

Autoreferat

1 Imię i nazwisko

Oskar Skibski

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

- 2014 Stopień *doktora nauk matematycznych w zakresie informatyki* przyznany przez Uniwersytet Warszawski
Rozprawa: *Shapley Value for Games with Externalities and Games on Graphs*
Promotorzy: prof. Andrzej Szałas, dr Tomasz Michalak
- 2010 Tytuł *magistra informatyki* przyznany przez Uniwersytet Warszawski
Praca: *Obliczanie wartości Shapleya rozszerzonej do gier koalicyjnych z efektami zewnętrznymi*
Promotorzy: prof. Andrzej Szałas, dr Tomasz Michalak

3 Zatrudnienie w jednostkach naukowych

od 10.2015: Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

- od 10.2016: adiunkt
- 10.2015 – 09.2016: asystent

07.2014 – 09.2015: Uniwersytet Kiusiu, Japonia

- 10.2014 – 09.2015: Assistant Professor (adiunkt)
- 07.2014 – 09.2014: Research Technician (asystent naukowy)

2018: Universite Paris-Dauphine, Francja

- 06–09.2018 (1 miesiąc): profesor wizytujący

4 Opis osiągnięć

Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pod tytułem

Miary istotności w grupach i sieciach

- [A] Oskar Skibski, Tomasz Michalak, Talal Rahwan.
Axiomatic Characterization of Game-Theoretic Centrality.
Journal of Artificial Intelligence Research 62: 33–68, 2018.
 - Wersja konferencyjna: AAAI-17.

- [B] Oskar Skibski, Talal Rahwan, Tomasz Michalak, Makoto Yokoo.
Attachment Centrality: Measure for Connectivity in Networks.
Artificial Intelligence 274: 151–179, 2019.
 - Wersja konferencyjna: AAMAS-16.

- [C] Oskar Skibski, Takamasa Suzuki, Tomasz Grabowski, Yuko Sakurai, Tomasz Michalak, Makoto Yokoo.
Measuring power in coalitional games with friends, enemies and allies.
Artificial Intelligence 313: 103792, 2022.
 - Wersja konferencyjna: IJCAI-15 (*A Pseudo-Polynomial Algorithm for Computing Power Indices in Graph-Restricted Weighted Voting Games*) i AAMAS-20 (*Signed Graph Games: Coalitional Games with Friends, Enemies and Allies*).

- [D] Oskar Skibski.
Closeness centrality via the Condorcet principle.
Social Networks 74: 13–18, 2023.

- [E] Tomasz Wąs, Oskar Skibski.
Axiomatic characterization of PageRank.
Artificial Intelligence 318: 103900, 2023.
 - Wersja konferencyjna: IJCAI-18.

- [F] Oskar Skibski.
Complexity of Computing the Shapley Value in Partition Function Form Games.
Journal of Artificial Intelligence Research 77: 1237–1274, 2023.
 - Wersja konferencyjna: AAAI-20.

4.1 Wstęp

Podstawą złożonych systemów jest interakcja i współpraca niezależnych jednostek. Zarówno gdy rozpatrujemy pracowników firmy, strony internetowe tworzące sieć WWW, czy cechy w algorytmach uczenia maszynowego, naturalnym zadaniem jest ocena znaczenia

poszczególnych elementów. Temat ten jest szeroko badany w informatyce, ekonomii, fizyce i socjologii.

W naszych badaniach skupiamy się na dwóch klasycznych modelach interakcji: modelu *sieciowym* i *teoriogrowym*. W podejściu sieciowym elementy są reprezentowane przez wierzchołki, a interakcje między nimi przez łączące je krawędzie. Rolę i wzajemne zależności między elementami można badać za pomocą narzędzi opracowanych w teorii sieci, zwłaszcza w analizie sieci społecznych. Działem teorii sieci, który skupia się na ocenie znaczenia elementów wyłącznie na podstawie ich pozycji w sieci, jest *analiza centralności*.

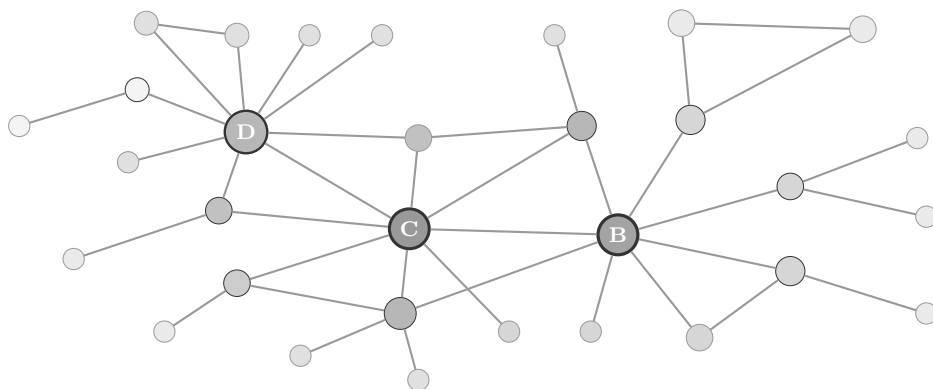
Miary centralności są używane do identyfikowania kluczowych aktorów w sieciach społecznych [68], krytycznych wierzchołków w sieciach transportowych [20], wskazywania genów odpowiedzialnych za raka w danych proteomicznych [23], a także do odnajdywania instytucji o kluczowym znaczeniu w sieciach finansowych [3]. Jednym z najważniejszych zastosowań w informatyce jest wykorzystanie struktury sieci WWW do opracowania rankingu stron internetowych w wyszukiwarce Google [43]. Zaproponowany w tym celu PageRank jest obecnie jedną z najczęściej używanych miar centralności.

W podejściu teoriogrowym opartym na teorii gier koalicyjnych, elementy są nazywane *graczami*, a każdej grupie elementów, nazywanej *koalicją*, jest przypisana wartość reprezentująca jej wypłatę lub bardziej ogólnie – jej jakość. Załóżmy, że wszyscy gracze decydują się współpracować i tworzą jedną koalicję. Jak powinni podzielić się wspólnie osiągniętą wypłatą? Innymi słowy, jakiej wypłaty może oczekiwać gracz uczestniczący w grze? Te pytania sprowadzają się do oceny wkładu każdego gracza do ogólnego wyniku gry, co stanowi główny temat badań w teorii gier koalicyjnych.

Gry koalicyjne są szeroko stosowane w ekonomii (m.in. do badania rynków oligopolistycznych [71]), a także w naukach politycznych (m.in. do analizy zdolności koalicyjnych partii [55]). W informatyce stosowane są w problemie alokacji zadań [56], badaniu koalicji klientów na rynku elektronicznym [64], a także w analizie współpracy w sieciach energetycznych [12]. Ważnym nowym zastosowaniem w obszarze uczenia maszynowego jest algorytm SHAP, który służy do określenia wpływu pojedynczej cechy na wynik procesu uczenia maszynowego [29]. Algorytm opiera się na wartości Shapleya [54] – jednej z najbardziej znanych koncepcji rozwiązania w teorii gier koalicyjnych.

Załączona kolekcja prac skupia się na miarach istotności w sieciach (czyli miarach centralności) i w grach koalicyjnych (czyli koncepcjach rozwiązania). Prace [D] i [E] dotyczą klasycznych miar centralności, podczas gdy prace [C] i [F] dotyczą koncepcji rozwiązania w grach koalicyjnych. Z kolei prace [A] i [B] łączą obie dziedziny, badając miary centralności oparte na teorii gier koalicyjnych. Głównym celem tych prac jest pogłębienie wiedzy na temat tych miar i stworzenie solidnych podstaw teoretycznych dla ich stosowania.

Najpierw omówimy nasze wyniki dotyczące analizy centralności. Do tej pory zaproponowano ponad sto miar centralności, które oceniają wierzchołki w sieci na podstawie ich różnych cech. Przykładami są centralność stopnia (ang. *degree centrality*), która ocenia wierzchołki na podstawie liczby incydentnych z nimi krawędzi, centralność bliskości (ang. *closeness centrality*), która mierzy odwrotność średniej odległości od innych wierzchołków oraz centralność pośrednictwa (ang. *betweenness centrality*), mierząca proporcję



Rysunek 1: Rozmiar wierzchołka odpowiada centralności stopnia. Intensywność koloru odpowiada centralności bliskości. Grubość obramowania odpowiada centralności pośrednictwa. Wierzchołek D jest najważniejszy według centralności stopnia, wierzchołek C – według centralności bliskości, a wierzchołek B – według centralności pośrednictwa.

najkrótszych ścieżek między dowolnymi dwoma wierzchołkami, które przechodzą przez analizowany wierzchołek (zobacz Rys. 1). Poza tymi trzema klasycznymi miarami inne ważne przykłady to centralność wektora własnego (ang. *eigenvector centrality*) [10] oraz wspomniany wcześniej PageRank [43], które oparte są na idei, że wierzchołek jest ważny, jeśli jest połączony z innymi ważnymi wierzchołkami.

W związku z mnogością miar centralności zaproponowanych w literaturze, wybór odpowiedniej miary dla danego zastosowania stanowi wyzwanie. Wybór ten jest często dokonywany na podstawie intuicyjnej interpretacji miary, jej popularności lub sukcesu w innych typach sieci. Jednak takie powody ciężko uznać za podejście naukowe i mogą one prowadzić do błędnych wyników oraz nieprawidłowych wniosków. Dlatego w ostatnich latach wzmocnione zostały wysiłki mające na celu uporządkowanie przestrzeni miar centralności, aby umożliwić właściwy wybór miary [8, 7, 52].

W tym nurcie badań szczególnie ważne jest *podejście aksjomatyczne*. Podejście aksjomatyczne polega na analizowaniu prostych własności, nazywanych *aksjomatami*, które pozwalają systematycznie badać różnice i podobieństwa między miarami centralności. Jeśli aksjomaty są starannie wybrane, mogą one stanowić aksjomatyczną charakteryzację: można udowodnić, że istnieje unikalna miara centralności, która je spełnia. W ten sposób, zaproponowano aksjomatyczne charakteryzacje m.in. miary beta (ang. *beta measure*) [65, 66], centralności wektora własnego (ang. *eigenvector centrality*) [25], centralności Katza [16, 69], indeksu Seeleya [1, 44] i centralności harmonicznej i zanikania (ang. *harmonic/decay centralities*) [19]. Takie wyniki mają znaczenie zarówno teoretyczne, jak i praktyczne, ponieważ własności, którymi scharakteryzowano miarę centralności, dostarczają jasnych wskazań, czy jest ona odpowiednia dla konkretnego zastosowania.

W naszych badaniach stworzyliśmy kilka aksjomatycznych charakteryzacji miar i klas miar. W pracy [D] identyfikujemy intuicyjną własność, nazwaną *porównaniem większościowym* (ang. *majority comparison*), która jest spełniona przez centralność bliskości.

Podczas gdy centralność bliskości jest jedną z najstarszych i najpopularniejszych miar centralności, wcześniej nie były znane cechy odróżniające ją od wielu podobnych miar proponowanych w literaturze. Udowadniamy, że ta własność jednoznacznie charakteryzuje centralność bliskości w klasie centralności opartych na odległości.

W pracy [E] przedstawiamy aksjomatyczną charakteryzację PageRanka. Chociaż istnieje kilka aksjomatycznych charakteryzacji uproszczonej wersji PageRanka, zwanej indeksem Seeleya, nasza aksjomatyzacja jest pierwszą charakteryzacją PageRanka w pełnej, ogólnej postaci. Nasza charakteryzacja składa się z sześciu aksjomatów: pięć z nich to aksjomaty niezmiennicze, które określają, że centralność wierzchołków nie zmienia się podczas pewnych operacji w grafie, a szósty aksjomat definiuje centralność w prostym przypadku brzegowym.

Ponadto analizujemy teoriogrowe miary centralności, które są miarami centralności zdefiniowanymi przy użyciu gier koalicyjnych. Idea polega na ocenie każdej grupy wierzchołków w kontekście struktury grafu, a następnie użyciu koncepcji rozwiązania z teorii gier koalicyjnych, na przykład wartości Shapleya, w celu oceny roli każdego wierzchołka w grafie. Teoriogrowe miary centralności były z powodzeniem stosowane w analizie ważności genów w sieciach biologicznych [37], w identyfikowaniu kluczowych graczy w sieciach terrorystycznych [27], a także we wskazaniu najistotniejszych urzędzeń w sieciach komunikacyjnych [6].

W pracy [B], wykorzystując podejście aksjomatyczne, proponujemy nową miarę centralności o nazwie *centralność łączenia* (ang. *attachment centrality*). Centralność łączenia odzwierciedla rolę wierzchołka w utrzymaniu grafu spójnym. Pokazujemy, że centralność łączenia jest jedyną miarą centralności, która spełnia kilka pożądaných własności: Lokalność (ang. *Locality*), Normalizację (ang. *Normalization*), Sprawiedliwość (ang. *Fairness*) i Zysk-Stratę (ang. *Gain-Loss*). Niestety, obliczanie centralności łączenia jest trudne: pokazujemy, że obliczenie centralności łączenia jednego wierzchołka jest problemem #P-zupełnym. Jednak w niektórych klasach grafów wartości tej miary można obliczyć w czasie wielomianowym. Jak pokazujemy, jest to możliwe w przypadku grafów chordalnych. Konstruujemy także algorytm heurystyczny oparty na dekompozycji grafu względem klik rozcinających.

W pracy [A] tworzymy aksjomatyczną charakteryzację całej klasy teoriogrowych miar centralności. Udowadniamy, że każdą miarę centralności można uzyskać stosując to podejście. Jednak przyjęcie naturalnych założeń dotyczących stosowanych gier (np. założenie, że wartość koalicji zależy tylko od podgrafu przez nią indukowanego) pozwala na charakteryzację teoriogrowych miar centralności za pomocą aksjomatów Sprawiedliwości i Zbalansowanych Kontrybucji (ang. *Balanced Contributions*): aksjomatów zaproponowanych przez Myersona [38, 40] w kontekście gier koalicyjnych.

Przejdźmy teraz do wyników dotyczących gier koalicyjnych. Standardowy model gier koalicyjnych opiera się na dwóch założeniach. Po pierwsze, wartość koalicji nie zależy od koalicji tworzonych przez innych. Po drugie, wszystkie koalicje są możliwe i uważane za równie prawdopodobne. Te założenia nie mają jednak zastosowania w wielu rzeczywistych scenariuszach. W związku z tym w pracach [C] i [F] rozważamy rozszerzenia tego modelu.

Po pierwsze, rozważamy *gry z efektami zewnętrznymi*. W tym modelu wartość koalicji zależy nie tylko od jej członków, ale także od podziału jaki tworzą inni gracze. W literaturze zaproponowano wiele rozszerzeń wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi. W pracy [F] badamy złożoność obliczania tych rozszerzeń w grach zdefiniowanych z użyciem dwóch związanych reprezentacjach: zanurzonych sieciach wkładów marginalnych (ang. *embedded MC-nets*) i ważonych sieciach wkładów marginalnych (ang. *weighted MC-nets*).

Po drugie, rozważamy *gry grafowe* zaproponowane przez Myersona [38], w których graf ogranicza komunikację i współpracę między graczami. Konkretnie tylko koalicje, które indukują spójny podgraf, uznawane są za możliwe. W pracy [C] rozszerzamy ten model na grafy znakowane (ang. *signed graph*), w których każda krawędź jest etykietowana plusem lub minusem. Z wykorzystaniem podejścia aksjomatycznego rozszerzamy wartość Myersona, klasyczną koncepcję rozwiązania do tego modelu. Uzyskujemy również kilka wyników algorytmicznych dla wartości Myersona, w tym pseudowielomianowy algorytm dla znakowanych gier grafowych, w których gra jest grą głosowania ważonego, a graf ma ograniczoną szerokość drzewiastą.

Organizacja pozostałej części opisu prezentowanej kolekcji prac jest następująca. W Sekcji 4.2 przedstawiamy wyniki dotyczące klasycznych miar centralności, a mianowicie centralności bliskości i PageRanka. W Sekcji 4.3 rozważamy wyniki dotyczące miar centralności opartych na teorii gier koalicyjnych. W Sekcji 4.4 przedstawiamy wyniki dotyczące koncepcji rozwiązań w grach koalicyjnych z efektami zewnętrznymi i w znakowych grach grafowych. Podsumowanie znajduje się w Sekcji 4.5.

4.2 Klasyczne miary centralności ([D] i [E])

W tej sekcji prezentujemy nasze wyniki dotyczące klasycznych miar centralności.

Zacznijmy od kilku podstawowych definicji. Będziemy skupiać się głównie na (nie skierowanych, nieważonych) prostych grafach. *Graf* to para $G = (V, E)$, gdzie V to zbiór wierzchołków, a E to zbiór krawędzi, czyli nieuporządkowanych par wierzchołków, $\{u, v\} \subseteq V$. Graf jest *spójny*, jeżeli istnieje w nim ścieżka pomiędzy dowolnymi dwoma wierzchołkami. Przez $G \pm e$, $G \pm E'$ będziemy oznaczać grafy uzyskane z G przez dodanie/usunięcie krawędzi e lub zbioru krawędzi E' .

Miara centralności F to funkcja, która dla dowolnego grafu $G = (V, E)$ i każdego wierzchołka $v \in V$ przypisuje wartość rzeczywistą; tę wartość oznaczamy przez $F_v(G) \in \mathbb{R}$. Im wyższa jest ta wartość, tym ważniejszy lub bardziej centralny jest wierzchołek.

Wspomniane standardowe miary centralności definiujemy następująco [18]:

Centralność stopnia (ang. *degree centrality*) $D_v(G) = |\{u \in V : \{u, v\} \in E\}|$ dla każdego $G = (V, E), v \in V$.

Centralność bliskości (ang. *closeness centrality*) $C_v(G) = 1 / (\sum_{u \in V} \text{dist}(u, v))$ dla każdego spójnego $G = (V, E), v \in V$, gdzie $\text{dist}(u, v)$ to odległość między wierzchołkami u i v w grafie G .

Centralność pośrednictwa (ang. *betweenness centrality*) $B_v(G) = \sum_{s,t \in V \setminus \{v\}} \frac{\sigma_{st}(v)}{\sigma_{st}}$
dla każdego $G = (V, E)$, $v \in V$, gdzie $\sigma_{st}(v)$ to liczba najkrótszych ścieżek od wierzchołka s do t , które przechodzą przez wierzchołek v , a σ_{st} to łączna liczba najkrótszych ścieżek od s do t .

Rozpoczniemy opis naszych wyników od pracy:

- [D] Oskar Skibski.
Closeness centrality via the Condorcet principle.
Social Networks 74: 13–18, 2023.

Tematem tej pracy jest centralność bliskości [4], która jest jedną z pierwszych miar centralności zaproponowanych w literaturze. Centralność bliskości wierzchołka to odwrotność sumy odległości do innych wierzchołków. Naturalnie odzwierciedla ona *centralną* pozycję wierzchołka w sieci. Niektóre z zastosowań centralności bliskości to mierzenie dystansu społecznego pszczół miodnych w odpowiedzi na choroby zakaźne [46], przepływu informacji w sieciach społecznościowych [70] i znaczenia lotnisk w sieci transportu lotniczego [67].

Mimo jej znaczenia i popularności, niewiele wiadomo o tym, co wyróżnia centralność bliskości spośród wielu podobnych miar proponowanych w ciągu ostatnich 70 lat. W szczególności, *centralność harmoniczna* (ang. *harmonic centrality*) zdefiniowana jako suma odwrotności odległości do innych wierzchołków, często jest uważana za naturalne rozszerzenie centralności bliskości na grafy, które mogą być niespójne [14, 48, 8]. Inną dobrze znaną alternatywą jest *centralność zanikania* (ang. *decay centrality*), zaproponowana przez Jacksona [24], w której wierzchołki w odległości k dodają do centralności danego wierzchołka wartość δ^k . Te miary centralności, wraz z centralnością bliskości i stopnia, należą do klasy *centralności opartych na dystansach*.

Aby rozwiązać ten problem używamy w naszej pracy podejścia aksjomatycznego i przedstawiamy charakteryzację centralności bliskości w klasie centralności opartych na dystansach. W tym celu wprowadzamy nowy naturalny aksjomat o nazwie *Porównanie Większościowe* (ang. *Majority Comparison*), inspirowany teorią wyboru społecznego.

Zdefiniujemy *listę dystansów* wierzchołka v jako listę dodatnich liczb naturalnych, która zawiera liczbę wierzchołków na każdej odległości: $A(v) = (a_1, \dots, a_k)$, gdzie $a_i = |\{u \in V : d(u, v) = i\}|$ i $k = \max_u d(u, v)$. Teraz definiujemy klasę centralności opartych na dystansach w następujący sposób:

Centralności oparte na dystansach Miara centralności jest *oparta na dystansach*, jeśli istnieje funkcja dystansów f , taka że $F_v(G) = f(A(v))$, która spełnia:

- (*monotoniczność*) dla każdej pary list dystansów $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_\ell)$ takich, że $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^\ell b_i$ i $\sum_{i=1}^h a_i \geq \sum_{i=1}^h b_i$ dla każdego $1 \leq h \leq k, \ell$ zachodzi $f(a) \geq f(b)$;
- (*spójność*) dla każdej pary list dystansów $a = (a_1, \dots, a_k), b = (b_1, \dots, b_\ell)$ takich, że $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^\ell b_i$ i dla każdego $1 \leq i \leq k, \ell$ zachodzi $f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1}, \dots, a_k) \leq f(b_1, \dots, b_{i-1}, b_i + 1, b_{i+1}, \dots, b_\ell) \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$.

Monotoniczność odzwierciedla ideę, że funkcja dystansów powinna zwracać wyższe wartości dla mniejszych odległości. W szczególności monotoniczność implikuje $f(2, 1) \geq f(1, 2)$ (posiadanie dwóch sąsiadów i jednego wierzchołka w odległości 2 nie jest gorsze niż posiadanie jednego sąsiada i dwóch wierzchołków w odległości 2). Z kolei spójność to naturalne wymaganie, które mówi, że porównanie między dwoma listami dystansów nie zmieni się, jeśli dodamy te same wartości do obu list. W terminach grafów, jeśli wierzchołek v jest bardziej centralny w jednym grafie niż w drugim, to nadal będzie bardziej centralny, jeśli dodamy nowy wierzchołek w odległości i od v w obu grafach, gdzie i nie jest większe od maksymalnej odległości od v w tych grafach.

Wspomniane wcześniej centralności oparte na dystansach mogą być zdefiniowane jako $F_v(G) = f(A(v))$ dla następujących funkcji dystansów (spełniających monotoniczność i spójność):

| Miara centralności F | Funkcja dystansów f |
|---|--|
| Centralność bliskości | $f(a_1, \dots, a_k) = 1/(\sum_{i=1}^k a_i)$ |
| Centralność harmoniczna | $f(a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k 1/a_i$ |
| Centralność zanikania | $f(a_1, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^k a_i \delta^i$ dla $\delta \in (0, 1)$ |
| Centralność stopnia | $f(a_1, \dots, a_k) = a_1$ |
| Ekscentryczność (ang. <i>eccentricity</i>) | $f(a_1, \dots, a_k) = 1/k$ |

Aby scharakteryzować centralność bliskości w klasie centralności opartych na dystansach, proponujemy aksjomat o nazwie *Porównanie Większościowe*. Ten aksjomat stwierdza, że spośród dwóch wierzchołków połączonych krawędzią, ten który jest bliżej większej liczby wierzchołków, powinien mieć wyższą centralność.

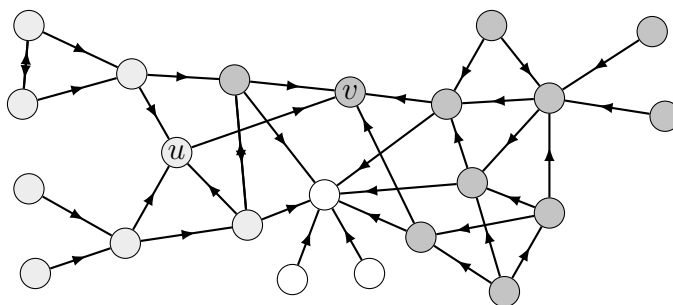
Przedstawmy formalnie ten aksjomat. Niech $Net(u, v)$ oznacza liczbę wierzchołków, które są bliżej wierzchołka u niż wierzchołka v : $Net(u, v) = |\{w \in V : d(w, u) < d(w, v)\}|$. Powiemy, że u *wygrzywa* z v , oznaczane jako $u \succ v$, jeśli $Net(u, v) > Net(v, u)$. Wierzchołki remisują, $u \sim v$, jeżeli $Net(u, v) = Net(v, u)$. Piszemy także $u \succeq v$ jeżeli $u \succ v$ albo $u \sim v$.

Porównanie Większościowe (ang. *Majority Comparison*) Miara centralności F spełnia *Porównanie Większościowe*, jeśli dla każdego grafu $G = (V, E)$ i krawędzi $u, v \in E$ zachodzi $u \succeq v \Leftrightarrow F_u(G) \geq F_v(G)$.

Rysunek 2 ilustruje to pojęcie.

Centralność bliskości w oczywisty sposób spełnia Porównanie Większościowe: ponieważ wierzchołki u i v są sąsiadami, każdy wierzchołek w grafie jest albo bliższy o 1 do u niż do v , albo bliższy o 1 do v niż do u , albo ma równą odległość do u i v . Stąd, porównując sumę odległości do wszystkich wierzchołków, tak naprawdę porównujemy liczbę wierzchołków, które są bliższe o jeden do u , i liczbę wierzchołków, które są bliższe o jeden do v : $C_u^{-1}(G) - C_v^{-1}(G) = Net(u, v) - Net(v, u)$.

Główny wynik pracy mówi, że centralność bliskości jest jedyną miarą opartą na dystansach, która ma tę własność.



Rysunek 2: Rysunek z pracy [D] ilustrujący Porównanie Większościowe na przykładowym grafie nieskierowanym. Jasnoszare wierzchołki są bliżej wierzchołka u niż wierzchołka v , a ciemnoszare wierzchołki są bliżej wierzchołka v niż wierzchołka u . Białe wierzchołki są równie odległe od obu wierzchołków. Stąd wynika, że $v \succ u$, a Porównanie Większościowe implikuje $F_v(G) > F_u(G)$. Strzałki pośrodku krawędzi wskazują zwycięzcę porównania większościowego.

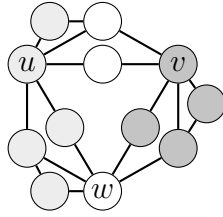
Twierdzenie 1. *Miara centralności oparta na dystansach spełnia Porównanie Większościowe wtedy i tylko wtedy, gdy daje ten sam ranking na grafach o n wierzchołkach co centralność bliskości.*

W sformułowaniu twierdzenia mówimy, że miara centralności daje ten sam ranking na grafach o n wierzchołkach, co centralność bliskości, jeśli dla każdych dwóch grafów $G = (V, E)$, $G' = (V', E')$, $|V| = |V'| = n$ i wierzchołków $u \in V, v \in V'$ zachodzi $F_u(G) \leq F_v(G) \Leftrightarrow C_u(G) \leq C_v(G)$. Jako przykład można podać znormalizowaną wersję centralność bliskości, która jest równa odwrotności średniej odległości w grafie ($NC_v(G) = (n - 1) / \sum_{u \in V} dist(u, v)$), która daje ten sam ranking na grafach o n wierzchołkach co centralność bliskości. W szczególności oznacza to, że w obrębie dowolnego grafu ranking wierzchołków jest taki sam.

Nazwa „Porównanie Większościowe” pochodzi z interpretacji grafu jako wyborów. Załóżmy, że wszystkie wierzchołki w grafie są zarówno wyborcami, jak i kandydatami, a każdy wyborca, spośród dwóch wierzchołków, preferuje tego, który jest bliżej niego. W tym kontekście Porównanie Większościowe mówi, że spośród dwóch sąsiednich wierzchołków, ten, który wygrywa bezpośrednie wybory, czyli zdobywa większość głosów, jest bardziej centralny.

Taki model grafu jako wyborów był rozważany przez Teleka [63] i Brandesa et al. [11]. Rozważali oni jednak inną własność, zwaną *Spójnością Condorcetowską*, która stwierdza, że jeśli graf zawiera zwycięzcę condorcetowskiego, czyli wierzchołek, który wygrywa w bezpośrednich wyborach z każdym innym wierzchołkiem, to powinien on mieć najwyższą centralność. Zwycięzca condorcetowski może nie istnieć – na Rysunku 3 znajduje się przykład cyklu condorcetowskiego).

Spójność Condorcetowska (ang. *Condorcet Consistency*) Miara centralności F spełnia *Spójność Condorcetowską*, jeśli dla każdego grafu $G = (V, E)$ i wierzchołka



Rysunek 3: Rysunek z pracy [D]. Przykład cyklu condorcetowskiego (u, v, w) . Jasnoszare wierzchołki są bliżej wierzchołka u niż wierzchołka v , a ciemnoszare wierzchołki są bliżej wierzchołka v niż wierzchołka u . Z symetrii wynika, że mamy $u \succ v \succ w \succ u$.

$v \in V$ takiego, że $v \succ u$ dla każdego $u \in V \setminus \{v\}$ zachodzi $F_v(G) > F_u(G)$ dla każdego $u \in V \setminus \{v\}$.

Brandes et al. [11] pokazali, że kilka klasycznych miar centralności nie spełnia Spójności Condorcetowskiej. W naszej pracy przedstawimy dwie uwagi dotyczące tego pojęcia:

- Dowodzimy, że nie istnieje żadna miara centralności oparta na dystansach, która byłaby Spójna Condorcetowsko. W tym celu definiujemy dwa grafy G i G' , w których wierzchołki u i v mają takie same listy dystansów, co oznacza, że dla miary centralności opartej na dystansach F , mamy $F_u(G) = F_u(G')$ oraz $F_v(G) = F_v(G')$. Jednak wierzchołek u jest zwycięzcą condorcetowskim w grafie G , podczas gdy wierzchołek v jest zwycięzcą condorcetowskim w grafie G' . To pokazuje, że F nie może spełniać Spójności Condorcetowskiej.
- Pokazujemy, że Porównanie Większościowe implikuje Spójność Condorcetowską w drzewach. Oznacza to, że centralność bliskości jest Spójna Condorcetowsko w drzewach.

Przejdźmy do następnej pracy:

- [E] Tomasz Wąs, Oskar Skibski.
Axiomatic characterization of PageRank.
 Artificial Intelligence 318: 103900, 2023.

Nasza praca przedstawia aksjomatyczną charakteryzację PageRanka, który jest jedną z najważniejszych miar centralności. Znajduje on wiele zastosowań, np. identyfikowanie najbardziej wpływowych użytkowników w sieci społecznościowej Twitter [68], poprawa schematów propagacji w grafowych sieciach neuronowych [26], identyfikowanie genów nowotworowych w danych proteomicznych [23] lub ocena prestiżu czasopism na podstawie sieci cytowań [9].

Problem znalezienia aksjomatycznej charakteryzacji PageRanka był już rozważany w literaturze, jednak przed naszą pracą żadna charakteryzacja nie została znaleziona. W pracach najbardziej zbliżonych do naszej zaproponowano aksjomatyzacje indeksu Seeleya

– uproszczonej wersji PageRanka – oraz jego wariantów [1, 44, 61]. Ponieważ większość aksjomatów zaproponowanych w tych charakteryzacjach nie jest spełniona przez PageRanka, nie można ich rozszerzyć do charakteryzacji PageRanka.

Jako dziedzinę naszej aksjomatyzacji wybieramy skierowane multigrafy. *Multidigraf* jest parą $G = (V, E)$, gdzie V to zbiór wierzchołków, a E to multizbiór skierowanych krawędzi $(u, v) \in V \times V$. Multidigrafy są naturalnym modelem dla sieci WWW, która była oryginalnym zastosowaniem PageRanka. Ponadto zgodnie z oryginalną pracą proponującą PageRanka [43], zakładamy, że wierzchołki mają wagi odpowiadające ich bazowej istotności, oznaczone jako $b \in \mathbb{R}^V$. W rezultacie miara centralności za argument przyjmuje parę (G, b) .

PageRank jest zdefiniowany jako jedyna miara centralności PR , która spełnia następujące równanie rekurencyjne:

$$PR_v^a(G, b) = a \cdot \left(\sum_{(u,v) \in \Gamma_v^-(G)} \frac{PR_u^a(G, b)}{|\Gamma_u^+(G)|} \right) + b(v),$$

gdzie $\Gamma_w^-(G)$ i $\Gamma_w^+(G)$ oznaczają odpowiednio zbiory krawędzi wchodzących i wychodzących z wierzchołka w w grafie G , a $a \in [0, 1)$ to dodatkowy zewnętrzny parametr zwany *współczynnikiem tłumienia*, zwykle ustawiany na wartość bliską 1, np. 0.85.

Nasza aksjomatyzacja składa się z sześciu aksjomatów:

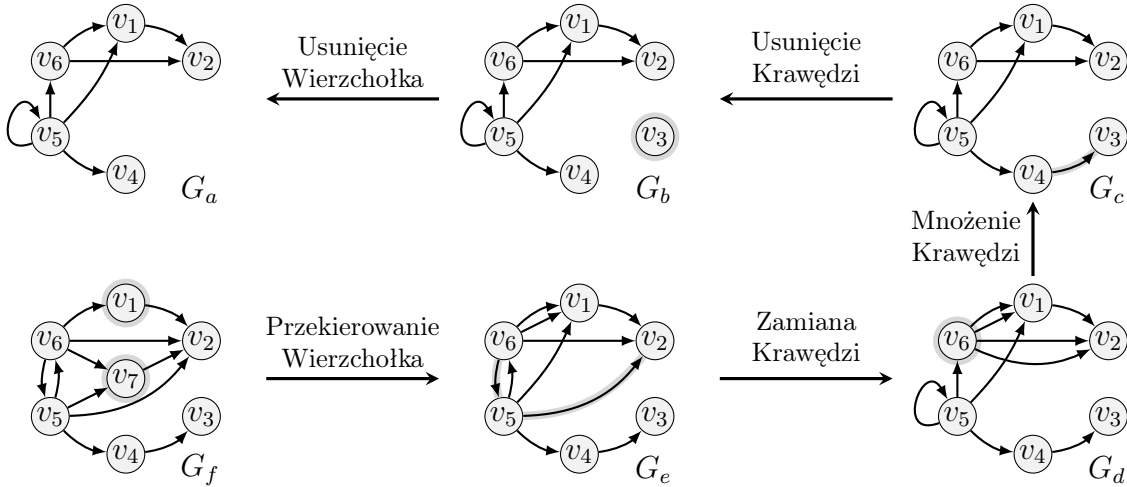
Usunięcie Wierzchołka (ang. *Node Deletion*) Miara centralności F spełnia *Usunięcie Wierzchołka*, jeżeli dla każdego multidigrafu $G = (V, E)$, wag b i izolowanego wierzchołka $u \in V$ zachodzi $F_v(G, b) = F_v((V \setminus \{u\}, E), b)$ dla każdego $v \in V \setminus \{u\}$.

Usunięcie Krawędzi (ang. *Edge Deletion*) Miara centralności F spełnia *Usunięcie Krawędzi*, jeżeli dla każdego multidigrafu $G = (V, E)$, wag b i krawędzi $(u, w) \in E$ zachodzi $F_v(G, b) = F_v(G - (u, w), b)$ dla każdego $v \in V$ do którego nie istnieje ścieżka z u .

Mnożenie Krawędzi (ang. *Edge Multiplication*) Miara centralności F spełnia *Mnożenie Krawędzi*, jeżeli dla każdego multidigrafu $G = (V, E)$, wag b , wierzchołka $u \in V$ i $k \in \mathbb{N}$ zachodzi $F_v(G, b) = F_v(G + k \cdot \Gamma_u^+(G), b)$ dla każdego $v \in V$, gdzie $k \cdot E'$ oznacza zwiększenie krotności każdej krawędzi w E' k razy.

Zamiana Krawędzi (ang. *Edge Swap*) Miara centralności F spełnia *Zamianę Krawędzi*, jeżeli dla każdego multidigrafu $G = (V, E)$, wag b i krawędzi (u, u') , $(w, w') \in E$ takich, że $F_u(G, b) = F_w(G, b)$ i $|\Gamma_u^+(G)| = |\Gamma_w^+(G)|$ zachodzi $F_v(G, b) = F_v(G - \{(u, u'), (w, w')\} + \{(u, w'), (w, u')\}, b)$ dla każdego $v \in V$.

Przekierowanie Wierzchołka (ang. *Node Redirect*) Miara centralności F spełnia *Przekierowanie Wierzchołka*, jeżeli dla każdego multidigrafu $G = (V, E)$, wag b i wierzchołków $u, w \in V$ mających identyczne krawędzie wychodzące (ang. *out-twins*) zachodzi $F_v(G, b) = F_v(R_{u \rightarrow w}(G, b))$ dla każdego $v \in V \setminus \{u, w\}$ i $F_u(G, b) +$



Rysunek 4: Rysunek z [E] (przetłumaczony na polski) ilustrujący aksjomaty niezmiennicze. We wszystkich grafach $b(v_i) = 1$ dla $i \in \{1, \dots, 6\}$, $b(v_7) = 0$. Jeśli F spełnia aksjomaty, to $F_{v_1}(G_a) = \dots = F_{v_1}(G_e) = F_{v_1}(G_f) + F_{v_7}(G_f)$.

$$F_w(G, b) = F_w(R_{u \rightarrow w}(G, b)), \text{ gdzie } R_{u \rightarrow w}(G, b) \text{ to graf uzyskany przez usunięcie krawędzi wychodzących z } u \text{ i scalenie } u \text{ z } w.$$

Wartość Bazowa (ang. *Baseline*) Miara centralności F spełnia *Wartość Bazową*, jeżeli dla każdego multidigrafu $G = (V, E)$, wag b i izolowanego wierzchołka $v \in V$ zachodzi $F_v(G, b) = b(v)$.

Pierwszych pięć aksjomatów to *aksjomaty niezmiennicze*. Nazwa każdego z nich pochodzi od operacji grafowej, która, przy dodatkowych założeniach, nie wpływa na centralności określonych wierzchołków w multidigrafie. Szósty aksjomat, *Wartość Bazowa*, określa centralność wierzchołka w prostym, granicznym przypadku. Rysunek 4 zawiera ilustrację tych aksjomatów.

Usunięcie Wierzchołka mówi, że usunięcie izolowanego wierzchołka z multidigrafu nie wpływa na centralność innych wierzchołków. Usunięcie Krawędzi mówi, że usunięcie krawędzi nie wpływa na centralność wierzchołków, które nie są potomkami początku tej krawędzi. Oba aksjomaty identyfikują zatem elementy, które są nieistotne dla centralności analizowanego wierzchołka.

Kolejne dwa aksjomaty dotyczą modyfikacji krawędzi. Mnożenie Krawędzi stwierdza, że stworzenie dodatkowych kopii krawędzi wychodzących z wierzchołka nie wpływa na centralność żadnego wierzchołka. Jest to ważna cecha w zastosowaniu do sieci WWW, ponieważ można ją interpretować jako odporność na manipulacje przez tworzenie dużej liczby linków na stronie: niezależnie od liczby linków, wpływ strony jest do pewnego stopnia ograniczony. Z kolei Zamiana Krawędzi mówi, że zamiana końców dwóch krawędzi wychodzących z wierzchołków o równych centralnościach i stopniach wychodzących nie wpływa na centralność żadnego wierzchołka. W szczególności w sieci WWW, jeśli istnieją

dwie równie ważne strony z równą liczbą linków, to linki z tych stron mają równy wpływ: dla ważności innej strony nie ma znaczenia, z której z tych dwóch stron prowadzi do niej link.

Następny aksjomat jest inspirowany przekierowaniem URL. Wyobraźmy sobie, że istnieją dwa wierzchołki o identycznych krawędziach wychodzących (np. dwie identyczne strony internetowe). Przekierowanie Wierzchołka mówi, że przekierowanie jednego wierzchołka w drugi sumuje ich centralności i nie wpływa na centralność innych wierzchołków. W tym przypadku przekierowanie jest zdefiniowane jako usunięcie wszystkich wychodzących krawędzi jednego wierzchołka i przekierowanie jego krawędzi wchodzących do drugiego wierzchołka. Aksjomat ten mówi więc, że miara centralności jest odporna na prostą technikę manipulacji, która polega na stworzeniu kilku kopii tej samej strony. Wreszcie Wartość Bazowa mówi, że centralność izolowanego wierzchołka jest równa jego bazowej istotności, czyli jego wadze.

Główne twierdzenie pracy stwierdza, że te sześć aksjomatów jednoznacznie charakteryzuje PageRank.

Twierdzenie 2. *Miara centralności spełnia aksjomaty Usunięcie Wierzchołka, Usunięcie Krawędzi, Mnożenie Krawędzi, Zamiana Krawędzi, Przekierowanie Wierzchołka i Wartość Bazowa wtedy i tylko wtedy, gdy jest to PageRank.*

W dowodzie najpierw pokazujemy, że jeśli miara centralności spełnia pierwsze pięć aksjomatów, to jest równa PageRankowi pomnożonemu przez stałą. To pokazuje, że aksjomat Wartość Bazowa jest potrzebny jedynie do wyeliminowania miar, które są przeskalowanym PageRankiem.

Nasz wynik stanowi teoretyczne podstawy do wyboru (lub odrzucenia) PageRanka w konkretnym zastosowaniu. Na przykład rozważmy sieć meczów między tenisistami, gdzie wierzchołki reprezentują zawodników, a krawędzie mecze między nimi. W szczególności krawędź (A, B) reprezentuje mecz rozegrany przez zawodników A i B i wygrany przez zawodnika B . Aby określić najlepszego zawodnika w historii tenisa, kilku autorów stosowało PageRanka do tej sieci (np. [47]). Jednak szybka analiza naszych aksjomatów pokazuje, że PageRank nie jest odpowiednią miarą centralności do tego zastosowania. W szczególności jeśli spojrzymy na aksjomat Mnożenie Krawędzi, widzimy, że zastąpienie każdego przegranego meczu jednego zawodnika przez 100 przegranych meczów nie wpłynie na PageRank żadnego zawodnika. W rezultacie jeśli dokonamy takiej zamiany u zawodnika z najwyższym PageRankiem, dojdziemy do paradoksu, że zawodnik, który najczęściej przegrywał, jest najlepszym tenisistą wszech czasów.

4.3 Teoriogrowe miary centralności ([B] i [A])

Dotychczas skupialiśmy się na klasycznych miarach centralności. W tej sekcji omówimy *teoriogrowe miary centralności* – miary centralności oparte na teorii gier koalicyjnych.

Zacznijmy od przedstawienia formalnej definicji gier koalicyjnych. Niech $N = \{1, \dots, n\}$ będzie zbiorem graczy. *Gra koalicyjna* to para (N, f) , gdzie $f : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją charakterystyczną, która przypisuje każdemu zbiorowi graczy $S \subseteq N$, nazywanemu *koalicją*,

wartość rzeczywistą $f(S)$. Dodatkowo zakłada się, że $f(\emptyset) = 0$. *Koncepcja rozwiązania* to funkcja φ , która w dowolnej grze (N, f) każdemu graczowi $i \in N$ przypisuje wartość rzeczywistą $\varphi_i(N, f)$. Wartość ta ma różne interpretacje: może być traktowana jako znaczenie gracza w grze, wypłatę, jaką gracz może z niej oczekiwać lub sprawiedliwy udział gracza w podziale wartości koalicji wszystkich graczy, $f(N)$.

Jedną z najważniejszych koncepcji rozwiązania jest *wartość Shapleya* [54]. Wartość Shapleya gracza i w grze (N, f) jest zdefiniowana następująco:

$$SV_i(N, f) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{|S|!(|N| - |S| - 1)!}{|N|!} (f(S \cup \{i\}) - f(S)).$$

Wartość Shapleya może być interpretowana za pomocą następującego procesu negocjacyjnego. Wyobraźmy sobie, że gracze wchodzi do koalicji jeden po drugim w losowej kolejności, zaczynając od pustej koalicji i kończąc na koalicji wszystkich graczy. Załóżmy, że każdemu graczowi i , gdy dołącza do koalicji S , przyznajemy wypłatę równą jego wkładowi marginalnemu do tej koalicji: $f(S \cup \{i\}) - f(S)$. Wartość Shapleya gracza i to oczekiwana wypłata gracza i w tym procesie.

Wartość Shapleya należy do klasy *semiwartości* (ang. *semivalues*). Koncepcja rozwiązania φ jest semiwartością, jeśli istnieją wagi $\beta^* : \{0, \dots, n-1\} \rightarrow [0, 1]$ spełniające $\sum_{i=0}^{n-1} \beta^*(i) \binom{n-1}{k} = 1$, takie że: $\varphi_i(N, f) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \beta^*(|S|) (f(S \cup \{i\}) - f(S))$ dla każdej gry (N, f) oraz $i \in N$. Jeśli $\beta^*(i) > 0$ dla każdego $i \in \{0, \dots, n-1\}$, to jest to *dodatnia semiwartość*.

Wysokopoziomowym pomysłem stojącym za teoriogrowymi miarami centralności jest uchwycenie zależności między wierzchołkami przy użyciu modelu gier koalicyjnych. W tym celu każdej grupie wierzchołków przypisuje się wartość, która ocenia jej jakość lub wkład w cały graf. W ten sposób powstaje gra koalicyjna, w której wierzchołki są graczami. Następnie koncepcja rozwiązania (zazwyczaj wartość Shapleya) jest używana do oceny znaczenia wierzchołków w powstałej grze.

Dla przykładu wyobraźmy sobie, że chcemy ocenić wkład wierzchołków w utrzymanie grafu spójnym. Jeśli istnieją wierzchołki rozcinające, to oczywiście powinny one być wyżej ocenione niż inne wierzchołki. Ale co w przypadku grafu dwuspójnego? Stosując podejście oparte na teorii gier, ten cel można osiągnąć poprzez przypisanie wyższej wartości każdej grupie, która indukuje spójny podgraf i niższych wartości innym grupom. Następnie można zastosować wartość Shapleya, aby uzyskać ocenę każdego wierzchołka, traktowanego jako gracza, w stworzonej grze. W ten sposób zostaną wzięte pod uwagę wszystkie indukowane podgrafy, w których wierzchołek jest wierzchołkiem rozcinającym. Oczywiście jest to tylko jeden z możliwych sposobów, dlatego konieczna jest szczegółowa analiza, aby zweryfikować ten prosty pomysł. Jest to tematem pierwszego artykułu który omówimy:

- [B] Oskar Skibski, Talal Rahwan, Tomasz Michalak, Makoto Yokoo.
Attachment Centrality: Measure for Connectivity in Networks.
 Artificial Intelligence 274: 151–179, 2019.

W tej pracy naszym celem jest aksjomatyczne uchwycenie roli wierzchołka w utrzymaniu grafu spójnym. Kilka różnych metod oceniających tę rolę wierzchołka było rozważanych w literaturze (np. [27, 2, 37]), jednak nasza praca jest pierwszą, która analizuje ten problem z perspektywy aksjomatycznej.

Wprowadźmy dodatkową notację. Dla grafu $G = (V, E)$ i podzbioru wierzchołków $S \subseteq V$, niech $G[S] = (S, E[S]) = (S, \{\{u, v\} \in E : u, v \in S\})$ oznacza podgraf grafu G indukowany przez S . Podział zbioru V na spójne składowe będziemy oznaczać przez $K(G)$, a spójną składową, która zawiera wierzchołek v , przez $K_v(G)$.

W naszej aksjomatycznej charakteryzacji używamy czterech aksjomatów:

Lokalność (ang. *Locality*) Miara centralności F spełnia *Lokalność*, jeśli dla każdego $G = (V, E)$ i $v \in V$ zachodzi równość $F_v(G) = F_v(G[K_v(G)])$.

Normalizacja (ang. *Normalization*) Miara centralności F spełnia *Normalizację*, jeśli dla każdego $G = (V, E)$ i $v \in V$ mamy $F_v(G) \in [0, |V| - 1]$, $F_v(G) = 0$ jeśli v jest izolowany i $F_v(G) = |V| - 1$ gdy G jest gwiazdą, której centrum jest wierzchołek v .

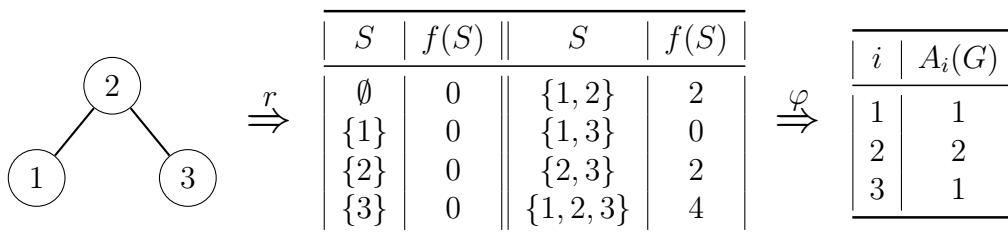
Sprawiedliwość (ang. *Fairness*) Miara centralności F spełnia *Sprawiedliwość*, jeśli dla każdego $G = (V, E)$ i $e = \{u, v\} \notin E$ mamy $F_u(G + e) - F_u(G) = F_v(G + e) - F_v(G)$.

Zysk-Strata (ang. *Gain-Loss*) Miara centralności F spełnia *Zysk-Stratę*, jeśli dla każdego spójnego $G = (V, E)$ i $e \notin E$ mamy: $\sum_{v \in V} F_v(G) = \sum_{v \in V} F_v(G + e)$.

Ponieważ miary centralności zazwyczaj są definiowane dla grafów spójnych, Lokalność można traktować jako naturalne rozszerzenie miary do grafów niespójnych. Aksjomat ten mówi, że centralność wierzchołka w całym grafie jest taka sama jak jego centralność wewnątrz jego spójnej składowej. Normalizacja opiera się na dwóch skrajnych przypadkach, w których centralność wierzchołka jest minimalna i maksymalna. W szczególności aksjomat ten mówi, że centralność jest minimalna (i równa 0), gdy wierzchołek jest izolowany i maksymalna (i równa $|V| - 1$), gdy wierzchołek jest centrum gwiazdy. Konkretnie wartości są zgodne z centralnością stopnia.

Sprawiedliwość mówi, że usunięcie krawędzi wpływa na centralność obu jej końców w równym stopniu. Sprawiedliwość została pierwotnie zaproponowana przez Myersona [38] w grach koalicyjnych, w pracy w której rozważał gry koalicyjne ograniczone grafem. Zysk-Strata mówi, że dodanie krawędzi do grafu spójnego nie wpływa na sumę centralności wszystkich wierzchołków. Intuicja stojąca za tym aksjomatem jest taka, że skoro graf jest już spójny, dodawanie nowych krawędzi jedynie przesuwają istotność wierzchołków w utrzymaniu grafu spójnym z jednego wierzchołka na inny. Jednak ogólna wartość, wynikająca z faktu, że graf jest spójny, pozostaje niezmienną.

W pracy pokazujemy, że istnieje jedna miara centralności, która spełnia Lokalność, Normalizację, Sprawiedliwość i Zysk-Stratę. Ta nowa miara centralności nazywa się *centralnością łączenia*.



Rysunek 5: Ilustracja centralności łączenia na małym grafie. Na podstawie grafu $G = (V, E)$ tworzona jest gra koalicyjna (V, f) , zdefiniowana jako $f(S) = 2(|S| - |K(G[S])|)$ dla każdego $S \subseteq V$. Następnie do tej gry zastosowana jest wartość Shapleya.

Centralność łączenia (ang. *attachment centrality*) Dla każdego $G = (V, E)$, $v \in V$:

$$A_v(G) = \sum_{S \subseteq V \setminus \{v\}} \frac{|S|!(|V| - |S| - 1)!}{|V|!} \cdot 2(|K(G[S])| - |K(G[S \cup \{v\}])| + 1).$$

Twierdzenie 3. *Centralność łączenia jest jedyną miarą centralności, która spełnia Lokalność, Normalizację, Sprawiedliwość i Zysk-Stratę.*

Wartość $(|K(G[S])| - |K(G[S \cup \{v\}])| + 1)$ to liczba składowych w grafie $G[S]$, z którymi połączony jest wierzchołek v . Centralność łączenia można zatem interpretować w następujący sposób: gdybyśmy usuwali wierzchołki z grafu jeden po drugim w losowej kolejności, to centralność łączenia wierzchołka $v \in V$ byłaby oczekiwaną liczbą składowych stworzonych przez usunięcie v , pomnożoną przez 2 dla celów normalizacji.

Alternatywnie centralność łączenia można zdefiniować jako wartość Shapleya w grze (V, f) zdefiniowanej na podstawie grafu $G = (V, E)$ w następujący sposób:

$$f(S) = 2(|S| - |K(G)|) \text{ dla każdego } S \subseteq V.$$

Łatwo sprawdzić, że wkład marginalny wierzchołka v do koalicji S rzeczywiście równa się $f(S \cup \{v\}) - f(S) = 2(|K(G[S])| - |K(G[S \cup \{v\}])| + 1)$. Rysunek 5 ilustruje działanie centralności łączenia.

Alternatywą dla aksjomatu Zysku-Straty jest Monotoniczność, która mówi, że dodawanie nowych krawędzi może jedynie zwiększyć centralność wszystkich wierzchołków:

Monotoniczność (ang. *Monotonicity*) Miara centralności F spełnia *Monotoniczność*, jeśli dla każdego grafu $G = (V, E)$, $v \in V$, $e = \{u, w\}$ zachodzi $F_v(G + e) \geq F_v(G)$.

Okazuje się, że Lokalność, Normalizacja, Sprawiedliwość i Monotoniczność jednoznacznie charakteryzują centralność stopnia.

Różnicę w działaniu centralności łączenia i centralności stopnia dobrze obrazuje dodanie krawędzi do drzewa. W drzewie obie centralności są takie same. Teraz jeśli dodamy krawędź między wierzchołkami u i v , to centralność stopnia obu wierzchołków wzrośnie o

jeden, a centralności innych wierzchołków nie zmieniają się. Ponieważ centralność łączenia spełnia aksjomat Zysku-Straty, całkowita suma centralności nie może się zmienić. Dlatego centralność łączenia zarówno wierzchołka u jak i v wzrasta, ale centralność wszystkich wierzchołków na ścieżce od u do v w oryginalnym drzewie spada, ponieważ ich rola w utrzymaniu grafu spójnym zmniejszyła się.

W ogólności dodanie krawędzi $\{u, v\}$ wpływa tylko na wierzchołki leżące na indukowanych ścieżkach między u i v . Ścieżka $p = (v_1, \dots, v_k)$ w grafie $G = (V, E)$ jest *indukowana*, jeśli jest ścieżką prostą (wierzchołki się nie powtarzają) i nie ma krawędzi pomiędzy wierzchołkami, które nie są kolejne na ścieżce: $E[\{v_1, \dots, v_k\}] = \{\{v_i, v_{i+1}\} : 1 \leq i \leq k - 1\}$. Tylko wierzchołki należące do ścieżek indukowanych można uznać za odpowiedzialne w utrzymaniu obu wierzchołków połączonych.

To prowadzi do wniosku, że obliczenie centralności łączenia jest problemem #P-zupełnym. Analiza ścieżek indukowanych prowadzi także do następującej obserwacji dotyczącej klik rozcinających: jeśli graf zawiera klikę rozcinającą C i po jej usunięciu powstaną spójne składowe S_1, \dots, S_k , to centralności wszystkich wierzchołków można obliczyć, rozważając mniejsze grafy $G[C \cup S_i]$ dla każdego $i \in \{1, \dots, k\}$. Korzystając z tej obserwacji, tworzymy algorytmy do obliczania centralności łączenia. Najpierw dowodzimy, że centralność łączenia w grafie chordalnym można obliczyć w czasie wielomianowym. Graf jest *chordalny*, jeśli nie zawiera indukowanego cyklu o długości cztery lub więcej. Cykl $(v_1, \dots, v_k), v_1 = v_k$ jest *indukowany*, jeśli jest prosty (tylko wierzchołek v_1 się powtarza) i nie ma krawędzi między niekolejnymi wierzchołkami: $E[\{v_1, \dots, v_k\}] = \{\{v_i, v_{i+1}\} : 1 \leq i \leq k - 1\}$. Opierając się na podobnym podejściu, projektujemy także algorytm heurystyczny dla dowolnych grafów. W skrócie, algorytm szuka dekompozycji opartej na klikach rozcinających i dla każdego uzyskanego podgrafu niezależnie oblicza wartość Shapleya na grafach [59] (tj. *wartość Myersona*, patrz Sekcja 4.4).

Ten nowy algorytm pozwala nam zastosować centralność łączenia do sieci terrorystycznej odpowiedzialnej za ataki na pociągi w Madrycie w 2004 roku [49]. Sieć ta zawiera 70 wierzchołków, więc analiza nie byłaby możliwa przy użyciu najszybszego istniejącego algorytmu do obliczania wartości Shapleya na grafach, który jest w stanie obliczyć wartości tylko dla rzadkich sieci o nie więcej niż 40 wierzchołkami. W tej sieci, centralność łączenia znacząco różni się od standardowych miar centralności. W szczególności wierzchołek sklasyfikowany jako najistotniejszy według centralności łączenia jest inny niż najwyżej ocenione wierzchołki według centralności stopnia, bliskości i pośrednictwa.

Przejdźmy teraz do wyników z następującej pracy:

- [A] Oskar Skibski, Tomasz Michalak, Talal Rahwan.
Axiomatic Characterization of Game-Theoretic Centrality.
 Journal of Artificial Intelligence Research 62: 33–68, 2018.

Praca ta bada relację między teoriogrowymi a standardowymi miarami centralności. Konkretniej praca odpowiada na pytania: jakie miary centralności można uzyskać jako teoriogrowe miary centralności? Co odróżnia teoriogrowe miary centralności od standardowych miar centralności?

Niech V będzie zbiorem wierzchołków i niech \mathcal{G}^V będzie zbiorem wszystkich możliwych grafów ze zbiorem wierzchołków V . Formalnie teoriogrowa miara centralności jest zdefiniowana jako para (r, φ) , gdzie $r : \mathcal{G}^V \rightarrow (2^V \rightarrow \mathbb{R})$ to *funkcja reprezentacji*, która mapuje dowolny graf na grę koalicyjną, a φ to koncepcja rozwiązania. Para generuje miarę centralności poprzez złożenie obu funkcji: $[(r, \varphi)] = \varphi \circ r$. W naszej pracy zakładamy, że φ jest dodatnią semiwartością.

Przykładami teoriogrowych miar centralności są:

Centralność spójności (ang. *connectivity centrality*) [2] (r_c, SV) , gdzie

$(r_c(G))(S) = 1$, jeśli $G[S]$ jest spójny i $(r_c(G))(S) = 0$ w przeciwnym razie, dla każdego $G = (V, E), S \subseteq V$.

Centralność łączenia [B] (r_a, SV) , gdzie $(r_a(G))(S) = 2(|S| - |K(G[S])|)$ dla każdego $G = (V, E), S \subseteq V$.

Centralność sąsiadów (g1) [36] (r_g, SV) , gdzie $(r_g(G))(S) = |S \cup \{u : \{u, v\} \in E \wedge v \in S\}|$ dla każdego $G = (V, E), S \subseteq V$.

Pierwszy wynik pracy mówi, że każda miara centralności może być uzyskana podejściem teoriogrowym. Dokładniej, dla każdej miary centralności F istnieje teoriogrowa miara centralności (r, φ) , taka że $F = [(r, \varphi)]$. Dla przykładu rozważmy przypisanie każdej grupie wierzchołków dwukrotność liczby krawędzi w jej grafie indukowanym: $(r(G))(S) = 2 \cdot |E[S]|$ dla każdego $G = (V, E), S \subseteq V$. Można pokazać, że centralność wygenerowana przez (r, SV) jest równa centralności stopnia: wkład każdego wierzchołka v do gry $r(G)$ to po prostu liczba krawędzi incydentnych z nim, czyli $D_v(G)$.

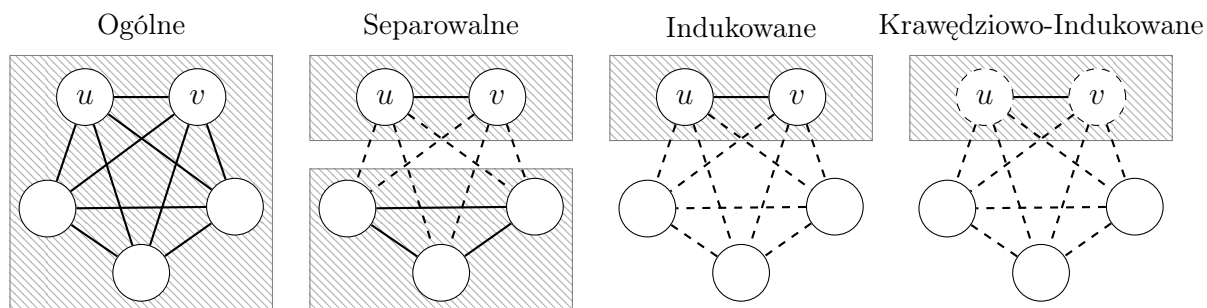
Wynik ten mocno opiera się na bardzo ogólnej definicji teoriogrowych miar centralności: wartość każdej koalicji w grze $r(G)$ może zależeć od całego grafu G . W rezultacie dla dowolnych dwóch grafów G i G' gry $r(G)$ i $r(G')$ mogą być całkowicie niezależne. Dlatego też dla dowolnej miary centralności F można zdefiniować grę $r(G)$ na podstawie centralności wierzchołków w G (tj. $(F_v(G))_{v \in V}$) w taki sposób, aby istotność każdego wierzchołka v w tej grze była równa $F_v(G)$.

Teoriogrowe miary centralności zaproponowane w literaturze zakładają naturalne ograniczenia na funkcję reprezentacji. W naszej pracy definiujemy trzy typy takich ograniczeń i analizujemy wynikające z nich klasy teoriogrowych miar centralności.

Separowalne TGC (ang. *Separable GTC*) Teoriogrowa miara centralności (r, φ) jest *separowalna*, jeśli dla każdego $G, G' \in \mathcal{G}^V$ i $S \subseteq V$ jeżeli $G[S] = G'[S]$ i $G[V \setminus S] = G'[V \setminus S]$ to $(r(G))(S) = (r(G'))(S)$.

Indukowane TGC (ang. *Induced GTC*) Teoriogrowa miara centralności (r, φ) jest *indukowana*, jeśli dla każdego $G, G' \in \mathcal{G}^V$ i $S \subseteq V$ jeżeli $G[S] = G'[S]$ to $(r(G))(S) = (r(G'))(S)$.

Krawędziowo-Indukowane TGC (ang. *Edge-Induced GTC*) Teoriogrowa miara centralności (r, φ) jest *krawędziowo-indukowana*, jeśli dla każdego $G = (V, E), G' = (V, E') \in \mathcal{G}^V$ i $S \subseteq V$ jeżeli $E[S] = E'[S]$ to $(r(G))(S) = (r(G'))(S)$.



Rysunek 6: Zmodyfikowany rysunek z [A] ilustrujący ograniczenia na funkcję reprezentacji. Ciągłymi liniami oznaczone są krawędzi i wierzchołki, które wpływają na wartość $\{u, v\}$, a przerywanymi – które nie mają wpływu.

Rysunek 6 przedstawia ilustrację tych pojęć. Teoriogrowa miara centralności jest separowalna, jeśli wartość każdej koalicji, $S \subseteq V$, w funkcji reprezentacji r , zależy tylko od podgrafów indukowanych przez S oraz $V \setminus S$. Miara centralności jest indukowana, jeśli jej wartość zależy tylko od podgrafu indukowanego przez S . Wreszcie miara jest krawędziowo-indukowana, jeśli jej wartość zależy tylko od krawędzi w podgrafie indukowanych przez S . Jasne jest, że jeśli teoriogrowa miara centralności jest krawędziowo-indukowana, to jest także indukowana, a jeśli jest indukowana, to jest także separowalna.

Większość teoriogrowych miar centralności używanych w literaturze jest indukowanych. W niektórych definicjach wkład grupy wierzchołków do grafu jest oceniany poprzez graf powstały po jej usunięciu z grafu (np. [41]); takie miary są separowalne, ale nie indukowane.

Spośród powyższych przykładów, centralność spójności oraz centralność łączenia są separowalne, ale centralność sąsiadów nie jest, ponieważ wartość koalicji zależy od krawędzi z sąsiadami. Centralności spójności i łączenia są także indukowane. Centralność łączenia jest również krawędziowo-indukowana, ale centralność spójności nie, ponieważ dodanie izolowanego wierzchołka zmienia wartość koalicji.

Aby scharakteryzować te klasy teoriogrowych miar centralności, użyliśmy czterech aksjomatów: Sprawiedliwości (zdefiniowanej w opisie pracy [B]), Zbalansowanych Kontrybucji, Zbalansowanych Kontrybucji Krawędzi oraz Pusty-Zero. Oznaczmy zmianę centralności F wierzchołka v spowodowaną dodaniem krawędzi e w grafie G jako $\Delta_v^F(e, G) = F_v(G + e) - F_v(G)$. Używając tej notacji Sprawiedliwość mówi, że $\Delta_u^F(\{u, v\}, G) = \Delta_v^F(\{u, v\}, G)$ dla każdego $G = (V, E)$, $\{u, v\} \notin E$.

Zbalansowane Kontrybucje (ang. *Balanced Contributions*) Miara centralności F spełnia *Zbalansowane Kontrybucje*, jeśli dla każdego grafu $G = (V, E)$ oraz każdego $u, v \in V$, zachodzi $F_v(G) - F_v(G - \Gamma_u) = F_u(G) - F_u(G - \Gamma_v)$, gdzie Γ_w oznacza zbiór krawędzi incydentnych z wierzchołkiem w w grafie G .

Zbalansowane Kontrybucje Krawędzi (ang. *Edge-Balanced Contributions*)

Miara centralności F spełnia *Zbalansowane Kontrybucje Krawędzi*, jeśli dla każ-

dego grafu $G = (V, E)$ oraz $e = \{u, \tilde{u}\}, e' = \{v, \tilde{v}\}, e, e' \notin E$, zachodzi $\Delta_u^F(e, G + e') - \Delta_u^F(e, G) = \Delta_v^F(e', G + e) - \Delta_v^F(e', G)$.

Pusty-Zero (ang. *Empty-Zero*) Miara centralności F spełnia *Pusty-Zero*, jeśli $F_v(V, \emptyset) = 0$ dla $v \in V$.

Przypomnijmy, że Sprawiedliwość to własność zaproponowana przez Myersona [38], która stwierdza, że usunięcie krawędzi wpływa na centralność obu końców w taki sam sposób. Zbalansowane Kontrybucje to silniejsza aksjomatyczna własność również zaproponowana przez Myersona [40], która mówi, że usunięcie krawędzi wierzchołka u wpływa na centralność v w taki sam sposób, w jaki usunięcie krawędzi v wpływa na centralność u . W ten sposób oba te wierzchołki mają równy wpływ na siebie nawzajem. Z kolei Zbalansowane Kontrybucje Krawędzi to nowa własność, która jest krawędziowym odpowiednikiem Zbalansowanych Kontrybucji: jeśli przypiszemy krawędzi jej wpływ na wierzchołek końcowy ($\Delta_v^F(e, G)$ dla $v \in e$), to dodanie krawędzi e' zmienia ten wpływ krawędzi e w taki sam sposób, w jaki dodanie krawędzi e zmienia wpływ krawędzi e' . W końcu własność Pusty-Zero mówi, że w pustym grafie centralność każdego wierzchołka wynosi zero.

W pracy udowodniamy, że te własności charakteryzują separowalne, indukowane i krawędziowo-indukowane teoriogrowe miary centralności. Następujące twierdzenie podsumowuje wyniki artykułu.

Twierdzenie 4. *Każda miara centralności jest generowana przez pewną teoriogrową miarę centralności. Ponadto miara centralności spełnia:*

- *Sprawiedliwość wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana przez pewną separowalną teoriogrową miarę centralności;*
- *Zbalansowane Kontrybucje Krawędzi wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana przez pewną indukowaną teoriogrową miarę centralności;*
- *Zbalansowane Kontrybucje i Pusty-Zero wtedy i tylko wtedy, gdy jest generowana przez pewną krawędziowo-indukowaną miarę centralności.*

W dowodach identyfikujemy bazę przestrzeni wektorowej tworzonej przez centralności spełniające Sprawiedliwość, Zbalansowane Kontrybucje i Zbalansowane Kontrybucje Krawędzi. Następnie pokazujemy, że każda centralność z bazy może być otrzymana jako separowalna, indukowana lub krawędziowo-indukowana teoriogrowa miara centralności.

Wszystkie wyniki przedstawione w artykule mają zastosowanie do dowolnych dodatnich semiwartości, które są uogólnieniem wartości Shapleya wprowadzonym na początku Sekcji 4.3. Bardziej precyzyjnie, za każdym razem gdy piszemy, że istnieje teoriogrowa miara centralności z pewnymi własnościami, oznacza to, że dla dowolnej dodatniej semiwartości istnieje teoriogrowa miara centralności, która wykorzystuje tę semiwartość i ma te własności.

Nasze wyniki pokazują, że podczas gdy wszystkie centralności można otrzymać za pomocą podejścia teoriogrowego, naturalne klasy teoriogrowych centralności są charakteryzowane przez Sprawiedliwość i jej wzmocnienia. Wynik ten sugeruje, że teoriogrowe

miary centralności są dobrym wyborem w zastosowaniach, w których oba wierzchołki mają taki sam zysk z krawędzi, która je łączy. Na przykład teoriogrowe miary centralności mogą nie być dobrym wyborem w sieciach społecznych, gdzie połączenie między dwiema osobami może być bardziej korzystne dla osoby o niższym statusie społecznym. Z kolei Sprawiedliwość jest naturalna przy ocenie roli wierzchołka w utrzymaniu grafu spójnym.

Od momentu opublikowania powyżej opisanych wyników w literaturze pojawiło się kilka nowych rezultatów. W szczególności udowodniliśmy, że indukowane teoriogrowe miary centralności są równoważne z ważną klasą miar centralności: *indeksami witalności* [57]. Dodatkowo rozszerzyliśmy centralność łączenia na grafy ważone [62]. Ostatnio Lopez et al. [28] zaproponowali modyfikację centralności łączenia, opartą na wartości pozycyjnej (ang. *position value*).

4.4 Koncepcje rozwiązania ([F] i [C])

Do tej pory skupialiśmy się na miarach istotności wierzchołków w grafach, w tym klasycznych miarach centralności, takich jak centralność bliskości (ang. *closeness centrality*) i PageRank, a także teoriogrowych miarach centralności opartych na koncepcjach rozwiązania z gier koalicyjnych.

W tej sekcji skupimy się na samych koncepcjach rozwiązania, rozważając dwa konteksty: gry na grafach oraz gry z efektami zewnętrznymi.

Na początku omówimy wyniki z pracy:

[F] Oskar Skibski.

Complexity of Computing the Shapley Value in Partition Function Form Games.

Journal of Artificial Intelligence Research 77: 1237–1274, 2023.

W tej pracy badamy złożoność obliczeniową wybranych rozszerzeń wartości Shapleya w grach z efektami zewnętrznymi reprezentowanych w sposób zwięzły. Analizujemy pięć takich rozszerzeń dla dwóch różnych reprezentacji i charakteryzujemy ich złożoność obliczeniową.

Klasyczny model gier kooperacyjnych zakłada, że wartość koalicji jest niezależna od innych koalicji utworzonych przez pozostałych graczy. Jednak w wielu sytuacjach to założenie nie jest spełnione. Gdy cele graczy się pokrywają lub są sprzeczne, osiągnięcie celu przez jedną grupę może wpłynąć na wyniki innych graczy [50]. Taka sytuacja pojawia się na przykład, gdy zasoby są ograniczone, a gracze muszą konkurować o ich zdobycie [51].

Motywowani tym faktem, badamy *gry kooperacyjne z efektami zewnętrznymi* (nazywane również *grami w postaci funkcji podziałów*). W tym modelu wartość koalicji zależy nie tylko od jej członków, ale także od koalicji utworzonych przez innych graczy.

Formalnie niech $N = \{1, \dots, n\}$ będzie ustalonym zbiorem n graczy. *Zanurzona koalicja* (ang. *embedded coalition*) to para (S, P) , gdzie S to koalicja (czyli podzbiór N), a P to podział N , zawierający S . Zbiór wszystkich możliwych zanurzonych koalicji oznaczamy przez EC . *Gra z efektami zewnętrznymi* to para (N, g) , gdzie g to funkcja podziałów przypisująca wartość rzeczywistą każdej zanurzonej koalicji: $g : EC \rightarrow \mathbb{R}$.

Efekty zewnętrzne wprowadzają nowe wyzwania pojęciowe, ponieważ nie jest jasne, jak zdefiniować standardowe koncepcje rozwiązań w grach z efektami zewnętrznymi. W szczególności zaproponowano różne metody rozszerzenia wartości Shapleya do gier z efektami zewnętrznymi. W naszej pracy skupiamy się na pięciu klasycznych rozszerzeniach, które spełniają standardowe tłumaczenie aksjomatów Shapleya na gry z efektami zewnętrznymi (istnieje tylko jedno inne takie rozszerzenie). Wszystkie te rozszerzenia można wyrazić jako ważoną sumę wartości zanurzonych koalicji:

$$\varphi_i(N, g) = \sum_{(S,P) \in EC} \omega_i(S, P) \cdot g(S, P), \quad \text{dla każdego } (N, g), i \in N,$$

dla pewnych wag $\omega : EC \times N \rightarrow \mathbb{R}$.

Niech $\zeta_i(S)$ będzie wagą koalicji S w oryginalnej formule wartości Shapleya gracza i (tj. $\zeta_i(S) = (|S| - 1)!(n - |S|)!/n!$ dla $i \in S$ i $\zeta_i(S) = -|S|!(n - |S| - 1)!/n!$, w przeciwnym przypadku). Wówczas mamy:

MQ-wartość $\omega_i(S, P) = \zeta_i(S)$, jeśli $|P| \leq 2$, i $\omega_i(S, P) = 0$, w przeciwnym przypadku [\[32\]](#),

EF-wartość $\omega_i(S, P) = \zeta_i(S)$, jeśli $|P| - 1 = n - |S|$, i $\omega_i(S, P) = 0$, w przeciwnym przypadku [\[45\]](#), [\[13\]](#),

HY-wartość $\omega_i(S, P) = \zeta_i(S) \cdot \psi(S, P)/|P|$, gdzie $\psi(S, P)$ jest liczbą podziałów N w których gracze $N \setminus S$ tworzą podział $P \setminus \{S\}$ [\[21\]](#),

SS-wartość $\omega_i(S, P) = \zeta_i(S) \cdot \prod_{T \in P \setminus \{S\}} (|T| - 1)!/(n - |S|)!$ [\[17\]](#), [\[30\]](#), [\[58\]](#),

MY-wartość $\omega_i(S, P) = (-1)^{|P|} ((\sum_{T \in P \setminus \{S\}, i \notin T} (|P| - 2)!/(n - |T|) - (|P| - 1)!/n)$ [\[39\]](#).

W przypadku MQ-wartości i EF-wartości większość wag jest równa zero. MQ-wartość uwzględnia jedynie wartość koalicji S w podziale, w którym wszyscy inni gracze tworzą jedną koalicję. Podobnie EF-wartość koncentruje się na wartości koalicji S w podziale, w którym wszyscy inni gracze tworzą koalicje składające się z pojedynczych graczy. W rezultacie oba te podejścia ignorują wartości większości zanurzonych koalicji.

HY-wartość i SS-wartość przypisują niezerowe wagi każdej zanurzonej koalicji. W HY-wartości waga zwiększa się wraz z rozmiarem podziału, podczas gdy w SS-wartości waga jest większa dla podziałów zawierających większe koalicje. W związku z tym te podejścia można postrzegać jako w pewnym sensie przeciwne do siebie.

W MY-wartości waga $\omega_i(S, P)$ może być ujemna, nawet jeśli gracz i należy do koalicji S . Dlatego MY-wartość nie spełnia podstawowej zasady monotoniczności, która stwierdza, że zwiększenie wartości koalicji nie powinno zmniejszać wartości jej członków.

W teorii każda koalicja w grze może mieć dowolną wartość. Jednak w praktyce opisanie gry w taki sposób staje się nierealistyczne, ponieważ liczba koalicji rośnie wykładniczo. Dlatego w literaturze zaproponowano wiele związanych reprezentacji gier koalicyjnych. Dla

| | MQ-wartość | EF-wartość | HY-wartość | SS-wartość | MY-wartość |
|---------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| Zanurzone SWM | P [34] | P | #P-trudne | #P-trudne | #P-trudne |
| Ważone SWM | P | #P-trudne | #P-trudne | #P-trudne | #P-trudne |

Tabela 1: Podsumowanie wyników z [F].

gier z efektami zewnętrznymi zaproponowano trzy reprezentacje: *zanurzone sieci wkładów marginalnych* (ang. *embedded MC-nets*, w skrócie *zanurzone SWM*) [34], *ważone sieci wkładów marginalnych* (ang. *weighted MC-nets*, w skrócie *ważone SWM*) [35] oraz *drzewa decyzyjne podziałów* (ang. *partition decision trees*) [60]. Dla trzeciej reprezentacji wykazano, że wszystkie pięć rozszerzeń wartości Shapleya może być obliczone w czasie wielomianowym. W przypadku zanurzonych SWM, Michalak et al. [34] dowiedli, że jedno rozszerzenie może być obliczone w czasie wielomianowym. Jeśli zaś chodzi o ważne SWM, to tylko częściowe wyniki (wyniki wielomianowe przy dodatkowych założeniu odnośnie stosowanych reguł) zostały opracowane dla trzech rozszerzeń.

W niniejszej pracy wypełniamy lukę w literaturze, określając złożoność obliczeniową wszystkich pięciu wspomnianych wyżej rozszerzeń wartości Shapleya w grach reprezentowanych przy użyciu zanurzonych i ważonych SWM.

Zanurzone i ważne SWM są rozszerzeniem klasycznych *sieci wkładów marginalnych* (ang. *marginal contribution nets*, w skrócie SWM) zaproponowanych przez Ieonga i Shohama [22] dla gier bez efektów zewnętrznych. W tej reprezentacji gra jest przedstawiona jako zbiór reguł SWM postaci $(\alpha \rightarrow c)$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ jest wagą reguły, a α ma postać $\alpha = a_1^+ \wedge \dots \wedge a_m^+ \wedge \neg a_1^- \wedge \dots \wedge \neg a_\ell^- \rightarrow c$. Tu a_i^+, a_i^- to gracze z N . Koalicja S spełnia tę regułę, jeśli zawiera wszystkich graczy z literalów pozytywnych (a_i^+) i nie zawiera żadnych graczy z literalów negatywnych (a_i^-). W grze reprezentowanej jako zbiór reguł SWM, wartość koalicji S jest sumą wag wszystkich spełnionych przez nią reguł. Na przykład reguła $1 \wedge \neg 3 \rightarrow c$ reprezentuje grę, w której wszystkie koalicje z graczem 1, ale bez gracza 3, mają wartość c , podczas gdy inne koalicje mają wartość 0.

Zanurzone SWM [34] pozwalają na określenie nie tylko ograniczeń na koalicję, ale także na podział, w którym ta koalicja jest zanurzona. Reguła zanurzonych SWM ma postać $\alpha_1 \mid \alpha_2, \dots, \alpha_k \rightarrow c$, gdzie α_i mają postać jak w SWM. Zanurzona koalicja (S, P) spełnia tę regułę, jeśli S spełnia α_1 , a dla każdego α_i , $i > 1$ istnieje koalicja $T \in P \setminus \{S\}$ spełniająca α_i . W grze reprezentowanej przez zbiór reguł zanurzonych SWM, wartość zanurzonej koalicji (S, P) jest sumą wag wszystkich spełnionych przez nią reguł.

Ważone SWM [35] używają podobnego podejścia. W szczególności reguła ważonych SWM to zbiór standardowych reguł SWM podzielonych na m osobnych bloków: $(\alpha_1^1 \rightarrow c_1^1) \dots (a_{k_1}^1 \rightarrow c_{k_1}^1) \mid \dots \mid (\alpha_1^m \rightarrow c_1^m) \dots (\alpha_{k_m}^m \rightarrow c_{k_m}^m)$. Podział spełnia tę regułę, jeśli jej koalicje można podzielić na m rozłącznych zbiorów koalicji, tak aby wszystkie reguły z jednego bloku były spełnione przez pewną koalicję z odpowiadającego zbioru. W grze reprezentowanej przez zbiór reguł ważonych SWM, wartość zanurzonej koalicji (S, P) jest sumą wag reguł $(\alpha \rightarrow c)$ spełnionych przez S spośród reguł spełnionych przez P .

W pracy [F] ustaliśmy złożoność obliczeniową wszystkich pięciu rozszerzeń wartości

Shapleya w grach reprezentowanych jako zanurzone i ważone SWM. W szczególności pokazujemy, że dla zanurzonych SWM, dwa z pięciu rozszerzeń (MQ-wartość i EF-wartość) mogą być obliczone w czasie wielomianowym, podczas gdy obliczenie pozostałych trzech rozszerzeń jest #P-trudne. Dla ważonych SWM, jedno rozszerzenie (MQ-wartość) można obliczyć w czasie wielomianowym, podczas gdy obliczenie pozostałych czterech jest #P-trudne. Tabela [1](#) podsumowuje te wyniki.

Nasze wyniki opierają się na wspólnej technice zaproponowanej w naszej pracy, która mapuje zanurzone i ważone SWM na grafy. W tym celu najpierw mapujemy reguły zanurzonych i ważonych SWM na *reguły hybrydowe*, a następnie pokazujemy, że każda reguła hybrydowa może być przedstawiona jako tzw. graf graczy (graf z wierzchołkami etykietowanymi zbiorami graczy). W rezultacie gra reprezentowana jako reguła hybrydowa może być zdefiniowana w oparciu o kolorowania wierzchołkowe odpowiadającego grafu graczy, a każda rozszerzona wartość Shapleya jest ważoną sumą wszystkich takich kolorowań.

W zależności od wag, ta ważona suma może być łatwa lub trudna do obliczenia. W szczególności pokazaliśmy, że MQ-wartość jest ważoną sumą 2-kolorowań. Z drugiej strony EF-wartość można zdefiniować jako ważoną sumę kolorowań, w których tylko jeden kolor jest używany więcej niż raz. Dlatego możliwe było obliczenie tych wartości w czasie wielomianowym dla zanurzonych SWM (i ważonych SWM w przypadku MQ-wartości).

Przejdźmy teraz do ostatniej pracy:

- [C] Oskar Skibski, Takamasa Suzuki, Tomasz Grabowski, Yuko Sakurai, Tomasz Michalak, Makoto Yokoo.
Measuring power in coalitional games with friends, enemies and allies.
 Artificial Intelligence 313: 103792, 2022.

W klasycznym modelu gier koalicyjnych wszystkie koalicje są uznawane za możliwe. Jednak nie zawsze jest to prawdą. Przykładowo różne rodzaje ograniczeń występują w systemach wieloagentowych z powodu nieufności lub kosztów komunikacji [\[33\]](#). Dlatego też w literaturze zaproponowanych zostało wiele modeli ograniczeń.

Najpopularniejszy z takich modeli został zaproponowany przez Myersona [\[38\]](#) i jest znany jako *gra grafowa*. *Gra grafowa* to trójka (N, f, G) , gdzie (N, f) jest grą koalicyjną, a $G = (N, E)$ to *graf komunikacji*. Koalicja S jest uznawana za *możliwą* (ang. *feasible*), jeśli indukuje spójny podgraf $G[S]$. Myerson zaproponował rozszerzenie wartości Shapleya do tego modelu, które nazywane jest *wartością Myersona*. Wartość Myersona gracza i w grze grafowej (N, f, G) jest zdefiniowana następująco:

$$MV_i(N, f, G) = SV_i(N, f/G), \quad \text{gdzie } f/G(S) = \sum_{C \in K(G[S])} f(C) \text{ dla każdego } S \subseteq N.$$

Przypomnijmy, że $K(G[S])$ oznacza składowe podgrafu indukowanego przez S . Myerson udowodnił, że wartość Myersona jest unikalną wartością spełniającą Sprawiedliwość (wprowadzoną w Sekcji [4.3](#)) oraz Efektywność Składowych, która stwierdza, że suma wartości w jednej spójnej składowej $C \in K(G)$ jest równa wartości tej składowej $f(C)$.

W grach grafowych współpraca między dwoma graczami jest możliwa, jeśli istnieje bezpośrednia lub pośrednia (poprzez pośredników) komunikacja między nimi. Oznacza to, że nie jest możliwe wyrażenie faktu, że dwaj gracze mogą współpracować z innym graczem, ale nie ze sobą nawzajem. Dlatego See et al. [53] zaproponowali *gry kompatybilności*, w których koalicja S jest możliwa tylko wtedy, gdy jej indukowany podgraf $G[S]$ jest grafem pełnym.

W naszej pracy łączymy oba modele, rozszerzając klasyczny model Myersona na grafy znakowane (ang. *signed graphs*), w których każda krawędź jest etykietowana plusem lub minusem. *Znakowana gra grafowa* (ang. *signed graph game*) to trójka (N, f, G^\pm) , gdzie (N, f) jest grą koalicyjną, a $G^\pm = (N, E_+, E_-)$ to graf znakowany, gdzie N to zbiór wierzchołków, E_+ to zbiór krawędzi pozytywnych (z plusem), a E_- to zbiór krawędzi negatywnych (z minusem). Dodatkowo zakładamy, że $E_+ \cap E_- = \emptyset$. Koalicja S jest możliwa, jeśli $G^\pm[S]$ jest spójny i nie zawiera krawędzi negatywnych. Niech \mathcal{F} będzie zbiorem wszystkich możliwych koalicji: $\mathcal{F} \subseteq 2^N$.

Aby rozszerzyć wartość Myersona do znakowanych gier grafowych, używamy podejścia aksjomatycznego i definiujemy dwa aksjomaty, które są bezpośrednimi odpowiednikami oryginalnych aksjomatów Myersona:

Znakowana Sprawiedliwość Koncepcja rozwiązania φ spełnia *Znakowaną Sprawiedliwość*, jeśli dla każdej znakowanej gry grafowej (N, f, G^\pm) i krawędzi $e = \{i, j\}$ zachodzi $\varphi_i(N, f, G^\pm) - \varphi_i(N, f, G^\pm - e) = \varphi_j(N, f, G^\pm) - \varphi_j(N, f, G^\pm - e)$.

Znakowana Efektywność Składowych Koncepcja rozwiązania φ spełnia *Znakowaną Efektywność Składowych*, jeśli dla każdej znakowanej gry grafowej (N, f, G^\pm) i spójnej składowej $C \in K(G^\pm)$ zachodzi $\sum_{i \in C} \varphi_i(N, f, G^\pm) = f(C)$, jeśli $C \in \mathcal{F}$, oraz $\sum_{i \in C} \varphi_i(N, f, G^\pm) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Znakowana Sprawiedliwość, podobnie jak standardowa Sprawiedliwość, mówi, że usunięcie krawędzi (pozytywnej lub negatywnej) z grafu wpływa na oba końce w taki sam sposób. Znakowana Efektywność Składowych skupia się na spójnych składowych G^\pm , ponieważ tylko takie grupy można uznać za w pełni niezależne od reszty grafu. Aksjomat ten mówi, że jeśli taka spójna składowa jest możliwa, to osiąga swoją wartość; z kolei, jeśli nie jest możliwa, to nie może nic osiągnąć.

Te dwa aksjomaty jednoznacznie charakteryzują *wartość Myersona dla znakowanych gier grafowych*, która jest zdefiniowana dla każdej gry (N, f, G^\pm) i gracza $i \in N$ następująco:

$$MV_i(N, f, G^\pm) = SV_i(N, f/G^\pm), \quad \text{gdzie } f/G^\pm(S) = \sum_{C \in K(G^\pm) \cap \mathcal{F}} f(C).$$

Twierdzenie 5. *Wartość Myersona dla znakowanych gier grafowych jest jedyną koncepcją rozwiązania, która spełnia Znakową Sprawiedliwość i Znakową Efektywność Składowych.*

Stosując formułę semiwartości do gry f/G^\pm , możemy zdefiniować naturalne rozszerzenie dowolnej semiwartości do znakowanych gier grafowych.

W pracy przedstawiamy kilka wyników algorytmicznych dla tego modelu.

Po pierwsze, proponujemy ogólny algorytm do obliczania wartości Myersona dla znakowanych gier grafowych, który działa w czasie $O(|\mathcal{F}| \cdot |G^\pm|)$. Nasz algorytm jest bardziej ogólny, ponieważ może być użyty do obliczenia dowolnej semiwartości w tym modelu.

Dodatkowo łączymy znakowane gry grafowe z grami głosowania ważonego. Gra jest *grą głosowania ważonego* (ang. *weighted voting game*), jeśli można ją zdefiniować przy użyciu listy nieujemnych wartości $[q; w_1, \dots, w_n]$, gdzie q to próg, a w_i to waga gracza i , która może być interpretowana jako liczba głosów, jakie gracz ma. Koalicja S wygrywa, jeśli łączna waga jej członków jest równa lub przekracza próg. Z kolei koalicja S przegrywa, jeśli łączna waga jej członków jest mniejsza od progu. Wszystkie wygrywające koalicje mają wartość 1, a przegrywające wartość 0.

Złożoność obliczeniowa koncepcji rozwiązania w grach głosowania ważonego była intensywnie badana w literaturze. Deng i Papadimitriou [15] pokazali, że obliczanie wartości Shapleya w grach głosowania ważonego jest $\#P$ -zupełne. Jednakże, zakładając, że wagi i próg są liczbami naturalnymi, wartość Shapleya może być obliczana w czasie pseudowielomianowym [31].

Łącząc znakowane gry grafowe i gry głosowania ważonego otrzymujemy *znakowane gry grafowe głosowania ważonego*. W tym modelu gra jest w pełni określona przez listę nieujemnych wartości $[q; w_1, \dots, w_n]$ oraz graf znakowany G^\pm .

Benati et al. [5] rozważali (nieznakowane) gry grafowe głosowania ważonego i udowodnili, że obliczanie wartości Shapleya w takich grach jest silnie $\#P$ -trudne. W naszej pracy dowodzimy, że jeśli graf znakowany ma ograniczoną szerokość drzewiastą, to dowolna semiwartość może być obliczona w czasie pseudowielomianowym.

Twierdzenie 6. *Dla każdego ustalonego d , semiwartość φ jednego gracza w znakowanej grze grafowej głosowania ważonego, w której szerokość drzewiasta grafu znakowanego wynosi co najwyżej d , może być obliczona w czasie $O(2^{d^2+3d}dn^5q^2 + 2^{d^3}n)$, gdzie q to próg gry głosowania ważonego.*

Nasz algorytm pozwala na obliczanie indeksów siły w standardowych grach grafowych głosowania ważonego, co stanowi nowy wynik dla tego klasycznego modelu.

Ponadto rozszerzamy nasz model, rozważając sojusze między graczami. W tym celu korzystamy z modelu *zadanej a priori struktury koalicyjnej* $P = \{T_1, \dots, T_k\}$, zaproponowanego przez Owena [42], który zakłada, że grupy T_1, \dots, T_k tworzą niepodzielne koalicje. Ma to wpływ na istotność poszczególnych graczy. Dlatego Owen zaproponował modyfikację wartości Shapleya, znaną jako *wartość Owena*.

Wartość Owena nie jest semiwartością. W pracy pokazujemy jednak analogiczne wyniki dla wartości Owena. W szczególności opracowujemy algorytm, który oblicza wartość Owena jednego gracza w czasie $O(|\mathcal{FS}_i \cup \mathcal{NFS}_i| \cdot |G^\pm|)$. Zbiory \mathcal{FS}_i i \mathcal{NFS}_i są podzbiorami możliwych koalicji, które pojawiają się w formule na wartość Owena i zawierają lub sąsiadują z graczem i . Ponadto proponujemy pseudowielomianowy algorytm obliczania wartości Owena w znakowanych grach grafowych głosowania ważonego, w których szerokość drzewiasta grafu znakowanego jest ograniczona.

4.5 Podsumowanie

Załączona kolekcja prac bada miary istotności w sieciach i grach koalicyjnych.

Po pierwsze, przedstawiliśmy aksjomatyczne charakteryzacje dwóch klasycznych miar centralności: centralności bliskości i PageRanka. Dla centralności bliskości zaproponowaliśmy nowy aksjomat nazwany Porównaniem Większościowym, który łączy analizę centralności oraz teorię głosowania. Pokazaliśmy, że ten aksjomat jednoznacznie charakteryzuje centralność bliskości w klasie centralności opartych na dystansach. W przypadku PageRanka opracowaliśmy pierwszą aksjomatyczną charakteryzację, która składa się z pięciu aksjomatów niezmienniczych oraz prostego warunku brzegowego.

Po drugie, analizowaliśmy teoriogrowe miary centralności. Aksjomatycznie zdefiniowaliśmy nową miarę centralności, zwaną centralnością łączenia, która określa znaczenie wierzchołka w utrzymaniu grafu spójnym. Dowiedliśmy, że centralność łączenia posiada wiele pożądanых własności i przeprowadziliśmy jej analizę algorytmiczną. Dodatkowo pokazaliśmy, że każdą miarę centralności można uzyskać jako teoriogrową miarę centralności. Jednakże naturalne klasy teoriogrowych miar centralności można scharakteryzować aksjomatem Sprawiedliwości i jego wzmocnieniami.

Po trzecie, zbadaliśmy koncepcje rozwiązań w dwóch rozszerzeniach klasycznego modelu gier koalicyjnych. W grach z efektami zewnętrznymi analizowaliśmy złożoność obliczeniową rozszerzeń wartości Shapleya w zwięźle reprezentowanych grach. Ponadto rozszerzyliśmy gry grafowe Myersona na grafy znakowane, które pozwalają modelować zarówno pozytywne jak i negatywne relacje między graczami. Korzystając z podejścia aksjomatycznego, rozszerzyliśmy wartość Myersona na ten model i opracowaliśmy algorytm dla gier ogólnych oraz gier głosowania ważonego.

5 Aktywność naukowa

W latach 2014–15, pracowałem na Uniwersytecie Kiusiu w projekcie, którego kierownikiem był Makoto Yokoo. Moje badania koncentrowały się na reprezentacjach dla gier z efektami zewnętrznymi, grach grafowych oraz teoriogrowych miarach centralności. Część wyników z prac [A], [B] i [C] została uzyskana podczas tego pobytu.

Ponadto byłem profesorem wizytującym na Uniwersytecie Paris-Dauphine przez 1 miesiąc w 2018 roku. Podczas tego pobytu współpracowałem ze Stefano Morettim oraz Julienem Lescą nad miarami centralności opartymi na skojarzeniach w grafie.

6 Osiągnięcia dydaktyczne, organizacyjne oraz popularyzujące naukę

6.1 Osiągnięcia dydaktyczne

6.1.1 Prowadzone zajęcia

Wszystkie na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

- *Teoria Gier Koalicyjnych* (wcześniej: *Algorytmiczna Teoria Gier Koalicyjnych*). Wykłady i ćwiczenia w latach 2012/13, 2013/14, 2015/16, 2018/19, 2019/20, 2020/21 oraz wykłady w latach 2021/22 i 2022/23. Jestem samodzielnym koordynatorem tego wykładu od roku 2018/19.
- *Wstęp do Analizy Sieci Społecznych*. Wykład oraz ćwiczenia w latach 2018/19, 2019/20, 2020/21. Byłem współkoordynatorem tego wykładu.
- *Matematyka Dyskretna*. Ćwiczenia w latach 2010/11, 2011/12, 2013/14, 2017/18, 2018/19, 2019/20, 2020/21, 2021/22, 2022/23. Moje ćwiczenia były wybrane najlepszymi ćwiczenia na wydziale w roku 2013/14.
- *Bazy Danych*. Laboratoria w latach 2010/11, 2011/12, 2013/14, 2015/16.
- *Wstęp do Programowania*. Ćwiczenia i laboratoria w roku 2015/16.
- *Teoriogrowe Podejście do Analizy Sieci Społecznych*. Ćwiczenia w roku 2015/16.

6.1.2 Materiały dydaktyczne

Jestem autorem 23 filmów dostępnych na platformie Youtube tłumaczących pojęcia Matematyki Dyskretnej (URL: <https://youtube.com/@oskarski>). Kanał ma ponad 1000 subskrybentów, a filmy w sumie ponad 100 000 wyświetleń z ostatnich 3 lat.

6.1.3 Opieka promotorska

- Doktoranci:
 - o Tomasz Wąs – byłem promotorem pomocniczym (promotor główny: Marcin Dziubiński)
Rozprawa: *Axiomatization of the Walk-Based Centrality Measures*
Data obrony: 08.07.2022 / Data nadania: 29.09.2022
Praca obroniona z wyróżnieniem.

Tomasz Wąs otrzymał wyróżnienie PSSI w konkursie na najlepszą polską pracę doktorską ze Sztucznej Inteligencji w roku 2022.

– Magistranci:

- Natalia Kucharczuk, *Axiomatization of PageRank for Edges*, data obrony: 07.07.2023 (na podstawie *PageRank for Edges: Axiomatic Characterization*, AAAI-22).
- Wiktoria Kośny, *Axiomatization of Medial Centralities*, data obrony: 07.07.2022 (na podstawie *Axiomatic Analysis of Medial Centrality Measures*, AAMAS-23)
- Julia Nuszel, *System do oceny siły graczy w grach głosowania ważonego ograniczonych grafem*, data obrony: 28.12.2021
- Paweł Bieliński, *Indeksy witalności jako teoriogrowe miary centralności*, data obrony: 28.12.2021
- Magdalena Grodzińska, *Measuring the quality of public transport using network analysis*, data obrony: 13.12.2021

– Licencjat:

- Mateusz Zacharecki, *Grupowa Miara Łączenia*, data obrony: 07.07.2023

6.2 Osiągnięcia organizacyjne

Byłem lokalnym organizatorem konferencji *Forum Informatyki Teoretycznej 2017* w Warszawie.

6.3 Popularyzacja

- Od 02.2021 jestem edytorem *Delta* – polskiego miesięcznika popularnonaukowego wydawanego przez Uniwersytet Warszawski.
- Otrzymałem *Medal Filca* za najlepszą prezentację na 66. Szkole Matematyki Poglądowej, 2023.
- Artykuły popularnonaukowe:
 - *Algorytm magicznych piątek*, Delta 07/2023
 - *Jak pan Marek wybierał gospodarza*, Delta 04/2023
 - *Czarna skrzynka*, Delta 02/2023
 - *Jak podzielić lody, czyli o nukleolusie*, Delta 04/2022
 - *Klucze, skarbonki, młotek i superzapis*, Delta 02/2022

- *Problem bankructwa z Talmudu*, Delta 10/2021
- *O tym, jak użyć królików doświadczalnych w matematyce*, Delta 08/2021
- *Gry głosowania ważonego*, Delta 11/2020
- *Rozbijanie sieci terrorystycznych za pomocą teorii gier*, Delta 11/2016
- Wykłady popularnonaukowe:
 - *Tajemnica z Talmudu*, Szkoła Matematyki Poglądowej, 25.08.2023
 - *Czemu lew jest groźny?*, Festiwal Nauki, 24.09.2022
 - *Teoria Gier w Sztucznej Inteligencji* – seria 8 wykładów dostępnych na Youtube na kanale MAP - Mistrzostwa w Algorytmice i Programowaniu, 09.05.2022
 - *Tajemnica z Talmudu*, Festiwal Nauki, 25.09.2021
 - *Jak użyć królików doświadczalnych w matematyce*, Dzień Delty, 21.05.2021
 - *Tajemnica z Talmudu*, Dzień Delty, 21.05.2021
 - *Interpretacje kombinatoryczne, czyli o tym, jak użyć królików doświadczalnych w matematyce*, Festiwal Nauki, 26.09.2018
 - *Czy matematyka może zlikwidować sieci terrorystyczne?*, Festiwal Nauki, 27.09.2017
 - *Connecting the dots*, Talk'n'Roll, 26.09.2017
 - *O tym, co łączy koty w czapkach z sieciami terrorystycznymi*, Dzień Inspiracji w Staszicu, 21.06.2017
 - *Kropka w kropkę*, TEDxWarsaw, 23.03.2017
- Byłem współorganizatorem *Festiwalu Nauki* na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego w latach 2021, 2022 i 2023.

7 Inne istotne osiągnięcia

- 2021: Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców.
- 2019: Grant Opus 2018/31/B/ST6/03201 z Narodowego Centrum Nauki.
- 2016: Grant Sonata 2015/19/D/ST6/03113 z Narodowego Centrum Nauki.
- 2016: Grant Homing 2016-1/7 z Fundacji na rzecz Nauki Polskiej.
- 2015: Nagroda specjalna jury PSSI za najlepszą teoretyczną pracę doktorską ze Sztucznej Inteligencji w roku 2015.

Literatura

- [1] Alon Altman and Moshe Tennenholtz. Ranking systems: the PageRank axioms. In *Proceedings of the 6th ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, pages 1–8, 2005.
- [2] Rafael Amer and José Miguel Giménez. A connectivity game for graphs. *Mathematical Methods of Operations Research*, 60(3):453–470, 2004.
- [3] Stefano Battiston, Michelangelo Puliga, Rahul Kaushik, Paolo Tasca, and Guido Caldarelli. Debtrank: Too central to fail? financial networks, the fed and systemic risk. *Scientific reports*, 2(1):541, 2012.
- [4] Alex Bavelas. Communication patterns in task-oriented groups. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 22(6):725–730, 1950.
- [5] Stefano Benati, Romeo Rizzi, and Craig Tovey. The complexity of power indexes with graph restricted coalitions. *Mathematical Social Sciences*, 76:53–63, 2015.
- [6] Aruna Prem Bianzino, Claude Chaudet, Dario Rossi, Jean-Louis Rougier, and Stefano Moretti. The green-game: Striking a balance between qos and energy saving. In *Proceedings of the 23rd International Teletraffic Congress (ITC)*, pages 262–269, 2011.
- [7] Francis Bloch, Matthew O. Jackson, and Pietro Tebaldi. Centrality measures in networks. Available at SSRN 2749124, 2019.
- [8] Paolo Boldi and Sebastiano Vigna. Axioms for centrality. *Internet Mathematics*, 10(3-4):222–262, 2014.
- [9] Johan Bollen, Marko A. Rodriguez, and Herbert Van de Sompel. Journal status. *Scientometrics*, 69(3):669–687, 2006.
- [10] Phillip Bonacich. Factoring and weighting approaches to status scores and clique identification. *Journal of Mathematical Sociology*, 2(1):113–120, 1972.
- [11] Ulrik Brandes, Christian Laußmann, and Jörg Rothe. Voting for centrality. In *Proceedings of the 21st International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems*, pages 1554–1556, 2022.
- [12] Andrey Churkin, Janusz Bialek, David Pozo, Enzo Sauma, and Nikolay Korgin. Review of cooperative game theory applications in power system expansion planning. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 145:111056, 2021.
- [13] Geoffroy De Clippel and Roberto Serrano. Marginal contributions and externalities in the value. *Econometrica*, 76(6):1413–1436, 2008.

- [14] Anthony Dekker. Conceptual distance in social network analysis. *Journal of Social Structure*, 6(3):31, 2005.
- [15] Xiaotie Deng and Christos H. Papadimitriou. On the complexity of cooperative solution concepts. *Mathematics of Operations Research*, 19(2):257–266, 1994.
- [16] Vianney Dequiedt and Yves Zenou. Local and consistent centrality measures in parameterized networks. *Mathematical Social Sciences*, 88:28–36, 2017.
- [17] Barry Edward Feldman. *Bargaining, coalition formation, and value*. PhD thesis, State University of New York at Stony Brook, 1996.
- [18] Linton C. Freeman. Centrality in social networks: Conceptual clarification. *Social Networks*, 1(3):215–239, 1979.
- [19] Manuj Garg. Axiomatic foundations of centrality in networks. Available at SSRN 1372441, 2009.
- [20] Roger Guimera, Stefano Mossa, Adrian Turtschi, and LA.Nunes Amaral. The worldwide air transportation network: Anomalous centrality, community structure, and cities’ global roles. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 102(22):7794–7799, 2005.
- [21] Cheng-Cheng Hu and Yi-You Yang. An axiomatic characterization of a value for games in partition function form. *SERIEs*, 1(4):475–487, 2010.
- [22] Samuel Ieong and Yoav Shoham. Marginal contribution nets: A compact representation scheme for coalitional games. In *Proceedings of the 6th ACM Conference on Electronic Commerce (ACM-EC)*, pages 193–202, 2005.
- [23] Gábor Iván and Vince Grolmusz. When the web meets the cell: using personalized PageRank for analyzing protein interaction networks. *Bioinformatics*, 27(3):405–407, 2010.
- [24] Matthew O. Jackson. A survey of network formation models: stability and efficiency. In *Group Formation in Economics: Networks, Clubs, and Coalitions*, pages 11–49. Cambridge University Press: Cambridge, MA, USA, 2005.
- [25] Mitri Kitti. Axioms for centrality scoring with principal eigenvectors. *Social Choice and Welfare*, 46(3):639–653, 2016.
- [26] Johannes Klicpera, Aleksandar Bojchevski, and Stephan Günnemann. Predict then propagate: Graph neural networks meet personalized pagerank. *arXiv preprint arXiv:1810.05997*, 2018.

- [27] Roy Lindelauf, Herbert Hamers, and Bart Husslage. Cooperative game theoretic centrality analysis of terrorist networks: The cases of Jemaah Islamiyah and Al Qaeda. *European Journal of Operational Research*, 229(1):230–238, 2013.
- [28] Susana Lopez, Elisenda Molina, Martha Saboya, and Juan Tejada. The position value as a centrality measure in social networks. *arXiv preprint arXiv:2303.00695*, 2023.
- [29] Scott M Lundberg and Su-In Lee. A unified approach to interpreting model predictions. In *Advances in Neural Information Processing Systems*, pages 4765–4774, 2017.
- [30] Inés Macho-Stadler, David Pérez-Castrillo, and David Wettstein. Sharing the surplus: An extension of the Shapley value for environments with externalities. *Journal of Economic Theory*, 135(1):339–356, 2007.
- [31] Tomomi Matsui and Yasuko Matsui. A survey of algorithms for calculating power indices of weighted majority games. *Journal-Operations Research Society of Japan*, 43:71–86, 2000.
- [32] Ben McQuillin. The extended and generalized Shapley value: Simultaneous consideration of coalitional externalities and coalitional structure. *Journal of Economic Theory*, 144(2):696–721, 2009.
- [33] Reshef Meir, Jeffrey S. Rosenschein, and Enrico Malizia. Subsidies, stability, and restricted cooperation in coalitional games. In *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 301–306, 2011.
- [34] Tomasz P. Michalak, Dorota Marciniak, Marcin Szamotulski, Talal Rahwan, Micheal Wooldridge, Peter McBurney, and Nicholas R. Jennings. A logic-based representation for coalitional games with externalities. In *Proceedings of the 9th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 125–132, 2010.
- [35] Tomasz P. Michalak, Talal Rahwan, Dorota Marciniak, Marcin Szamotulski, and Nicholas R. Jennings. Computational aspects of extending the Shapley value to coalitional games with externalities. In *Proceedings of the 19th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*, pages 197–202, 2010.
- [36] Tomasz P. Michalak, Karthik V. Aadithya, Piotr L. Szczepański, Balaraman Ravindran, and Nicholas R. Jennings. Efficient computation of the Shapley value for game-theoretic network centrality. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 46: 607–650, 2013.

- [37] Stefano Moretti, Vito Fragnelli, Fioravante Patrone, and Stefano Bonassi. Using coalitional games on biological networks to measure centrality and power of genes. *Bioinformatics*, 26(21):2721–2730, 2010.
- [38] Roger B. Myerson. Graphs and cooperation in games. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2(3):225–229, 1977.
- [39] Roger B. Myerson. Values of games in partition function form. *International Journal of Game Theory*, 6:23–31, 1977.
- [40] Roger B. Myerson. Conference structures and fair allocation rules. *International Journal of Game Theory*, 9:169–82, 1980.
- [41] Ramasuri Narayanam, Oskar Skibski, Hemank Lamba, and Tomasz P. Michalak. A Shapley value-based approach to determine gatekeepers in social networks with applications. In *Proceedings of the 21st European Conference on Artificial Intelligence (ECAI)*, pages 651–656, 2014.
- [42] Guillermo Owen. Multilinear extensions of games. *Management Science*, 18(5-part-2):64–79, 1972.
- [43] Lawrence Page, Sergey Brin, Rajeev Motwani, and Terry Winograd. The PageRank citation ranking: bringing order to the web. Technical report, Stanford InfoLab, 1999.
- [44] Ignacio Palacios-Huerta and Oscar Volij. The measurement of intellectual influence. *Econometrica*, 72(3):963–977, 2004.
- [45] Kim Hang Pham Do and Henk Norde. The Shapley value for partition function form games. *International Game Theory Review*, 9(02):353–360, 2007.
- [46] Michelina Pusceddu, Alessandro Cini, Simona Alberti, Emanuele Salaris, Panagiotis Theodorou, Ignazio Floris, and Alberto Satta. Honey bees increase social distancing when facing the ectoparasite varroa destructor. *Science Advances*, 7(44):eabj1398, 2021.
- [47] Filippo Radicchi. Who is the best player ever? a complex network analysis of the history of professional tennis. *PLOS One*, 6(2):e17249, 2011.
- [48] Yannick Rochat. Closeness centrality extended to unconnected graphs: The harmonic centrality index. In *ASNA*, 2009.
- [49] Josep A. Rodríguez. *The March 11th terrorist network: In its weakness lies its strength*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, 2005.
- [50] Jeffrey S. Rosenschein and Gilad Zlotkin. *Rules of Encounter: Designing Conventions for Automated Negotiation among Computers*. MIT Press, Massachusetts, USA, 1994.

- [51] Tuomas Sandholm, Kate Larson, Martin Andersson, Onn Shehory, and Fernando Tohmé. Coalition structure generation with worst case guarantees. *Artificial Intelligence*, 111(1–2):209–238, 1999.
- [52] David Schoch and Ulrik Brandes. Re-conceptualizing centrality in social networks. *European Journal of Applied Mathematics*, 27(6):971–985, 2016.
- [53] Abigail See, Yoram Bachrach, and Pushmeet Kohli. The cost of principles: Analyzing power in compatibility weighted voting games. In *Proceedings of the 13th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems (AAMAS)*, pages 37–44, 2014.
- [54] Lloyd S. Shapley. A value for n-person games. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors, *Contributions to the Theory of Games*, volume II, pages 307–317. Princeton University Press, 1953.
- [55] Lloyd S. Shapley and Martin Shubik. A method for evaluating the distribution of power in a committee system. *American Political Science Review*, 48(03):787–792, 1954.
- [56] Onn Shehory and Sarit Kraus. Methods for task allocation via agent coalition formation. *Artificial intelligence*, 101(1-2):165–200, 1998.
- [57] Oskar Skibski. Vitality indices are equivalent to induced game-theoretic centralities. In Zhi-Hua Zhou, editor, *Proceedings of the 30th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 398–404. International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, 2021.
- [58] Oskar Skibski, Tomasz P. Michalak, and Michael Wooldridge. The Stochastic Shapley value for games with externalities. *Games and Economic Behavior*, 108:65–80, 2018.
- [59] Oskar Skibski, Talal Rahwan, Tomasz P. Michalak, and Michael Wooldridge. Enumerating connected subgraphs and computing the Myerson and Shapley values in graph-restricted games. *ACM Transactions on Intelligent Systems and Technology*, 10(2):15:1–15:25, 2019.
- [60] Oskar Skibski, Tomasz P. Michalak, Yuko Sakurai, Michael Wooldridge, and Makoto Yokoo. Partition decision trees: A representation for efficient computation of the Shapley value extended to games with externalities. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, 34(1):11, 2020.
- [61] Giora Slutzki and Oscar Volij. Scoring of web pages and tournaments—axiomatizations. *Social choice and welfare*, 26(1):75–92, 2006.
- [62] Jadwiga Sosnowska and Oskar Skibski. Attachment centrality for weighted graphs. In *Proceedings of the 27th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)*, pages 416–422, 2017.

- [63] Adam Telek. Power networks: A network approach to voting theory. *European Public Choice Society*, 2017, 2017.
- [64] Maksim Tsvetovat, Katia Sycara, Yian Chen, and James Ying. Customer coalitions in electronic markets. In *International Workshop on Agent-Mediated Electronic Commerce*, pages 121–138. Springer, 2000.
- [65] René van den Brink and Robert P. Gilles. Measuring domination in directed networks. *Social Networks*, 22(2):141–157, 2000.
- [66] René van den Brink, Peter Borm, Ruud Hendrickx, and Guillermo Owen. Characterizations of the β - and the degree network power measure. *Theory and Decision*, 64(4):519–536, 2008.
- [67] Zhifang Wang, Anna Scaglione, and Robert J. Thomas. Electrical centrality measures for electric power grid vulnerability analysis. In *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5792–5797, 2010.
- [68] Jianshu Weng, Ee-Peng Lim, Jing Jiang, and Qi He. Twitterrank: finding topic-sensitive influential twitterers. In *Proceedings of the 3rd ACM International Conference on Web Search and Data Mining (WSDM)*, pages 261–270, 2010.
- [69] Tomasz Wąs and Oskar Skibski. An axiomatization of the eigenvector and Katz centralities. In *Proceedings of the 32nd AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*, pages 1258–1265, 2018.
- [70] Fang Wu, Bernardo A Huberman, Lada A Adamic, and Joshua R Tyler. Information flow in social groups. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 337(1-2): 327–335, 2004.
- [71] Sang-Seung Yi. Endogenous formation of economic coalitions: A survey on the partition function approach. In *The Endogenous Formation of Economic Coalitions*, pages 80–127. Edward Elgar, London, UK, 2003.

Oskar Skibski