ale pomińmy to w niniejszym dokumencie. Graf, który nie jest dekomponowalny, jest *niedekomponowalny*.



(a) Dekompozycja grafów dwudzielnych.

(b) Trzy dekompozycje w ogólnym przypadku.

Rysunek 1: Schemat dekompozycji grafu H, które mogą być wykorzystane do wykorzystania LHom(H). Koła odpowiadają zbiorom wierzchołków: białe reprezentują zbiory niezależne, czarne reprezentują zwrotne kliki, zaś pomarańczowe reprezentują dowolne podgrafy. Podobnie grube czarne linie oznaczają, że wszystkie krawędzie między daną parą zbiorów istnieją, cienkie pomarańczowe linie oznaczają, że krawędzie mogą, ale nie muszą istnieć, zaś brak linii oznacza, że między danymi zbiorami nie ma krawędzi.

Zbierając wszystkie pomysły wymienione do tej pory, parametr $i^*(H)$ można zdefiniować jako maksimum po wszystkich H' z rozmiaru największego zbioru nieporównywalnego zawartego w jednej klasie dwudzielności, gdzie H' iteruje po wszystkich niedekomponowalnych spójnych indukowanych podgrafach H, które są w $\mathcal{H}$. Algorytmiczny wynik w Twierdzeniu 4.2.2.1, w przypadku, gdy graf H jest dwudzielny, wynika z rozumowania naszkicowanego powyżej.

Ogólny pomysł dowodu dolnego ograniczenia jest podobny, jak dowody analogicznych wyników omówionych w sekcji 4.2.1: konstruujemy gadżet, który „zachowuje się jak krawędź w problemie k-Coloring" i następnie redukujemy z tego problemu. Jednakże, w przeciwieństwie do poprzedniej sekcji, konstrukcja gadżetu jest czysto kombinatoryczna. Opiera się ona na głębokiej i uważnej analizie struktury (dwudzielnych) grafów w $\mathcal{H}$ i definicji dekompozycji.

Niech H' będzie spójnym niedekomponowalnym indukowanym podgrafem grafu H, należącym do $\mathcal{H}$, którego jedna klasa dwudzielności zawiera nieporównywalny zbiór S rozmiaru $k = i^*(H)$. Taki graf H' i zbiór S istnieją z definicji $i^*(H)$. Zauważmy, że skoro H' jest indukowanym podgrafem H, dolne ograniczenie dla LHom(H') natychmiast implikuje analogiczne dolne ograniczenie dla LHom(H). Faktycznie, każdą instancję LHom(H') możemy traktować jak instancję LHom(H), gdzie wierzchołki z $V(H) \setminus V(H')$ nie pojawiają się na żadnej liście. Dlatego wystarczy pokazać interesujące nas dolne ograniczenie dla LHom(H').

Najpierw używamy strukturalnego wyniku Federa, Hella i Huanga [50], który implikuje, że skoro H' należy do $\mathcal{H}$, zawiera *obstrukcję*, która jest albo indukowanym cyklem długości co najmniej 6 lub tzw. *asteroidą krawędziową*. Następnie pokazujemy, że struktura dowolnej obstrukcji jest dostatecznie bogata, aby wyrazić (formalnie *pp-zdefiniować*, ang. *pp-define*) dowolną relację na jej wierzchołkach (relacje te muszą przestrzegać klas dwudzielności). W końcu pokazujemy, że możemy zbudować gadżet, który w sposób jednoznaczny „tłumaczy" dowolny wierzchołek $v \in S$ na ciąg wierzchołków z ustalonej obstrukcji w H'. W konstrukcji tego gadżetu kluczowe są założenia, że H' jest spójny i niedekomponowalny. Składając dwie kopie takiego gadżetu z odpowiednim gadżetem kodującym relację różności na ciągach wierzchołków z obstrukcji, otrzymujemy gadżet, który wyraża relację różności na S. Jest to dokładnie to, co oznacza „zachowywać się jak krawędź w problemie k-Coloring".

Przejdźmy teraz do ogólnego przypadku, tj. nie zakładamy, że graf H jest dwudzielny. Przez H^* oznaczmy dwudzielny graf $H \times K_2$: dla każdego wierzchołka $a \in V(H)$ graf H^* zawiera dwa wierzchołki a', a'', a każdej krawędzi $ab \in E(H)$ odpowiadają krawędzie $a'b''$ i $a''b'$ w H^*. Jeśli H nie jest dwudzielny, definiujemy $i^*(H) := i^*(H^*)$.

Dolne ograniczenie w Twierdzeniu 4.2.2.1 może być łatwo wywnioskowane z przypadku dla dwudzielnych grafów H. Dokładniej mówiąc, istnieje prosta redukcja z LHom(H^*) do LHom(H), która zachowuje graf instancji. Okazało się jednak, że otrzymanie wyniku algorytmicznego jest znacznie bardziej skomplikowane. W szczególności wymagało ono zdefiniowania dodatkowych trzech dekompozycji grafu H (patrz Rysunek 1b) i pokazania, jak każda z nich może być wykorzystana w algorytmie.

Wkładem habilitanta było zidentyfikowanie ostatecznego parametru $i^*(H)$. Co więcej, ze strony algorytmicznej, był on odpowiedzialny za odkrycie dekompozycji grafu H i sposobu, jak można wykorzystać je do rozwiązania problemu LHom(H). Ze strony dolnego ograniczenia, wkładem habilitanta była ogólna idea dowodu. Warto podkreślić, że idea ta była oparta na wcześniejszych wynikach Marxa, Egri'ego i habilitanta [46], gdzie habilitant także sformułował główne pomysły w dowodzie.

4.2.3 Złożoność problemu #LHom(H) (praca [FMR22]).

Dychotomia dotycząca złożoności problemu #LHom(H) została pokazana przez Dyera i Greenhill [44]: jeśli H jest grafem pełnym dwudzielnym lub kliką zwrotną, problem można rozwiązać w czasie wielomianowym, a w przeciwnym przypadku jest on #P-trudny (przypominamy, że zakładamy, że graf H jest spójny). Dlatego w tej sekcji „interesujące" grafy to takie, które nie są biklikami ani klikami zwrotnymi.

Zauważmy, że, w odróżnieniu od sytuacji w poprzedniej sekcji, nie możemy założyć, że każda lista jest zbiorem nieporównywalnym. Słabsza wersja tej obserwacji nadal jednak działa: możemy założyć, że żadna lista nie zawiera pary wierzchołków o *dokładnie tym samym* sąsiedztwie. W przeciwnym przypadku, jeśli istnieje $v \in V(G)$ taki, że $a, b \in L(v)$ mają to samo sąsiedztwo, możemy usunąć a z $L(v)$ i każdy homomorfizm, który mapuje v na b zliczać podwójnie. Taka modyfikacja może być łatwo dodana do standardowego algorytmu opartego na programowaniu dynamicznym na dekompozycji drzewiastej. Naturalnym górnym ograniczeniem na stałą stojącą w podstawie wyrażenia wykładniczego w ograniczeniu na złożoność algorytmu dla #LHom(H) jest więc rozmiar największego zbioru wierzchołków H o parami różnych sąsiedztwach (taki zbiór nazywamy po angielsku *irredundant*).

W szczególnym przypadku, gdy H jest dwudzielny, można wprowadzić jeszcze jedno usprawnienie: znów możemy wykorzystać fakt, że każdy graf G, który ma homomorfizm w H, musi być dwudzielny i klasy dwudzielności G mapowane są na różne klasy dwudzielności H. Prowadzi to do definicji nowego parametru: jeśli H nie jest dwudzielny, irr(H) jest rozmiarem największego zbioru wierzchołków o parami różnych sąsiedztwach, a w przeciwnym przypadku jest rozmiarem największego zbioru wierzchołków o parami różnych sąsiedztwach, zawartego w jednej klasie dwudzielności.

Głównym wynikiem pracy [FMR22] jest pokazanie, że irr(H) jest faktycznie „właściwym" parametrem, który definiuje złożoność problemu #LHom(H). W szczególności nie istnieją dekompozycje grafu H, które mogą być wykorzystane do szybszego zliczania listowych homomorfizmów.

Twierdzenie 4.2.3.1. *Niech H będzie ustalonym grafem spójnym, który nie jest bikliką ani kliką zwrotną, i niech k = irr(H). Niech n i t będą, odpowiednio, liczbą wierzchołków i szerokością drzewiastą grafu wejściowego G.*

(a) Problem #LHom(H) może być rozwiązany w czasie $k^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$.

(b) Problem #LHom(H) nie może być rozwiązany w czasie $(k-\varepsilon)^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla żadnego $\varepsilon > 0$, przy założeniu #SETH.

(Hipoteza #SETH to zliczeniowa wersja SETH: Nie istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że dla każdego k, wartościowania spełniające dowolną formułę k-Sat o n zmiennych mogą być policzone w czasie $(2-\varepsilon)^n \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$. Zauważmy, że SETH implikuje #SETH.)

Górne ograniczenie z Twierdzenia 4.2.3.1 wynika z rozumowania przedstawionego powyżej. W celu pokazania dolnego ograniczenia, rozważmy znów szczególny przypadek, gdy graf H jest dwudzielny. Podobnie jak w sekcjach 4.2.1 i 4.2.2, chcemy skonstruować gadżet, który symuluje krawędź w problemie zliczania poprawnych k-kolorowań. Logika stojąca za konstrukcją tego gadżetu jest podobna do tej w dowodzie dolnego ograniczenia z Twierdzenia 4.2.2.1.

Zauważmy, że możemy skupić się na grafie H' otrzymanym z H przez podzielenie zbioru wierzchołków na klasy abstrakcji zawierające wierzchołki o tych samych sąsiedztwach, a następnie usunięcie wszystkich poza jednym wierzchołkiem z każdej klasy. Ponieważ H nie jest bikliką, graf H' zawiera indukowany podgraf P_4, czyli ścieżkę o czterech wierzchołkach. Okazuje się, że indukowane ścieżki o czterech wierzchołkach odgrywają kluczową rolę w dowodzie. Najpierw pokazujemy, że struktura ścieżki P_4 jest dostatecznie bogata, by wyrazić dowolne relacje na jej wierzchołkach (z dokładnością o klas dwudzielności). Następnie analizujemy, w jaki sposób kopie P_4 pojawiają się w H'. Zauważamy, że z faktu, że wierzchołki H' mają parami różne sąsiedztwa, wynika, że kopie P_4 „rozpinają” cały graf H'. Te dwie własności pozwalają nam zbudować gadżet, który w sposób unikalny „tłumaczy” każdy wierzchołek H' na ciąg wierzchołków z ustalonej kopii P_4. Wreszcie, podobnie jak w sekcji 4.2.2, otrzymujemy gadżet, który koduje relację różności na wierzchołkach grafu H'.

Dowód oparty jest na głębokiej strukturalnej analizie grafu H', podobnie jak w przypadku dowodu Twierdzenia 4.2.2.1. Jednakże nie jest do wystarczające do pokazania poszukiwanego dolnego ograniczenia. Ponieważ chcemy udowodnić, że problem zliczania jest „trudniejszy” niż problem decyzyjny, używamy metod typowych dla dowodzenia trudności zliczania, głównie interpolacji. Przypuśćmy, że dysponujemy szybkim algorytmem zliczającym listowe homomorfizmy w H', gdzie $|V(H')| = \mathrm{irr}(H') = k$, i chcemy wykorzystać go do zliczenia poprawnych k-kolorowań danego grafu G. W redukcji konstruujemy wiele instancji problemu #LHom(H'), rozwiązujemy każdą z nich naszym hipotetycznym algorytmem, zbieramy wyniki i na ich podstawie możemy znaleźć liczbę kolorowań grafu G, rozwiązując odpowiedni układ równań.

Krok z przypadku dwudzielnego do ogólnego jest podobny jak w poprzedniej sekcji: znowu używamy grafu H^* i wykorzystujemy bliski związek między problemami #LHom(H) i #LHom(H^*).

Wkładem habilitanta była analiza struktury ścieżek P_4 w grafie H' i pokazanie, jak wyrazić dowolne relacje, używając kopii takiej ścieżki. Dodatkowo, habilitant uczestniczył w konstruowaniu pozostałych gadżetów (istotna część pracy była wykonana w trakcie regularnych spotkań). Wreszcie, we wczesnej fazie projektu, kiedy rozważany był szczególny przypadek grafów zwrotnych, habilitant zasugerował budowanie gadżetów w oparciu o zwrotną ścieżkę o trzech wierzchołkach. Okazało się, że w grafach zwrotnych takie ścieżki odgrywają podobną rolę jak ścieżki P_4 w grafach dwudzielnych.

4.3 Złożoność problemów obliczeniowych w dziedzicznych klasach grafów

W drugiej części cyklu prac zajmujemy się złożonością problemów obliczeniowych w klasach grafów zdefiniowanych przez zabranianie pewnych podstruktur. Dla rodziny $\mathcal{F}$ grafów, graf G nazywamy *$\mathcal{F}$-wolnym*, jeśli nie zawiera żadnego grafu z $\mathcal{F}$ jako indukowanego podgrafu. Jeśli $\mathcal{F} = \{F\}$, piszemy krótko F-wolny zamiast $\{F\}$-wolny. Zauważmy, że klasy grafów zdefiniowane przez zabranianie indukowanych podgrafów są *dziedziczne*, tj. są zamknięte na usuwanie wierzchołków. Z drugiej strony, każda dziedziczna klasa grafów może być zdefiniowana przez pewną (być może nieskończoną) rodzinę zabronionych podgrafów indukowanych.

Dla uproszczenia opisu, skupimy się głównie na grafach F-wolnych dla pewnego spójnego grafu F. Dwie szczególne rodziny zabronionych grafów, które będą odgrywały istotną rolę w tej sekcji, to *ścieżki* i *podpodziały szponu*. Ścieżka o t wierzchołkach jest oznaczana jako P_t. Dla liczb $a, b, c \geqslant 1$, przez $S_{a,b,c}$ oznaczamy graf otrzymany ze ścieżek $P_{a+1}, P_{b+1}, P_{c+1}$ przez wybór jednego z końców każdej ścieżki i utożsamienie ich. Równoważnie, $S_{a,b,c}$ jest otrzymany z grafu $K_{1,3}$ (czyli gwiazdy o trzech liściach, zwanej też *szponem* – ang. *claw*) przez podpodzielenie każdej z krawędzi, odpowiednio, $a - 1$ razy, $b - 1$ razy i $c - 1$ razy.

Badanie złożoności różnych problemów obliczeniowych w dziedzicznych klasach grafów jest jednym z głównych obszarów zainteresowań algorytmicznej teorii grafów [23, 24, 57]. Kanoniczne problemy rozważane w tym kontekście to problem największego ważonego zbioru niezależnego – Max Weight Independent Set (MWIS) i problem k-kolorowania – k-Coloring.

Omówmy najpierw krótko stan wiedzy na temat tych problemów. Już na początku lat osiemdziesiątych XX wieku, Alekseev [3] zauważył, że jeśli graf F jest spójny, to problem MWIS w grafach F-wolnych jest NP-trudny, chyba że F jest ścieżką lub podpodziałem szponu. Co więcej, dowody NP-trudności wykluczają też istnienie algorytmów podwykładniczych, przy założeniu tzw. Hipotezy o Czasie Wykładniczym (ETH) [66, 67]. Mówi ona, że instancje problemu 3-Sat o n zmiennych nie mogą być rozwiązane w czasie podwykładniczym, czyli w czasie $2^{o(n)}$.

Grafy P_4-wolne mają bardzo prostą strukturę [30], dzięki czemu łatwo rozwiązać w tej klasie wiele problemów, w tym MWIS. Kolejny przypadek, czyli grafy P_5-wolne, stanowił znacznie większe wyzwanie. Wielomianowy algorytm dla MWIS w tej klasie pokazali Lokshtanov i in. [84], a później, używając podobnych metod, Grzesik i in. [60] rozszerzyli ten wynik na grafy P_6-wolne. Złożoność problemu dla grafów P_7-wolnych jest problemem otwartym. Nie wiemy także, czy problem MWIS jest NP-trudny w grafach P_t-wolnych dla dowolnej stałej t. Powszechnie uważa się, że tak nie jest i dla każdego t problem MWIS w grafach P_t-wolnych da się rozwiązać w czasie wielomianowym.

Przekonanie to jest poparte istnieniem algorytmu podwykładniczego autorstwa Bacsó i in. [5], a od niedawna także algorytmu quasiwielomianowego autorstwa Gartlanda i Lokshtanova [55]. Algorytmy te działają dla każdej stałej t. Inny, szybszy i prostszy algorytm quasiwielomianowy został pokazany przez Pilipczuka, Pilipczuka i habilitanta [104] (patrz też sekcja 5.1.2).

Przypadek grafów $S_{a,b,c}$-wolnych jest jeszcze bardziej tajemniczy. Wiadomo, że problem MWIS można rozwiązać w czasie wielomianowym dla grafów $S_{1,1,1}$-wolnych (ang. *claw-free*) przez adptację metody ścieżek roszerzających używanej do znajdowania największego skojarzenia w grafie [92, 107]. Lozin i Milanič [86] pokazali wielomianowy algorytm dla grafów $S_{2,1,1}$-wolnych (wcześniej Alekseev [4] pokazał algorytm dla nieważonej wersji problemu). Złożoność w pozostałych przypadkach jest nieznana i powszechnie wierzy się, że dla nich także istnieją algorytmy wielomianowe.

Podejście, które działa dla grafów $S_{a,b,c}$-wolnych dla każdych ustalonych a, b, c, zastosowali po raz pierwszy Chudnovsky i in. [25, 26]. Autorzy pokazali, że problem MWIS w tej klasie da się rozwiązać w czasie podwykładniczym, istnieje dla niego także quasiwielomianowy schemat aproksymacyjny (QPTAS). Później szybsze i prostsze algorytmy, zarówno podwykładniczy, jak i QPTAS, zostały pokazane przez Majewskiego i in. [88] (patrz też sekcja 5.1.2).

Klasyczne wyniki dotyczące złożoności problemu k-Coloring dla $k \geqslant 3$ implikują, że jedyne spójne grafy F, dla których możemy liczyć na algorytmy wielomianowe (a nawet podwykładnicze) w grafach F-wolnych, to ścieżki [47, 64, 82]. Dla uproszczenia notacji, *problemem* (k, t) będziemy nazywać problem k-Coloring w grafach P_t-wolnych. Problem $(k, 5)$ da się rozwiązać w czasie wielomianowym dla każdej stałej k [63]. Problem $(k, 6)$ da się rozwiązać w czasie wielomianowym dla $k \leqslant 4$ [108], a w pozostałych przypadkach jest NP-trudny [65]. Wreszcie, dla problemu $(3, 7)$ znany jest algorytm wielomianowy [17], a problem (k, t) dla $k \geqslant 4$ i $t \geqslant 7$ jest NP-trudny [65]. Co więcej, wszystkie wymienione dowody NP-trudności wykluczają istnienie algorytmów podwykładniczych, zakładając ETH. Podsumowując, otwarte przypadki to problemy $(3, t)$ dla $t \geqslant 8$.

Wychodząc poza algorytmy wielomianowe, Groenland i in. [59] pokazali, że problem $(3, t)$ da się rozwiązać w czasie podwykładniczym dla każdego ustalonego t (patrz też sekcja 5.1.1). Później, Pilipczuk, Pilipczuk i habilitant [104] poprawili ten wynik, prezentując algorytm quasiwielomianowy (patrz też sekcja 5.1.2).

Co ciekawe, prawie wszystkie algorytmy wspomniane powyżej działają także dla bardziej ogólnego problemu listowego k-kolorowania (List k-Coloring). Jedynym wyjątkiem jest przypadek $k = 4$ i $t = 6$: wiadomo, że problem List 4-Coloring jest NP-trudny w grafach P_6-wolnych [58].

4.3.1 Złożoność problemu LHom(H) w grafach F-wolnych (praca [OR21a]).

Skoro (listowe) homomorfizmy uogólniają (listowe) k-kolorowania, naturalnym kierunkiem badań jest rozważenie złożoności wariantów problemu Hom(H) w grafach F-wolnych. Czwarta praca z cyklu skupia się na problemie LHom(H); kilka innych wariantów omówiono w sekcji 5.1.1.

Przypomnijmy, że w problemie LHom(H) zazwyczaj dopuszczamy pętle na wierzchołkach grafu H. Co więcej, problem LHom(H) da się rozwiązać w czasie wielomianowym, jeśli H jest grafem biłukowym, a w przeciwnym przypadku jest NP-trudny. Podobnie jak w sekcji 4.2.2, przez $\mathcal{H}$ oznaczać będziemy klasę grafów, które nie są biłukowe. Jak pokazali Piecyk i habilitant [103], dla każdego grafu $H \in \mathcal{H}$, problem LHom(H) w grafach F-wolnych jest NP-trudny i, zakładając ETH, nie da się rozwiązać w czasie podwykładniczym, chyba że F jest ścieżką lub podpodziałem szponu. Zatem w pracy [OR21a] skupiamy się na tych dwóch przypadkach.

Najpierw rozważmy przypadek, gdy F jest ścieżką. Definiujemy klasę grafów *drapieżnych* (ang. *predacious*) i pokazujemy następującą dychotomię.

Twierdzenie 4.3.1.1. *Niech H będzie ustalonym grafem.*

1. *Jeśli H nie jest drapieżny, to dla każdego t problem LHom(H) można rozwiązać w czasie $n^{\mathcal{O}(\log^2 n)}$ dla n-wierzchołkowych grafów P_t-wolnych.*

2. *W przeciwnym przypadku istnieje t, dla którego problem* LHom(H) *jest NP-trudny w grafach P_t-wolnych i, zakładając ETH, nie może być rozwiązany w czasie podwykładniczym.*

Definicja grafów drapieżnych wykorzystuje narzędzia dla problemu LHom(H), omówione już w sekcji 4.2.2. Bez wchodzenia w szczegóły techniczne, graf H jest drapieżny, jeśli istnieje niedekomponowalny spójny indukowany podgraf grafu H^*, który nie jest biłukowy i zawiera *nieporównywalne* C_4, czyli indukowany cykl długości cztery, którego przeciwległe wierzchołki są parami nieporównywalne.

Algorytm dla grafów, które nie są drapieżne, jest rozwinięciem algorytmu Pilipczuka, Pilipczuka i habilitanta dla problemu 3-Coloring [104]. W szczególności graf K_3 nie jest drapieżny, więc istnienie quasiwielomianowego algorytmu dla problemu (List) 3-Coloring jest szczególnym przypadkiem Twierdzenia 4.3.1.1.

Mówiąc bardzo ogólnie, najpierw wykorzystujemy dekompozycje grafu H, podobnie jak działo się to w sekcji 4.2.2. Następnie próbujemy rozbić graf G na multiplikatywnie mniejsze części, wykonując rozgałęzienia (and. *branching*) na starannie wybranych parach (v, a), gdzie $v \in V(G)$ i $a \in L(v)$. Przez rozgałęzianie mamy na myśli rozważenie dwóch przypadków: albo v jest mapowany na a, albo nie. Zauważmy, że w tym pierwszym przypadku, możemy uaktualnić listy sąsiadów v, gdyż pewne wybory stały się niemożliwe, a następnie usunąć wierzchołek v z aktualnie rozważanej instancji. Kluczowa obserwacja mówi, że zawsze istnieje para (v, a), na której rozgałęzienie istotnie przybliża nas do rozbicia grafu na małe składowe.

Główną rolę w dowodzie negatywnego wyniku w Twierdzeniu 4.3.1.1 odgrywa nieporównywalne C_4 zawarte w H^*. Graf G budowany w redukcji składa się z dużej bikliki, do której podłączone są gadżety stałego rozmiaru; grafy o takiej strukturze nie zawierają długich indukowanych ścieżek. Listy „głównych wierzchołków”, czyli wierzchołków bikliki, zawierają wierzchołki z nieporównywalnego C_4. Stałej wielkości gadżety, które podłączone są do głównych wierzchołków, budowane są za pomocą narzędzi otrzymanych w pracy [OPR20].

Przejdźmy teraz do przypadku zabronionych podpodziałów szponu. Zauważmy, najpierw, że P_t jest indukowanym podgrafem $S_{t,t,t}$. Zatem, na mocy Twierdzenia 4.3.1.1, jeśli H jest drapieżny, nie możemy liczyć na istnienie algorytmu podwykładniczego dla problemu LHom(H) w grafach F-wolnych, dla każdego podpodziału szponu F. Co więcej, jeśli H zawiera przeciwzwrotny trójkąt (czyli trzy parami sąsiadujące wierzchołki bez pętli), dolne ograniczenie natychmiast wynika z faktu, że problem 3-Coloring jest NP-trudny i nie da się rozwiązać w czasie podwykładniczym (zakładając ETH) w grafach krawędziowych (ang. *line graphs*), które są w szczególności $S_{1,1,1}$-wolne [64]. Zatem grafy H, dla których możemy liczyć na istnienie algorytmu podwykładniczego, nie są drapieżne i nie zawierają trójkątów.

W pracy [OR21a] nie udało się w pełni sklasyfikować grafów H pod względem istnienia algorytmów podwykładniczych dla LHom(H) w grafach bez ustalonego podpodziału szponu. Pokazujemy jednak taką dychotomię w dwóch szczególnych przypadkach: jeśli H jest przeciwzwrotny (czyli nie ma wierzchołków z pętlami) oraz jeśli jest zwrotny (czyli wszystkie wierzchołki mają pętle).

W pierwszym przypadku otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.1.2. *Niech H będzie ustalonym grafem przeciwzwrotnym.*

1. *Jeśli H nie jest drapieżny i nie zawiera trójkąta, to dla każdego podpodziału szponu F, problem* LHom(H) *dla n-wierzchołkowych grafów F-wolnych da się rozwiązać w czasie $2^{\mathcal{O}(n^{8/9} \log n)}$.*

2. *Jeśli H jest drapieżny lub zawiera trójkąt, to istnieje podpodział szponu F, dla którego problem* LHom(H) *jest NP-trudny w grafach F-wolnych i nie da się rozwiązać w czasie podwykładnicznym, zakładając ETH.*

Negatywny wynik w Twierdzeniu 4.3.1.2 wynika bezpośrednio z argumentów przedstawionych powyżej, skupmy się zatem na wyniku algorytmicznym. Ponieważ H jest przeciwzwrotny i nie ma trójkątów, natychmiast możemy zauważyć, że jeśli G ma trójkąt, to na pewno nie ma żadnego homomorfizmu w H (niezależnie od list). Dlatego możemy bezpiecznie założyć, że G nie ma trójkątów. Pokazujemy, że wierzchołki takiego $\{F, K_3\}$-wolnego grafu G można podzielić na „małe zbiory”, a cały graf G ma, mówiąc bardzo ogólnie, strukturę ścieżki lub cyklu zbudowanego z tych zbiorów. Dzięki temu problem można rozwiązać, wywołując algorytm rekurencyjnie dla każdego zbioru, a następnie składając te częściowe wyniki za pomocą programowania dynamicznego.

Struktura, o której mowa powyżej, jest bardzo uproszczoną formą *rozszerzonej dekompozycji pasowej* (ang. *extended strip decomposition*), która okazuje się kluczowym narzędziem używanym w projektowaniu algorytmów dla grafów bez podpodziałów szponu. Nie zgłębiamy tego tematu w tym miejscu z dwóch powodów.

Po pierwsze, rozszerzone dekompozycje pasowe odgrywają kluczową rolę w algorytmie omówionym w kolejnej sekcji, czyli sekcji 4.3.2 i są dokładniej omówione tam. Po drugie, rozszerzona wersji pracy [OR21a], która jest dostępna w serwisie arXiv [97], zawiera ulepszony algorytm dla przypadku, kiedy graf H jest przeciwzwrotny. Zauważamy tam, że każdy graf $\{F, K_3\}$-wolny zawiera zbalansowany separator, który jest sąsiedztwem stałej liczby wierzchołków. Łącząc ten wynik z rozgałęzianiem na wierzchołkach dużego stopnia, otrzymujemy znacznie prostszy i szybszy algorytm, którego złożoność wynosi $2^{\mathcal{O}(\sqrt{n \log n})}$.

W przypadku, kiedy graf H jest zwrotny, otrzymujemy następujący wynik.

Twierdzenie 4.3.1.3. *Dla każdego zwrotnego grafu $H \in \mathcal{H}$ istnieje podpodział szponu F, dla którego problem* LHom*(H) w grafach F-wolnych jest NP-trudny i nie da się rozwiązać w czasie podwykładniczym, zakładając ETH.*

Innymi słowy, jedyne przypadki, gdzie moglibyśmy liczyć na istnienie algorytmu podwykładniczego, da się rozwiązać w czasie wielomianowym nawet bez żadnych dodatkowych założeń na instancję problemu.

Głównym wkładem habilitanta była definicja grafów drapieżnych, t.j. zrozumienie, dla jakich grafów H problem da się rozwiązać efektywnie w grafach P_t-wolnych. Algorytm quasiwielomianowy jest oparty na rozszerzeniu metody użytej przez Pilipczuka, Pilipczuka i habilitanta [104]. Habilitant zasugerował też, jak powinna wyglądać ogólna struktura konstrukcji w dowodzie negatywnego wyniku w Twierdzeniu 4.3.1.1. W przypadku podpodziałów szponu, habilitant miał istotny wkład w część algorytmiczną. W szczególności, wniósł główne pomysły dotyczące programowania dynamicznego na zdegenerowanej rozszerzonej dekompozycji pasowej oraz do wspomnianego twierdzenia o separatorach w grafach $\{S_{a,b,c}, K_3\}$-wolnych. Pokazał też dolne ograniczenia w kilku przypadkach.

4.3.2 Wielomianowy algorytm dla MWIS w grafach o ograniczonym stopniu bez dużych podpodziałów szponu (praca [ACDR22]).

Przypomnijmy, że wielomianowe algorytmy dla problemu MWIS w grafach $S_{a,b,c}$-wolnych znane są tylko dla dwóch najprostszych przypadków, czyli $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ [92, 107] i $(a, b, c) = (2, 1, 1)$ [86]. Znamy jednak algorytmy, które działają dla grafów F-wolnych dla *każdego* podpodziału szponu F: quasiwielomianowy schemat aproksymacyjny [26, 88] oraz algorytm podwykładniczy [25, 26, 88].

Głównym wynikiem pracy [ACDR22] jest następujący wynik.

Twierdzenie 4.3.2.1. *Dla każdego podpodziału szponu F i stałej Δ, problem MWIS w grafach F-wolnych o największym stopniu Δ da się rozwiązać w czasie wielomianowym.*

Wprowadźmy najpierw niezbędne narzędzia, a potem naszkicujemy dowód tego wyniku. Zbiór $Z \subseteq V(G)$ rozmiaru trzy nazywamy *skrępowanym* (ang. *constricted*) w grafie G, jeśli nie istnieje w G indukowane poddrzewo, które zawiera wszystkie wierzchołki z Z. W swoim słynnym rozwiązaniu problemu *three-in-a-tree*, Chudnovsky i Seymour [27] pokazali, że jeśli zbiór Z jest skrępowany w G, to G ma tzw. *rozszerzoną dekompozycją pasową*. Bardzo ogólnie mówiąc, oznacza to, że G ma strukturę zbliżoną do grafu krawędziowego pewnego grafu H, gdzie wierzchołki grafu G zgrupowane są w zbiory, nazywane *atomami*, które odpowiadają wierzchołkom, krawędziom i trójkątom w grafie H. Dysponując taką strukturą, można użyć jej do rozwiązania problemu MWIS przez rozwiązanie problemu dla każdego atomu osobno, a potem złożeniu częściowych rozwiązań przed redukcję to problemu największego ważonego skojarzenia (Max Weight Matching) w pewnej modyfikacji grafu H (tak właśnie działa QPTAS pokazany przez Chudnovsky i in. [26]). Jednakże, aby to podejście zadziałało, musimy zapewnić, że żaden atom nie zawiera „prawie wszystkich” wierzchołków grafu.

Głównym wynikiem strukturalnym w pracy [ACDR22] jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.3.2.2. *Dla każdego podpodziału szponu F i dla każdej liczby naturalnej Δ istnieją liczby naturalne d, z oraz liczba rzeczywista $\delta \in (0, 1)$, dla których spełniona jest następująca własność. Dla każdego n-wierzchołkowego F-wolnego grafu G o największym stopniu co najwyżej Δ, w czasie wielomianowym możemy zwrócić jeden z poniższych wyników:*

(i) zbiór S rozmiaru co najwyżej d taki, że każda składowa $G - S$ ma co najwyżej $\delta \cdot n$ wierzchołków, lub

(ii) zbiór X rozmiaru co najwyżej z i rozszerzona dekompozycja pasowa grafu $G - X$, w której każdy atom ma co najwyżej $\frac{1}{10\Delta} \cdot n$ wierzchołków.

Pierwszy wynik pozwala nam użyć podejścia opartego na strategii *dziel i zwyciężaj*: dla każdego zbioru niezależnego w S (myślmy o nim jako o przecięciu pewnego optymalnego rozwiązania z S), próbujemy niezależnie znaleźć jego optymalne rozszerzenie w każdej składowej grafu $G - S$; przypomnijmy, że składowe te są multiplikatywnie mniejsze niż G. Jeśli otrzymamy drugi wynik, znowu analizujemy każdy możliwy zbiór niezależny w X i próbujemy go rozszerzyć, postępując jak Chudnovsky i in. [26], tj. rozwiązując problem rekurencyjnie dla każdego atomu, a potem znajdując skojarzenie o największej wadze w odpowiednim grafie (otrzymanym z dekompozycją $G - X$).

Pozostało zatem udowodnić Twierdzenie 4.3.2.2. Przypuśćmy, że wyniku (i) nie da się otrzymać, chcemy w tej sytuacji uzyskać wynik (ii). Najpierw iteracyjnie dekomponujemy graf używając tak zwanej *dekompozycji ze zbiorem centralnym* (ang. *central bag decomposition*), użytej wcześniej przez Abrishami i in. [1]. W ten sposób otrzymujemy zbiór $\beta \subseteq V(G)$ zwany *centralnym* (ang. *the central bag*) taki, że:

(P1) graf $G[\beta]$ jest $S_{1,1,1}$-wolny,

(P2) graf G może być zrekonstruowany z $G[\beta]$ przez iteracyjne dodawanie „małych" składowych, z których każda sąsiaduje ze zbiorem o ograniczonym rozmiarze i prostej strukturze.

Teraz chcemy znaleźć „dobrą" rozszerzoną dekompozycję pasową grafu $G[\beta]$ używając własności (P1), a potem iteracyjnie rozszerzać tę dekompozycję, aż do uzyskania dekompozycji całego grafu.

Zanim jednak rozpoczniemy, dodajemy do grafu G trzy wierzchołki v_1, v_2, v_3, otrzymując graf G' taki, że zbiór $\beta' := \beta \cup \{v_1, v_2, v_3\}$ ma własności (P1) i (P2) względem G'. Co więcej, istnieje stałego rozmiaru zbiór X taki, że $\{v_1, v_2, v_3\}$ jest skrępowany w $G' - X$.

Rozszerzona dekompozycja pasowa grafu $G'[\beta'] - X$ może zostać otrzymana przy wykorzystaniu strukturalnej charakteryzacji grafów $S_{1,1,1}$-wolnych, pokazanej przez Chudnovsky i Seymoura [27]. Z własności zbioru β' i faktu, że wynik (i) nie zachodzi, wnioskujemy, że atomy tej dekompozycji są małe.

Następnie, używając faktu, że zbiór $\{v_1, v_2, v_3\}$ jest skrępowany w $G' - X$, możemy iteracyjnie wywoływać wspomniane już twierdzenie (*three-in-a-tree*) Chudnovsky i Seymoura [27], aby dodawać nowe wierzchołki do dekompozycji grafu $G'[\beta'] - X$ aż do uzyskania dekompozycji grafu $G' - X$. W tym kroki uważnie analizujemy, jak dekompozycja zmienia się w tym procesie i pokazujemy, że przy założeniu, że wynik (i) nie zachodzi, atomy nie stają się zbyt duże. Ostatecznie, ponieważ zaczęliśmy od dekompozycji grafu $G'[\beta'] - X$ o małych atomach, na samym końcu dostajemy rozszerzoną dekompozycję pasową $G' - X$, której wszystkie atomy nadal są małe. Wreszcie, usuwając wierzchołki v_1, v_2, v_3, otrzymujemy żądaną dekompozycję $G - X$.

Głównym technicznym wkładem habilitanta był dowód, że rozszerzona dekompozycja pasowa zbioru centralnego $G'[\beta'] - X$ może być rozszerzona do dekompozycji grafu $G' - X$ przez iteracyjne wywoływanie twierdzenia Chudnovsky i Seymoura [27]. Co więcej, w trakcie tego procesu atomy pozostają małe (Lemat 4.1 w pracy). Ponadto habilitant był odpowiedzialny za pokazanie, jak z Twierdzenia 4.3.2.2 otrzymać Twierdzenie 4.3.2.1.

5 Działalność naukowa

5.1 Inne wyniki

Omówmy krótko wyniki uzyskane przez habilitanta, które nie zostały uwzględnione w osiągnięciu i przedstawione szczegółowo w sekcji 4. Podzielone są na podsekcje pod względem tematyki.

5.1.1 Złożoność problemów pokrewnych do Hom(H) przy różnych ograniczeniach na instancje wejściowe.

W ostatnich kilku latach zainteresowania naukowe habilitanta skupione były głównie na badaniu złożoności wariantów problemu homomorfizmu grafów w różnych kontekstach i przy różnych założeniach dotyczących instancji.

Ograniczenia oparte na SETH dla różnych parametryzacji. W pierwszych dwóch pracach rozważana jest złożoność wariantów problemu Hom(H) w zależności od pewnych strukturalnych parametrów instancji wejściowej, analogicznie do wyników omówionych w sekcji 4.2. Praca [46] jest poprzednikiem wyników opisanych szczegółowo w sekcji 4.2.2, tj. ścisłych oszacowań na złożoność problemu LHom(H) parametryzowanego przez szerokość drzewiastą. Znajduje się w niej rozwiązanie dla szczególnego przypadku problemu, kiedy zakładamy, że graf H jest zwrotny. W pracy [103] Piecyk i habilitant pokazują ścisłe oszacowania dla problemu LHOM(H) przy parametryzacji przez rozmiar najmniejszego zbioru rozcinającego wszystkie cykle (ang. *feedback vertex set*) oraz górne i dolne ograniczenia dla problemów LHOM(H) i HOM(H) parametryzowanych przez *szerokość cięciową* (ang. *cutwidth*) grafu wejściowego. W szczególności pokazano tam, że przy standardowych założeniach z teorii złożoności nie istnieje stała c taka, że dla każdego H problem HOM(H) może być rozwiązany w czasie $c^t \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ dla n-wierzchołkowych instancji o szerokości cięciowej t. Wynik ten odpowiada na pytanie zadane przez Jansena.

Złożoność w grafach F-wolnych. W pracy [21] Chudnovsky i in. rozpoczęli systematyczne badanie złożoności problemu znajdowania (listowych) homomorfizmów w ustalony cykl, przy założeniu, że instancje należą do pewnej klasy dziedzicznej. Głównym wynikiem jest wielomianowy algorytm dla problemu LHOM(C_k) w grafach P_9-wolnych, gdzie $k \in \{5,7\} \cup [9,+\infty)$. Podobne pytanie było rozważane w pracy [36], jednak tym razem grafem, w który chcemy znaleźć homomorfizm, jest *5-koło* W_5 (ang. *5-wheel*), czyli graf otrzymany z cyklu C_5 przez dodanie wierzchołka uniwersalnego. Okazuje się, że problem HOM(W_5) zachowuje się w sposób nieco zaskakujący, jeśli rozważamy instancje, które nie zawierają ustalonego podpodziału szponu.

W pracy [59] pokazano, że problem HOM(H) (i jego uogólnienia) może być rozwiązany w czasie podwykładniczym w grafach P_t-wolnych (dla każdego ustalonego t), jeśli H nie zawiera C_4 jako podgrafu. Ten wynik był później istotnie rozszerzony, tak jak omówiono w sekcji 4.3.

Tematem pracy [43] jest złożoność problemu *listowego lokalnie surjektywnego homomorfizmu* (ang. *list locally surjective homomorphism problem*) w dziedzicznych klasach grafów. W problemie tym szukamy listowych homomorfizmów, które są jednocześnie surjektywne na sąsiedztwie każdego wierzchołka z grafu wejściowego.

Problemem rozważanym w pracy [22] jest znajdowanie największego indukowanego podgrafu, który ma homomorfizm w ustalony graf H. Uzyskano tam wielomianowe i podwykładnicze algorytmy dla tego problemu w pewnych podklasach grafów P_6-wolnych. W szczególności pokazano, że problem znajdowania najmniejszego zbioru przecinającego wszystkie cykle nieparzyste (MIN ODD CYCLE TRANSVERSAL) może być rozwiązany w czasie podwykładniczym w grafach P_5-wolnych.

Złożoność w grafach przecięć obiektów geometrycznych. Poza zabranianiem (indukowanych) podgrafów, wiele interesujących dziedzicznych klas grafów można zdefiniować, rozważając *grafy przecięć* pewnych obiektów geometrycznych. Dla rodziny $\mathcal{S}$ zbiorów (zazwyczaj podzbiorów $\mathbb{R}^2$), zbiorem wierzchołków jej grafu przecięć jest $\mathcal{S}$, a zbiory $S_1, S_2 \in \mathcal{S}$ sąsiadują wtedy i tylko wtedy, gdy $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

W pracy [99] Okrasa i habilitant pokazali dychotomie dotyczące złożoności kilku wariantów problemu HOM(H) w grafach przecięć krzywych na płaszczyźnie (ang. *string graphs*) i grafach przecięć odcinków na płaszczyźnie (ang. *segment graphs*). Podobne pytania dla „grubych" (ang. *fat*) obiektów, takich jak koła i trójkąty, były rozważane w pracy [78].

Inne problemy. W pracy [20] Chen i in. pokazują dolne ograniczenia dla problemu *sparsyfikacji* (ang. *sparsification*) instancji problemu LHOM(H). Głównym wynikiem pracy jest, że jeśli H nie jest grafem biłukowym, to przy standardowych założeniach z teorii złożoności nie istnieje efektywny algorytm, który potrafi zredukować dowolną n-wierzchołkową instancję problemu LHOM(H) do równoważnej instancji o rozmiarze $\mathcal{O}(n^{2-\varepsilon})$, dla żadnego $\varepsilon > 0$.

W pracy [8] rozważana jest złożoność pewnego wariantu problemu HOM(H), zwanego *listowym pokrywaniem* (ang. *list covering*) w grafach, które mogą zawierać wielokrotne krawędzie, pętle i *półkrawędzie* (krawędzie o jednym końcu). Problem ten motywowany jest pewnymi pytaniami z topologicznej teorii grafów.

5.1.2 Złożoność innych problemów w ograniczonych klasach grafów.

Habilitant uzyskał także inne wyniki dotyczące złożoności klasycznych problemów kombinatorycznych w ograniczonych klasach grafów.

Złożoność dla grafów F-wolnych. Centralnym zagadnieniem algorytmicznej teorii grafów jest zrozumienie złożoności problemu MWIS i jego uogólnień w grafach F-wolnych. Te uogólnienia często wyrażane są jako problem szukania największego indukowanego podgrafu pochodzącego z pewnej klasy grafów rzadkich, np. o ograniczonej szerokości drzewiastej lub o ograniczonej degeneracji. Zauważmy, że problem znajdowania największego indukowanego lasu jest równoważny, przez dopełnienie rozwiązania, klasycznemu problemowi znajdowania zbioru przecinającego wszystkie cykle (Min Feedback Vertex Set).

W pracy [94] pokazano pewne ogólne podejście do tego typu problemów. Konkretnym zastosowaniem tej metody jest na przykład podwykładniczy algorytm dla problemu Min Feedback Vertex Set w grafach P_t-wolnych. W pracy [2] pokazano, że ogólny problem szukania największego indukowanego podgrafu o ograniczonej szerokości drzewiastej może być rozwiązany w czasie wielomianowym w grafach P_5-wolnych oraz grafach $C_{>4}$-wolnych, czyli grafach, które nie zawierają indukowanego cyklu o co najmniej czterech wierzchołkach. W szczególności wynika z tego, że problem Min Feedback Vertex Set można rozwiązać w czasie wielomianowym w grafach P_5-wolnych. Wynik ten był rozwiązaniem znanego problemu otwartego.

W pracy [104] pokazano nowy algorytm quasiwielomianowy dla problemu MWIS w grafach P_t-wolnych. Ten algorytm jest prostszą (i szybszą) wersją przełomowego algorytmu Gartlanda i Lokshtanova [55]. Co więcej, algorytm ten można zaadaptować do problemu List 3-Coloring. Metoda zastosowana w [104] została potem wykorzystana w dowodzie dychotomii dla problemu LHom(H) dla grafów P_t-wolnych, która była omówiona w sekcji 4.3. W pracy [56] quasiwielomianowy algorytm dla MWIS w grafach P_t-wolnych [104] jest rozszerzony w dwóch kierunkach:

- w czasie quasiwielomianowym potrafimy nie tylko rozwiązać problem MWIS, ale także znaleźć największy indukowany podgraf o ograniczonej degeneracji, spełniający ustaloną formułę w logice CMSO$_2$,
- zaprezentowano wersję algorytmu, która działa dla grafów $C_{>t}$-wolnych; klasa ta ściśle zawiera klasę grafów P_t-wolnych.

W pracach [33, 100, 101] pokazano szereg pozytywnych i negatywnych wyników dotyczących różnych wariantów klasycznych problemów znajdowania zbioru przecinającego pewne typy cykli w grafie: Min Feedback Vertex Set, Min Even Cycle Transversal i Min Odd Cycle Transversal dla instancji, które nie zawierają ustalonego lasu liniowego (czyli grafu, którego każda składowa jest ścieżką).

W pracy [88] pokazano quasiwielomianowy schemat aproksymacyjny i algorytm podwykładniczy dla problemu MWIS w grafach $S_{a,b,c}$-wolnych, dla dowolnych a, b, c. Algorytmy te są prostsze i szybsze niż ich odpowiedniki przedstawione przez Chudnovsky i in. [25, 26].

Praca [42] zawiera szereg pozytywnych i negatywnych wyników dotyczących parametryzowanych algorytmów aproksymacyjnych dla problemu Max Independent Set w grafach F-wolnych.

Grafy przecięć obiektów geometrycznych. Zagadnieniem rozważanym w pracy [6] jest złożoność problemu k-Coloring w klasie grafów przecięć kół i, ogólniej, grafów przecięć kul w $\mathbb{R}^d$. Głównym wynikiem są prawie ściśle ograniczenia, które pokazują płynną zmianę złożoności wraz ze wzrostem liczby kolorów (traktowanej jako funkcja liczby wierzchołków).

Praca [13] skupia się na problemie największej kliki (Max Clique) w grafach przecięć kół; pytanie o jego złożoność jest znanym zagadnieniem otwartym. Jako dwa główne wyniki pokazano dla tego problemu QPTAS i algorytm podwykładniczy. Ten pierwszy został potem poprawiony do *efektywnego wielomianowego schematu aproksymacyjnego* (EPTAS) przez Bonamy i in. [10]; ostateczna wersja pracy powstała z połączenia dwóch wspomnianych prac konferencyjnych [9].

W pracy [15] Bonnet i habilitant zajmują się pytaniem, jakie problemy można rozwiązać w czasie podwykładniczym w grafach przecięć krzywych i grafach przecięć odcinków. W pracy znajduje się szereg pozytywnych i negatywnych wyników w tej tematyce.

Grafy o ograniczonej średnicy. W pracy [40] Dębski, Piecyk i habilitant badają problem 3-Coloring dla grafów o średnicy 2; jego złożoność jest innym znanym zagadnieniem otwartym. Głównym wynikiem jest algorytm podwykładniczy o złożoności $2^{\mathcal{O}(n^{1/3}\log^2 n)}$, który istotnie poprawia wcześniejsze najlepsze znane ograniczenie górne, tj. $2^{\mathcal{O}(\sqrt{n\log n})}$ [91]. Zauważmy, że, w odróżnieniu od wszystkich innych klas omawianych w niniejszym dokumencie, klasa grafów o ograniczonej średnicy nie jest dziedziczna.

5.1.3 Teoria grafów.

W tej sekcji krótko przedstawimy wyniki habilitanta dotyczące bardziej strukturalnych zagadnień teorii grafów.

Grafy bez ustalonych podgrafów indukowanych. W pracy [11] pokazano, że w przypadku grafów P_t-wolnych i $C_{>t}$-wolnych degeneracja jest ograniczona przez funkcję wielomianową rozmiaru największej zbalansowanej bikliki zawartej w grafie jako podgraf. W pracy [52] pokazano, że klasy grafów, które nie zawierają dużych struktur zwanych *creatures* i *skinny ladders* mają wielomianowo wiele minimalnych separatorów. Wynik ten poprawił wcześniej znane quasiwielomianowe ograniczenie uzyskane przez Gartlanda i Lokshtanova [54]. Wyniki w pracy [34] są kontynuacją badań na temat *szerokości klikowej* (ang. *clique-width*) w dziedzicznych klasach grafów. Pytamy, dla jakich klas grafów szerokość klikowa staje się ograniczona przy dodatkowym założeniu, że grafy nie zawierają separatorów, które są klikami. Problem ten jest umotywowany faktem, że powyższe założenie często jest spełnione w zastosowaniach algorytmicznych.

Grafy zdefiniowane geometrycznie. Problemem badanym w pracy [19] jest ograniczenie na liczbę maksymalnych klik w grafach przecięć jednokładnych kopii danego wielokąta i pewnych uogólnieniach takich klas. W pracy [48] pokazano, że pewne klasy grafów i hipergrafów mają eleganckie reprezentacje za pomocą stykających się wielokątów umieszczonych w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. W pracy [102] pokazano, że rozpoznawanie tzw. *2-zgięciowych grafów EPG* (ang. *2-bend EPG graphs*) jet problemem NP-trudnym.

Grafy skierowane. W pracy [89] rozważana jest własność Erdősa-Pósy dla skierowanych cykli. Reed i in. [105] pokazali, że rozmiar najmniejszego zbioru przecinającego wszystkie cykle skierowane (ang. *directed feedback vertex set*) jest ograniczony przez pewną funkcję największej liczby parami rozłącznych skierowanych cykli, które można upakować w grafie, jednak funkcja ta rośnie bardzo szybko. W pracy [89] pokazano, że ograniczenie może być poprawione do wielomianowego, jeśli zamiast rozważać pakowania rozłącznych cykli, rozważymy rodziny cykli, które pokrywają każdy wierzchołek co najwyżej dwukrotnie.

Problem badany w pracy [90] jest nieco podobny. Pokazano tam, że skierowana szerokość drzewiasta jest ograniczona przez funkcję wielomianową rozmiaru największej rodziny zbiorów zwanej *cierniem* (ang. *bramble*), w której każdy wierzchołek należy do ograniczonej liczby zbiorów.

Inne obszary teorii grafów. Głównym wynikiem pracy [93] jest dowód hipotezy Gerbnera i Palmera, że dla każdego grafu H, jeśli r jest dostatecznie duże, to r-dzielny graf Turána zawiera najwięcej kopii grafu H spośród wszystkich K_{r+1}-wolnych grafów o danej liczbie wierzchołków. W pracy [79] poprawiono znane górne ograniczenie na liczbę chromatyczną grafu planarnego o ograniczonym stopniu; problemu tego dotyczy hipoteza Wegnera.

5.1.4 Inne.

Na koniec wymieńmy starsze wyniki habilitanta oraz wyniki, które nie pasują naturalnie do żadnej z kategorii wydzielonej powyżej.

Harmonijne i achromatyczne kolorowania grafów i hipergrafów. *Harmonijnym kolorowaniem* (odpowiednio, *achromatycznym kolorowaniem*) k-jednorodnego (ang. k*-uniform*) hipergrafu nazywamy kolorowanie jego wierzchołków, które spełnia następujące warunki:

- jeśli dwa wierzchołki należą do tej samej hiperkrawędzi, otrzymują różne kolory,
- dla każdego zbioru k kolorów istnieje co najwyżej (odpowiednio, co najmniej) jedna hiperkrawędź, której wierzchołki pokolorowane są dokładnie tymi kolorami.

Takie kolorowania i związane z nimi parametry chromatyczne badano w cyklu prac [18, 37, 39, 45]. Blisko związanym problemem jest konstrukcja tzw. ciągów o promieniu k (ang. *sequences of radius* k), których dotyczy praca [12]. Wreszcie, pewne uogólnienie ciągów o promieniu k na grafy jest zaproponowane i badane w pracy [38].

Etykietowanie $L(2, 1)$ i pokrewne problemy. Wczesne prace habilitanta skupione były wokół wariantu etykietowania grafów zwanego *etykietowaniem* $L(2, 1)$ (ang. $L(2, 1)$*-labeling*) i jego uogólnień. Jeden kierunek badań dotyczył dokładnych algorytmów wykładniczych [68, 69, 71–73, 106], a drugi ograniczeń na związany z tym problemem parametr chromatyczny dla grafów przecięć kół, zarówno w wariancie offline [28], jak i online [74].

Pozostałe prace. W pracy [14] badana jest parametryzowana złożoność problemu *zamieniania żetonów* (ang. *token swapping*), pokazano tam szereg pozytywnych i negatywnych wyników. Praca [53] dotyczy problemu zmiany danego kolorowania grafu w poprawne przez przekolorowanie jak najmniejszej liczby wierzchołków. Znowu pokazano szereg wyników z zakresu złożoności parametryzowanej tego problemu. W pracy [41] wprowadzona jest klasa złożoności $\forall\exists\mathbb{R}$, pokazano tam kilka wyników z nią związanych. Klasa $\forall\exists\mathbb{R}$ jest analogiem klasy Π_2 z hierarchii wielomianowej dla zmiennych rzeczywistych. W pracy [35] pokazano algorytm XP dla problemu znajdowania *spójnej szerokości ścieżkowej* (ang. *connected pathwidth*). W pracy [16] badana jest złożoność problemu *projektowania RNA* (ang. *RNA design*), pochodzącego z biologii obliczeniowej. W pracy [85] badana jest złożoność problemu znajdowania ciasnych obwodów Eulera w hipergrafach. W pracy [70] zaproponowano i przeanalizowano teoretyczny model zapobiegania atakom typu DDoS w sieciach. W pracach [75–77] zaprojektowano nowe algorytmy dedykowane dla procesorów graficznych (GPU).

5.2 Udział w projektach badawczych

2013 - 2015 *Ciągi pokrywające zbiory i achromatyczne kolorowania grafów*
(OPUS3, 2012/05/B/ST1/00652, kierownik: Zbigniew Lonc) – wykonawca

2013 - 2015 *Nowe algorytmy i struktury dla procesorów GPU wykonujące masowe operacje na danych*
(SONATA4, 2012/07/D/ST6/0248, kierownik: Krzysztof Kaczmarski) – wykonawca

2016 - 2017 ERC Starting Grant *PARAMTIGHT* (kierownik: Dániel Marx) – wykonawca

2018 LMS Grant w programie Research in Pairs (kierownik: Daniël Paulusma) – wykonawca

2018 - 2019 ***Złożoność problemów homomorfizmu dla szczególnych klas grafów***
(MINIATURA2, 2018/02/X/ST6/00145) – kierownik i główny wykonawca

2019 - 2022 ERC Starting Grant *CUTACOMBS* (kierownik: Marcin Pilipczuk) – wykonawca

2019 - teraz ***Program optymalności w problemach homomorfizmu grafów***
(SONATA14, 2018/31/D/ST6/00062) – kierownik i główny wykonawca

2022 - teraz ERC Starting Grant *BOBR* (kierownik: Michał Pilipczuk) – wykonawca

5.3 Działalność naukowa prowadzona w więcej niż jednej jednostce

Habilitant odbył staż podoktorski (postdoc) w MTA SZTAKI (Institute for Computer Science and Control, Węgierska Akademia Nauk) od stycznia 2016 do stycznia 2017. Poza głównym miejscem zatrudnienia, tj. Politechniką Warszawską, jest też zatrudniony na niepełny etat na stanowisku badawczym na Uniwersytecie Warszawskim: od 2019 do 2022 w grancie ERC *CUTACOMBS* (kierownik: Marcin Pilipczuk), a od 2022 w grancie ERC *BOBR* (kierownik: Michał Pilipczuk). Ponadto aktywnie współpracuje z wieloma naukowcami z różnych instytucji w tym Princeton University (Maria Chudnovsky, Paul Seymour), Durham University (Daniël Paulusma), czy ENS Lyon (Édouard Bonnet). Szczegółowa lista wizyt naukowych jest podana poniżej:

20.10 - 28.10.2010 Jan Kratochvíl, Uniwersytet Karola, Czechy

17.03 - 23.03.2011 Armin Fügenschuh, Zuse Institute Berlin, Niemcy

23.03 - 30.03.2012 Mathieu Liedloff, Dieter Kratsch, Université d'Orleans, Francja

12.05 - 20.05.2012 Jan Kratochvíl, Uniwersytet Karola, Czechy

16.06 - 23.06.2012 Jan Kratochvíl, Uniwersytet Karola, Czechy

27.10 - 01.11.2014 Jan Kratochvíl, Martin Pergel, Uniwersytet Karola, Czechy

30.04 - 02.05.2015 Keith Edwards, University of Dundee, Zjednoczone Królestwo

21.09 - 27.09.2015 Martin Pergel, Uniwersytet Karola, Czechy

28.03 - 02.04.2017 Dariusz Dereniowski, Politechnika Gdańska, Polska

03.07 - 07.07.2017	Dariusz Dereniowski, Politechnika Gdańska, Polska
05.07 - 20.07.2018	William Evans, Alexander Wolff, University of British Columbia, Kanada
11.11 - 16.11.2018	Daniël Paulusma, Durham University, Zjednoczone Królestwo
30.01 - 06.02.2019	Maria Chudnovsky, Princeton University, USA
01.15 - 14.05.2019	Daniël Paulusma, Durham University, Zjednoczone Królestwo
31.10 - 06.11.2019	Andreas Feldmann, Charles University, Czechy
15.02 - 21.02.2020	Maria Chudnovsky, Princeton University, USA
22.03 - 26.03.2020	Maria Chudnovsky, Princeton University, USA (wizyta wirtualna)
28.09 - 29.09.2023	Andreas Feldmann, Uniwersytet Karola, Czechy
13.02 - 24.02.2023	Martin Milanič, University of Primorska, Słowenia

5.4 Doktoranci

Aktualnie habilitant jest promotorem pomocnicznych dwóch doktorantek:

1. Karolina Okrasa, Politechnika Warszawska, dyscyplina: Matematyka
   Temat: *Kombinatoryczne i obliczeniowe aspekty homomorfizmów grafów*
   Główny promotor: prof. Zbigniew Lonc
2. Marta Piecyk, Politechnika Warszawska, dyscyplina: Matematyka
   Temat: *Problemy i warianty homomorfizmów grafów*
   Główny promotor: prof. Zbigniew Lonc

Jest także opiekunem naukowych grantów obu doktorantek:

- Karolina Okrasa: *Uogólnienia problemu kolorowania w grafach z zabronionymi strukturami* (PRELUDIUM20, 2021/41/N/ST6/01507),
- Marta Piecyk: *Problem homomorfizmu grafów w strukturalnie ograniczonych klasach* (PRELUDIUM21, 2022/45/N/ST6/00237).

5.5 Praca dla społeczności

- Edytor w czasopiśmie *Graphs & Combinatorics*.
- Udział w komitetach programowych międzynarodowych konferencji:
  - jako współprzedowniczący komitetu programowego: WG 2021 (razem z Łukaszem Kowalikiem i Michałem Pilipczukiem),
  - jako członek: EuroCG 2020, MFCS 2022, IPEC 2022.
- Organizacja warsztatów i konferencji:
  - Fine-grained Complexity of Hard Geometric Problems, warsztaty w ramach konferencji SoCG 2019 (razem z Édouardem Bonnetem),
  - PARUW2 and PARUW3 (Parameterized Algorithms Retreat of University of Warsaw, oba z Marcinem Pilipczukiem i Michałem Pilipczukiem),
  - WG 2021 (z Łukaszem Kowalikiem, Marcinem Pilipczukiem i Michałem Pilipczukiem),
  - Structural Graph Theory Boot Camp, planowany jesienią 2023 (z Marcinem Pilipczukiem i Michałem Pilipczukiem).
- Recenzent rozprawy doktorskiej Václava Blažeja (ČVUT – Czech Technical University, Praga), 2022.
- Recenzent dla międzynarodowych konferencji informatycznych (w tym FOCS, STOC, SODA, ICALP, SoCG, ESA, STACS) oraz czasopism naukowych (w tym ACM Transactions on Computation Theory, Journal of Combinatorial Theory Ser. B, SIAM Journal on Computing, SIAM Journal on Discrete Mathematics).

5.6 Inne osiągnięcia naukowe

Habilitant wygłosił lub planuje wygłosić kilka zaproszonych referatów i wykładów:

Referaty i wykłady.

- *The quest for optimality in geometric intersection graphs* (zaproszony wykład), Homonolo 2019, Nová Louka, Czechy
- *The advantages of being modest: subexponential- and quasipolynomial-time algorithms for H-free graphs* (zaproszony referat), Graph Width Parameters: from Structure to Algorithms, ICALP 2021 satellite workshop, Glasgow, Zjednoczone Królestwo (warsztaty online)
- *H-free graphs: from structure to algorithms* (zaproszony referat), The 56th Czech and Slovak Conference on Graph Theory 2021, Rajecké Teplice, Słowacja
- *Understanding graphs with no long claws* (zaproszony referat), Minisymposium: Induced Subgraphs, 29th British Combinatorial Conference 2022, Lancaster, Zjednoczone Królestwo,
- *Graphs with no long claws: Recent advances*[1] (zaproszony referat), Belgian Graph Theory Conference, 2023 (wydarzenie planowane), Ghent, Belgia,
- *Optimality program in graph homomorphisms*[1] (zaproszony referat), The 31st Workshop Cycles and Colourings, 2023 (wydarzenie planowane), Nový Smokovec, Słowacja,
- zaproszony wykładowca na Ecole de Printemps d'Informatique Théorique (EPIT, Spring School on Theoretical Computer Science), 2024 (wydarzenie planowane), Aussois, Francja

Ponadto, wygłosił szereg referatów na międzynarodowych konferencjach informatycznych i matematycznych, w tym SODA 2020, ESA 2020, 2019, GD 2019, STACS 2018, 2017, WG 2020, 2019, 2018, 2016, 2012. Wreszcie, prezentował swoje wyniki na licznych seminariach badawczych, w tym Princeton Discrete Mathematics Seminar, New York Combinatorics Seminar, ACiD Seminar w Durham, Math Research Seminar na University of Primorska, Berlin-Poznań-Hamburg(-Warsaw) Seminar in Discrete Mathematics, Bordeaux Graph Theory Seminar, Seminar on Theory of Computing na Uniwerytecie Karola w Pradze, Extremal Combinatorics Seminar w Instytucie Rényi'ego w Budapeszcie, Jagiellonian TCS Seminar, seminarium z Matematyki Dyskretnej na UAM w Poznaniu.

Nagrody.

- Nagroda Rektora za Wybitne Osiągnięcia Naukowe, Politechnika Warszawska: nagroda indywidualna III stopnia (za lata 2013-14), nagroda indywidualna I stopnia (za lata 2016-17, 2018-19, 2020-21)
- Best Paper Award na konferencji WG 2018 za pracę: É. Bonnet, P. Rzążewski, Optimality Program in String and Segment Graphs, WG 2018 Proc., LNCS 11159, pp. 164-175, 2018
- jeden z trzech finalistów konkursu Open Mind dla młodych polskich kombinatoryków, 2018

6 Inna działalność

Dydaktyka.

- Od 2010 roku habilitant prowadzi zajęcia ze studentami na Politechnice Warszawskiej. Większość kursów dotyczy teorii grafów i algorytmiki. W szczególności koordynuje i wykłada przedmiot *Matematyka Dyskretna 2*, który jest podstawowym kursem teorii grafów dla studentów kierunku *Informatyka i Systemy Informacyjne*, a także przedmiot *Teoria złożoności* dla studentów studiów magisterskich z *Matematyki*, w specjalizacji *Matematyka w Cyberbezpieczeństwie*. Ponadto przygotował i prowadził (lub nadal prowadzi) kilka obieralnych przedmiotów dotyczących teorii grafów i algorytmów, przede wszystkim dla problemów trudnych obliczeniowo. Prowadził też dwusemestralny kurs dla doktorantów: *The probabilistic method.*

[1] Planowany tytuł.

- Habilitant wypromował 10 prac magisterskich z matematyki i informatyki, a także 42 prace licencjackie i inżynierskie w matematyki, informatyki i analizy danych. W sumie daje to 94 wypromowanych studentów – wiele prac inżynierskich było pracami zespołowymi (studenci, którzy ukończyli pod opieką habilitanta zarówno pracę inżynierską/licencjacką, jak i magisterską, liczeni są w tej sumie podwójnie).
- Praca magisterska Karoliny Okrasy, przygotowana pod opieką habilitanta, dostała nagrodę *Outstanding Master Thesis Award* przyznawaną w ramach konkursu VCLA International Student Awards 2020 organizowanego przez Vienna Center for Logic and Algorithms.

Popularyzacja nauki. Przez wiele lat habilitant był zaangażowany w różne projekty mające na celu popularyzację nauki, w szczególności matematyki i informatyki, w tym Archipelag Matematyki, MatFizChem PW, MiNI Akademia Matematyki i wiele innych.

7 Bibliografia

[1] Tara Abrishami, Maria Chudnovsky, Cemil Dibek, Sepehr Hajebi, Paweł Rzążewski, Sophie Spirkl, and Kristina Vušković. Induced subgraphs and tree decompositions II. Toward walls and their line graphs in graphs of bounded degree. *CoRR*, abs/2108.01162, 2021.

[2] Tara Abrishami, Maria Chudnovsky, Marcin Pilipczuk, Paweł Rzążewski, and Paul D. Seymour. Induced subgraphs of bounded treewidth and the container method. In Dániel Marx, editor, *Proceedings of the 2021 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2021, Virtual Conference, January 10 - 13, 2021*, pages 1948–1964. SIAM, 2021.

[3] V.E. Alekseev. The effect of local constraints on the complexity of determination of the graph independence number. *Combinatorial-algebraic methods in applied mathematics*, pages 3–13, 1982. (in Russian).

[4] Vladimir E. Alekseev. Polynomial algorithm for finding the largest independent sets in graphs without forks. *Discrete Applied Mathematics*, 135(1–3):3–16, 2004.

[5] Gábor Bacsó, Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, Marcin Pilipczuk, Zsolt Tuza, and Erik Jan van Leeuwen. Subexponential-time algorithms for maximum independent set in P_t -free and broom-free graphs. *Algorithmica*, 81(2):421–438, 2019.

[6] Csaba Biró, Édouard Bonnet, Dániel Marx, Tillmann Miltzow, and Paweł Rzążewski. Fine-grained complexity of coloring unit disks and balls. *J. Comput. Geom.*, 9(2):47–80, 2018.

[7] Hans L. Bodlaender and Arie M. C. A. Koster. Combinatorial optimization on graphs of bounded treewidth. *Comput. J.*, 51(3):255–269, May 2008.

[8] Jan Bok, Jiří Fiala, Nikola Jedličková, Jan Kratochvíl, and Paweł Rzążewski. List covering of regular multigraphs. In Cristina Bazgan and Henning Fernau, editors, *Combinatorial Algorithms - 33rd International Workshop, IWOCA 2022, Trier, Germany, June 7-9, 2022, Proceedings*, volume 13270 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 228–242. Springer, 2022.

[9] Marthe Bonamy, Édouard Bonnet, Nicolas Bousquet, Pierre Charbit, Panos Giannopoulos, Eun Jung Kim, Paweł Rzążewski, Florian Sikora, and Stéphan Thomassé. EPTAS and subexponential algorithm for Maximum Clique on disk and unit ball graphs. *J. ACM*, 68(2):9:1–9:38, 2021.

[10] Marthe Bonamy, Edouard Bonnet, Nicolas Bousquet, Pierre Charbit, and Stéphan Thomassé. EPTAS for Max Clique on disks and unit balls. In Mikkel Thorup, editor, *59th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2018, Paris, France, October 7-9, 2018*, pages 568–579. IEEE Computer Society, 2018.

[11] Marthe Bonamy, Nicolas Bousquet, Michał Pilipczuk, Paweł Rzążewski, Stéphan Thomassé, and Bartosz Walczak. Degeneracy of P_t-free and $C_{>t}$-free graphs with no large complete bipartite subgraphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 152:353–378, 2022.

[12] J. Adrian Bondy, Zbigniew Lonc, and Paweł Rzążewski. Constructing optimal k-radius sequences. *SIAM J. Discret. Math.*, 30(1):452–464, 2016.

[13] Édouard Bonnet, Panos Giannopoulos, Eun Jung Kim, Paweł Rzążewski, and Florian Sikora. QPTAS and subexponential algorithm for Maximum Clique on disk graphs. In Bettina Speckmann and Csaba D. Tóth, editors, *34th International Symposium on Computational Geometry, SoCG 2018, June 11-14, 2018, Budapest, Hungary*, volume 99 of *LIPIcs*, pages 12:1–12:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2018.

[14] Édouard Bonnet, Tillmann Miltzow, and Paweł Rzążewski. Complexity of token swapping and its variants. *Algorithmica*, 80(9):2656–2682, 2018.

[15] Édouard Bonnet and Paweł Rzążewski. Optimality program in segment and string graphs. *Algorithmica*, 81(7):3047–3073, 2019.

[16] Édouard Bonnet, Paweł Rzążewski, and Florian Sikora. Designing RNA secondary structures is hard. *J. Comput. Biol.*, 27(3):302–316, 2020.

[17] Flavia Bonomo, Maria Chudnovsky, Peter Maceli, Oliver Schaudt, Maya Stein, and Mingxian Zhong. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices. *Comb.*, 38(4):779–801, 2018.

[18] Bartłomiej Bosek, Sebastian Czerwiński, Jarosław Grytczuk, and Paweł Rzążewski. Harmonious coloring of uniform hypergraphs. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 10(1):73–87, 2016.

[19] Valentin E. Brimkov, Konstanty Junosza-Szaniawski, Sean Kafer, Jan Kratochvíl, Martin Pergel, Paweł Rzążewski, Matthew Szczepankiewicz, and Joshua Terhaar. Homothetic polygons and beyond: Maximal cliques in intersection graphs. *Discret. Appl. Math.*, 247:263–277, 2018.

[20] Hubie Chen, Bart M. P. Jansen, Karolina Okrasa, Astrid Pieterse, and Paweł Rzążewski. Sparsification lower bounds for List H-Coloring. *ACM Trans. Comput. Theory*, (to appear), 2023.

[21] Maria Chudnovsky, Shenwei Huang, Paweł Rzążewski, Sophie Spirkl, and Mingxian Zhong. Complexity of C_k-coloring in hereditary classes of graphs. *Inf. Comput.*, 292, 2023.

[22] Maria Chudnovsky, Jason King, Michał Pilipczuk, Paweł Rzążewski, and Sophie Spirkl. Finding large H-colorable subgraphs in hereditary graph classes. *SIAM J. Discret. Math.*, 35(4):2357–2386, 2021.

[23] Maria Chudnovsky, Neeldhara Misra, Daniël Paulusma, Oliver Schaudt, and Akanksha Agrawal. Vertex Partitioning in Graphs: From Structure to Algorithms (Dagstuhl Seminar 22481). *Dagstuhl Reports*, 12(11):109–123, 2023.

[24] Maria Chudnovsky, Daniël Paulusma, and Oliver Schaudt. Graph Colouring: from Structure to Algorithms (Dagstuhl Seminar 19271). *Dagstuhl Reports*, 9(6):125–142, 2019.

[25] Maria Chudnovsky, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Stéphan Thomassé. Quasi-polynomial time approximation schemes for the Maximum Weight Independent Set problem in H-free graphs. *CoRR*, abs/1907.04585, 2019.

[26] Maria Chudnovsky, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Stéphan Thomassé. Quasi-polynomial time approximation schemes for the Maximum Weight Independent Set problem in H-free graphs. In *Proceedings of the Fourteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pages 2260–2278. SIAM, 2020.

[27] Maria Chudnovsky and Paul D. Seymour. The three-in-a-tree problem. *Comb.*, 30(4):387–417, 2010.

[28] Joanna Chybowska-Sokół, Konstanty Junosza-Szaniawski, and Paweł Rzążewski. $L(2,1)$-labeling of disk intersection graphs. *Discret. Appl. Math.*, 277:71–81, 2020.

[29] Bruno Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. I. Recognizable sets of finite graphs. *Information and Computation*, 85(1):12–75, 1990.

[30] Bruno Courcelle and Stephan Olariu. Upper bounds to the clique width of graphs. *Discret. Appl. Math.*, 101(1-3):77–114, 2000.

[31] Marek Cygan, Dániel Marx, Marcin Pilipczuk, and Michał Pilipczuk. Hitting forbidden subgraphs in graphs of bounded treewidth. *Information and Computation*, 256:62 – 82, 2017.

[32] Marek Cygan, Jesper Nederlof, Marcin Pilipczuk, Michal Pilipczuk, Johan M. M. van Rooij, and Jakub Onufry Wojtaszczyk. Solving connectivity problems parameterized by treewidth in single exponential time. In Rafail Ostrovsky, editor, *IEEE 52nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2011, Palm Springs, CA, USA, October 22-25, 2011*, pages 150–159. IEEE Computer Society, 2011.

[33] Konrad K. Dabrowski, Carl Feghali, Matthew Johnson, Giacomo Paesani, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski. On cycle transversals and their connected variants in the absence of a small linear forest. *Algorithmica*, 82(10):2841–2866, 2020.

[34] Konrad K. Dabrowski, Tomáš Masařík, Jana Novotná, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski. Clique-width: Harnessing the power of atoms. In Isolde Adler and Haiko Müller, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 46th International Workshop, WG 2020, Leeds, UK, June 24-26, 2020, Revised Selected Papers*, volume 12301 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 119–133. Springer, 2020.

[35] Dariusz Dereniowski, Dorota Osula, and Paweł Rzążewski. Finding small-width connected path decompositions in polynomial time. *Theor. Comput. Sci.*, 794:85–100, 2019.

[36] Michał Dębski, Zbigniew Lonc, Karolina Okrasa, Marta Piecyk, and Paweł Rzążewski. Computing homomorphisms in hereditary graph classes: The peculiar case of the 5-wheel and graphs with no long claws. In Sang Won Bae and Heejin Park, editors, *33rd International Symposium on Algorithms and Computation, ISAAC 2022, December 19-21, 2022, Seoul, Korea*, volume 248 of *LIPIcs*, pages 14:1–14:16. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.

[37] Michał Dębski, Zbigniew Lonc, and Paweł Rzążewski. Harmonious and achromatic colorings of fragmentable hypergraphs. *Eur. J. Comb.*, 66:60–80, 2017.

[38] Michał Dębski, Zbigniew Lonc, and Paweł Rzążewski. Sequences of radius k for complete bipartite graphs. *Discret. Appl. Math.*, 225:51–63, 2017.

[39] Michał Dębski, Zbigniew Lonc, and Paweł Rzążewski. Achromatic and harmonious colorings of circulant graphs. *J. Graph Theory*, 87(1):18–34, 2018.

[40] Michał Dębski, Marta Piecyk, and Paweł Rzążewski. Faster 3-coloring of small-diameter graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 36(3):2205–2224, 2022.

[41] Michael Gene Dobbins, Linda Kleist, Tillmann Miltzow, and Paweł Rążewski. Completeness for the complexity class $\forall\exists\mathbb{R}$ and area-universality. *Discrete Comput. Geom.*, 2022.

[42] Pavel Dvořák, Andreas Emil Feldmann, Ashutosh Rai, and Paweł Rzążewski. Parameterized inapproximability of Independent Set in H-free graphs. *Algorithmica*, 85(4):902–928, 2023.

[43] Pavel Dvořák, Tomáš Masařík, Jana Novotná, Monika Krawczyk, Paweł Rzążewski, and Aneta Żuk. List locally surjective homomorphisms in hereditary graph classes. In Sang Won Bae and Heejin Park, editors, *33rd International Symposium on Algorithms and Computation, ISAAC 2022, December 19-21, 2022, Seoul, Korea*, volume 248 of *LIPIcs*, pages 30:1–30:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.

[44] Martin Dyer and Catherine Greenhill. The complexity of counting graph homomorphisms. *Random Structures & Algorithms*, 17(3-4):260–289, 2000.

[45] Keith Edwards and Paweł Rzążewski. Complete colourings of hypergraphs. *Discret. Math.*, 343(2):111673, 2020.

[46] László Egri, Dániel Marx, and Paweł Rzążewski. Finding list homomorphisms from bounded-treewidth graphs to reflexive graphs: a complete complexity characterization. In Rolf Niedermeier and Brigitte Vallée, editors, *35th Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2018, February 28 to March 3, 2018, Caen, France*, volume 96 of *LIPIcs*, pages 27:1–27:15. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2018.

[47] Thomas Emden-Weinert, Stefan Hougardy, and Bernd Kreuter. Uniquely colourable graphs and the hardness of colouring graphs of large girth. *Comb. Probab. Comput.*, 7(4):375–386, 1998.

[48] William S. Evans, Paweł Rzążewski, Noushin Saeedi, Chan-Su Shin, and Alexander Wolff. Representing graphs and hypergraphs by touching polygons in 3D. In Daniel Archambault and Csaba D. Tóth, editors, *Graph Drawing and Network Visualization - 27th International Symposium, GD 2019, Prague, Czech Republic, September 17-20, 2019, Proceedings*, volume 11904 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 18–32. Springer, 2019.

[49] Tomás Feder and Pavol Hell. List homomorphisms to reflexive graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 72(2):236 – 250, 1998.

[50] Tomás Feder, Pavol Hell, and Jing Huang. List homomorphisms and circular arc graphs. *Combinatorica*, 19(4):487–505, 1999.

[51] Tomás Feder, Pavol Hell, and Jing Huang. Bi-arc graphs and the complexity of list homomorphisms. *Journal of Graph Theory*, 42(1):61–80, 2003.

[52] Jakub Gajarský, Lars Jaffke, Paloma T. Lima, Jana Novotná, Marcin Pilipczuk, Paweł Rzążewski, and Uéverton S. Souza. Taming graphs with no large creatures and skinny ladders. In Shiri Chechik, Gonzalo Navarro, Eva Rotenberg, and Grzegorz Herman, editors, *30th Annual European Symposium on Algorithms, ESA 2022, September 5-9, 2022, Berlin/Potsdam, Germany*, volume 244 of *LIPIcs*, pages 58:1–58:8. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.

[53] Valentin Garnero, Konstanty Junosza-Szaniawski, Mathieu Liedloff, Pedro Montealegre, and Paweł Rzążewski. Fixing improper colorings of graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 711:66–78, 2018.

[54] Peter Gartland and Daniel Lokshtanov. Dominated minimal separators are tame (nearly all others are feral). *CoRR*, abs/2007.08761, 2020.

[55] Peter Gartland and Daniel Lokshtanov. Independent set on P_k-free graphs in quasi-polynomial time. In Sandy Irani, editor, *61st IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2020, Durham, NC, USA, November 16-19, 2020*, pages 613–624. IEEE, 2020.

[56] Peter Gartland, Daniel Lokshtanov, Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Paweł Rzążewski. Finding large induced sparse subgraphs in $C_{>t}$-free graphs in quasipolynomial time. In Samir Khuller and Virginia Vassilevska Williams, editors, *STOC '21: 53rd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, Virtual Event, Italy, June 21-25, 2021*, pages 330–341. ACM, 2021.

[57] Petr A. Golovach, Matthew Johnson, Daniël Paulusma, and Jian Song. A survey on the computational complexity of coloring graphs with forbidden subgraphs. *J. Graph Theory*, 84(4):331–363, 2017.

[58] Petr A. Golovach, Daniël Paulusma, and Jian Song. Closing complexity gaps for coloring problems on H-free graphs. *Inf. Comput.*, 237:204–214, 2014.

[59] Carla Groenland, Karolina Okrasa, Paweł Rzążewski, Alex D. Scott, Paul D. Seymour, and Sophie Spirkl. H-colouring P_t-free graphs in subexponential time. *Discret. Appl. Math.*, 267:184–189, 2019.

[60] Andrzej Grzesik, Tereza Klimošová, Marcin Pilipczuk, and Michał Pilipczuk. Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs. *ACM Trans. Algorithms*, 18(1):4:1–4:57, 2022.

[61] Pavol Hell and Jaroslav Nešetřil. The core of a graph. *Discrete Mathematics*, 109(1-3):117–126, 1992.

[62] Pavol Hell and Jaroslav Nešetřil. On the complexity of H-coloring. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 48(1):92–110, 1990.

[63] Chính T. Hoàng, Marcin Kamiński, Vadim V. Lozin, Joe Sawada, and Xiao Shu. Deciding k-colorability of P_5-free graphs in polynomial time. *Algorithmica*, 57(1):74–81, 2010.

[64] Ian Holyer. The NP-completeness of edge-coloring. *SIAM J. Comput.*, 10(4):718–720, 1981.

[65] Shenwei Huang. Improved complexity results on k-coloring P_t-free graphs. *Eur. J. Comb.*, 51:336–346, 2016.

[66] Russell Impagliazzo and Ramamohan Paturi. On the complexity of k-SAT. *Journal of Computer and System Sciences*, 62(2):367 – 375, 2001.

[67] Russell Impagliazzo, Ramamohan Paturi, and Francis Zane. Which problems have strongly exponential complexity? *J. Comput. Syst. Sci.*, 63(4):512–530, 2001.

[68] Konstanty Junosza-Szaniawski, Jan Kratochvíl, Mathieu Liedloff, Peter Rossmanith, and Paweł Rzążewski. Fast exact algorithm for $L(2,1)$-labeling of graphs. *Theor. Comput. Sci.*, 505:42–54, 2013.

[69] Konstanty Junosza-Szaniawski, Jan Kratochvíl, Mathieu Liedloff, and Paweł Rzążewski. Determining the $L(2,1)$-span in polynomial space. *Discret. Appl. Math.*, 161(13-14):2052–2061, 2013.

[70] Konstanty Junosza-Szaniawski, Dariusz Nogalski, and Paweł Rzążewski. Exact and approximation algorithms for sensor placement against DDoS attacks. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 32(1):35–49, 2022.

[71] Konstanty Junosza-Szaniawski and Paweł Rzążewski. On the complexity of exact algorithm for $L(2,1)$-labeling of graphs. *Inf. Process. Lett.*, 111(14):697–701, 2011.

[72] Konstanty Junosza-Szaniawski and Paweł Rzążewski. On the number of 2-packings in a connected graph. *Discret. Math.*, 312(23):3444–3450, 2012.

[73] Konstanty Junosza-Szaniawski and Paweł Rzążewski. An exact algorithm for the generalized list T-coloring problem. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 16(3):77–94, 2014.

[74] Konstanty Junosza-Szaniawski, Paweł Rzążewski, Joanna Sokół, and Krzysztof Węsek. Online coloring and $L(2,1)$-labeling of unit disk intersection graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 32(2):1335–1350, 2018.

[75] Krzysztof Kaczmarski, Piotr Przymus, and Paweł Rzążewski. Improving high-performance GPU graph traversal with compression. In Nick Bassiliades, Mirjana Ivanovic, Margita Kon-Popovska, Yannis Manolopoulos, Themis Palpanas, Goce Trajcevski, and Athena Vakali, editors, *New Trends in Database and Information Systems II - Selected papers of the 18th East European Conference on Advances in Databases and Information Systems and Associated Satellite Events, ADBIS 2014 Ohrid, Macedonia, September 7-10, 2014 Proceedings II*, volume 312 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pages 201–214. Springer, 2014.

[76] Krzysztof Kaczmarski and Paweł Rzążewski. Thrust and CUDA in data intensive algorithms. In Mykola Pechenizkiy and Marek Wojciechowski, editors, *New Trends in Databases and Information Systems, Workshop Proceedings of the 16th East European Conference, ADBIS 2012, Poznań, Poland, September 17-21, 2012*, volume 185 of *Advances in Intelligent Systems and Computing*, pages 37–46. Springer, 2012.

[77] Krzysztof Kaczmarski, Paweł Rzążewski, and Albert Wolant. Parallel algorithms constructing the cell graph. *Concurr. Comput. Pract. Exp.*, 29(23), 2017.

[78] Sándor Kisfaludi-Bak, Karolina Okrasa, and Paweł Rzążewski. Computing list homomorphisms in geometric intersection graphs. In Michael A. Bekos and Michael Kaufmann, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 48th International Workshop, WG 2022, Tübingen, Germany, June 22-24, 2022, Revised Selected Papers*, volume 13453 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 313–327. Springer, 2022.

[79] Mateusz Krzyziński, Szymon Tur, and Paweł Rzążewski. Coloring squares of planar graphs with small maximum degree. *Discuss. Math. - Graph Theory*, (to appear), 2023.

[80] Benoit Larose. Families of strongly projective graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 22:271–292, 2002.

[81] Benoit Larose and Claude Tardif. Strongly rigid graphs and projectivity. *Multiple-Valued Logic*, 7:339–361, 2001.

[82] Daniel Leven and Zvi Galil. NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs. *J. Algorithms*, 4(1):35–44, 1983.

[83] Daniel Lokshtanov, Dániel Marx, and Saket Saurabh. Known algorithms on graphs of bounded treewidth are probably optimal. *ACM Trans. Algorithms*, 14(2):13:1–13:30, 2018.

[84] Daniel Lokshtanov, Martin Vatshelle, and Yngve Villanger. Independent Set in P_5-free graphs in polynomial time. In *Proceedings of the Twenty-Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2014*, pages 570–581. SIAM, 2014.

[85] Zbigniew Lonc, Paweł Naroski, and Paweł Rzążewski. Tight Euler tours in uniform hypergraphs - computational aspects. *Discret. Math. Theor. Comput. Sci.*, 19(3), 2017.

[86] Vadim V. Lozin and Martin Milanič. A polynomial algorithm to find an independent set of maximum weight in a fork-free graph. *J. Discrete Algorithms*, 6(4):595–604, 2008.

[87] Tomasz Łuczak and Jaroslav Nešetřil. Note on projective graphs. *Journal of Graph Theory*, 47(2):81–86, 2004.

[88] Konrad Majewski, Tomáš Masařík, Jana Novotná, Karolina Okrasa, Marcin Pilipczuk, Paweł Rzążewski, and Marek Sokołowski. Max Weight Independent Set in graphs with no long claws: An analog of the Gyárfás' path argument. In Mikołaj Bojańczyk, Emanuela Merelli, and David P. Woodruff, editors, *49th International Colloquium on Automata, Languages, and Programming, ICALP 2022, July 4-8, 2022, Paris, France*, volume 229 of *LIPIcs*, pages 93:1–93:19. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2022.

[89] Tomáš Masařík, Irene Muzi, Marcin Pilipczuk, Paweł Rzążewski, and Manuel Sorge. Packing directed cycles quarter- and half-integrally. *Comb.*, 42(Supplement 2):1409–1438, 2022.

[90] Tomáš Masařík, Marcin Pilipczuk, Paweł Rzążewski, and Manuel Sorge. Constant congestion brambles in directed graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 36(2):922–938, 2022.

[91] George B. Mertzios and Paul G. Spirakis. Algorithms and almost tight results for 3-colorability of small diameter graphs. *Algorithmica*, 74(1):385–414, 2016.

[92] George J. Minty. On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 28(3):284–304, 1980.

[93] Natasha Morrison, JD Nir, Sergey Norin, Paweł Rzążewski, and Alexandra Wesolek. Every graph is eventually Turán-good. *J. Comb. Theory, Ser. B*, (accepted), 2023.

[94] Jana Novotná, Karolina Okrasa, Michał Pilipczuk, Paweł Rzążewski, Erik Jan van Leeuwen, and Bartosz Walczak. Subexponential-time algorithms for finding large induced sparse subgraphs. *Algorithmica*, 83(8):2634–2650, 2021.

[95] Karolina Okrasa, Marta Piecyk, and Paweł Rzążewski. Full complexity classification of the list homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. *CoRR*, abs/2006.11155, 2020.

[96] Karolina Okrasa and Paweł Rzążewski. Fine-grained complexity of graph homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. *CoRR*, abs/1906.08371, 2019.

[97] Karolina Okrasa and Paweł Rzążewski. Complexity of the list homomorphism problem in hereditary graph classes. *CoRR*, abs/2010.03393, 2020.

[98] Karolina Okrasa and Paweł Rzążewski. Fine-grained complexity of graph homomorphism problem for bounded-treewidth graphs. In Shuchi Chawla, editor, *Proceedings of the 2020 ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2020, Salt Lake City, UT, USA, January 5-8, 2020*, pages 1578–1590. SIAM, 2020.

[99] Karolina Okrasa and Paweł Rzążewski. Subexponential algorithms for variants of the homomorphism problem in string graphs. *J. Comput. Syst. Sci.*, 109:126–144, 2020.

[100] Giacomo Paesani, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski. Classifying Subset Feedback Vertex Set for H-free graphs. In Michael A. Bekos and Michael Kaufmann, editors, *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science - 48th International Workshop, WG 2022, Tübingen, Germany, June 22-24, 2022, Revised Selected Papers*, volume 13453 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 412–424. Springer, 2022.

[101] Giacomo Paesani, Daniël Paulusma, and Paweł Rzążewski. Feedback Vertex Set and Even Cycle Transversal for H-free graphs: Finding large block graphs. *SIAM J. Discret. Math.*, 36(4):2453–2472, 2022.

[102] Martin Pergel and Paweł Rzążewski. On edge intersection graphs of paths with 2 bends. *Discret. Appl. Math.*, 226:106–116, 2017.

[103] Marta Piecyk and Paweł Rzążewski. Fine-grained complexity of the list homomorphism problem: Feedback vertex set and cutwidth. In Markus Bläser and Benjamin Monmege, editors, *38th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2021, March 16-19, 2021, Saarbrücken, Germany (Virtual Conference)*, volume 187 of *LIPIcs*, pages 56:1–56:17. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021.

[104] Marcin Pilipczuk, Michał Pilipczuk, and Paweł Rzążewski. Quasi-polynomial-time algorithm for Independent Set in P_t-free graphs via shrinking the space of induced paths. In Hung Viet Le and Valerie King, editors, *4th Symposium on Simplicity in Algorithms, SOSA 2021, Virtual Conference, January 11-12, 2021*, pages 204–209. SIAM, 2021.

[105] Bruce A. Reed, Neil Robertson, Paul D. Seymour, and Robin Thomas. Packing directed circuits. *Comb.*, 16(4):535–554, 1996.

[106] Paweł Rzążewski. Exact algorithm for graph homomorphism and locally injective graph homomorphism. *Inf. Process. Lett.*, 114(7):387–391, 2014.

[107] Najiba Sbihi. Algorithme de recherche d'un stable de cardinalite maximum dans un graphe sans etoile. *Discrete Mathematics*, 29(1):53–76, 1980. (in French).

[108] Sophie Spirkl, Maria Chudnovsky, and Mingxian Zhong. Four-coloring P_6-free graphs. In Timothy M. Chan, editor, *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, SODA 2019, San Diego, California, USA, January 6-9, 2019*, pages 1239–1256. SIAM, 2019.

[109] Johan M. M. van Rooij, Hans L. Bodlaender, and Peter Rossmanith. Dynamic programming on tree decompositions using generalised fast subset convolution. In Amos Fiat and Peter Sanders, editors, *Algorithms - ESA 2009, 17th Annual European Symposium, Copenhagen, Denmark, September 7-9, 2009. Proceedings*, volume 5757 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 566–577. Springer, 2009.