

Autoreferat

1 Imię i nazwisko.

Mikołaj Krupski

2 Posiadane dyplomy, stopnie naukowe.

2010 **magister matematyki**,

Uniwersytet Wrocławski,

Wydział Matematyki i Informatyki,

Tytuł pracy magisterskiej: *Miary na przestrzeniach zwartych spełniających pierwszy aksjomat przeliczalności*, promotor: prof. dr hab. Grzegorz Plebanek

2014 **doktor nauk matematycznych**,

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

Tytuł rozprawy: *Topologiczne i liniowe własności przestrzeni funkcji ciągłych*, promotor: prof. dr hab. Witold Marciszewski

3 Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych.

2014–2016 **Asystent**

Uniwersytet Warszawski,

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

od 2016 **Adiunkt**

Uniwersytet Warszawski,

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

01.09.2016–31.08.2018 **Postdoctoral Fellow**

University of Pittsburgh

Department of Mathematics

01.01.2023–31.12.2024 **Investigador Distiguído (María Zambrano Fellow)**

Universidad de Murcia

Facultad de Matemáticas

4 Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy

Osiągnięcie naukowe: Cykl powiązanych tematycznie artykułów naukowych pt.

O rozróżnianiu przestrzeni funkcji ciągłych.

Publikacje wchodzące w skład cyklu:

- [H1] M. Krupski, W. Marciszewski, *A metrizable X with $C_p(X)$ not homeomorphic to $C_p(X) \times C_p(X)$* , Israel. J. Math. 214, No. 1, 245–258 (2016).
- [H2] M. Krupski, *On the weak and pointwise topologies in function spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat., RACSAM 110, No. 2, 557–563 (2016).
- [H3] M. Krupski, W. Marciszewski, *On the weak and pointwise topologies in function spaces II*, J. Math. Anal. Appl. 452, No. 1, 646–658 (2017).
- [H4] M. Krupski, *Linear homeomorphisms of function spaces and the position of a space in its compactification*, Canad. J. Math. 76, No. 6, 2151–2172 (2024).
- [H5] M. Krupski, *On κ -pseudocompactness and uniform homeomorphisms of function spaces*, Result. Math. 78, No. 4, Paper No. 154, 11 p. (2023).

4.1 Wstęp

Na początku omawiania uzyskanych wyników, ustalmy używaną poniżej terminologię. Dla przestrzeni Tichonowa X , przez $C_p(X)$ oznaczać będziemy przestrzeń wszystkich rzeczywistych funkcji ciągłych na X zaopatrzoną w topologię zbieżności punktowej. Natomiast, ilekroć przestrzeń K będzie zwarta, to symbolem $C_w(K)$ oznaczać będziemy przestrzeń Banacha $C(K)$ rozpatrywaną w topologii słabej.

Omawiane osiągnięcie naukowe wpisuje się w obszar badań współczesnej topologii mnogościowej zwany C_p -teorią, którego obiektem zainteresowań są przestrzenie $C_p(X)$. Systematyczne badanie tych przestrzeni zostało zapoczątkowane w latach siedemdziesiątych XX wieku, z jednej strony w związku z udanym programem klasyfikacji przestrzeni Banacha $C(K)$ funkcji ciągłych na zwartych przestrzeniach metrycznych K (por. [9], [19]), z drugiej zaś strony wynikami dotyczącymi topologicznych własności słabo-zwartych podzbiorów przestrzeni Banacha (por. [1], [10]). Wspomniane rezultaty dotyczą analizy funkcjonalnej ale do ich otrzymania niezbędne okazały się nietrywialne rozumowania topologiczne. W tym kontekście topologia zbieżności punktowej pojawia się w naturalny sposób, bowiem jako najslabsza ze wszystkich naturalnych topologii na zbiorze funkcji ciągłych, dopuszcza najwięcej zbiorów zwartych. W szczególności niesie ona w sobie informację o wszystkich klasach przestrzeni zwartych ważnych z punktu widzenia analizy funkcjonalnej (np. kompakty Eberleina, Gulki, Corsona). Uświadomienie sobie tego poskutkowało intensywnym badaniem przestrzeni topologicznych postaci $C_p(X)$. Pionierem tych badań był Aleksander Archangielski i skupiona wokół niego grupa naukowa na Uniwersytecie Moskiewskim. Monografia Archangielskiego [3] z końca lat osiemdziesiątych

XX w. oraz jego liczne artykuły przeglądowe (np. [4], [5], [6], [7]) ukazują dynamiczny rozwój C_p -teorii w pierwszych kilkunastu latach jej istnienia oraz wyznaczają najważniejsze kierunki badawcze na przyszłość. Tematyka badawcza wówczas zapoczątkowana wciąż pozostaje aktualna i jest dalej rozwijana. Świadczą o tym nowsze, obszernie monografie Tkaczuka [30], [31], [32], [33], książka van Milla [20] oraz artykuły przeglądowe, np. [34], [35].

Bez wątpienia bardzo istotnym zagadnieniem w całej topologii (a także w innych gałęziach matematyki) jest klasyfikacja przestrzeni topologicznych (czy ogólniej, obiektów matematycznych) polegająca między innymi na znajdowaniu sposobów ich rozróżniania. Nie inaczej rzecz się ma w teorii przestrzeni $C_p(X)$. I tutaj, od samego początku, jednym z głównych kierunków badawczych jest wypracowywanie metod pozwalających na rozróżnianie przestrzeni funkcyjnych od siebie. Niniejszy cykl publikacji dotyczy następujących czterech problemów, które dotyczą tego ważnego zagadnienia:

Problem 4.1. [6, Problem 4] *Czy dla każdej nieskończonej przestrzeni metrycznej X , przestrzeń $C_p(X)$ jest homeomorficzna ze swoim kwadratem kartezjańskim $C_p(X) \times C_p(X)$?*

Problem 4.2. [H2, str. 557] *Niech K będzie nieskończoną przestrzenią zwartą. Czy przestrzenie $C_p(K)$ i $C_w(K)$ muszą być niehomeomorficzne?*

Problem 4.3. [3, str. 3] *Założmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne. Jakie są wówczas wspólne własności topologiczne przestrzeni X i Y ?*

Problem 4.4. [3, str. 3] *Założmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są jednostajnie homeomorficzne. Jakie są wówczas wspólne własności topologiczne przestrzeni X i Y ?*

Poniżej wyjaśnimy dlaczego każdy z wymienionych problemów faktycznie dotyczy rozróżniania przestrzeni funkcyjnych. Omówimy też szczegółowo nasz wkład w próbę zrozumienia tych problemów. O wszystkich przestrzeniach poniżej będziemy zakładać, że są przestrzeniami Tichonowa.

4.2 O rozróżnianiu przestrzeni $C_p(X)$ i $C_p(X) \times C_p(X)$. Publikacja [H1].

W teorii przestrzeni funkcji ciągłych bardzo istotną rolę odgrywają pytania o faktoryzacyjne własności przestrzeni $C_p(X)$. Jest po temu kilka powodów. Przede wszystkim „dobre” własności faktoryzacyjne przestrzeni $C_p(X)$ (tj. możliwość rozkładu przestrzeni $C_p(X)$ na określony iloczyn kartezjański), w połączeniu z dobrze znanymi schematami dekompozycyjnymi i twierdzeniem Borsuka-Dugunji’ego, umożliwiają konstruowanie homeomorfizmów pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi (jest to podstawowa technika konstrukcji takich homeomorfizmów). Z drugiej strony, typowe przykłady nieskończone wymiarowych przestrzeni liniowo-topologicznych są homeomorficzne ze swoim kwadratem kartezjańskim. W szczególności, dość trudno wskazać przykład nieskończonej przestrzeni Tichonowa X , dla której przestrzeń funkcji ciągłych $C_p(X)$ nie byłaby homeomorficzna czy nawet liniowo homeomorficzna ze swoim kwadratem $C_p(X) \times C_p(X)$. Nadmienmy, że pierwszy przykład nieskończonej wymiarowej przestrzeni liniowo-topologicznej, która nie jest homeomorficzna ze swoim kwadratem został skonstruowany przez Pola [24] dopiero w 1984 roku (nie była to przestrzeń funkcji ciągłych). Warto w tym miejscu odnotować, że

iloczyn kartezjański $C_p(X) \times C_p(Y)$ dwóch przestrzeni funkcyjnych można rozpatrywać jako przestrzeń funkcyjną na sumie dyskretnej $X \oplus Y$. Innymi słowy, $C_p(X) \times C_p(Y)$ można w kanoniczny sposób utożsamić z przestrzenią $C_p(X \oplus Y)$. Pytanie o istnienie nieskończonej przestrzeni X takiej, że przestrzeń $C_p(X)$ jest topologicznie różna od swojego kwadratu kartezjańskiego, jest więc w istocie pytaniem o możliwość rozróżnienia od siebie przestrzeni $C_p(X)$ i $C_p(X \oplus X)$.

Pierwsze przykłady nieskończonych przestrzeni zwartych K , dla których $C_p(K)$ nie jest homeomorficzna z $C_p(K) \times C_p(K)$ zostały podane pod koniec lat osiemdziesiątych XX w. niezależnie przez Gulkę i Marciszewskiego [11], [16]. Ponieważ przykłady te były niemetryzowalne, więc Problem 4.1, postawiony przez Archangielskiego pod koniec lat osiemdziesiątych ubiegłego wieku, przyciągnął uwagę specjalistów.

Dość szybko zostały podane kontrprzykłady dla homeomorfizmów liniowych (Pol [25]) lub jednostajnych (van Mill, Pol, Pelant [21]) jednak pytanie dla homeomorfizmów pozostawało otwarte i było wielokrotnie powtarzane w artykułach przeglądowych (np. [7, Problem 25], [17, Problem 4.12], [23, Problem 1029]).

W pracy [H1] rozwiązujemy Problem 4.1 podając przykład przestrzeni metryzowalnej ośrodkowej (jest to pewien zero-wymiarowy podzbiór prostej rzeczywistej) B , takiej że przestrzeń $C_p(B)$ nie jest homeomorficzna ze swoim kwadratem $C_p(B) \times C_p(B)$. Dokładniej, przestrzeń B to tak zwany sztywny zbiór Bernsteina, który zdefiniujemy poniżej. Był on wcześniej wykorzystany przez Pola [25] w kontekście liniowych homeomorfizmów, do udowodnienia następującego twierdzenia:

Twierdzenie 4.5. *(Pol) Jeśli B jest sztywnym zbiorem Bernsteina, to przestrzenie $C_p(B)$ i $C_p(B) \times C_p(B)$ nie są liniowo homeomorficzne.*

Okazuje się, że w sformułowaniu powyższego twierdzenia, założenie o liniowości homeomorfizmu możemy opuścić:

Twierdzenie 4.6. *(Theorem 1.1 w [H1]) Jeśli B jest sztywnym zbiorem Bernsteina, to przestrzenie $C_p(B)$ i $C_p(B) \times C_p(B)$ nie są homeomorficzne.*

Metody użyte w pracy [25], do udowodnienia Twierdzenia 4.5 w sposób istotny wykorzystują liniowość odwzorowania pomiędzy przestrzeniami funkcyjnymi i bez tego założenia nie są dostępne. A zatem pomimo, że w sformułowaniu obu powyższych twierdzeń występuje ta sama przestrzeń, dowód Twierdzenia 4.6 wymagał nowych pomysłów.

Przypomnijmy teraz konstrukcję sztywnego zbioru Bernsteina B pochodzącą od Kuratowskiego [15]. Niech $\{(C_\alpha, f_\alpha) : \alpha < 2^\omega\}$ będzie numeracją wszystkich par (C, f) , gdzie C jest kopią zbioru Cantora w zbiorze liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, zaś $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą mającą nieprzeliczalny zbiór wartości $f(C)$ taki, że $f(C) \cap C = \emptyset$. Indukcyjnie wybieramy parami różne punkty $x_0, y_0, \dots, x_\alpha, y_\alpha, \dots$ takie, że $x_\alpha \in C_\alpha$ i $y_\alpha \in f(C_\alpha)$ dla $\alpha < 2^\omega$. Zbiór $B = \{x_\alpha : \alpha < 2^\omega\}$ jest *sztywnym zbiorem Bernsteina*. Jest to zbiór Bernsteina w tym sensie, że zarówno B jak i $\mathbb{R} \setminus B$ ma niepuste przecięcie z dowolną kopią zbioru Cantora na prostej rzeczywistej. Sztywność zbioru B rozumiana jest w sensie następującego faktu¹:

¹Fakt 4.7 został udowodniony w [H1]. Dowód jest jednak prostą modyfikacją dobrze znanego wcześniej podobnego faktu, gdzie w miejscu zbioru typu G_δ występuje zbiór otwarty.

Fakt 4.7. *Jeśli G jest niepustym podzbiorem B typu G_δ , to każda funkcja ciągła $f : G \rightarrow B$ jest identycznością na swój obraz lub jest stała na pewnym niepustym relatywnie otwartym podzbiorku zbioru G .*

Dowód Twierdzenia 4.6 opiera się na pewnym strukturalnym rezultacie udowodnionym wcześniej w [18]. Do jego sformułowania wygodnie będzie posługiwać się następującym oznaczeniem bazowego otoczenia zera w przestrzeni $C_p(X)$. Dla zbioru skończonego $A \subseteq X$ i dodatniej liczby naturalnej m kładziemy

$$O_X\left(A, \frac{1}{m}\right) = \{f \in C_p(X) : \forall x \in A \ |f(x)| < \frac{1}{m}\}.$$

Poniższe twierdzenie pochodzi z pracy [18]:

Twierdzenie 4.8. *Niech X i Y będą przestrzeniami metryzowalnymi. Niech $n \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $\Phi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ jest homeomorfizmem przeprowadzającym funkcję stałą równą zero na funkcję stałą równą zero. Wtedy przestrzeń Y możemy pokryć przeliczalnie wieloma zbiorami G_r typu G_δ , $r = 1, 2, \dots$ takimi, że*

Dla każdego $r = 1, 2, \dots$, istnieją funkcje ciągłe $f_1^r, \dots, f_{p_r}^r : G_r \rightarrow X$ oraz dodatnia liczba naturalna m takie, że, dla $y \in G_r$, mamy $\Phi\left(O_X\left(A, \frac{1}{m}\right)\right) \subseteq \overline{O_Y\left(y, \frac{1}{n}\right)}$, gdzie $A = \{f_1^r(y), \dots, f_{p_r}^r(y)\}$

Dowód Twierdzenia 4.6 polega na przeprowadzeniu rozumowania nie wprost. Zakładając, że istnieje homeomorfizm $\Phi : C_p(B) \rightarrow C_p(B \oplus B)$ możemy zastosować Twierdzenie 4.8. Mówiąc w pewnym uproszczeniu, korzystając ze sztywności zbioru B (por. Fakt 4.7) wnioskujemy, że funkcje ciągłe występujące w sformułowaniu Twierdzenia 4.8, po obcięciu do pewnego nieprzeliczalnego zbioru typu G_δ są identycznością lub są stałe. Pozwala to na lepszą kontrolę zachowania homeomorfizmu Φ .

Wciąż nie wiadomo, czy istnieje zwarty metryzowalny kontrprzykład na Problem 4.1. Jednak w przypadku homeomorfizmów liniowych odpowiedniego kontrprzykładu dostarcza praca Pola [25]. Jest to tak zwana krzywa Cooka, czyli jednowymiarowe metryczne kontinuum (tj. przestrzeń zwarta i spójna) M , sztywne w bardzo silnym sensie, a mianowicie, dla dowolnego podkontinuum $C \subseteq M$ każda funkcja ciągła $f : C \rightarrow M$ jest stała lub jest identycznością na swój obraz. Następujący rezultat został udowodniony w [25]:

Twierdzenie 4.9. *(Pol) Jeśli M jest krzywą Cooka, to przestrzenie $C_p(M)$ i $C_p(M) \times C_p(M)$ nie są liniowo homeomorficzne.*

W pracy [H1] wzmacniamy nieco powyższe twierdzenie uzyskując następujący rezultat:

Fakt 4.10. *(Proposition 5.5 w [H1]) Jeśli X jest krzywą Cooka lub sztywnym zbiorem Bernsteina, to nie istnieje ciągła liniowa surjekcja z przestrzeni $C_p(X)$ na przestrzeń $C_p(X) \times C_p(X)$.*

Z powyższego faktu możemy w nietrudny sposób uzyskać odpowiedź na (nieopublikowane) pytanie Leidermana czy dla nieskończonej zwartej metrycznej przestrzeni X , przestrzeń $C_p(X)$ odwzorowuje się w sposób ciągły i liniowy na przestrzeń $C_p(X \times X)$. Okazuje się, że tak być nie musi. Mianowicie zachodzi następujący fakt:

Fakt 4.11. *Jeśli M jest krzywą Cooka, to nie istnieje ciągła liniowa surjekcja z przestrzeni $C_p(M)$ na przestrzeń $C_p(M \times M)$.*

4.2.1 Wkład w powstanie publikacji.

Publikacja [H1] została napisana wspólnie z Witoldem Marciszewskim, niezbędne jest więc określenie mojego indywidualnego wkładu w jej powstanie. Ze względu na pracę Pola [25], sztywny zbiór Bernsteina był (obok krzywej Cooka) naturalnym kandydata-mi na kontrprzykład do Problemu 4.1; jego użycie było więc naturalne. Główny pomysł na rozwiązanie Problemu 4.1 oraz szkielet rozumowania zaprezentowanego w dowodzie Twierdzenia 1.1 w [H1] pochodzi ode mnie. Szczegóły i aspekty techniczne, np. [H1, Lemma 2.2] były dopracowywane wspólnie, w ramach dyskusji i wymiany pomysłów. Dwa fakty, których dowody można znaleźć w [H1, Section 5], tj. Proposition 5.3 i 5.4 pochodzą z pracy doktorskiej Witolda Marciszewskiego. Zdecydowaliśmy się na ich dołączenie gdyż nigdy nie były publikowane w języku angielskim. Dowód Proposition 5.5 w [H1] jest efektem wspólnej dyskusji przy tablicy.

4.3 O rozróżnianiu topologii punktowej i słabej w przestrzeniach funkcji ciągłych. Publikacje [H2] i [H3].

Dla przestrzeni zwartej K , zbiór $C(K)$ wyposażony w normę supremum, jest przestrzenią Banacha, którą zgodnie z tradycją oznaczać będziemy tak samo jak zbiór funkcji ciągłych przez $C(K)$. Oprócz topologii wyznaczonej przez normę supremum, w zbiorze $C(K)$ możemy rozważać dwie inne naturalne topologie: topologię słabą i topologię zbieżności punktowej. Tak jak wspomnieliśmy we wstępie, powstałe w ten sposób przestrzenie topologiczne oznaczamy odpowiednio przez $C_w(K)$ i $C_p(K)$. Nietrudno zauważyć, że dla nieskończonej przestrzeni zwartej K , przestrzeń Banacha $C(K)$ nie jest homeomorficzna ani z przestrzenią $C_w(K)$, ani z przestrzenią $C_p(K)$. Istotnie, przestrzeń $C(K)$ jest metryzowalna, natomiast $C_w(K)$ jest niemetryzowalna dla dowolnej nieskończonej przestrzeni zwartej K . Przestrzeń $C_p(K)$ jest metryzowalna jedynie dla przeliczalnych kompaktów K . Jednak, w odróżnieniu od przestrzeni Banacha $C(K)$, dla dowolnej nieskończonej przestrzeni zwartej K , $C_p(K)$ nie jest metryzowalna w sposób zupełny. Łatwo zauważyć, że jeśli K jest nieskończonym kompaktem, to topologia zbieżności punktowej jest istotnie słabsza od topologii słabej. Nie jest jednak jasne, czy przestrzenie $C_p(K)$ i $C_w(K)$ są zawsze (tj. dla dowolnej nieskończonej przestrzeni zwartej K) topologicznie różne. Tym zagadnieniem zajmujemy się w pracach [H2] i [H3] cyklu. Konkretniej, [H2] i [H3] są motywowane pytaniem zawartym w Problemie 4.2. Możemy zapytać nieco ogólniej:

Pytanie 4.12. *Czy przestrzenie $C_p(K)$ i $C_w(L)$ mogą być homeomorficzne dla pewnych nieskończonych przestrzeni zwartych K i L ?*

Problem 4.2 został sformułowany przez nas w [H2], natomiast jego ogólniejsza wersja w brzmieniu Pytania 4.12, w [H3]. Zarówno Problem 4.2 jak i Pytanie 4.12 w pełnej ogólności wciąż pozostają otwarte.

Dla przestrzeni zwartej K , przez $M(K)$ oznaczać będziemy przestrzeń znakowanych miar Radona na K . Na mocy twierdzenia Riesz o reprezentacji, możemy utożsamiać $M(K)$ z przestrzenią dualną $C(K)^*$. Możemy teraz zauważyć, że topologie słaba i zbieżności punktowej są ze sobą związane w następującym sensie: Dla przestrzeni zwartej K , przestrzeń $C_w(K)$ jest liniowo homeomorficzna z domkniętą liniową podprzestrzenią przestrzeni $C_p(B_{M(K)})$, gdzie $B_{M(K)}$ jest kulą jednostkową w przestrzeni $M(K)$.

Odnótujemy kilka przypadków, w których odpowiedź na Pytanie 4.2 jest (niemal) natychmiastowa. Wymienione niżej obserwacje pochodzą z [H3, rozdział 3] gdzie można znaleźć ich krótkie wyjaśnienia. Niech K będzie nieskończoną przestrzenią zwartą. Jeśli dodatkowo K jest:

- (1) przeliczalna lub
- (2) spełnia $|K| < |M(K)|$ lub
- (3) jest nieośrodkową przestrzenią, na której istnieje przeliczalnie wiele funkcyjnałów rozdzielaających punkty w $C(K)$ lub
- (4) jest przestrzenią rozproszoną, tzn. każdy niepusty podzbiór przestrzeni ma punkt relatywnie izolowany,

to wówczas $C_w(K)$ i $C_p(K)$ nie są homeomorficzne. Ponadto, jeśli na szukany w Pytaniu 4.12 homeomorfizm narzucimy dodatkowe wymagania, np. liniowość, to na tak zmodyfikowane pytanie w nietrudny sposób dostaniemy odpowiedź negatywną. Mianowicie następujący fakt odnotowaliśmy w [H3] (zob. Proposition 3.1 w [H3] oraz uwagę następującą po dowodzie tego faktu).

Fakt 4.13. *Dla dowolnych nieskończonych przestrzeni zwartych K i L , nie istnieje homeomorfizm pomiędzy $C_w(K)$ i $C_p(L)$, który jest jednostajnie ciągły.*

Jednak co ciekawe, w przypadku podstawowych nieprzeliczalnych przestrzeni metrycznych, takich jak np. przestrzeń Cantora $\{0, 1\}^\omega$ lub odcinek jednostkowy $[0, 1]$, odpowiedź na Problem 4.2 jest nieoczywista i jak się wydaje nie była znana. Aby sformułować główne rezultaty z prac [H2] i [H3] konieczne jest przypomnienie pewnych pojęć z teorii wymiaru.

Definicja 4.14. Przestrzeń normalna X jest C -przestrzenią jeśli dla każdego ciągu $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ złożonego z otwartych pokryć przestrzeni X , istnieje ciąg $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ złożony z rodzin parami rozłącznych zbiorów otwartych taki, że rodzina $\mathcal{V}_n$ jest wpisana w $\mathcal{U}_n$ i $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ jest pokryciem przestrzeni X .

Definicja 4.15. Przestrzeń normalna X jest (silnie) przeliczalnie wymiarowa jeśli daje się przedstawić jako przeliczalna suma (domkniętych) skończenie wymiarowych podprzestrzeni.

Oczywiście każda przestrzeń silnie przeliczalnie wymiarowa jest przeliczalnie wymiarowa. Wiadomo też, że każda metryzowalna przeliczalnie wymiarowa przestrzeń jest C -przestrzenią. W szczególności przestrzenie metryczne skończenie wymiarowe są C -przestrzeniami. W obrębie metrycznych kompaktów znane są przykłady C -przestrzeni, które nie są przeliczalnie wymiarowe oraz przykłady przestrzeni przeliczalnie wymiarowych ale nie w silnym sensie. Typowym przykładem metrycznego kompaktu, który nie jest C -przestrzenią jest kostka Hilberta $[0, 1]^\omega$.

Możemy teraz sformułować główny rezultat pracy [H2].

Twierdzenie 4.16. *[H2, Corollary 1] Jeśli K jest nieprzeliczalną metryzowalną zwartą C -przestrzenią, to przestrzenie funkcyjne $C_w(K)$ i $C_p(K)$ nie są homeomorficzne.*

Założenie o nieprzeliczalności kompaktu K możemy w istocie zastąpić wymaganiem, że K jest przestrzenią nieskończoną, gdyż jak już wcześniej odnotowaliśmy, w przypadku gdy K jest nieskończonym kompaktem przeliczalnym, odpowiedź na Pytanie 4.12 jest łatwa do udzielenia. W szczególności, Twierdzenie 4.16 obejmuje przypadki takich przestrzeni jak kostka Cantora $\{0, 1\}^\omega$, czy kostki skończonego wymiaru $[0, 1]^n$. W istocie, na mocy klasycznego twierdzenia Miljutina [19], Twierdzenie 4.16 sprowadza się do następującego:

Twierdzenie 4.17. *[H2, Theorem 2] Jeśli K jest zwartą metryzowalną C -przestrzenią, to $C_p(K)$ i $C_w([0, 1]^\omega)$ nie są homeomorficzne.*

Dowód powyższego twierdzenia wykorzystuje pewne idee Marciszewskiego z [18], m. in. wersję wspomnianego już wcześniej Twierdzenia 4.8. Wymagają one jednak modyfikacji, gdyż w odróżnieniu do pracy [18] mamy tu do czynienia ze słabą topologią. Wymaga to użycia miar w miejsce punktów przestrzeni.

W pracy [H3], wspólnej z W. Marciszewskim, uzyskujemy następujące częściowe uogólnienie Twierdzenia 4.16, nawiązujące do Pytania 4.12:

Twierdzenie 4.18. *[H3, Theorem 4.1] Jeśli K jest silnie przeliczalnie-wymiarową przestrzenią zwartą, zaś L kompaktem, dla którego $C_w(L)$ jest homeomorficzna z $C_w(M) \times E$, gdzie M jest pewną nieprzeliczalną przestrzenią metryzowalną zwartą, a E pewną przestrzenią topologiczną, to wówczas $C_p(K)$ i $C_w(L)$ nie są homeomorficzne.*

W powyższym twierdzeniu, założenie o przestrzeni L wydaje się być dosyć techniczne. Jednak, jak nietrudno się przekonać, jest ono spełnione, np. dla klasy przestrzeni zwartych zawierających nieprzeliczalną metryzowalną domkniętą podprzestrzeń, równoważnie: topologiczną kopię zbioru Cantora (zob. [H3, Corollary 4.2]). Z jednej strony Twierdzenie 4.18 jest o tyle ogólniejsze od Twierdzenia 4.16, że obejmuje także niektóre przestrzenie niemetryzowalne. Z drugiej jednak strony wymaga nieco mocniejszego założenia o kompacie K : silna przeliczalna-wymiarowość w miejsce bycia C -przestrzenią. Interesującą klasą przestrzeni zwartych, do których można stosować Twierdzenie 4.18 jest klasa kompaktów Valdivii. Przypomnijmy, że dla zbioru Γ , definiujemy Σ -iloczyn prostych $\Sigma(\Gamma)$ jako

$$\Sigma(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^\Gamma : |\{\gamma \in \Gamma : x_\gamma \neq 0\}| \leq \aleph_0\}.$$

Przestrzeń zwartą K nazywamy *kompaktem Valdivii* jeśli, dla pewnego Γ , istnieje zanurzenie $i : K \hookrightarrow \mathbb{R}^\Gamma$ takie, że $i(K) \cap \Sigma(\Gamma)$ jest gęsty w $i(K)$. Klasa kompaktów Valdivii jest istotnie większa niż klasa kompaktów Corsona, tj. przestrzeni zwartych homeomorficznych z podzbiorem pewnego Σ -iloczynu prostych rzeczywistych. Jako wniosek z Twierdzenia 4.18 możemy w szczególności wyprowadzić:

Wniosek 4.19. *Jeśli K jest nieskończonym, skończenie wymiarowym kompaktem Valdivii, to $C_p(K)$ i $C_w(K)$ nie są homeomorficzne.*

Istotnie, jest to natychmiastowa konsekwencja Twierdzenia 4.18, uwag poczynionych na początku tego rozdziału i następującej interesującej dychotomii (zob. [H3, Proposition 4.4]): *Każdy kompakt Valdivii jest albo rozproszony, albo zawiera nieprzeliczalną domkniętą metryzowaną podprzestrzeń.* Inną ciekawą przestrzenią (niebędącą kompaktem Valdivii), do której ma zastosowanie Twierdzenie 4.18 jest strzałka podwójna czyli przestrzeń $((0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\})$ zaopatrzoną w topologię porządkową pochodzącą od porządku leksykograficznego (zob. [H3, Proposition 4.6]).

4.3.1 Własność (B)

Przyjrzyjmy się nieco bliżej przypadkowi wspomnianemu na początku rozdziału, w punkcie (4), tj. sytuacji gdy kompakt K jest przestrzenią rozproszoną. Przypomnijmy raz jeszcze, że przestrzeń topologiczna X jest *rozproszona*, gdy każdy niepusty podzbiór X ma punkt relatywnie izolowany. Przestrzeń X jest *Fréchet-Urysohna* gdy dla dowolnego $A \subseteq X$ i dowolnego punktu x należącego do domknięcia A , istnieje ciąg $(x_n)_{n \in \omega}$ punktów ze zbioru A zbieżny do x . Dobrze wiadomo, że przestrzeń zwarta K jest rozproszona wtedy i tylko wtedy, gdy $C_p(K)$ jest Fréchet-Urysohna (zob. [3, Theorem III.1.2]). Z kolei, $C_w(K)$ nigdy (tj. dla żadnej nieskończonej przestrzeni zwartej K) nie jest Fréchet-Urysohna. Mamy więc, że dla K będącego nieskończonym kompaktem rozproszonym, $C_p(K)$ i $C_w(K)$ nie są homeomorficzne. Okazuje się, że możemy powiedzieć więcej:

Twierdzenie 4.20. *[H3, Corollary 5.11 i Theorem 5.12] Załóżmy, że K i L są nieskończonymi przestrzeniami zwartymi. Jeśli L jest rozproszona, to $C_p(K)$ i $C_w(L)$ nie są homeomorficzne. Podobnie, jeśli K jest rozproszona, to $C_p(K)$ i $C_w(L)$ nie są homeomorficzne.*

Dowód Twierdzenia 4.20 wykorzystuje m.in. następującą własność przestrzeni topologicznej.

Definicja 4.21. Powiemy, że przestrzeń topologiczna X ma *własność (B)* jeśli istnieje przeliczalna rodzina $\{A_n \subseteq X : n \in \omega\}$ zbiorów domkniętych brzegowych taka, że dla każdego zbioru zwartego $K \subseteq X$ mamy $K \subseteq A_n$, dla pewnego $n \in \omega$.

Własność (B) została nam zasugerowana przez T. Banakha i pojawia się po raz pierwszy w pracy [H3], gdzie uzyskaliśmy pierwsze rezultaty na jej temat. Własność ta w naturalny sposób przysługuje nieskończeniom wymiarowym przestrzeniom Banacha rozważanym w słabej (bądź słabej* - dla przestrzeni dualnych) topologii. Istotnie, wystarczy przyjąć $A_n = nB_X$, gdzie B_X jest kulą jednostkową w przestrzeni Banacha X . A zatem, $C_w(K)$ zawsze ma własność (B), o ile K jest nieskończona. Jak wykazaliśmy w [H3], dla przestrzeni $C_p(K)$ zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.22. *[H3, Theorem 5.9] Dla dowolnej przestrzeni zwartej K następujące warunki są równoważne.*

- (a) K jest rozproszona,
- (b) $C_p(K)$ jest Fréchet-Urysohna,
- (c) $C_p(K)$ nie ma własności (B).

Równoważność (a) $\Leftrightarrow$ (b) powyżej była wcześniej znana. Natomiast implikacja (b) $\Rightarrow$ (c) jest prawdziwa nie tylko dla przestrzeni funkcyjnych ale dla dowolnej przestrzeni Tichonowa. Twierdzenie 4.22, z jednej strony daje nam własność topologiczną (inną niż własność Fréchet-Urysohna) pozwalającą rozróżnić topologię punktową od słabej na zbiorze funkcji ciągłych. Z drugiej strony charakteryzuje interesującą skądinąd własność (B) w przestrzeniach $C_p(K)$, gdzie K jest przestrzenią zwartą. Warto w tym miejscu zaznaczyć, że charakteryzacja własności (B) w przestrzeniach $C_p(X)$, gdzie X jest dowolną przestrzenią Tichonowa, o którą pytamy w [H3, Problem 5.10] została niedawno przez nas podana we wspólnej pracy z Kacprem Kucharskim i Witoldem Marciszewskim [14].

4.3.2 Wkład w powstanie publikacji [H3].

Publikacja [H3], podobnie jak [H1], została napisana wspólnie z Witoldem Marciszewskim. W przypadku tej pracy nie sposób jednoznacznie wskazać na dominujący wkład któregoś z autorów w sformułowanie bądź udowodnienie poszczególnych twierdzeń. Jak to często ma miejsce w przypadku publikacji matematycznych, [H3] jest wynikiem wspólnych dyskusji i wymiany pomysłów, które prowadziły do ostatecznego kształtu publikacji. W mojej ocenie wkład obu autorów w powstanie publikacji [H3] był równy.

4.4 O rozróżnianiu liniowych i jednostajnych struktur w przestrzeniach $C_p(X)$. Publikacje [H4] i [H5].

Poza strukturą topologiczną, przestrzeń $C_p(X)$ wyposażona jest w naturalną strukturę pierścienia topologicznego, strukturę przestrzeni liniowo-topologicznej oraz strukturę przestrzeni jednostajnej. Możemy więc pytać o klasyfikację przestrzeni $C_p(X)$ względem tych struktur, lub inaczej, o sposoby rozróżniania od siebie przestrzeni $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ jako pierścieni topologicznych, przestrzeni liniowo-topologicznych czy przestrzeni jednostajnych. Punkt wyjścia do rozważań w tym kierunku stanowi poniższe twierdzenie Nagaty z 1949 roku, o którym Archangielski tak pisze w swojej monografii [3]: „Jednakże największą przewagę topologii zbieżności punktowej nad topologią zwarto-otwartą, topologią zbieżności jednostajnej, czy innymi topologiami oddaje następujące znakomite twierdzenie Ju. Nagaty”²

Twierdzenie 4.23. [22] *Przestrzenie X i Y są homeomorficzne wtedy i tylko wtedy gdy $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są izomorficzne jako pierścienie topologiczne.*

Innymi słowy, algebraiczno-topologiczna struktura przestrzeni $C_p(X)$ niesie pełną informację o topologii przestrzeni X . Możemy więc pytać ile informacji o przestrzeni X niosą inne struktury w jakie wyposażona jest przestrzeń $C_p(X)$: struktura liniowo-topologiczna, struktura jednostajna czy jedynie struktura topologiczna. Konkretniej, możemy stawiać pytania zawarte w Problemach 4.3 i 4.4, poszukując niezmienników liniowych czy jednostajnych homeomorfizmów przestrzeni $C_p(X)$. Takie niezmienniki umożliwiają rozróżnienie struktur liniowo-topologicznych czy jednostajnych przestrzeni $C_p(X)$ i $C_p(Y)$. Jest to jeden z głównych kierunków badań w C_p -teorii. Poświęcona jest mu monografia [33].

Pomimo, że prace [H4] i [H5] dotyczą dwóch różnych typów izomorfizmu przestrzeni $C_p(X)$ oraz zajmują się różnymi ich niezmiennikami, to są ze sobą ściśle związane. Rozwijają bowiem ([H4] dla homeomorfizmów liniowych a [H5] dla homeomorfizmów jednostajnych) tę samą metodę atakowania Problemów 4.3 i 4.4. Podejście to wydaje się być nowe, a stosuje się do własności topologicznych przestrzeni X , które dają się wygodnie wysłowić w terminach położenia X w swoim uzwarceniu Čecha-Stone’a βX . Przykładami tego typu własności są m.in. σ -zwartość, własności Hurewicza, Menger’a i Lindelöfa (o których nieco szerzej powiemy w podrozdziale 4.4.1), czy κ -pseudozwartość (którą to własność omówimy w podrozdziale 4.4.2).

²[3, str. 2], tłumaczenie z języka angielskiego M.K.

4.4.1 Liniowe homeomorfizmy przestrzeni $C_p(X)$.

W pracy [H4] zajmujemy się Problemem 4.3 w kontekście dwóch dobrze znanych własności pokrywowych przestrzeni topologicznej: własności Menger'a i własności Hurewicza. Przypomnijmy, że przestrzeń X jest *przestrzenią Menger'a* (mówimy też, że X ma własność Menger'a) jeśli dla każdego ciągu $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pokryć otwartych przestrzeni X , istnieje ciąg rodzin $(\mathcal{V}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że $\mathcal{V}_n$ jest skończoną podrodziną rodziny $\mathcal{U}_n$ oraz $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ jest pokryciem przestrzeni X . Przestrzeń X jest *przestrzenią Hurewicza* (mówimy też, że X ma własność Hurewicza) jeśli występująca w definicji własności Menger'a rodzina $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_n$ jest nie tylko pokryciem ale dla każdego $x \in X$ zbiór $\{n \in \mathbb{N} : x \notin \bigcup \mathcal{V}_n\}$ jest skończony. Obie własności zostały wprowadzone na początku XX w. w związku z badaniami nad σ -zwartością i od tego czasu leżą w kręgu zainteresowań wielu badaczy (zob. np. [28]).

Główną motywacją badań podjętych w [H4] jest następujące, wciąż otwarte pytanie Archangielskiego³ (por. [3, Problem II.2.8] lub [33, Problem 4.2.12]):

Pytanie 4.24. *Załóżmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są homeomorficzne. Załóżmy ponadto, że X jest przestrzenią Menger'a. Czy wówczas Y też musi być przestrzenią Menger'a?*

Jednym z głównych rezultatów pracy [H4] jest następujące twierdzenie, które udziela odpowiedzi na Pytanie 4.24 w ważnym przypadku homeomorfizmów liniowych.

Twierdzenie 4.25. *[H4, Theorem 1.1] Załóżmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne. Wówczas X jest przestrzenią Menger'a wtedy i tylko wtedy gdy Y jest przestrzenią Menger'a.*

Nietrudno zauważyć, że dla dowolnej przestrzeni X prawdziwe są następujące implikacje:

$$X \text{ jest } \sigma\text{-zwarta} \Rightarrow X \text{ jest Hurewicza} \Rightarrow X \text{ jest Menger'a} \Rightarrow X \text{ jest Lindelöfa} \quad (1)$$

Wiadomo, że nawet w obrębie przestrzeni metryzowalnych, żadna w powyższych implikacji się nie odwraca. Wyjaśnijmy pokrótce jak Twierdzenie 4.25 wpisuje się we wcześniej znane wyniki. Jednym z ważniejszych rezultatów dotyczących Problemu 4.3 jest następujące, głębokie twierdzenie Veliczki:

Twierdzenie 4.26. *[39] Załóżmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne. Wówczas X jest przestrzenią Lindelöfa wtedy i tylko wtedy gdy Y jest przestrzenią Lindelöfa.*

Na drugim krańcu własności podanych w (1) znajduje się σ -zwartość, o której stosunkowo łatwo można pokazać, że jest niezmiennikiem liniowych homeomorfizmów przestrzeni $C_p(X)$ (zob. [20, Theorem 6.9.1]). W istocie można pokazać więcej: σ -zwartość jest niezmiennikiem homeomorfizmów przestrzeni $C_p(X)$ [3, III.2]. Analogiczny do Twierdzenia 4.26 wynik dla własności Hurewicza został otrzymany przez Zdomskiego w [40]. Nasze Twierdzenie 4.25 wyjaśnia sytuację dla, ostatniej pozostałej w (1) własności, czyli dla własności Menger'a.

³W literaturze występuje niezgodność terminologii. Własność, którą my (oraz większość współczesnych autorów) nazywamy własnością Menger'a, jest przez niektórych autorów nazywana własnością Hurewicza.

Żeby nieco przybliżyć główną ideę stojącą za naszym podejściem przypomnijmy, że każda ciągła liniowa surjekcja $\varphi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ indukuje dolnie półciągłą funkcję $\text{supp}_\varphi : Y \rightarrow [X]^{<\omega}$ przyporządkowującą punktowi $y \in Y$ pewien niepusty skończony podzbiór przestrzeni X . Dolna półciągłość odwzorowania supp_φ oznacza, że dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq X$ zbiór $\text{supp}_\varphi^{-1}(U) = \{y \in Y : \text{supp}_\varphi(y) \cap U \neq \emptyset\}$ jest otwarty w Y (zob. [20, §6.8]). Okazuje się, że funkcję $\text{supp}_\varphi : Y \rightarrow [X]^{<\omega}$ można przedłużyć do dolnie półciągłej funkcji $s_\varphi : \beta Y \rightarrow \mathcal{K}(\beta X)$, która punktom uzwarcenia Čecha-Stone’a βY przestrzeni Y przyporządkowuje niepuste zwarte podzbiory przestrzeni βX .⁴ Dodatkowo, jak wykazaliśmy w [H4], przestrzeń Y można pokryć przeliczalnie wieloma zbiorami domkniętymi $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ takimi, że

$$\text{jeśli } y \in \text{cl}_{\beta Y}(A_n) \setminus A_n, \text{ to } s_\varphi(y) \cap (\beta X \setminus X) \neq \emptyset, \text{ dla każdego } n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

Tu $\text{cl}_{\beta Y}(A_n)$ oznacza domknięcie zbioru A_n w βY .

Sposób działania naszej techniki zilustrujemy podając szkic dowodu następującego znanego twierdzenia (zob. np. [20, Theorem 6.9.1])⁵:

Twierdzenie 4.27. *Załóżmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne. Jeśli X jest przestrzenią σ -zwartą, to Y też jest przestrzenią σ -zwartą.*

Szkic dowodu. Skoro X jest σ -zwarta, to narost $\beta X \setminus X$ uzwarcenia Čecha-Stone’a przestrzeni X , jest zbiorem typu G_δ w βX . Możemy więc zapisać $\beta X \setminus X = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k$, dla pewnych otwartych podzbiorów U_k przestrzeni βX . Funkcja $s_\varphi : \beta Y \rightarrow \mathcal{K}(\beta X)$ jest dolnie półciągła, więc zbiory $V_k = \{y \in \beta Y : s_\varphi(y) \cap U_k \neq \emptyset\}$ są otwarte w βY . Ponieważ $\beta X \setminus X \subseteq U_k$, więc z własności zbiorów A_n wyrażonej w (2) wynika, że

$$(\text{cl}_{\beta Y}(A_n) \setminus A_n) \subseteq V_k \quad \text{dla dowolnych } n, k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Dodatkowo,

$$Y \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} V_k = \emptyset \quad (4)$$

gdyż $X \cap \bigcap_{k=1}^{\infty} U_k = \emptyset$ zaś s_φ jest przedłużeniem odwzorowania supp_φ , którego wartości są podzbiorymi przestrzeni X .

Z (3) i (4) oraz zawierania $A_n \subseteq Y$ w łatwy sposób otrzymujemy, że zbiory A_n są σ -zwarte, jako dopełnienia zbiorów typu G_δ w zbiorze zwartym $\text{cl}_{\beta X}(A_n)$. Przestrzeń Y jest więc σ -zwarta jako suma zbiorów A_n , gdzie $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Gdy σ -zwartość powyżej zastąpimy inną, pokrewną własnością, np. własnością Menger’a, to dowód staje się istotnie trudniejszy i wymaga dalszych pomysłów. Esencja pozostaje jednak taka sama. W dowodzie Twierdzenia 4.25 kluczową rolę odgrywa Twierdzenie Veliczki 4.26. Bowiemy na mocy pewnego znanego wyniku Telgársky’ego [29, Proposition 2],

⁴Pomysł na przedłużenie odwzorowania supp_φ z Y na uzwarcenie Čecha-Stone’a βY pojawia się w [H4] (por. [H4], Section 3). Nie jest on zupełnie nowy: analogiczne pomysły (o czym autor [H4] dowiedział się już po złożeniu pracy do druku) były wcześniej wykorzystywane przez Vesko Valova dla przestrzeni ograniczonych funkcji ciągłych (por. [37], [38]). Wydaje się jednak, że dla przestrzeni $C_p(X)$, tj. takich gdzie funkcje niekoniecznie są ograniczone, [H4] używa rzeczonych przedłużeń po raz pierwszy.

⁵Twierdzenie 4.27 jest dobrze znane ale zamieszczony tu dowód jest wedle naszej wiedzy nowy i zaprezentowany w tym miejscu po raz pierwszy.

pozwała ono zredukować Twierdzenie 4.25 do poniższego rezultatu, w którym zamiast własności Mengera występuje tzw. rzutowa własność Mengera. Warto tu przypomnieć, że przestrzeń X ma *rzutową własność Mengera* (odpowiednio, *rzutową własność Hurewicza*) jeśli każdy ciągły metryczny ośrodkowy obraz przestrzeni X ma własność Mengera (odpowiednio, Hurewicza).

Twierdzenie 4.28. *[H4, Theorem 1.5] Załóżmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne. Wtedy X ma rzutową własność Mengera wtedy i tylko wtedy, gdy Y ma rzutową własność Mengera.*

Analogicznie rzecz się ma dla rzutowej własności Hurewicza:

Twierdzenie 4.29. *[H4, Theorem 1.6] Załóżmy, że przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są liniowo homeomorficzne. Wtedy X ma rzutową własność Hurewicza wtedy i tylko wtedy, gdy Y ma rzutową własność Hurewicza.*

Charakteryzacje rzutowych własności Mengera i Hurewicza przestrzeni X w terminach narostu uzwarcenia βX zostały niedawno podane w naszej wspólnej pracy z Kacprem Kucharskim [13]; tym samym możliwe jest stosowanie do nich wcześniej opisanej metody wykorzystującej przedłużenie s_φ odwzorowania supp_φ . Twierdzenia 4.28 i 4.29 odpowiadają na pytania Sakai z [27].

4.4.2 Jednostajne homeomorfizmy przestrzeni $C_p(X)$.

Metodę, którą opisaliśmy w poprzednim podrozdziale, rozwijamy w pracy [H5] dla jednostajnych homeomorfizmów do badań nad Problemem 4.4. Przypomnijmy, że odwzorowanie $\varphi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ jest *jednostajnie ciągle*, gdy dla dowolnego otwartego otoczenia U funkcji stale równej zero w $C_p(Y)$, istnieje otwarte otoczenie V funkcji stale równej zero w $C_p(X)$ takie, że warunek $(f - g) \in V$ pociąga $(\varphi(f) - \varphi(g)) \in U$. Odwzorowanie $\varphi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ jest *jednostajnym homeomorfizmem* gdy φ jest homeomorfizmem i zarówno φ , jak i φ^{-1} są jednostajnie ciągłe. Nietrudno zobaczyć, że liniowy homeomorfizm $\varphi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ jest jednostajnym homeomorfizmem. Wiadomo również, że jednostajnie homeomorficzne przestrzenie funkcyjnie nie muszą być liniowo homeomorficzne (zob. [7]). Podobnie jak w przypadku liniowych homeomorfizmów, jednostajny homeomorfizm $\varphi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ indukuje odwzorowanie $K : Y \rightarrow [X]^{<\omega}$, które punktom przestrzeni Y przyporządkowuje niepuste skończone podzbiory przestrzeni X . Wprawdzie tym razem odwzorowanie to nie musi być dolnie półciągle, ale jest „*dolnie G_δ -mierzałe*”, tzn. dla dowolnego zbioru otwartego $U \subseteq X$ zbiór $K^{-1}(U) = \{y \in Y : K(y) \cap U \neq \emptyset\}$ jest zbiorem typu G_δ w Y [2, Corollary 1.5]. W pracy [H5] dowodzimy, że w przypadku gdy Y jest *pseudozwarta* (tzn. każda funkcja ciągła $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ jest ograniczona), to odwzorowanie $K : Y \rightarrow [X]^{<\omega}$ przedłuża się do odwzorowania z βY o wartościach w hiperprzestrzeni skończonych podzbiorów βX , z zachowaniem warunku dolnej G_δ -mierzałości (zob. [H5, Proposition 2.8]). Tak jak opisaliśmy to w sekcji 4.4.1, umożliwia to analizowanie Problemu 4.4 dla własności, które w wygodny sposób można wysłowić w terminach uzwarcenia Čecha-Stone’a; taką własnością, którą zajmujemy się w [H5], jest κ -pseudozwartość. Dla ustalonej nieskończonej liczby kardynalnej κ powiemy, że przestrzeń X jest κ -pseudozwarta gdy dla dowolnej funkcji ciągłej $f : X \rightarrow \mathbb{R}^\kappa$, obraz $f(X)$ jest zwarty. Pojęcie to wprowadził Kennison w [12] jako uogólnienie pseudozwartości.

Nietrudno bowiem pokazać, że ω -pseudozwartość jest tożsama z pseudozwartością. Ponadto im większa liczba kardynalna κ , tym silniejszą własność otrzymujemy. W szczególności, każda przestrzeń κ -pseudozwarta jest pseudozwarta. Tak jak sygnalizowaliśmy, κ -pseudozwartość przestrzeni X można elegancko scharakteryzować w terminach uzwarzenia βX . Do wysłowienia tej charakteryzacji potrzebujemy pojęcia zbioru typu G_κ , gdzie κ jest nieskończoną liczbą kardynalną. Ustalmy $\kappa \geq \omega$. Powiemy, że podzbiór A przestrzeni X jest *zbiorem typu G_κ* jeśli A jest przecięciem co najwyżej κ -wielu otwartych podzbiorów X . Tradycyjnie zbiory typu G_ω nazywamy zbiorami typu G_δ . A oto twierdzenie charakteryzujące⁶:

Twierdzenie 4.30. [26, Theorem 1] *Niech κ będzie nieskończoną liczbą kardynalną. Przestrzeń X jest κ -pseudozwarta wtedy i tylko wtedy gdy każdy niepusty podzbiór typu G_κ w βX ma niepuste przecięcie z X .*

Uspenski udowodnił w [36], że pseudozwartość jest niezmiennikiem jednostajnych homeomorfizmów przestrzeni $C_p(X)$. W świetle tego rezultatu bardzo naturalne jest pytanie postawione przez Archangielskiego w [8] (zob. [8, Question 13] lub [33, Problem 4.4.2]) czy analogicznie rzecz się ma dla κ -pseudozwartości.

Główny rezultat pracy [H5] odpowiada na to pytanie twierdząco. Zachodzi następujące:

Twierdzenie 4.31. [H5, Theorem 1.1] *Dla dowolnej nieskończonej liczby kardynalnej κ , jeśli przestrzenie $C_p(X)$ i $C_p(Y)$ są jednostajnie homeomorficzne, to X jest κ -pseudozwarta wtedy i tylko wtedy gdy Y jest κ -pseudozwarta.*

Literatura

- [1] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. Math. 88, 35–44.
- [2] A.V. Arbit, *The Lindelöf number greater than continuum is u -invariant*, Serdica Math. J. 37, 143–162 (2011).
- [3] A.V. Arhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [4] A.V. Arhangel'skii, *Function spaces in the topology of pointwise convergence, and compact sets*, Russian Math. Surveys 39 (5) (1984), 9–56.
- [5] A.V. Arhangel'skii, *A survey of C_p -theory*, Questions Answers Gen. Topology 5 (1987), 1–109.
- [6] A.V. Arhangel'skii, *Problems in C_p -theory*, in: Open Problems in Topology, J. van Mill and G.M. Reed (eds.), Elsevier 1990, 601–615.
- [7] A.V. Arhangel'skii, *C_p -Theory*, in: Recent Progress in General Topology, M. Hušek and J. van Mill (eds.), Elsevier 1992, 1–56.

⁶Twierdzenie 4.30 zostało po raz pierwszy odnotowane przez Rettę w [26] i stanowi uogólnienie analogicznego, wcześniejszego wyniku Hewitta, dotyczącego pseudozwartości.

- [8] A.V. Arhangel'skii, *Strongly τ -pseudocompact spaces*, Topology Appl. 89, 285–298 (1998)
- [9] Cz. Bessaga, A. Pełczyński, *Spaces of continuous functions IV (On isomorphic classification of $C(S)$ spaces)*, Studia Math. 19 (1960), 53–62.
- [10] A. Grothendieck, *Sur Les Applications Lineaires Faiblement Compactes D'Espaces Du Type $C(K)$* , Canad. J. Math. 5 (1953), 129–173.
- [11] S. Gul'ko, *Spaces of continuous functions on ordinals and ultrafilters*, Mat. Zametki 47 (1990), no. 4, 26–34.
- [12] J.F. Kennison, *m -pseudocompactness*, Trans. Amer. Math. Soc. 104, 436–442 (1962).
- [13] M. Krupski and K. Kucharski, *Some remarks on the projective properties of Menger and Hurewicz*, Quaest. Math. 48 (2025) no. 1, 37–47.
- [14] M. Krupski, K. Kucharski, W. Marciszewski, *Characterizing function spaces which have the property (B) of Banach*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 119, article no. 75 (2025).
- [15] K. Kuratowski, *Sur la puissance de l'ensemble des "nombres de dimension" au sens de M. Fréchet*, Fund. Math. 8 (1926), 201–208.
- [16] W. Marciszewski, *A function space $C(K)$ not weakly homeomorphic to $C(K) \times C(K)$* , Studia Math. 88 (1988), no. 2, 129–137.
- [17] W. Marciszewski, *Function Spaces*, in: Recent Progress in General Topology II, North-Holland, Amsterdam 2002, 345–369.
- [18] W. Marciszewski, *On properties of metrizable spaces X preserved by t -equivalence*, Mathematika 47 (2000), 273–279.
- [19] A.A. Miljutin, *Isomorphism of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality continuum*, Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen. 2 (1966), 150–156.
- [20] J. van Mill, *The Infinite-Dimensional Topology of Function Spaces*, vol. 64 of North-Holland Mathematical Library, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 2001.
- [21] J. van Mill, J. Pelant, R. Pol, *Note on function spaces with the topology of pointwise convergence*, Arch. Math. (Basel) 80 (2003), no. 6, 655–663.
- [22] J. Nagata, *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces*, Osaka Math. J. 1 (2) (1949), 166–181.
- [23] E. Pearl, *Open problems in topology*, Topology Appl. 136 (2004), 37–85.
- [24] R. Pol, *An infinite-dimensional pre-Hilbert space not homeomorphic to its own square*, Proc. Amer. Math. Soc. 90 (1984) no. 3, 450–454.

- [25] R. Pol, *On metrizable E with $C_p(E) \not\cong C_p(E) \times C_p(E)$* , Mathematika 42 (1995), no. 1, 49–55.
- [26] T. Retta, *Some cardinal generalizations of pseudocompactness*, Czech. Math. J. 43 (118), 385–390 (1993).
- [27] M. Sakai, *The Menger property and l -equivalence*, Topology Appl. 281(2020), Article no. 107187, 6pp.
- [28] M. Sakai and M. Scheepers, *The combinatorics of open covers*, In: Recent Progress in General Topology III, Atlantis Press, Paris, 2014, pp. 751–799.
- [29] R. Telgársky, *On games of Topsøe*, Math. Scand. 54 (1984), no. 1, 170–176.
- [30] V.V. Tkachuk, *A C_p -theory Problem Book. Topological and Function Spaces*, Springer, Berlin 2011.
- [31] V.V. Tkachuk, *A C_p -theory Problem Book. Special Features of Function Spaces*, Springer, Cham 2014.
- [32] V.V. Tkachuk, *A C_p -theory Problem Book. Compactness in Function Spaces*, Springer, Cham 2015.
- [33] V.V. Tkachuk, *A C_p -theory Problem Book. Functional Equivalencies.*, Springer, Cham 2016.
- [34] V.V. Tkachuk, *C_p -theory in 2022*, Quest. Answers Gen. Topology 41, No. 2, 75–133 (2023).
- [35] V.V. Tkachuk, *Sixteen years of C_p -theory*, Quest. Answers Gen. Topology 35, No. 1, 1–48 (2017).
- [36] V.V. Uspenskii, *A characterization of compactness in terms of the uniform structure in a space of functions*, Uspekhi Mat. Nauk 37, 183–184 (1982).
- [37] V. Valov, *Spaces of bounded functions with the compact open topology*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 45 (1997), no. 2, 171–179.
- [38] V. Valov, *Spaces of bounded functions*, Houst. J. Math. 25 (1999), no. 3, 501–521.
- [39] N.V. Velichko, *The Lindelöf property is l -invariant*, Topology Appl. 89 (1998), no. 3, 277–283.
- [40] L. Zdomskyy, *o -boundedness of free objects over a Tychonoff space*, Mat. Stud. 25 (2006), no. 1, 10–28.

5 Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej.

W trakcie swojej dotychczasowej kariery prowadziłem badania naukowe w pięciu różnych instytucjach naukowych – trzech polskich (PAN, Uniwersytet Wrocławski, Uniwersytet Warszawski) i dwóch zagranicznych (University of Pittsburgh, Universidad de Murcia). Czteroletni okres studiów doktoranckich spędziłem w Instytucie Matematycznym PAN. Pod kierunkiem prof. Witolda Marciszewskiego pracowałem tam nad rozprawą doktorską, w skład której weszły m. in. trzy publikacje⁷ [2], [3], [4]. Zapewne najlepszy uzyskany tam rezultat pochodzi z pracy [4]. Jest to konstrukcja (przeprowadzona w ZFC) przestrzeni ośrodkowej metryzowalnej X takiej, że przestrzeń $C_p(X)$ - rzeczywistych funkcji ciągłych na X , zaopatrzona w topologię zbieżności punktowej - nie dopuszcza słabszej σ -zwartej topologii. Daje to pełną odpowiedź na pytanie Archangielskiego z 2000 roku.

W trakcie studiów doktoranckich odbyłem semestralny staż doktorancki na Uniwersytecie Wrocławskim, gdzie moim opiekunem naukowym był prof. Grzegorz Plebanek. Napisaaliśmy wówczas wspólną pracę [1].

Po uzyskaniu stopnia naukowego doktora zostałem zatrudniony na Uniwersytecie Warszawskim – najpierw jako asystent, a od lipca 2016 r. na stanowisku adiunkta. W trakcie mojego zatrudnienia na Uniwersytecie Warszawskim odbyłem dwa dwuletnie zagraniczne staże naukowe, podczas których korzystałem z urlopu bezpłatnego na Uniwersytecie Warszawskim. W 2016 roku otrzymałem ofertę objęcia dwuletniego stanowiska poddoktorskiego (post-doc) na Uniwersytecie w Pittsburghu (USA). Pracowałem tam od 01.09.2016 do 31.08.2018, gdzie współpracowałem z prof. Paulem Gartsidem. W tym czasie powstały prace [8], [9] i [10]. Praca [12] została przeze mnie ukończona już po powrocie z Pittsburgha ale główna jej część opiera się na badaniach prowadzonych jeszcze w USA. Chciałbym krótko przybliżyć dwa najważniejsze w mojej ocenie rezultaty z tamtego okresu, które pochodzą odpowiednio z prac [8] i [12]. W pracy [8] zajmujemy się zachowaniem funkcyjnej ciasności w iloczynach kartezjańskich przestrzeni zwartych. Funkcyjna ciasność przestrzeni topologicznej X to, mówiąc w pewnym uproszczeniu, minimalna moc zbiorów determinujących ciągłość wszystkich rzeczywistych funkcji na X . Odpowiadając na pytanie Okuniewa z 2016 roku dowodzimy, że funkcyjna ciasność iloczynu kartezjańskiego $\prod_{\alpha < 2^\kappa} X_\alpha$ przestrzeni zwartych X_α , których funkcyjna ciasności nie przekracza liczby kardynalnej κ , również nie przekracza liczby κ . Jest to odpowiednik klasycznego twierdzenia Małychina z początku lat siedemdziesiątych XX w. dotyczącego zachowania ciasności względem iloczynów kartezjańskich przestrzeni zwartych. W pracy [12] używamy gier topologicznych do badania dziedzicznej własności Baire’a w hiperprzestrzeniach kompaktów i przestrzeniach $P_r(X)$ borelowskich probabilistycznych miar Radona na przestrzeni topologicznej X . Uzyskane przez nas rezultaty pozwalają podać pierwszy przykład ośrodkowej przestrzeni metrycznej X niemetryzowalnej w sposób zupełny, której przestrzeń miar $P_r(X)$ ma dziedziczną własność Baire’a.

Po zakończeniu stażu podoktorskiego na Uniwersytecie w Pittsburghu kontynuowałem pracę na Uniwersytecie Warszawskim. W 2021 roku, w drodze otwartego konkursu,

⁷Używana tu numeracja publikacji odwołuje się do *Wykazu osiągnięć naukowych*, §2.8 będącego częścią dokumentacji.

otrzymałem stypendium naukowe hiszpańskiego programu *María Zambrano*, w ramach którego w okresie 01.01.2023–31.12.2024 objąłem stanowisko badawcze na Uniwersytecie w Murcji (Hiszpania). Moim mentorem podczas tego stażu był prof. Antonio Avilés, z którym podjąłem owocną współpracę. Jej efektem były trzy wspólne artykuły naukowe [16], [17] i [18], gdzie uzyskaliśmy szereg interesujących wyników. Przykładowo, w pracy [18] zajmujemy się klasą kompaktów będących $L\Sigma(\leq \omega)$ -przestrzeniami. Przypomnijmy, że przestrzeń X jest $L\Sigma(\leq \omega)$ -przestrzenią jeśli istnieje przestrzeń metryczna ośrodkowa M oraz górnie półciągła wielowartościowa surjekcja $p : M \rightarrow X$ o zwartych metryzowalnych wartościach. Zwarte $L\Sigma(\leq \omega)$ -przestrzenie po raz pierwszy pojawiły się na początku lat dziewięćdziesiątych XX w. w pracach Tkaczuka i Tkaczenki jako naturalne uogólnienie przestrzeni metryzowalnie rozwłóknialnych, tzn. takich, dla których istnieje ciągłe odwzorowanie na przestrzeń metryczną mające metryzowalne warstwy. W [18] odpowiadamy na szereg otwartych pytań stawianych w literaturze na temat $L\Sigma(\leq \omega)$ -przestrzeni. Między innymi konstruujemy ośrodkowy kompakt Rosenthala (tj. przestrzeń homeomorficzną ze zwartym podzbiorem funkcji pierwszej klasy Baire’a na pewnej przestrzeni polskiej, z topologią zbieżności punktowej), który nie jest $L\Sigma(\leq \omega)$. Odpowiada to na pytanie Kubisia, Okuniewa i Szeptyckiego z 2006 roku. W pracy [16] odpowiadamy na niedawne pytanie Tkaczuka dowodząc, że każda rozproszona podprzestrzeń Σ -iloczynu przestrzeni z pierwszym aksjomatem przeliczalności, która ma własność Lindelöfa jest σ -zwarta. Praca [17] zawiera nowe charakteryzacje klasy NY -kompaktów, czyli przestrzeni zwartych zanurzalnych w σ -iloczynu przestrzeni zwartych metryzowalnych. Podajemy też przykład jednostajnego kompaktu Eberleina, który nie zanurza się w iloczyn kartezyjański przestrzeni zwartych metryzowalnych w taki sposób, że σ -iloczyn tych przestrzeni jest gęsty w obrazie względem zanurzenia. Odpowiada to na pytanie Kubisia i Leidermana z 2004 roku oraz niedawne pytanie Hájka i Russo.

6 Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę.

6.1 Prowadzone zajęcia dydaktyczne

Podczas swojej dotychczasowej kariery naukowo-dydaktycznej prowadziłem szereg zajęć dla studentów różnych etapów kształcenia. W przeważającej części były to zajęcia dydaktyczne prowadzone na Uniwersytecie Warszawskim - zarówno na macierzystym Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki, jak i usługowe zajęcia z matematyki na innych wydziałach UW: geologii; chemii; dziennikarstwa, informacji i bibliologii. Podczas swojego dwuletniego pobytu na Uniwersytecie w Pittsburghu, w ramach pozycji podoktorskiej, prowadziłem tam zajęcia z matematyki dla miejscowych studentów. Były to ogólnouczelniane kursy rachunku różniczkowego i całkowego (MATH 0220 i MATH 0230) oraz kurs z topologii przeznaczony dla doktorantów matematyki.

Z ważniejszych prowadzonych przeze mnie zajęć warto wymienić następujące:

- Wykład ze *Wstępu do Matematyki*, obowiązkowy na pierwszym roku kierunku matematyka na Uniwersytecie Warszawskim. Zajęcia te prowadziłem dwukrotnie w roku akademickim 2018/19 i 2019/20.

- Wykład z *Topologii I*, obowiązkowy na drugim roku kierunku matematyka na Uniwersytecie Warszawskim. Zajęcia te prowadziłem dwukrotnie w roku akademickim 2020/21 i 2021/22.
- Seminarium magisterskie *Topologia i teoria mnogości* na Uniwersytecie Warszawskim. Seminarium prowadziłem przez trzy kolejne lata, w roku akademickim 2019/20, 2020/21 i 2021/22.
- Wykład monograficzny *Topologia przestrzeni funkcyjnych* przeznaczony dla doktorantów i studentów etapu magisterskiego na kierunku matematyka na Uniwersytecie Warszawskim. Zajęcia te prowadziłem w roku akademickim 2020/21.
- Wykład z topologii dla doktorantów prowadzony na Uniwersytecie w Pittsburghu w roku akademickim 2017/18.

W poniższej tabeli znajduje się zbiorcze zestawienie wszystkich prowadzonych przeze mnie dotychczas zajęć dydaktycznych.

Nazwa przedmiotu	Typ zajęć	Jednostka organizacyjna	Sumaryczna liczba godzin
Matematyka	ćwiczenia	Wydział Geologii UW	90
Matematyka A	ćwiczenia	Wydział Chemii UW	240
Analiza matematyczna I.1	ćwiczenia	Wydział MIM UW	120
Analiza matematyczna I.2	ćwiczenia	Wydział MIM UW	120
Wstęp do matematyki	ćwiczenia	Wydział MIM UW	150
Topologia I	ćwiczenia	Wydział MIM UW	180
Wstęp do matematyki	wykład	Wydział MIM UW	60
Topologia i teoria mnogości	seminarium	Wydział MIM UW	180
Topologia przestrzeni funkcyjnych	wykład	Wydział MIM UW	30
Topologia przestrzeni funkcyjnych	ćwiczenia	Wydział MIM UW	30
Topologia I	wykład	Wydział MIM UW	60
Matematyka 0	ćwiczenia	Wydział Chemii UW	90
Matematyka	konwersatorium	Wydział DIB UW	96
MATH 0230 – Analytic Geometry & Calculus 2	wykład	University of Pittsburgh	180
MATH 0220 – Analytic Geometry & Calculus 1	wykład	University of Pittsburgh	45
MATH 2700 – Topology 1	wykład	University of Pittsburgh	45

6.2 Opieka nad pracami dyplomowymi

1. 2023, wypromowana praca magisterska pt. „Charakteryzacje pewnych własności pokryciowych w terminach narostów uzwarceń”, autor pracy: Kacper Kucharski.
2. 2024, wypromowana praca magisterska pt. „Własności pokryciowe i przestrzenie funkcyjne”, autor pracy: Tomasz Jabłczyński.

3. Od lipca 2025 opieka nad kolejnymi dwiema pracami magisterskimi. Przewidywany termin obrony obu prac: wrzesień 2026.

6.3 Recenzowanie prac dyplomowych

Dotychczas byłem recenzentem trzech prac magisterskich, obronionych na Uniwersytecie Warszawskim. Pracy pt. *Zasada "Treft" - warianty i zastosowania*, napisanej przez Jakuba Andruszkiewicza, pracy pt. *Gra Mengera versus gra zwarto-otwarta*, napisanej przez Jakuba Radziwiłskiego oraz pracy pt. *Własność gamma w produktach przestrzeni* napisanej przez Patryka Gresztę.

6.4 Kształcenie kadry naukowej

Od października 2023 roku pełnię funkcję promotora pomocniczego pana mgr. Kacpra Kucharskiego, który kształci się w Szkole Doktorskiej Nauk Ścisłych i Przyrodniczych Uniwersytetu Warszawskiego.

7 Inne ważne informacje dotyczące kariery zawodowej.

7.1 Nagrody i wyróżnienia

1. Trzecia nagroda w 54-tym konkursie im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą pracę studencką, PTM, 2010.
2. Nagroda indywidualna III stopnia rektora Uniwersytetu Warszawskiego, Uniwersytet Warszawski, 2020.
3. Dwuletnie stypendium badawcze María Zambrano na Uniwersytecie w Murcji otrzymane w ramach otwartego konkursu o zasięgu globalnym, Ministerio de Universidades, Gobierno de España, 2023–2024.

7.2 Działalność recenzencka związana z badaniami naukowymi

W poniższej tabeli prezentujemy liczbę recenzji wykonanych dla poszczególnych czasopism naukowych.

Nazwa czasopisma	Liczba recenzji
Studia Mathematica	1
Fundamenta Mathematicae	1
Mathematische Nachrichten	1
RACSAM	1
Indagationes Mathematicae	1
Journal of Mathematical Analysis and Applications	1
Topology and its Applications	4
Colloquium Mathematicum	2
Topological Methods in Nonlinear Analysis	1
Quaestiones Mathematicae	1
European Journal of Mathematics	5
FILOMAT	1
Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics	1
Journal of Mathematics and Applications	1