AUTOREFERAT

1 IMIĘ I NAZWISKO

Marcin Marek Napiórkowski

2 POSIADANE DYPLOMY I STOPNIE NAUKOWE

- **Doktor nauk fizycznych w zakresie fizyki**
  Data: 29 września 2014
  Tytuł rozprawy: *Excitation spectrum and quasiparticles in quantum gases. A rigorous approach.*
  Promotor: prof. dr hab. Jan Dereziński
  Jednostka naukowa: Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

- **Magister matematyki**
  Data: 29 czerwca 2010
  Tytuł pracy: *Wokół twierdzenia HVZ.*
  Promotor: prof. dr hab. Henryk Żołądek
  Jednostka naukowa: Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

3 INFORMACJE O DOTYCHCZASOWYM ZATRUDNIENIU W JEDNOSTKACH NAUKOWYCH

- **Adiunkt naukowo-dydaktyczny**, od października 2016
  Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

- **profesor zastępujący W3**, październik 2018 – marzec 2019
  Uniwersytet Ludwika i Maksymiliana w Monachium, Niemcy

- **Staż podoktorski**, październik 2014 – wrzesień 2016
  Institute of Science and Technology Austria (IST Austria), Klosterneuburg, Austria

- **Doktorant**, październik 2010 – wrzesień 2014
  Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

4 OMÓWIENIE OSIĄGNIĘĆ, O KTÓRYCH MOWA W ART. 219 UST. 1 PKT. 2 USTAWY

A. TYTUŁ OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

Cykl publikacji pt.:
Efektywna dynamika kwantowa bozonowych układów wielociałowych

B. LISTA PUBLIKACJI WCHODZĄCYCH W SKŁAD OSIĄGNIĘCIA
(odwrotny porządek chronologiczny, autorzy w kolejności alfabetycznej - wkład wszystkich autorów równy)

[A1] P.T. Nam and **M. Napiórkowski**,
Norm approximation for many-body quantum dynamics: focusing case in low dimensions,
Advances in Mathematics 350, 547-587 (2019)

[A2] C. Brennecke, P.T. Nam, **M. Napiórkowski** and B. Schlein,
Fluctuations of N-particle quantum dynamics around the nonlinear Schrödinger equation,
Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire 36 (5), 1201-1235 (2019)

[A3] **M. Napiórkowski**,
Recent advances in the theory of Bogoliubov Hamiltonians,
Macroscopic Limits of Quantum Systems, Springer PROMS 270, 101-123 (2018)

[A4] P.T. Nam and **M. Napiórkowski**,
A note on the validity of Bogoliubov correction to mean-field dynamics,
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 108 (5), 662-688 (2017)

[A5] P.T. Nam and **M. Napiórkowski**,
Norm approximation for many-body quantum dynamics and Bogoliubov theory,
Advances in Quantum Mechanics. Springer INdAM Series 18, 223-238 (2017)

[A6] P.T. Nam and **M. Napiórkowski**,
Bogoliubov correction to the mean-field dynamics of interacting bosons,
Advances in Theoretical and Mathematical Physics 21 (3), 683-738 (2017)

Szczegółowe informacje dotyczące mojego wkładu do powyższych publikacji zamieszczono w Załączniku nr 4.

Przedstawiony autoreferat jest tłumaczeniem wersji oryginalnie napisanej w języku angielskim, z którą Czytelnik może zapoznać się w Załączniku nr 3.

C. OPIS OSIĄGNIĘCIA NAUKOWEGO

1. Wprowadzenie

Matematyczne aspekty kwantowego problemu wielu ciał. W niniejszej rozprawie habilitacyjnej zajmiemy się zależnym od czasu równaniem Schrödingera, które w bardzo ogólnej postaci można zapisać jako

$$i\partial_t \psi_t = H\psi_t \tag{1}$$

(tutaj przyjęliśmy $\hbar = 1$). Dla każdego czasu t wektor ψ_t należy do przestrzeni Hilberta $\mathfrak{H}$, a H jest generatorem dynamiki zwanym hamiltonianem.

W naszym sformułowaniu problemu będziemy mniej abstrakcyjni. Będziemy rozważać konkretną przestrzeń Hilberta $L^2_{\mathrm{sym}}(R^{3N})$ składającą się z całkowalnych z kwadratem funkcji N, trójwymiarowych zmiennych. Znormalizowane rozwiązania (1) nazywamy *funkcjami falowymi*. Dolny indeks pochodzi od 'symetryczne' i oznacza, że ograniczamy się do funkcji opisujących cząstki bozonowe, tzn. takich, które są symetryczne przy zamianie dwóch dowolnych zmiennych

$$\psi_t(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N) = \psi_t(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_N).$$

Zgodnie z aksjomatyką mechaniki kwantowej, przyjmuje się, że hamiltonian jest gęsto zdefiniowanym, nieograniczonym operatorem różniczkowym, który jest samosprzężony na $L^2_{\mathrm{sym}}(R^{3N})$. Ponadto założymy, że hamiltonian jest niezależny od czasu. Konkretna postać H, którą będziemy rozważać, będzie podana poniżej.

Założenia te przekształcają abstrakcyjne równanie Schrödingera (1) w równanie różniczkowe cząstkowe. Samosprzężoność H implikuje, że ewolucja w równaniu Schrödingera jest dobrze zdefiniowana i dzięki twierdzeniu Stone'a możemy napisać

$$\psi_t = e^{-itH}\psi_0 \tag{2}$$

dla stanu początkowego ψ_0 w dziedzinie operatora H. Problemem z (2) polega na tym, że fakt ten nie jest zbyt użyteczny w kontekście praktycznych celów związanych z analizą układów fizycznych. Rzeczywiście, zwykle liczba N cząstek w rozważanym układzie jest bardzo duża, nawet rzędu 10^5. Dlatego też, dla celów obliczeniowych, ważne jest wyprowadzenie efektywnych opisów kolektywnego zachowania układu kwantowego. Wyniki przedstawione w tej rozprawie habilitacyjnej uzasadnią użycie pewnych teorii efektywnych stosowanych przez fizyków do opisu kwantowej ewolucji układów wielobozonowych.

Należy także podkreślić, że choć mamy do czynienia z równaniem różniczkowym cząstkowym, to metody, których używamy do uzyskania naszych wyników, skupiają się na własnościach hamiltonianu H, a więc są głównie operatorowe. Przedstawimy teraz bardziej szczegółowe sformułowanie problemu i fizykę, która za nim stoi.

Model. Nasze rozważania dotyczyć będą układów wielu bozonów, w których zachodzi kondensacja Bosego-Einsteina. Jest to zjawisko, które zachodzi w dostatecznie niskich temperaturach, gdy większość cząstek zaczyna zajmować jeden, wspólny, niskoenergetyczny stan kwantowy. Mówi się wtedy o makroskopowym obsadzeniu stanu podstawowego. Koncepcja BEC sięga prac Boseego i Einsteina z 1924 roku [17] , w których analizowali oni układy nie oddziałujących ze sobą bozonów. Eksperymentalnie kondensat udało się zaobserwować dopiero w 1995 roku dzięki pracom Cornella, Wiemana i Ketterle [16, 33]. Pomimo zncżącego postępu w zrozumieniu układów oddziałujących bozonów, wiele podstawowych pytań dotyczących matematycznego opisu kondensacji i fluktuacji wokół kondensatu wciąż pozostaje bez odpowiedzi (dokładna definicja kondensacji podana jest w (13)). Niektóre z tych zagadnień są kluczowe dla zrozumienia interesujących efektów kwantowych, które przjawiają się nawet w skalach makroskopowych - znanym przykładem jest np. zjawisko nadciekłości.

W prezentowanych pracach **[A1-A6]** dyskutowany jest problem ewolucji czasowej kondensatów Bosego–Einsteina. Obraz fizyczny, który mamy na myśli jest następujący. Niech H_N^V będzie wielociałowym operatorem Schrödingera danym przez

$$H_N^V = \sum_{j=1}^{N}(-\Delta_{x_j} + V(x_j)) + \frac{1}{N-1}\sum_{1\le j<k\le N} w_N(x_j - x_k). \tag{3}$$

Tutaj $V \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ jest potencjałem zewnętrznym (który np. modeluje uwięzienie cząstek podczas ich chłodzenia w trakcie eksperymentu), o którym zakładamy, że spełnia warunek $V(x) \to \infty$ dla $|x| \to \infty$. Z kolei w_N jest potencjałem międzycząsteczkowym, który opisuje ich oddziaływania (i może a priori zależeć od N). Hamiltonian działa na symetrycznej podprzestrzeni $\mathfrak{H}^N = \bigotimes_{\mathrm{sym}}^N L^2(\mathbb{R}^3)$. O ile nie będzie powiedziane inaczej, przyjmujemy, że cząstki poruszają się w przestrzeni trójwymiarowej. Wreszcie, niech $\Psi_{N,0}$ będzie stanem podstawowym H_N^V. Załóżmy, że stan $\Psi_{N,0}$ opisuje kondensat Bosego–Einsteina (precyzyjna definicja kondesacji podana będzie w (13)).

Po wyłączeniu zewnętrznego potencjału V, $\Psi_{N,0}$ nie jest już stanem podstawowym hamiltonianu $H_N \equiv H_N^{V=0}$ i, zgodnie z równaniem Schrödingera, obserwowana jest ewolucja czasowa

$$\Psi_{N,t} = e^{-\mathrm{i}tH_N}\Psi_{N,0} \tag{4}$$

kondensatu. Chociaż ewolucja Schrödingera jest liniowa, to jej złożoność obliczeniowa wzrasta dramatycznie, gdy N staje się duże. W typowych eksperymentach N może być nawet rzędu 10^5, co dalece przekracza możliwości obliczeniowe komputerów. Dlatego, między innymi z punktu widzenia zastosowań, ważne jest wyprowadzenie efektywnych opisów dla kolektywnego zachowania układu kwantowego. Prezentowane prace **[A1-A6]** dostarczają twierdzeń, które ściśle uzasadniają poprawność pewnych teorii efektywnych używanych przez fizyków w analizie zimnych gazów Bosego.

Reżimy skalowania. Z matematycznego punktu widzenia, duża liczba cząstek w układzie modelowana będzie przez przejście graniczne $N \to \infty$. Zauważmy, że stała sprzężenia $1/(N-1)$ w członie opisującym oddziaływanie powoduje, że człon kinetyczny hamiltonianu jest (formalnie) tego samego rzędu w N co energia oddziaływania (moglibyśmy też wybrać $1/N$ zamiast $1/(N-1)$). Potencjał oddziaływania w_N, dany przez

$$w_N(x) = N^{3\beta}w(N^\beta x) \tag{5}$$

dla zadanej funkcji $w \in L^1(\mathbb{R}^3)$, jest dobrany tak, aby był on rzędu $O(1)$ (gdy $N \to \infty$) w tym sensie, że $\int w_N = \int w$. Tu i dalej, jeśli nie zostanie to określone inaczej, znak całki będzie oznaczał całkowanie po całej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Parametr $\beta \geq 0$ w definicji w_N (5) charakteryzuje różne reżimy skalowania, które odpowiadają różnym sytuacjom fizycznym. Gdy $\beta = 0$ (tzw. skalowanie Hartree'ego lub pola średniego), wówczas hamiltonian modeluje sytuację, w której oddziaływania między cząstkami są słabe. Mówimy wówczas, że między cząstkami zachodzi wiele, ale słabych zderzeń. Dzieje się tak dlatego, że wielkość potencjału oddziaływania wynosi $O(N^{-1})$ (ze względu na czynnik $1/(N-1)$ w członie oddziaływania), natomiast zasięg oddziaływania (który wynosi $O(1)$) jest znacznie większy niż średnia odległość międzycząsteczkowa $N^{-1/3}$. Dlatego, heurystycznie rzecz biorąc, każda cząstka "widzi" wszystkie inne cząstki.

Gdy $\beta > 0$, to w_N zbiega (w słabym sensie) do oddziaływania typu δ-Diraca

$$\Big(\int w\Big)\delta_0. \tag{6}$$

Tak długo, jak $0 \leq \beta < 1/3$, zasięg potencjału oddziaływania (który wynosi $O(N^{-\beta})$) jest znacznie większy niż średnia odległość między cząstkami i dochodzi między nimi do wielu, ale słabych zderzeń. Dlatego też - jak się okazuje - do rzędu wiodącego w N energia potencjalna oddziaływania odczuwana przez każdą cząstkę może być nadal przybliżana przez efektywny potencjał pola średniego $\rho * w_N$, gdzie ρ jest gęstością układu (tutaj $f * g$ oznacza splot dwóch funkcji f i g). Jeśli $\beta > 1/3$, to należy się spodziewać, że analiza będzie bardziej skomplikowana ze względu na silne korelacje między cząstkami. Pomimo fizycznej różnicy pomiędzy przypadkami, gdy $\beta \in (0, 1/3]$ i $\beta \in (1/3, 1)$, formalne zachowanie graniczne oddziaływania (6) jest takie samo w obu przypadkach. Dlatego reżim, w którym $\beta \in (0, 1)$ będziemy nazywać reżimem NLS, ponieważ graniczny efektywny opis kondensatu będzie w tym przypadku dany przez nieliniowe równanie Schrödingera (NLS).

Przypadek, gdy $\beta = 1$ odpowiada słynnemu skalowaniu Grossa-Pitaevskiego, w którym silne korelacje występują na bardzo krótkich skalach długości (rzędu $1/N$). Makroskopowe własności układu są dobrze uchwycone przez słynną teorię Grossa–Pitaevskiego [30, 46]. W teorii tej cząstka kwantowa jest efektywnie odczuwana przez pozostałe cząstki układu jako twarda kula, której promień jest długością rozpraszania potencjału oddziaływania. Długość rozpraszania $\mathfrak{a}$ potencjału w jest określona wzorem wariacyjnym

$$8\pi\mathfrak{a} = \inf_f \left\{ \int 2|\nabla f|^2 + w|f|^2, \quad \lim_{|x|\to\infty} f(x) = 1 \right\}. \tag{7}$$

Gdy w jest dostatecznie gładkie, to zagadnienie (7) ma minimizera $0 \leq f_0 \leq 1$, który spełnia

$$(-2\Delta + w) f_0 = 0. \tag{8}$$

Długość rozpraszania można równoważnie zdefiniować za pomocą wzoru

$$8\pi\mathfrak{a} = \int w f_0. \tag{9}$$

Dzięki skalowaniu (5), długość rozpraszania $N^{-1}w_N = N^2 w(N\cdot)$ wynosi $\mathfrak{a}N^{-1}$. Jeśli formalnie zastąpimy potencjał oddziaływania $w_N(x-y)$ w H_N przez $8\pi\mathfrak{a}\delta(x-y)$, to otrzymamy hamiltonian z oddziaływaniem δ-Diraca. Obiekt taki nie jest (w trzech wymiarach) matematycznie dobrze zdefiniowany. Mimo to, taki opis jest zwykle przyjmowany jako punkt wyjścia w literaturze z zakresu fizyki zimnych gazów.

Typy przybliżeń. Jak wspomniano wcześniej, celem jest zrozumienie, jak zachowuje się N-cząstkowa funkcja falowa, gdy N jest bardzo duże. W kontekście dynamiki rozważa się zazwyczaj dwa możliwe efektywne opisy. Pierwszy z nich, nazywany zwykle przybliżeniem wiodącego rzędu, rozważa aproksymację $\Psi_{N,t}$ w kategoriach zredukowanych macierzy gęstości. Przypomnijmy, że (jednociałowa) zredukowana macierz gęstości stanu $\Psi_N \in \mathfrak{H}^N$ (tutaj ograniczymy się do temperatury zerowej) jest dodatnim, śladowym operatorem $\gamma_{\Psi_N} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ z jądrem

$$\gamma_{\Psi_N}(x,y) = N \int \Psi_N(x, x_2, ..., x_N)\overline{\Psi_N(y, x_2, ..., x_N)}dx_2...dx_N. \tag{10}$$

Znajomość γ_{Ψ_N} pozwala na wyznaczenie wartości oczekiwanych obserwabli jednociałowych w stanie Ψ_N. Istotnie, niech $O : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ będzie obserwablą i niech O_i oznacza odpowiadający jej operator działający na i-tą cząstkę w przestrzeni N-ciałowej. Wtedy

$$\left\langle \Psi_N, \left(\sum_{i=1}^N O_i\right) \Psi_N \right\rangle = \mathrm{Tr}(O\gamma_{\Psi_N}). \tag{11}$$

Powiemy, że pełna ewolucja wielu ciał $\Psi_{N,t}$ jest *w wiodącym rzędzie aproksymowana* przez $\Phi_{N,t}$, jeśli

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \mathrm{Tr}\,|\gamma_{\Psi_{N,t}} - \gamma_{\Phi_{N,t}}| = 0. \tag{12}$$

Zauważmy, że ze względu na (11) topologia norm śladowych jest w tym kontekście naturalna. Pozostaje mieć nadzieję, że $\Phi_{N,t}$ można wyznaczyć w łatwiejszy sposób niż $\Psi_{N,t}$.

Zbieżność (12) jest ściśle związana z definicją kondensacji Bosego–Einsteina wprowadzoną przez Penrose'a i Onsagera w [43]. Powiemy, że układ bozonów wykazuje BEC w stanie $\Psi_N \in \mathfrak{H}^N$, jeżeli

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\,\left|\frac{1}{N}\gamma_{\Psi_N} - |\phi\rangle\langle\phi|\right| = 0 \tag{13}$$

dla jakiegoś $\phi \in \mathfrak{H}$. Często mówi się wtedy, że ϕ jest funkcją falową kondensatu. Ta terminologia związana jest z faktem, że jeśli rozważamy tzw. stan Hartree'ego lub stan iloczynowy, tzn. nieskorelowaną N-ciałową funkcję falową w postaci $\phi^{\otimes N} := \phi(x_1)\ldots\phi(x_N)$, w którym wszystkie cząstki zajmują ten sam jednocząstkowy stan, to

$$\gamma_{\phi^{\otimes N}} = N|\phi\rangle\langle\phi|.$$

Dlatego właśnie można czasem spotkać się z zapisem

$$"\Psi_N \approx \phi^{\otimes N} \qquad \text{"w wiodącym rzędzie"}$$

co oznacza asymptotyczną równość zredukowanych macierzy gęstości w topologii norm śladowych. Zauważmy, że BEC nie oznacza, że wszystkie cząstki zajmują jeden stan jednocząstkowy, a jedynie, że robi to ich makroskopowy (rzędu N) liczba. W rzeczywistości, o ile stan Hartree'ego jest stanem podstawowym układu nie oddziałującego ($w_N = 0$), to nie może być on stanem własnym układu oddziałującego. W szczególności, jeżeli rozważymy stan (pomińmy na chwilę symetrię funkcji falowej)

$$\Xi_N := \prod_{i=1}^{N-1} \phi(x_i)\phi^{\perp}(x_N), \quad \text{z} \quad \phi \perp \phi^{\perp},$$

to oczywiście

$$\Xi_N \perp \phi^{\otimes N} \quad \text{w} \qquad L^2(\mathbb{R}^{3N}).$$

ale fizycznie, dla dużych N, oba stany opisują bardzo podobną sytuację. W szczególności, oba stany wykazują BEC z tą samą funkcją falową kondensatu.

Często wiedza o korelacjach w układzie jest kluczowa dla zrozumienia niektórych własności fizycznych układu. Jak widać na powyższym przykładzie, przybliżenie wiodącego rzędu nie jest do tego celu wystarczające. Dlatego rozważa się najbardziej naturalną normę: *normę N-cząstkowej przestrzeni Hilberta* (lub, w skrócie, *przybliżenie w normie*). Dokładniej, celem jest znalezienie N-ciałowej funkcji falowej $\Xi_{N,t} \in \mathfrak{H}^N$, która jest łatwiejsza do obliczenia niż $\Psi_{N,t}$ a zarazem

$$\lim_{N\to\infty} \|\Psi_{N,t} - \Xi_{N,t}\|_{\mathfrak{H}^N} = 0. \tag{14}$$

Oczywiście, ponieważ

$$\operatorname{Tr} |O(\gamma_{\Psi_N} - \gamma_{\Xi_N}) \leq 2\|O\| \, \|\Psi_N - \Xi_N\| \tag{15}$$

dla dowolnego ograniczonego operatora O, aproksymacja normowa implikuje zbieżność zredukowanych jednociałowych macierzy gęstości.

Przegląd literatury. Matematyczne badanie dynamiki układów wielu bozonów rozpoczęło się w latach 70-tych od prac Heppa [31], Ginibre i Velo [25] oraz Spohna [50]. Ponowne zainteresowanie tematem dynamiki kondensatów Bosego–Einsteina miało miejsce latach dwutysięcznych, kiedy to Bardos, Golse i Mauser w [3] oraz, niezależnie, Erdös i Yau w [23] rozważali układ średniopolowy ($\beta = 0$) i pokazali, że w wiodącym rzędzie dynamika układów wielu bozonów jest dobrze aproksymowana przez rozwiązanie równania Hartree'ego. Dokładniej, pokazali oni, że jeżeli $\Psi_{N,0}$ jest stanem początkowym spełniającym

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr} \Big| \frac{1}{N}\gamma_{\Psi_{N,0}} - |u_0\rangle\langle u_0| \Big| = 0 \tag{16}$$

(dla znormalizowanej funkcji falowej $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$), to

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr} \left| \frac{1}{N}\gamma_{\Psi_{N,t}} - |u_t\rangle\langle u_t| \right| = 0 \tag{17}$$

gdzie $\Psi_{N,t} = e^{-\mathrm{i}tH_N}$ jest N-cząstkową funkcją falową poddaną ewolucji zadanej przez hamiltonian H_N (z $V = 0$) średniopolowy (z $V = 0$), a u_t jest rozwiązaniem zależnego od czasu równania Hartree'ego

$$i\partial_t u_t = \big(-\Delta + w_N * |u_t|^2 - \mu_{N,t} \big) u_t \tag{18}$$

z warunkiem początkowym u_0. Tutaj $\mu_{N,t} = \frac{1}{2}\iint |u_t(x)|^2 w_N(x-y)|u_t(y)|^2 \in \mathbb{R}$ jest czynnikiem fazowym.

W kolejnych latach otrzymano jeszcze wiele innych wyników tego typu ([1, 2, 12, 18, 19, 24, 34, 35, 40, 44, 47]). Istotnym celem pozostawało udowodnienie analogicznego wyniku w skalowaniu Grossa-Pitaevskiego. Udało się to ostatecznie osiągnąć Erdösowi, Schleinowi i Yau w serii prac [20–22]. Pokazali oni, że jeśli $w \geq 0$ jest gładką, parzystą funkcją potencjału międzycząsteczkowego, który zanika wystarczająco szybko i ma długość rozpraszania $\mathfrak{a}$, a $\Psi_{N,0}$ jest rodziną początkowych funkcji falowych takich, że

$$\langle \Psi_{N,0}, H_N \Psi_{N,0} \rangle \leq CN$$

które wykazują kondensację Bosego-Einsteina

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr}\Big|\frac{1}{N}\gamma_{\Psi_{N,0}} - |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0|\Big| = 0 \tag{19}$$

dla znormalizowanej funkcji falowej $\varphi_0 \in H^1(\mathbb{R}^3)$, to

$$\lim_{N\to\infty} \operatorname{Tr}\Big|\frac{1}{N}\gamma_{\Psi_{N,t}} - |\varphi_t\rangle\langle\varphi_t|\Big| = 0 \tag{20}$$

gdzie $\Psi_{N,t} = e^{-\mathrm{i}tH_N}$ jest wielociałową funkcją falową ewoluowaną przez wielociałowy hamiltonian Grossa-Pitaevskiego H_N (z $V = 0$ i $\beta = 1$), a φ_t jest rozwiązaniem zależnego od czasu równania Grossa-Pitaevskiego

$$i\partial_t\varphi_t = \big(-\Delta + 8\pi\mathfrak{a}|\varphi_t|^2)\big)\varphi_t \tag{21}$$

z warunkiem początkowym φ_0.

Obie prace [21, 22] opierały się na metodzie hierarchii BBGKY i nie podawały żadnych ilościowych oszacowań zbieżności. Tempo zbieżności w (20) zostało później uzyskane przez Benediktera, de Oliveirę i Schleina w [4], Pickla w [45] oraz przez Brennecke i Schleina w [9]. W ostatnich latach uzyskano kilka innych wyników w duchu (20), w tym między innymi na temat dynamiki zredukowanej wymiarowo [7, 8], dynamiki w polach magnetycznych [42] i dynamiki układów (pseudo)spinorowych [39], by wymienić tylko kilka.

Przybliżenie wiodącego rzędu nie dostarcza informacji o powstawaniu i ewolucji korelacji pomiędzy oddziałującymi cząstkami. Aby zrozumieć korelacje należy rozważyć przybliżenie normowe dla pełnej N-ciałowej funkcji falowej. Jak już wspomnieliśmy (przypomnijmy (15)), to pojęcie bliskości jest bardziej precyzyjne niż przybliżenie wiodącego rzędu. W ramach skalowania średniopolowego problem ten został po raz pierwszy przeanalizowany przez Lewina, Nama i Schleina w [37]. Rozważali oni stany początkowe N-cząstkowe postaci

$$\Psi_{N,0} = \sum_{n=0}^{N} u_0^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,0} \tag{22}$$

gdzie $\psi_{n,0} \in (\mathfrak{H}^\perp)^n$ z $\mathfrak{H}^\perp = \mathfrak{H}^\perp = \{u_0\}^\perp$. W pracy [37] udowodniono, że gdy $\beta = 0$, ewolucja czasowa $\Psi_{N,t} = e^{-\mathrm{i}tH_N}$ spełnia

$$\lim_{N\to\infty} \Big\|\Psi_{N,t} - \sum_{n=0}^{N} u_t^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,t}\Big\|_{\mathfrak{H}^N} = 0 \tag{23}$$

gdzie u_t jest ewolucją Hartree'ego (18) ze współczynnikiem fazowym

$$\mu_t = \frac{1}{2}\iint \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ |u_t(x)|^2 w(x-y)|u_t(y)|^2$$

a ewolucją $(\psi_{n,t})$ rządzi tak zwany hamiltonian Bogoliubowa (zostanie to wyjaśnione i omówione poniżej).

Wyniki stanowiące główne osiągnięcie naukowe tej habilitacji zostały uzyskane w programie badawczym, którego celem było wyprowadzenie przybliżenia normowego dla dynamiki oddziałujących bozonów poza reżimem pola średniego, tj. dla $\beta > 0$. W pracy **[A6]** dokonano tego dla $\beta < 1/3$, w **[A4]** rozszerzono wyniki na przypadek $\beta < 1/2$, natomiast w **[A2]** cel ten został osiągnięty dla $\beta < 1$. W **[A1]** rozważaliśmy ten sam problem w jednym i dwóch wymiarach przestrzennych, gdy oddziaływanie między cząstkami jest przyciągające. W **[A5]** pokazaliśmy, jak wyniki uzyskane w **[A4]** pozwalają na uzyskanie ilościowej wersji wyników Erdösa, Schleina i Yau z [20]. Wreszcie, w **[A3]** wyjaśniliśmy związek między wynikami **[A6]** a pokrewnymi wynikami [26, 28, 29] o aproksymacji normowej w przestrzeni Focka (formalizm przestrzeni Focka jest omówiony poniżej).

Od tej pory, jeśli nie zostanie to określone inaczej, zakładamy, że potencjał oddziaływania w jest nieujemny, gładki i szybko zanikający. Można by sformułować bardziej precyzyjne założenia, ale nie będziemy tego robić, gdyż nie jest to główny przedmiot zainteresowania omawianych prac.

2. Omówienie wyników

Zanim przejdziemy do szczegółowego omówienia głównych wyników Osiągnięcia Naukowego, przypomnijmy podstawy formalizmu drugiej kwantyzacji. Formalizm ten jest niezwykle użyteczny przy analizie wielociałowych układów kwantowych.

W formalizmie drugiej kwantyzacji, stany kwantowe są wektorami w (u nas - bozonowej) przestrzeni Focka danej przez

$$\mathcal{F}(\mathfrak{H}) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\mathrm{sym}}^{n} \mathfrak{H}^n, \tag{24}$$

gdzie $\mathfrak{H}$ jest jednocząstkową przestrzenią Hilberta. Dla wektora $\Psi = (\psi_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(\mathfrak{H})$ z przestrzeni Focka (gdzie $\psi_n \in \mathfrak{H}^n$), definiujemy jego normę

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\psi_n\|_{\mathfrak{H}^n}^2.$$

Dla funkcji $f \in \mathfrak{H}$ definiujemy operatory kreacji $a^*(f)$ i operatory anihilacji $a(f)$ dane przez

$$\begin{aligned}(a^*(f)\psi_n)(x_1, \ldots, x_{n+1}) &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sum_{j=1}^{n+1} f(x_j)\psi_n(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}) \\ (a(f)\psi_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \sqrt{n} \int \mathrm{d}x_n \overline{f(x_n)} \psi_n(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

dla wszystkich $\psi_n \in \mathfrak{H}^n$ i dla wszystkich n. Operatory te spełniają kanoniczne związki komutacyjne (CCR)

$$[a(f), a(g)] = [a^*(f), a^*(g)] = 0, \quad [a(f), a^*(g)] = \langle f, g \rangle \tag{25}$$

dla wszystkich $f, g \in \mathfrak{H}$. Operatory te wykorzystywane są do opisu stanów i obserwabli (operatorów) na przestrzeni Focka. Jest znanym faktem (patrz np. [49]), że dla symetrycznego operatora H na $\mathfrak{H}$ i bazy ortonormalnej $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset D(h)$ przestrzeni $\mathfrak{H}$ zachodzi

$$\mathrm{d}\Gamma(H) := 0 \oplus \bigoplus_{N=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N} H_j = \sum_{m,n \geq 1} \langle f_m, H f_n \rangle a^*(f_m) a(f_n). \tag{26}$$

Podobnie, dla symetrycznego operatora W na $\mathfrak{H} \otimes \mathfrak{H}$ takiego, że

$$\langle f_m \otimes f_n, W\, f_p \otimes f_q \rangle = \langle f_n \otimes f_m, W\, f_q \otimes f_p \rangle$$

dla wszystkich $m, n, p, q \geq 1$ mamy

$$\begin{aligned} 0 \oplus 0 \oplus \bigoplus_{N=2}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq N} W_{ij} \\ = \frac{1}{2} \sum_{m,n,p,q \geq 1} \langle f_m \otimes f_n, W\, f_p \otimes f_q \rangle_{\mathfrak{H}^2}\; a^*(f_m) a^*(f_n) a(f_p) a(f_q). \end{aligned} \tag{27}$$

Jeśli chcemy uniknąć wyboru konkretnej bazy ortonormalnej, dobrze jest użyć dystrybucji o wartościach operatorowych a_x^* oraz a_x (tutaj $x \in \mathbb{R}^3$), danych przez

$$a^*(f) = \int \mathrm{d}x f(x) a_x^* \qquad \text{oraz} \qquad a(f) = \int \mathrm{d}x \overline{f(x)} a_x$$

dla wszystkich $f \in \mathfrak{H}$. Kanoniczne związki komutacyjne (25) implikują wtedy

$$[a_x^*, a_y^*] = [a_x, a_y] = 0 \qquad \text{oraz} \qquad [a_x, a_y^*] = \delta(x - y). \tag{28}$$

Wzory (26) oraz (27) można wtedy przepisać jako

$$\mathrm{d}\Gamma(H) = \iint \mathrm{d}x \mathrm{d}y H(x, y) a_x^* a_y, \tag{29}$$

$$0 \oplus 0 \oplus \bigoplus_{N=2}^{\infty} \sum_{1 \leq i < j \leq N} W_{ij} = \frac{1}{2} \iiiint \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}x' \mathrm{d}y'\, W(x, y; x', y') a_x^* a_y^* a_{x'} a_{y'} \tag{30}$$

gdzie $H(x, y)$ oraz $W(x, y; x', y')$ są jądrami całkowymi operatorów, odpowiednio, H and W.

Na przykład, operator liczby cząstek można zapisać jako

$$\mathcal{N} := \mathrm{d}\Gamma(1) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} n 1_{\mathfrak{H}^n} = \int \mathrm{d}x a_x^* a_x$$

zaś N-ciałowy hamiltonian H_N można rozszerzyć do operatora na całej przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathfrak{H})$ pisząc

$$\mathcal{H}_N = \mathrm{d}\Gamma(-\Delta) + \frac{1}{2(N-1)} \iint \mathrm{d}x \mathrm{d}y\, w_N(x - y) a_x^* a_y^* a_x a_y. \tag{31}$$

Zgodnie ze znanymi twierdzeniami na temat kondensacji Bosego–Einsteina, oczekujemy, że cząstki będace w kondensacie opisane będą przez rozwiązanie u_t równania Hartree'ego. By opisać cząstki poza kondensatem wprowadzimy tak zwaną przestrzeń Focka wzbudzeń $\mathcal{F}_+(t) \subset \mathcal{F}(\mathfrak{H})$ daną przez

$$\mathcal{F}_+(t) := \mathcal{F}(\mathfrak{H}_+(t)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_+(t)^n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_{\text{sym}}^{n} \mathfrak{H}_+(t)$$

gdzie

$$Q(t) := 1 - |u_t\rangle\langle u_t| =: 1 - P(t), \quad \mathfrak{H}_+(t) := Q(t)\mathfrak{H} = \{u_t\}^{\perp}.$$

Operator liczby wzbudzonych cząstek dany jest wtedy przez

$$\mathcal{N}_+(t) := \mathrm{d}\Gamma(Q) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} n 1_{\mathfrak{H}_+^n(t)} = \mathcal{N} - a^*(u_t) a(u_t).$$

Podobnie jak w [38, Sec. 2.3], możemy rozłożyć dowolną funkcję $\Psi \in \mathfrak{H}^N$ jako

$$\Psi = \sum_{n=0}^{N} u_t^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_n = \sum_{n=0}^{N} \frac{(a^*(u_t))^{N-n}}{\sqrt{(N-n)!}} \psi_n$$

gdzie $\psi_n \in \mathfrak{H}_+(t)^n$. Prowadzi to do definicji *unitarnego* operatora

$$\begin{aligned} U_N(t): \quad \mathfrak{H}^N &\to \mathcal{F}_+^{\leq N}(t) := \bigoplus_{n=0}^{N} \mathfrak{H}_+(t)^n \\ \Psi &\mapsto \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \cdots \oplus \psi_N. \end{aligned} \tag{32}$$

Heurystycznie, operator $U_N(t)$ wydziela kondensat z N-ciałowej funkcji falowej i zanurza otrzymany stan w przestrzeni Focka.

[A6] Bogoliubov correction to the mean-field dynamics of interacting bosons

Chcąc śledzić zachowanie wzbudzonych cząstek, podobnie jak w [37], rozważamy

$$\Phi_{N,t} := U_{N,t}\Psi_{N,t}. \tag{33}$$

Wektor $\Phi_{N,t}$ należy do $\mathcal{F}_+^{\leq N}(t)$ i spełnia równanie

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi_{N,t} = \Big[i\left(\partial_t U_N(t)\right) U_N^*(t) + U_N(t) H_N U_N^*(t) \Big] \Phi_{N,t}, \\ \quad \Phi_{N,0} = U_N(0)\Psi_{N,0}. \end{cases} \tag{34}$$

Pierwszym kluczowym elementem naszego podejścia jest następująca aproksymacja

$$i\left(\partial_t U_N(t)\right) U_N^*(t) + U_N(t) H_N U_N^*(t) \approx \mathbb{H}(t), \tag{35}$$

gdzie $\mathbb{H}(t)$ jest kwadratowym hamiltonianem otrzymanym z teorii Bogoliubowa:

$$\begin{aligned} \mathbb{H}(t) :=& \mathrm{d}\Gamma\big(-\Delta + |u_t|^2 * w_N - \mu_N(t) + K_1(t) \big) \\ &+ \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \Big(K_2(t,x,y) a^*(x) a^*(y) + \overline{K_2(t,x,y)} a(x) a(y) \Big) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{36}$$

Tutaj $K_1(t) = Q(t)\widetilde{K}_1(t)Q(t)$, gdzie $\widetilde{K}_1(t)$ jest operatorem na $\mathfrak{H}$ z jądrem całkowym $\widetilde{K}_1(t,x,y) = u_t(x) w_N(x-y) \overline{u_t(y)}$, zaś $K_2(t,\cdot,\cdot) = Q(t) \otimes Q(t) \widetilde{K}_2(t,\cdot,\cdot) \in \mathfrak{H}^2$ gdzie $\widetilde{K}_2(t,x,y) = u_t(x) w(x-y) u_t(y)$.

Gdy $\beta = 0$, przybliżenie (35) (w sensie form kwadratowych) zostało pokazane w [37], przy użyciu pomysłów pochodzących z [38]. W naszej pracy **[A6]**, analizując skalowanie dla $0 \leq \beta < 1/3$, wyprowadziliśmy oszacowanie (w sensie nierówności operatorów)

$$R^2(t) \leq C \Big(N^{6\beta-2} \mathcal{N}_+^4(t) + N^{3\beta-1} \mathcal{N}_+^3(t) + N^{3\beta-2} \Big) \tag{37}$$

(na $\mathcal{F}(\mathfrak{H})$, dla stałej C zależącej tylko od $\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$), gdzie

$$R(t) = 1_{\mathcal{F}_+^{\leq N}(t)} \Big[i\left(\partial_t U_N(t)\right) U_N^*(t) + U_N(t) H_N U_N^*(t) - \mathbb{H}(t) \Big] 1_{\mathcal{F}_+^{\leq N}(t)}.$$

Jesteśmy zainteresowani ewolucją czasową N-ciałowego stanu początkowego postaci (22):

$$\Psi_{N,0} = \sum_{n=0}^{N} u_0^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,0}$$

gdzie $\Phi_0 := (\psi_{n,0})_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_+(0)$. W tej sytuacji

$$\Phi_{N,0} = U_N \Psi_{N,0} = (\psi_{n,0})_{n=0}^{N}$$

zbiega (w normie przestrzeni Focka) do Φ_0. W połączeniu z przybliżeniem Bogoliubowa (35), możemy oczekiwać, że ewolucja $\Phi_{N,t}$ z (34) jest bliska (w normie) rozwiązaniu równania Bogoliubowa

$$\begin{cases} i\partial_t \Phi_t = \mathbb{H}(t)\Phi_t, \\ \Phi(t=0) = \Phi_0. \end{cases} \tag{38}$$

W przypadku $\beta = 0$ dowód Lewina, Nam i Schleina w [37] używa oszacowania na $\langle \Phi_t, \mathcal{N}\Phi_t\rangle$ które, między innymi, zależy od $\|K_2(t,\cdot,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}$. Istotnie, naturalnym podejściem do oszacowania $\langle \Phi_t, \mathcal{N}\Phi_t\rangle$ jest policzenie pochodnej

$$\frac{d}{dt}\langle \Phi_t, \mathcal{N}\Phi_t\rangle = -\langle \Phi_t, i[\mathcal{N},\mathbb{H}]\Phi_t\rangle$$

a następnie użycie nierówności Grönwalla. Wymaga to oszacowania komutatora $i[\mathcal{N},\mathbb{H}]$ przez $\mathcal{N}$. Najlepsze znane nam oszacowanie jest postaci

$$i[\mathcal{N},\mathbb{H}] \le C\|K_2(t,\cdot,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)}(\mathcal{N}+1)$$

Gdy $\beta > 0$,

$$\|K_2(t,\cdot,\cdot)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3)} \sim \iint |u_t(x)|^2 |w_N(x-y)|^2 |u_t(y)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \sim N^{3\beta},$$

i wtedy nierówność Grönwalla prowadzi do oszacowania $\langle \Phi_t, \mathcal{N}\Phi_t\rangle$ które (dla ustalonego t) jest rzędu $\exp(N^{3\beta/2})$ i które staje się zbyt duże dla $\beta > 0$.

Najważniejszy nowy, techniczny lemat prowadzący do głównego wyniku w **[A6]** jest jednostajne oszacowanie $\langle \Phi_t, \mathcal{N}\Phi_t\rangle$, dla dowolnego $\beta \in (0, 1/3)$. Dokładniej, pokazaliśmy, że jeśli Φ_0 jest kwaziswobodnym stanem początkowym to Φ_t też jest kwaziswobodny oraz

$$\langle \Phi_t, \mathcal{N}\Phi_t\rangle \le e^{Ct}\Big(1 + \langle \Phi_0, \mathcal{N}\Phi_0\rangle\Big)^2 \tag{39}$$

dla stałej C zależącej tylko do $\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$. Przy dodatkowych założeniach odnośnie regularności funkcji u_0 jesteśmy w stanie poprawić zależność od czasu w powyższym oszacowaniu.

Przypomnijmy, że stan Ψ w przestrzeni Focka $\mathcal{F}(\mathfrak{H})$ nazywany jest kwaziswobodnym o ile wartość oczekiwana operatora liczby cząstek w tym stanie jest skończona oraz spełnia twierdzenie Wicka:

$$\langle \Psi, a^{\#}(f_1)a^{\#}(f_2)\cdots a^{\#}(f_{2n-1})\Psi\rangle = 0, \tag{40}$$

$$\langle \Psi, a^{\#}(f_1)a^{\#}(f_2)\cdots a^{\#}(f_{2n})\Psi\rangle = \sum_{\sigma\in P_{2n}} \prod_{j=1}^{n} \langle \Psi, a^{\#}(f_{\sigma(2j-1)})a^{\#}(f_{\sigma(2j)})\Psi\rangle \tag{41}$$

dla wszystkich n i wszystkich $f_1, ..., f_n \in \mathfrak{H}$, gdzie $a^\#$ jest operatorem kreacji lub anihilacji zaś P_{2n} jest zbiorem permutacji

$$P_{2n} = \{\sigma \in S(2n) \mid \sigma(2j-1) < \min\{\sigma(2j), \sigma(2j+1)\} \text{ dla wszystkich } j\}.$$

Jeśli Ψ jest kwaziswobodny, to rzut $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ jest określony przez zredukowaną macierz gęstości stanu Ψ. Przypomnijmy, że dla dowolnego stanu Ψ w $\mathcal{F}(\mathfrak{H})$, definiujemy zredukowane macierze gęstości $\gamma_\Psi : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ oraz $\alpha_\Psi : \overline{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}$ wzorem

$$\langle f, \gamma_\Psi g\rangle = \langle \Psi, a^*(g)a(f)\Psi\rangle\,, \quad \langle f, \alpha_\Psi \overline{g}\rangle = \langle \Psi, a(g)a(f)\Psi\rangle \tag{42}$$

dla wszystkich $f, g \in \mathfrak{H}$. Jeśli $\Psi \in \mathfrak{H}^N$, to γ_Ψ jest tożsama z macierzą gęstości zdefiniowaną w (10).

Kluczowym krokiem w celu otrzymania oszacowania (39) było przepisanie równania (38) w języku zredukowanych macierzy gęstości γ_t oraz α_t kwaziswobodnego stanu Φ_t:

$$\begin{cases} i\partial_t \gamma_t = h\gamma_t - \gamma_t h + K_2\alpha_t - \alpha_t^* K_2^*, \\ i\partial_t \alpha_t = h\alpha_t + \alpha_t h^{\mathrm{T}} + K_2 + K_2\gamma_t^{\mathrm{T}} + \gamma_t K_2, \\ \quad \gamma(t=0) = \gamma_{\Phi_0}, \quad \alpha(t=0) = \alpha_{\Phi_0}. \end{cases} \tag{43}$$

Tutaj $h(t) = -\Delta + |u(t)|^2 * w_N - \mu_N(t) + K_1(t)$; $K_2(t) : \overline{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}$ jest operatorem z jądrem całkowym $K_2(t,x,y)$; zaś $\gamma^{\mathrm{T}} : \overline{\mathfrak{H}} \to \overline{\mathfrak{H}}$ jest operatorem z jądrem całkowym $\gamma^{\mathrm{T}}(t,x,y) = \gamma(t,y,x)$.

Jesteśmy teraz gotowi by sformułować główny wynik **[A6]**.

Twierdzenie 1 (Poprawki Bogoliubowa do dymiki średniopolowej) *Niech u_t będzie rozwiązaniem równania Hartree'ego* (18) *z warunkiem początkowym $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Niech $\Phi_t = (\psi_{n,t})_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}_+(t)$ będzie rozwiązaniem równania Bogoliubowa* (38) *z kwaziswobodnym warunkiem początkowym $\Phi_0 = (\psi_{n,0})_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}_+(0)$. Wtedy ewolucja Schrödingera $\Psi_{N,t} = e^{-itH_N}\Psi_{N,0}$ z warunkiem początkowym*

$$\Psi_{N,0} = \sum_{n=0}^N u_0^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,0} \tag{44}$$

spełnia

$$\left\| \Psi_{N,t} - \sum_{n=0}^N u_t^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,t} \right\|_{\mathfrak{H}^N} \le C_0(t) N^{(3\beta-1)/2}, \tag{45}$$

gdzie

$$C_0(t) \le e^{Ct}\Big(1 + \langle \Phi_0, \mathcal{N}\Phi_0\rangle\Big)^4$$

dla pewnej stałej C zależnej tylko od $\|u_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}$. Ponadto, jeśli $u_0 \in W^{\ell,1}(\mathbb{R}^3)$ z dostatecznie dużym ℓ, to

$$C_0(t) \le C_1(1+t)\Big(1 + \log(1+t) + \langle \Phi_0, \mathcal{N}\Phi_0\rangle\Big)^4$$

dla pewnej stałej C_1 zależnej tylko od $\|u_0\|_{W^{\ell,1}(\mathbb{R}^3)}$.

Zatem, dla $\beta < 1/3$, powyższe twierdzenie zadaje efektywny (poprzez równania Hartree'ego i Bogoliubowa) opis dynamiki układu oddziałujących bozonów.

[A4] A note on the validity of Bogoliubov correction to mean-field dynamics

W artykule **[A4]** kontynuowaliśmy analizę zagadnienia dla większych wartości parametru skalowania β. Twierdzenie, które jest głównym wynikiem w **[A4]**, rozszerza wynik z **[A6]** (patrz Twierdzenie 1) do przypadku, gdy $\beta < 1/2$.

Twierdzenie 2 (Poprawność dynamicznego przybliżenia Bogoliubowa) *Niech* $0 \le \beta < 1/2$.

- *Niech* u_t *spełnia równanie Hartree'ego* (18)*, z warunkiem początkowym* u_0 *spełniającym*

  $$\|u_0\|_{W^{\ell,1}(\mathbb{R}^3)} \le \kappa_0$$

  dla dostatecznie dużych ℓ *i dla pewnej stałej* $\kappa_0 > 0$ *niezależnej od* N.

- *Niech* $\Phi_t = (\psi_{n,t})_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_+(t)$ *spełnia równanie Bogoliubowa* (38) *z kwaziswobodnym stanem początkowym* $\Phi_0 \in \mathcal{F}_+(0)$ *spełniającym*

  $$\left\langle \Phi_0, \mathcal{N}\Phi_0 \right\rangle \le \kappa_\varepsilon N^\varepsilon \quad \textit{and} \quad \left\langle \Phi_0, \mathrm{d}\Gamma(1-\Delta)\Phi_0 \right\rangle \le \kappa_\varepsilon N^{\beta+\varepsilon} \tag{46}$$

  dla wszystkich $\varepsilon > 0$*, gdzie stała* $\kappa_\varepsilon > 0$ *jest niezależna od* N.

- *Niech* $\Psi_{N,t}$ *spełnia równanie Schrödingera* $\Psi_{N,t} = e^{-itH_N}\Psi_{N,0}$ *z warunkiem początkowym*

  $$\Psi_{N,0} = \sum_{n=0}^{N} u_0^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,0}.$$

Wtedy dla wszystkich $\varepsilon > 0$ *i każdego* $t > 0$ *zachodzi*

$$\left\| \Psi_{N,t} - \sum_{n=0}^{N} u_t^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_{n,t} \right\|_{\mathfrak{H}^N}^2 \le C_\varepsilon (1+t)^{1+\varepsilon} N^{(2\beta-1+\varepsilon)/2} \tag{47}$$

gdzie stała $C_\varepsilon > 0$ *zależy tylko od* κ_0 *i* ε.

Dowód Twierdzenia 2 opiera się na pomysłach wykorzystanych w dowodzie Twierdzenia 1. Nietrywialne, nowe techniczne lematy były jednak potrzebne. Prawdopodobnie najistotniejszym z nich jest nowe oszacowanie energii kinetycznej cząstek znajdujących się poza kondensatem. Oszacowanie to mówi, że $\Phi_{N,t}$ zdefiniowane w (33) spełnia

$$\left\langle \Phi_{N,t}, \mathrm{d}\Gamma(1-\Delta)\Phi_{N,t} \right\rangle \le C_\varepsilon N^{\beta+\varepsilon}, \quad \forall t > 0,\ \forall \varepsilon \in (0, 1-2\beta]. \tag{48}$$

dla stałej C_ϵ zależnej tylko od warunków początkowych. Analogiczne oszacowanie zachodzi także dla Φ_t.

[A5] Norm approximation for many-body quantum dynamics and Bogoliubov theory

Artykuł **[A5]** jest artykułem przeglądowym opisującym główne wyniki otrzymane w **[A6]** oraz **[A4]**. Nowością w pracy jest dowód, w jaki sposób Twierdzenie 2 implikuje słynne wyniki z pracy Erdösa, Schleina i Yau [20]. Dokładniej pokazaliśmy, że

Twierdzenie 3 (Dynamika wiodącego rzędu dla $\beta < 2/3$) *Przy założeniach z Twierdzenia 2 zachodzi*

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\left|\sqrt{1-\Delta}\Big(N^{-1}\gamma_{\Psi_{N,t}} - |u_t\rangle\langle u_t|\Big)\sqrt{1-\Delta}\right| = 0 \tag{49}$$

dla wszystkich $0 < \beta < 2/3$.

Zauważmy, że powyższa zbieżność implikuje kondensację Bosego–Einsteina (c.f. (17))

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{Tr}\,\Big|\frac{1}{N}\gamma_{\Psi_{N,t}} - |u_t\rangle\langle u_t|\Big| = 0. \tag{50}$$

Jak już wspomnieliśmy we wstępie w (14) oraz (15), nie jest zaskakującym, że zachodzi (17). Ciekawe jest to, że ta zbieżność zachodzi w silniejszym sensie (49) i dla większego przedziału parametru β (niż w Twierdzeniu 2).

Dowód Twierdzenia 3 wykorzystuje oszacowanie energii kinetycznej (48) z **[A4]**. Trik w dowodzie polega na tym, by (48) przepisać jako

$$\mathrm{Tr}\left(\sqrt{1-\Delta}Q(t)\gamma_{\Psi_{N,t}}Q(t)\sqrt{1-\Delta}\right) \le C_\varepsilon N^{\beta+\varepsilon} \tag{51}$$

a następnie, używając nierówności trójkąta i nierówności dla norm Schattena, oszacować

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\Delta}\left(\frac{1}{N}\gamma_{\Psi_{N,t}} - P(t)\right)\sqrt{1-\Delta} = &\\ \sqrt{1-\Delta}\Bigg(\frac{1}{N}Q(t)\gamma_{\Psi_{N,t}}Q(t) - \frac{1}{N}\mathrm{Tr}(Q(t)\gamma_{\Psi_{N,t}}Q(t))P(t) + &\\ +\frac{1}{N}P(t)\gamma_{\Psi_{N,t}}Q(t) + \frac{1}{N}Q(t)\gamma_{\Psi_{N,t}}P(t)\Bigg)\sqrt{1-\Delta}&\end{aligned} \tag{52}$$

za pomocą (51).

[A3] Recent advances in the theory of Bogoliubov Hamiltonians

Artykuł **[A3]** składa się z dwóch części. Część pierwsza jest streszczeniem wyników otrzymanych w pracy **[B4]**, która to praca nie została włączona do listy publikacji stanowiących osiągnięcie naukowe (patrz rozdział 5). W drugiej części artykułu **[A3]** pokazaliśmy w jaki sposób równania Bogoliubowa (43) są związane z tzw. zależnym od czasu problemem diagonalizacyjnym jak również wyjaśniliśmy związki między naszymi metodami a tymi używanymi przez Grillakisa i Machedona w ich pracach [26, 28, 29] na temat dynamiki układu oddziałujących bozonów. Z tego powodu włączyliśmy pracę **[A3]** do osiągnięcia naukowego.

Przypomnijmy pokrótce definicję transformacji Bogoliubowa. W tym celu wprowadzamy uogólnione operatory kreacji i anihilacji dane przez

$$A(f \oplus Jg) = a(f) + a^*(g), \quad A^*(f \oplus Jg) = a^*(f) + a(g), \quad \forall f, g \in \mathfrak{H} \tag{53}$$

(tutaj J kanonicznym anty-unitarnym operatorem z $\mathfrak{H}$ do $\mathfrak{H}^*$). Uogólnione operatory kreacji i anihilacji spełniają kanoniczne związki komutacyjne

$$A^*(F_1) = A(\mathcal{J}F_1), \quad [A(F_1), A^*(F_2)] = (F_1, \mathcal{S}F_2), \quad \forall F_1, F_2 \in \mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}^*, \tag{54}$$

gdzie wprowadziliśmy operatory blokowe na $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^*$

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & J^* \\ J & 0 \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Zauważmy, że $S = S^{-1} = S^*$ jest unitarny na $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^*$ oraz $\mathcal{J} = \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{J}^*$ jest anty-unitarny.

Powiemy, że ograniczony operator $\mathcal{V}$ na $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^*$ jest *unitarnie implementowalny* na przestrzeni Focka jeśli istnieje operator unitarny $\mathbb{U}_\mathcal{V}$ taki, że

$$\mathbb{U}_\mathcal{V} A(F) \mathbb{U}_\mathcal{V}^* = A(\mathcal{V}F), \quad \forall F \in \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^*. \tag{56}$$

Nie jest trudno zobaczyć, że jeśli zachodzi (56), to związki komutacyjne (54) implikują następujące relacje

$$\mathcal{J}\mathcal{V}\mathcal{J} = \mathcal{V}, \quad \mathcal{V}^* S \mathcal{V} = S = \mathcal{V} S \mathcal{V}^*. \tag{57}$$

Dowolny ograniczony operator $\mathcal{V}$ na $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}^*$ spełniający (57) nazywany jest *transfomacją Bogoliubowa*.

Przypomnijmy sobie zdefiniowane przy okazji dyskusji o **[A6]** pojęcie stanów kwaziswobodnych (40). Jest znanym faktem (patrz np. [49]), że stan czysty $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ w którym operator liczby cząstek ma skończoną wartość oczekiwaną, jest kwaziswobodny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\Psi = \mathbb{U}_\mathcal{V}^* |0\rangle$$

dla pewnej (unitarnie implementowalnej) transformacji Bogoliubowa $\mathbb{U}_\mathcal{V}^*$. Jesteśmy gotowi by sformułować główne twierdzenie **[A3]**, które stanowi wkład do omawianego osiągnięcia naukowego.

Twierdzenie 4 (Zależny od czasu problem diagonalizacyjny) *Niech $\Phi(t)$ będzie czystym stanem kwaziswobodnym i niech $\mathbb{U}_\mathcal{V}^*(t)$ odpowiadającą mu, unitarnie zaimplementowaną transformacją Bogoliubowa taką, że $\Phi(t) = \mathbb{U}_\mathcal{V}^*(t)|0\rangle$. Niech $(\gamma_{\Phi(t)}, \alpha_{\Phi(t)})$ będą zredukowanymi, jednocząstkowymi macierzami gęstości stanu $\Phi(t)$. Niech $\mathbb{H}(t)$ będzie kwadratowym operatorem zdefiniowanym w* (36). *Wtedy*

$$\mathbb{U}_\mathcal{V}(t)(i\partial_t \mathbb{U}_\mathcal{V}^*(t)) - \mathbb{U}_\mathcal{V}(t)\mathbb{H}(t)\mathbb{U}_\mathcal{V}^*(t) = \mathrm{d}\Gamma(\xi(t)) \tag{58}$$

dla pewnego operatora $\xi(t) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy równania Bogoliubowa (43) *są spełnione.*

Nazwa 'zależny od czasu problem diagonalizacyjny' nawiązuje do podobnego problemu statycznego, gdy kwadratowy hamiltonian nie zależy od czasu i poszukuje się transformacji Bogoliubowa $\mathbb{U}_\mathcal{V}$ takiej, że

$$\mathbb{U}_\mathcal{V} \mathbb{H} \mathbb{U}_\mathcal{V}^* = \mathrm{d}\Gamma(\xi) \tag{59}$$

dla pewnego operatora ξ (ten problem rozwiązałem wraz z Namem i Solovejem w **[B4]**).

Twierdzenie 4 wyjaśnia na abstrakcyjnym poziomie związek między podejściem i metodami zastosowanymi przez nas w **[A6]** oraz metodami wypracowanymi przez Grillakisa, Machedona i Margetisa w pracach [26, 28, 29]. W wymienionych artykułach autorzy rozważali problem dynamiki bozonów w przestrzeni Focka, to jest dla stanów początkowych, które są w przestrzeni Focka (nie mają ustalonej liczby cząstek) zaś ostateczne przybliżenie jest w normie przestrzeni Focka (podczas gdy nasze stany początkowe mają ustloną liczbę N cząstek zaś przybliżenie jest w normie N-cząstkowej przestrzeni Hilberta). Ich stany początkowe były dane wzorem

$$\mathbb{U}^*_{\mathcal{V}_k}(t)|0\rangle = \exp\left(i\chi_N(t) + \iint \left[\overline{k(t,x,y)}a_x a_y - k(t,x,y)a^*_x a^*_y\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)|0\rangle \tag{60}$$

gdzie $\chi_N(t) \in \mathbb{R}$ jest czynnikiem fazowym. Można teraz podstawić (60) do lewej strony równania (58) i zażądać, by wszystkie człony typu $a^*_x a^*_y$ and $a_x a_y$ zniknęły. Taki warunek wyznacza równanie na jądro całkowe $k(t,x,y)$, które jest jednak silnie nieliniowe. Wynika to z relacji

$$\begin{aligned} \mathbb{U}^*_{\mathcal{V}_k}(t)a(f)\mathbb{U}_{\mathcal{V}_k}(t) &= a(\cosh(2k)f) + a^*(\sinh(2k)\overline{f}) \\ \mathbb{U}^*_{\mathcal{V}_k}(t)a^*(f)\mathbb{U}_{\mathcal{V}_k}(t) &= a^*(\cosh(2k)f) + a(\sinh(2k)\overline{f}) \end{aligned} \tag{61}$$

gdzie $f \in \mathfrak{H}$. Tutaj $\cosh(2k)$ oraz $\sinh(2k)$ oznaczają liniowe operatory na $\mathfrak{H}$ dane przez

$$\cosh(2k) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!}((2k)(\overline{2k}))^n, \qquad \sinh(2k) := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!}((2k)(\overline{2k}))^n(2k)$$

gdzie iloczyny k należy rozumieć jako składanie operatorów (danych przez jądro całkowe $k(t,x,y)$). W istocie rzeczy, powyższe relacje pokazują, że naturalnymi zmiennymi do rozważania problemu diagonalizacyjnego są $\cosh(2k)$ oraz $\sinh(2k)$, lecz nawet w tych zmiennych równania są nieliniowe. Grillakis, Machedon i Margetis zaobserwowali, że jeśli wprowadzi się nowe zmienne, to równania te można przepisać jako równania liniowe, które - jak własnie dowodzimy w powyższym Twierdzeniu - są równoważne (43). Nasz rezultat sformułowany jest na dość abstrakcyjnym poziomie i używa pojecia stanów kwaziswobodnych oraz faktu, że stany takie wyznaczone są jednoznacznie przez swoje zredukowane macierze gęstości γ_Ψ i α_Ψ. Pozwala to wyprowadzić równania (43) w prosty i efektywny sposób bezpośrednio z równania Bogliubowa (38).

[A2] Fluctuations of N-particle quantum dynamics around the nonlinear Schrödinger equation

Jak wyjaśniliśmy powyżej, wyniki prac **[A6]** oraz **[A4]** dostarczają dowodów poprawności teorii efektywnych opisujących dynamikę układów N bozonów w sytuacji, gdy parametr skalujący β (c.f. (5)) spełnia $\beta < 1/2$.

Gdy $\beta \geq 1/2$, krótkoskalowa struktura korelacyjna powstała w wyniku wielociałowej ewolucji Schrödingera nie może być odpowiednio opisana zależną od czasu transformacją Bogoliubowa spełniającą równanie postaci (38). Sytuacja ta wymaga do analizy nowych pomysłów i narzędzi. Zostały one wprowadzone w pracy **[A2]**.

Aby dokładniej uwzględnić korelacje, warto rozważyć stan podstawowy zagadnienia Neumanna

$$\left[-\Delta + \frac{1}{2N}w_N\right] f_N = \lambda_N f_N \tag{62}$$

na kuli $|x| \leq \ell$, dla ustalonego $\ell > 0$. Ponadto, zadajemu warunek $f_N(x) = 1$, dla $|x| = \ell$, i przedłużamy f_N do $\mathbb{R}^3$ żądając $f_N(x) = 1$ dla wszystkich $|x| \geq \ell$. Skalowanie potencjału oddziaływania w_N implikuje, że procesy rozproszeniowe między cząstkami zachodzą w obszarze $|x| \ll 1$. Z tego powodu, konkretny wybór ℓ nie jest istotny, o ile ℓ jest rzędu jeden (w N).

Rozwiązanie (62) może być wykorzystane do lepszego przybliżenia ewolucji funkcji falowej kondensatu. W tym celu zastąpimy rozwiązanie efektywnego nieliniowego równania Schrödingera

$$i\partial_t\varphi_t = \big(-\Delta + \|w\|_{L^1}|\varphi_t|^2\big)\varphi_t \tag{63}$$

przez rozwiązanie zmodyfikowanego, zależnego od N równania Hartree'ego

$$\mathrm{i}\partial\varphi_{N,t} = -\Delta\varphi_{N,t} + (w_N f_N * |\varphi_{N,t}|^2)\varphi_{N,t} \tag{64}$$

z warunkiem początkowym $\varphi_{N,0} = \varphi_0$ opisującym kondensat w chwili czasu $t = 0$.

Ponadto, rozwiązanie (62) może zostać użyte do opisu korelacji między cząstkami. W tym celu wprowadzamy

$$T_{N,t} = \exp\left(\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\ [k_{N,t}(x,y)a_x a_y - \text{h.c.}]\right) \tag{65}$$

z jądrem całkowym

$$k_{N,t}(x;y) = (Q_{N,t}\otimes Q_{N,t})\left[-N(1-f_N)(x-y)(\varphi_{N,t}((x+y)/2))^2\right] \tag{66}$$

gdzie $Q_{N,t} = 1 - |\varphi_{N,t}\rangle\langle\varphi_{N,t}|$ jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń ortogonalną do przestrzeni rozpiętej przez rozwiązanie zmodyfikowanego równania Hartree'ego (64). W szczególności, obecnie operator $U_N(t)$ będzie rzutował na dopełnienie ortogonalne $\varphi_{N,t}$ i oznaczymy go jako $U_{\varphi_{N,t}}$. Jako, że $T_{N,t}$ ma za zadanie opisać korelacje, naturalnym jest zdefiniować $k_{N,t}$ za pomocą rozwiązania (62). W szczególności, taki wybór (65) prowadzi do pewnych kluczowych, rachunkowych uproszczeń w obliczeniach prowadzących do wyznaczenia generatora dynamiki fluktuacji wokół kondensatu. Główne twierdzenie **[A2]** może zostać sformułowane następująco

Twierdzenie 5 (Przybliżenie normowe w reżimie NLS) *Rozważmy warunek początkowy $\Psi_{N,0} \in L^2_s(\mathbb{R}^{3N})$, którego jednocząstkowa zredukowana macierz gęstości $\gamma_{\Psi_{N,0}}$ spełnia*

$$N - \langle\varphi_0, \gamma_{\Psi_{N,0}}\varphi_0\rangle \le C \tag{67}$$

oraz

$$\left|\frac{1}{N}\langle\Psi_{N,0}, H_N^V\Psi_{N,0}\rangle - [\|\nabla\varphi_0\|^2 + \frac{1}{2}\langle\varphi_0, (w_N f_N * |\varphi_0|^2)\varphi_0\rangle\right| \le CN^{-1} \tag{68}$$

dla $\varphi_0 \in H^4(\mathbb{R}^3)$. Niech $\Psi_{N,t}$ będzie rozwiązaniem równania Schrödingera (4) *z warunkiem początkowym $\Psi_{N,0}$. Wtedy, dla wszystkich $\alpha < \min(\beta/2, (1-\beta)/2)$, istnieje stała $C > 0$ taka, że*

$$\begin{aligned}\left\|\Psi_{N,t} - U^*_{\varphi_{N,t}}T^*_{N,t}e^{-\mathrm{i}\int_0^t d\tau\,\eta_N(\tau)}\mathcal{U}_2(t;0)\,T_{N,0}\,U_{\varphi_{N,0}}\Psi_{N,0}\right\|^2 \\ \le CN^{-\alpha}\exp(C\exp(C|t|))\end{aligned} \tag{69}$$

dla wszystkich N dostatecznie dużych i wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Tutaj $\eta_N(t)$ jest czynnikiem fazowym, zaś $\mathcal{U}_2(t;0)$ jest unitarną dynamiką na $\mathcal{F}$ z generatorem, który jest kwadratowym operatorem na przestrzeni Focka, który może być wyrażony explicite za pomocą $\varphi_{N,t}, w_N, k_{N,t}$ (patrz równanie (41) in **[A2]***).*

Zatem, oszacowanie (69) zadaje przybliżenie w normie pełnej dynamiki wielu ciał dla danych początkowych wykazujących BEC za pomocą efektywnej dynamiki na przestrzeni Focka $\mathcal{U}_2(t;0)$ (z kwadratowym generatorem), rodziny czasowo zależnych transformacji Bogoliubowa $T_{N,t}$ oraz rozwiązania $\varphi_{N,t}$ zmodyfikowanego równania Hartree'ego. Zauważmy też, że założone warunki (67) i (68) zostały ostatnio udowodnione w [41].

Zaprezentujemy teraz szkic dowodu Twierdzenia 5. Strategia dowodu jest inna niż w przypadku, gdy $\beta < 1/2$ i nie obejmuje ona analizy równania Bogoliubowa jako takiego.

Początek jest jednak taki sam i zakłada działanie $U_{\varphi_{N,t}}$ na $\Psi_{N,t}$. To, tak jak wcześniej, pozwala na wyłączenie z dalszego opisu kondensatu, który w chwili t opisany jest przez $\varphi_{N,t}$, i skupienie się na fluktuacjach cząstek poza kondensatem. Definiujemy

$$\Phi_{N,t} = U_{\varphi_{N,t}} \Psi_{N,t},$$

i zauważamy, że $\Phi_{N,t} \in \mathcal{F}^{\leq N}_{\perp \varphi_{N,t}}$ spełnia równanie

$$\mathrm{i}\partial_t \Phi_{N,t} = \mathcal{L}_{N,t} \Phi_{N,t} \tag{70}$$

z generatorem

$$\mathcal{L}_{N,t} = (\mathrm{i}\partial_t U_{\varphi_{N,t}}) U^*_{N,t} + U_{\varphi_{N,t}} H_N U^*_{\varphi_{N,t}}. \tag{71}$$

Po żmudnych rachunkach dochodzimy do wyrażenia

$$\mathcal{L}_{N,t} = \sum_{j=0}^{4} \mathcal{L}^{(j)}_{N,t} \tag{72}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)}_{N,t} &= \frac{N+1}{2} \left\langle \varphi_{N,t}, [w_N(1-2f_N) * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t} \right\rangle - \mu_N(t), \\
\mathcal{L}^{(1)}_{N,t} &= \frac{1}{2} \left\langle \varphi_{N,t}, [w_N * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t} \right\rangle \frac{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)}{N} \\
&\quad + \Big[\sqrt{N} \, \big[a^*(Q_{N,t}[(w_N(1-f_N)) * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t}) \\
&\quad - a^*(Q_{N,t}[w_N * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t}) \frac{\mathcal{N}}{N} \big] \sqrt{\frac{N-\mathcal{N}}{N}} + \mathrm{h.c.} \Big], \\
\mathcal{L}^{(2)}_{N,t} &= \mathrm{d}\Gamma\Big(-\Delta + (w_N f_N) * |\varphi_{N,t}|^2 + K_{1,N,t} - \mu_{N,t} \Big) \\
&\quad + \mathrm{d}\Gamma\Big(Q_{N,t} (w_N(1-f_N) * |\varphi_{N,t}|^2) Q_{N,t} \Big) \\
&\quad - \mathrm{d}\Gamma\Big(Q_{N,t} (w_N * |\varphi_{N,t}|^2) Q_{N,t} + K_{1,N,t} \Big) \frac{\mathcal{N}}{N} \\
&\quad + \Big[\frac{1}{2} \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, K_{2,N,t}(x,y) a^*_x a^*_y \frac{\sqrt{(N-\mathcal{N})(N-\mathcal{N}-1)}}{N} + \mathrm{h.c.} \Big], \\
\mathcal{L}^{(3)}_{N,t} &= \Big[\frac{1}{\sqrt{N}} \int dx \mathrm{d}y \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \;\; (Q_{N,t} \otimes Q_{N,t} w_N Q_{N,t} \otimes 1)(x,y;x',y') \times \\
&\qquad \times \varphi_{N,t}(y') a^*_x a^*_y a_{x'} \sqrt{\frac{N-\mathcal{N}}{N}} + \mathrm{h.c.} \Big], \\
\mathcal{L}^{(4)}_{N,t} &= \frac{1}{2N} \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' (Q_{N,t} \otimes Q_{N,t} w_N Q_{N,t} \otimes Q_{N,t})(x,y;x',y') a^*_x a^*_y a_{x'} a_{y'}
\end{aligned}$$

z

$$\mu_N(t) := \left\langle \varphi_{N,t}, [(w_N(1-f_N) * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t} \right\rangle$$

oraz

$$K_{1,N,t} = Q_{N,t} \widetilde{K}_{1,N,t} Q_{N,t}$$

$$K_{2,N,t} = Q_{N,t} \otimes Q_{N,t} \widetilde{K}_{2,N,t}$$

gdzie $\widetilde{K}_{1,N,t}$ jest operatorem na $L^2(\mathbb{R}^3)$ z jądrem całkowym

$$K_{1,N,t}(x,y) = \varphi_{N,t}(x) w_N(x-y) \overline{\varphi_{N,t}(y)} \tag{73}$$

zaś $\widetilde{K}_{2,N,t}$ jest funkcją z $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$:

$$\widetilde{K}_{2,N,t}(x,y) = \varphi_{N,t}(x) w_N(x-y) \varphi_{N,t}(y). \tag{74}$$

Następnym krokiem jest usunięcie krótkoskalowych korelacji z $\Phi_{N,t}$. Skoro $\Psi_{N,t} = U^*_{\varphi_{N,t}} \Phi_{N,t}$ a $U^*_{\varphi_{N,t}}$ tylko 'dodaje' iloczyny rozwiązań nieliniowego równania (64), jasnym jest, że wszystkie korelacje które wytworzyły się podczas ewolucji $\Psi_{N,t}$ zawarte są w $\Phi_{N,t}$. By je usunąc z $\Phi_{N,t}$ działamy transformacją Bogoliubowa $T_{N,t}$ zdefiniowaną w (65). Niestety, $T_{N,t}$, jako operator, nie zachowuje liczby cząstek, a co za tym idzie nie działa niezmienniczo na przestrzeni Focka $\mathcal{F}^{\leq N}_{\perp \varphi_{N,t}}$. Jednakże, $T_{N,t}$ w wyniku swojego działania tworzy tylko kilka dodatkowych cząstek, nie powinno to zatem stanowić dużego problemu. By sobie z nim poradzić, odrzucamy ograniczenie na liczbę cząstek i traktujemy wektor $\Phi_{N,t}$ jako wektor w nie obciętej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_{\perp \varphi_{N,t}}$. Wadą tego podejścia jest fakt, że generator $\mathcal{L}_{N,t}$ obliczony w (72) jest zdefiniowany na sektorach przestrzeni Focka z co najwyżej N cząstkami. Postępujemy zatem w następujący sposób: najpierw przybliżamy $\Phi_{N,t}$ nowym, zmodyfikowanym wektorem opisującym fluktuacje $\widetilde{\Phi}_{N,t}$, którego dynamika jest generowana przez $\widetilde{\mathcal{L}}_{N,t}$. Z jednej strony generator ten zbliżony do $\mathcal{L}_{N,t}$, gdy działa ma stany z małą liczbą cząstek (poza kondensatem). Z drugiej strony, jest on dobrze zdefiniowany na nie obciętej przestrzeni Focka $\mathcal{F}_{\perp \varphi_{N,t}}$. By precyzyjnie zdefiniować $\widetilde{\mathcal{L}}_{N,t}$ postępujemy następująco. W wyrażeniu po prawej stronie równania (72), zastępujemy wszystkie czynniki $\sqrt{(N-\mathcal{N})(N-\mathcal{N}-1)}$ przez $N-\mathcal{N}$ a następnie zastępujemy $\sqrt{N-\mathcal{N}}$ przez $\sqrt{N} G_b(\mathcal{N}/N)$ gdzie $G_b(t)$ jest szeregiem Taylora dla $\sqrt{1-x}$ wokół $x=0$ do rzędu b (b będzie później wybrane dostatecznie duże).
Wreszcie, dodajemy do nowego generatora wyraz $C_b e^{C_b|t|} \mathcal{N}(\mathcal{N}/N)^{2b}$ z dostatecznie dużą stałą C_b. Jako, że generatory $\mathcal{L}_N$ oraz $\widetilde{\mathcal{L}}_N$ działają na stany z małą liczbą cząstek, człon ten będzie miał znikomy wpływ na dynamikę, a pozwoli lepiej kontrolować energię układu. Po tych zmianach otrzymujemy zmodyfikowany generator

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{L}}_{N,t} = & \frac{N+1}{2} \left\langle \varphi_{N,t}, [w_N(1-2f_N) * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t} \right\rangle - \mu_N(t) \\
& + \frac{1}{2} \left\langle \varphi_{N,t}, [w_N * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t} \right\rangle \frac{\mathcal{N}(\mathcal{N}+1)}{N} \\
& + \left[\sqrt{N} a^*(Q_{N,t}[(w_N(1-f_N)) * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t}) G_b(\mathcal{N}/N) + \text{h.c.} \right] \\
& - \left[a^*(Q_{N,t}[w_N * |\varphi_{N,t}|^2] \varphi_{N,t}) \frac{\mathcal{N}}{\sqrt{N}} G_b(\mathcal{N}/N) + \text{h.c.} \right] \\
& + \mathrm{d}\Gamma\Big(-\Delta + (w_N f_N) * |\varphi_{N,t}|^2 + K_{1,N,t} - \mu_{N,t} \Big) \\
& + \mathrm{d}\Gamma\Big(Q_{N,t}(w_N(1-f_N) * |\varphi_{N,t}|^2) Q_{N,t} \Big) \\
& - \mathrm{d}\Gamma\Big(Q_{N,t}(w_N * |\varphi_{N,t}|^2) Q_{N,t} + K_{1,N,t} \Big) \frac{\mathcal{N}}{N} \\
& + \left[\frac{1}{2} \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \, K_{2,N,t}(x,y) a^*_x a^*_y \frac{N-\mathcal{N}}{N} + \text{h.c.} \right] \\
& + \left[\frac{1}{\sqrt{N}} \int \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}x' \mathrm{d}y' \, (Q_{N,t} \otimes Q_{N,t} w_N Q_{N,t} \otimes 1)(x,y;x',y') \times \right.
\end{aligned} \tag{75}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \varphi_{N,t}(y')a_x^* a_y^* a_{x'} G_b(\mathcal{N}/N) + \text{h.c.}\Big] \\
&+ \frac{1}{2N}\int \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \, (Q_{N,t}\otimes Q_{N,t} w_N Q_{N,t}\otimes Q_{N,t})(x,y;x',y') a_x^* a_y^* a_{x'} a_{y'} \\
&+ C_b e^{C_b|t|}\mathcal{N}(\mathcal{N}/N)^{2b}.
\end{aligned}
$$

Używając tego zmodyfikowanego generatora, definiujemy zmodyfikowaną dynamikę fluktuacji $\widetilde{\Phi}_{N,t}$ daną jako rozwiązanie równania Schrödingera

$$
\mathrm{i}\partial_t \widetilde{\Phi}_{N,t} = \widetilde{\mathcal{L}}_{N,t}\widetilde{\Phi}_{N,t}, \tag{76}
$$

z odpowiednio przekształconymi warunkami początkowymi. Dowodzimy potem, że dla wszystkich $\alpha < (1-\beta)/2$, istnieje stała $C > 0$ taka, że

$$
\|\Phi_{N,t} - \widetilde{\Phi}_{N,t}\|^2 \leq CN^{-\alpha}\exp(C\exp(C|t|))
$$

dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

Następnie, działamy transformacją Bogoliubowa (65) na zmodyfikowaną dynamikę fluktuacji $\widetilde{\Phi}_{N,t}$ daną w (76). Niech

$$
\xi_{N,t} = T_{N,t}\widetilde{\Phi}_{N,t}. \tag{77}
$$

Wtedy $\xi_{N,t} \in \mathcal{F}_{\perp\varphi_{N,t}}$ (bez ograniczenia na liczbę cząstek) i spełnia równanie Schrödingera

$$
\mathrm{i}\partial_t \xi_{N,t} = \mathcal{G}_{N,t}\xi_{N,t}, \tag{78}
$$

z generatorem

$$
\mathcal{G}_{N,t} = (\mathrm{i}\partial_t T_{N,t})T_{N,t}^* + T_{N,t}\widetilde{\mathcal{L}}_{N,t}T_{N,t}^*. \tag{79}
$$

Jak wspominaliśmy wcześniej, działanie transformacją Bogoliubowa $T_{N,t}$ zadaje opis korelacji i pozwala nam przybliżyć ewolucję (78) za pomocą unitarnej ewolucji $\mathcal{U}_{2,N}$, której generatorem jest kwadratowa część operatora (79). Generator $\mathcal{U}_2$ który pojawia się w sformułowaniu Twierdzenia 5 jest tym co otrzymuje się z $\mathcal{U}_{2,N}$ po przejściu do granicy $N \to \infty$.

Na koniec wspomnijmy, że w sytuacji, gdy stany początkowe są stanami przestrzeni Focka (a efektywna aproksymacja dynamiki jest rozważana na poziomie - słabszej - normy przestrzeni Focka), dynamika dla $\beta < 1$ była badana również w pracach [5, 15, 27].

[A1] Norm approximation for many-body quantum dynamics: focusing case in low dimensions

Dotychczasowe wyniki zakładały, że oddziaływanie między cząstkami jest odpychające (tj. $w \geq 0$). W takim przypadku efektywne równanie Hartree'ego/NLS posiada globalne rozwiązanie. Zmienia się to, gdy dopuścimy oddziaływania przyciągające między cząstkami. W tym przypadku efektywne równanie NLS posiada globalne rozwiązanie tylko w jednym i dwóch wymiarach przestrzennych. Dlatego, przy wyprowadzaniu przyciągającego nieliniowego równania Schrödingera naturalne jest ograniczenie się do wymiarów $d \leq 2$.

Oddziaływania przyciągające mogą również prowadzić w układzie do (termodynamicznej) niestabilności (drugiego rodzaju) na poziomie pełnego problemu wielu ciał. Jest to powód, dla którego w istniejących (przed omawianą pracą **[A1]**) wynikach wyprowadzenia przyciągającego NLS [13, 14, 32] kluczowe było rozważenie ewolucji czasowej generowanej przez hamiltonian N-ciał H_N^V

z potencjałem pułapkującym typu $V(x) = |x|^s$, oraz ograniczenie do $0 < \beta < 1$, gdy $d = 1$ [13] i $0 < \beta < (s+1)/(s+2)$, gdy $d = 2$ [14, 32]. Obecność pułapki i ograniczenie na β pozwoliło wykorzystać stabilność drugiego rodzaju $H_N^V \geq -CN$ ustanowioną przez Lewina, Nama i Rougerie [36]. Stabilność ta była następnie kluczowa dla kontroli (ujemnego) potencjału oddziaływania przez operator kinetyczny.

Główny rezultat **[A1]** poprawia istniejące wyniki na kilka sposobów. Po pierwsze, wyprowadzamy efektywną dynamikę na poziomie przybliżenia w normie, podczas gdy w pracach [13, 14, 32] uzyskano jedynie aproksymację rzędu wiodącego. Po drugie, nasze wyniki obowiązują dla szerszego zakresu parametru skalującego β. Wreszcie, nie musimy dodawać potencjału pułapkującego (chociaż nasza metoda działa również w obecności zewnętrznego potencjału).

Zanim sformułujemy precyzyjnie główne twierdzenie z **[A1]**, musimy założyć kilka rzeczy o potencjale oddziaływania w. Przyjmujemy, że

$$w \in L^1(\mathbb{R}^d), \quad w(x) = w(-x) \in \mathbb{R}. \tag{80}$$

Gdy $d = 1$ nie jest potrzebne żadne inne założenie (nasz dowód można nawet rozszerzyć na oddziaływanie typu $\pm\delta_0$). Gdy $d = 2$, musimy dodatkowo założyć

$$w \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}^2} |w_-| < a^*, \quad w_- = \max(-w, 0). \tag{81}$$

Tutaj a^* jest optymalną stałą w nierówności Gagliardo–Nirenberga

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla f|^2\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^2\right) \geq \frac{a^*}{2}\int_{\mathbb{R}^2} |f|^4, \quad \forall f \in H^1(\mathbb{R}^2). \tag{82}$$

Od czasu pracy [51] powszechnie wiadomo, że $a^* := \|Q\|_{L^2}^2$ gdzie $Q \in H^1(\mathbb{R}^2)$ jest jedynym dodatnim, sferycznie symetrycznym rozwiązaniem równania

$$-\Delta Q + Q - Q^3 = 0. \tag{83}$$

Warunek (81) jest niezbędny dla stabilności układu dwuwymiarowego (szczegółowa dyskusja na ten temat znajduje się np. w [36]). Warunek ten został wykorzystany przy wyprowadzeniu nieliniowego równania Schrödingera w odniesieniu do stanów podstawowych przyciągających układów w pułapce [36], jak również w pracach na temat dynamiki [13, 32].

Jesteśmy gotowi, aby podać główny wynik **[A1]**.

Twierdzenie 6 (Przybliżenie w normie dla dynamiki z przyciąganiem) *Niech $\beta > 0$ dla $d = 1$ oraz niech $0 < \beta < 1$ dla $d = 2$. Załóżmy, że potencjał oddziaływania w spełnia* (80)–(81). *Niech u_t będzie rozwiązaniem równania Hartree'ego* (18) *z warunkiem początkowym $\|u(0)\|_{H^{d+2}(\mathbb{R}^d)} \leq C$. Niech $\Phi(t) = (\varphi_n(t))_{n=0}^\infty$ spełnia równanie Bogoliubowa* (38) *z warunkiem początkowym takim, że $\langle \Phi(0), \mathrm{d}\Gamma(1-\Delta)\Phi(0)\rangle \leq C$. Rozważmy wielociałową ewolucję Schrödingera $\Psi_N(t)$ daną w* (4) *ze warunkiem początkowym*

$$\Psi_N(0) = \sum_{n=0}^N u(0)^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_n(0).$$

Ustalmy $\alpha = 1/2$ dla $d = 1$ oraz $0 < \alpha < (1-\beta)/3$ dla $d = 2$. Wtedy dla wszystkich $t > 0$, istnieje stała $C_t > 0$ niezależna od N taka, że dla wszystkich N dostatecznie dużych zachodzi

$$\left\|\Psi_N(t) - \sum_{n=0}^N u(t)^{\otimes(N-n)} \otimes_s \psi_n(t)\right\|_{\mathfrak{H}^N}^2 \leq C_t N^{-\alpha}. \tag{84}$$

Wyjaśnijmy pokrótce główne idee kryjące się za dowodem Twierdzenia 6. Chociaż stosujemy ogólną strategię opracowaną w **[A6]** i **[A4]**, czyli porównujemy dynamikę Bogoliubowa Φ_t z $\Phi_{N,t}$ (cf. (38) i (34)), w dowodzie Twierdzenia 6 wprowadziliśmy nową metodę lokalizacyjną, która pozwoliła nam uniknąć użycia stabilności drugiego rodzaju (tj. nierówności $H_N \geq -CN$).

Jednym z kluczowych składników dowodu twierdzenia 2 było oszacowanie energii kinetycznej (48). W przypadku oddziaływana przyciągającego analogiczne oszacowanie daje

$$\left\langle \Phi_{N,t}, \mathrm{d}\Gamma(1-\Delta)\Phi_{N,t} \right\rangle \leq C_t(N + N^{2\beta}).$$

Takie oszacowanie okazuje się być niewystarczające. By poradzić sobie z tym problemem wprowadzamy nową dynamikę pośrednią $\Phi_{N,M,t}$, która jakby interpoluje pomiędzy $\Phi_{N,t}$ oraz Φ_t. Dokładniej, definiujemy $\Phi_{N,M,t}$ jako rozwiązanie

$$i\partial_t \Phi_{N,M,t} = 1^{\leq M} \mathcal{G}_{N,t} 1^{\leq M} \Phi_{N,M,t}, \quad \Phi_{N,M,0} = 1^{\leq M} \Phi_{N,0},$$

gdzie $\mathcal{G}_{N,t}$ jest generatorem dynamiki $\Phi_{N,t}$ obciętym do przestrzeni $\mathcal{F}_+^{\leq M}$. W tym miejscu kładziemy $M = N^{1-\delta}$ dla pewnego $\delta > 0$ (dobranego później). Zatem, $\Phi_{N,M,t}$ jest dynamiką na obciętej (wzbudzonej) przestrzeni Focka $\mathcal{F}_+^{\leq M}$. Innymi słowy, lokalizujmey dynamikę w sektorze w którym jest mniej cząstek wzbudzonych. Dla takiej dynamiki jesteśmy w stanie wyprowadzić lepsze oszacowanie energii kinetycznej, a dokładniej

$$\langle \Phi_{N,M,t}, \mathrm{d}\Gamma(1-\Delta)\Phi_{N,M,t} \rangle \leq C_{t,\varepsilon} N^{\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Oszacowanie to staje się kluczowe, gdy chcemy wykazać bliskość (w normie) rozwiązań $\Phi_{N,t}$ oraz $\Phi_{N,M,t}$ (gwoli ścisłości, potrzebny jest jeszcze jeden, pośredni krok lokalizacyjny - zainteresowanych czytelników odsyłamy do oryginalnego artykułu).

Prawie wszystkie oszacowania omówione powyżej wykorzystują własności rozwiązań równania Hartree'ego. Nasze podejście w dużym stopniu opiera się na fakcie, że różne normy rozwiązania u_t *nie zależą* od N. Innymi słowy, oszacowania te muszą zależeć tylko od normy L^1 funkcji w_N, gdyż wtedy

$$\|w_N\|_1 = \|w\|_1$$

jest niezależne od N. W przypadku równania z oddziaływanie odpychającym omawianym w **[A6]** oraz **[A4]**, używane przez nas oszacowania wyprowadzone zostały przez Grillakisa i Machedona w [26]. Ich dowody, jednakże, nie działają w przypadku równania Hartree'ego z przyciąganiem w wymiarach $d \leq 2$. W celu udowodnienia Twierdzenia 6 musieliśmy zatem sami wyprowadzić takie wyniki i to była również ważna część naszej pracy. Otrzymaliśmy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 7 (Własności równania Hartree'ego z przyciąganiem) *Niech* $d = 2$. *Załóżmy, że* $w \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}^2)$ *oraz* $\int w_- < a^*$. *Dla warunku początkowego* $u_0 \in H^4(\mathbb{R}^2)$ *z* $\|u_0\|_{L^2} = 1$, *równanie* (18) *posiada jednoznaczne rozwiązanie* $u(t,\cdot)$ *w* $H^4(\mathbb{R}^2)$. *Ponadto, dla wszystkich* $t > 0$ *mamy oszacowania*

$$\begin{aligned}
&\|u(t,\cdot)\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \leq C, \quad \|u(t,\cdot)\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq C\exp(C\exp(Ct)), \\
&\|u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\exp(Ct), \quad \|\partial_t u(t,\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq C\exp(\exp(C\exp(Ct))).
\end{aligned}$$

dla pewnej stałej $C > 0$ *niezależnej od t oraz* N.

Podobne twierdzenie zachodzi dla $d = 1$. Oszacowanie normy H^1 wynika z zachowania energii. By oszacować pozostałe normy użyliśmy rozwinięcia Duhamela a także używamy nierówności Brezis–Gallouet–Waingera (które można traktować jako pewną odmianę logarytmicznych nierówności Sobolewa) [10, 11] by oszacować normy L^∞.

3. Podsumowanie

Wyniki składające się na prezentowane osiągnięcie naukowe dostarczają ścisłego uzasadnienia teorii efektywnych szeroko stosowanych w fizyce teoretycznej i eksperymentalnej w kontekście dynamiki układów wielobozonowych. Udowodniliśmy, że dynamika kondensatu Bosego-Einsteina jest poprawnie opisana nieliniową teorią Hartree'ego/NLS, a wzbudzenia wokół kondensatu ewoluują zgodnie z teorią Bogoliubowa. Nasze wyniki obejmują sytuację, gdy zasięg odpychającego oddziaływania międzycząsteczkowego staje się bardzo mały. W niższych wymiarach udowodniliśmy, że teorie Hartree'ego/NLS i Bogoliubova pozostają poprawne nawet jeśli dopuścimy przyciągające oddziaływania międzycząsteczkowe. Przedstawione wyniki poprawiają prawie wszystkie istniejące wyniki w tym aktywnym obszarze badań.

Obecnie nasze wysiłki są skierowane na wyznaczenie przybliżenia normowego dla dynamiki układów wielobozonowych w skalowaniu Grossa-Pitaevskiego. Wiadomo, że w tym reżimie trzeba wyjść poza przybliżenie kwadratowe, jakie daje teoria Bogoliubowa. Pracujemy również nad statycznymi problemami związanymi z kondensacją Bosego-Einsteina, w szczególności nad asymptotyką energii swobodnej średniopolowego gazu Bosego.

5 INFORMACJA O WYKAZYWANIU SIĘ ISTOTNĄ AKTYWNOŚCIĄ NAUKOWĄ ALBO ARTYSTYCZNĄ REALIZOWANĄ W WIĘCEJ NIŻ JEDNEJ UCZELNI, INSTYTUCJI NAUKOWEJ LUB INSTYTUCJI KULTURY, W SZCZEGÓLNOŚCI ZAGRANICZNEJ

W ramach mojej działalności naukowej współpracuję z różnymi grupami i ośrodkami badawczymi. Pracę naukową rozpocząłem w 2010 roku, uzyskując dyplom magistra matematyki na Uniwersytecie Warszawskim, a następnie rozpocząłem studia doktoranckie na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego pod kierunkiem prof. dr. hab. Jana Derezińskiego. Ukończyłem studia doktoranckie (*summa cum laude*) w 2014 roku i pojechałem na staż podoktorski do Institute of Science and Technology Austria (IST Austria) pod Wiedniem w grupie prof. Roberta Seiringera. W 2016 roku zostałem zatrudniony na stanowisko adiunkta w Katedrze Metod Matematycznych Fizyki na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. W semestrze zimowym 2018/2019 byłem profesorem wizytującym W3 na LMU Munich.

Poniżej przedstawię krótki opis wyników (patrz chronologiczna lista **[B1] - [B10]** na końcu tego rozdziału), które uzyskałem w trakcie kariery naukowej, a które nie zostały wyszczególnione w Osiągnięciu Naukowym opisanym w rozdziale 4.

Artykuły [B1-B3] opisują badania podjęte w ramach doktoratu pod kierunkiem prof. Jana Derezińskiego. Projekt dotyczył ścisłej analizy pojęcia kwazicząstek w gazach kwantowych. W pracy [B1] pokazaliśmy, jak można w naturalny sposób przepisać dany hamiltonian (aż do członów wyższego rzędu) jako stałą plus diagonalną część kwadratową (to zaś prowadzi do obrazu kwazicząstek) poprzez odpowiednio wybrane operatory kreacji i anihilacji. Procedura ta została po raz pierwszy zauważona w literaturze fizycznej przez S.T. Beliaeva i dlatego nazywamy ją "twierdzeniem Beliaeva". W [B2] zastosowaliśmy twierdzenie Beliaeva do badania gazu Fermiego i pokazaliśmy jak model BCS pojawia się w naturalny sposób w ramach procedury Beliaewa. Następnie użyliśmy modelu BCS do opisu widma wzbudzeń oddziałującego gazu Fermiego. W [B3] - ostatniej pracy, która została włączona do rozprawy doktorskiej - udowodniliśmy słuszność przybliżenia Bogoliubowa (które w literaturze fizycznej dostarcza efektywnego opisu gazu Bosego w języku kwazicząstek zwanych fononami) w granicy duża gęstość-nieskończona objętość.

W artykule [B4], wraz z P.T. Namem i J.P. Solovejem, rozważaliśmy problem diagonalizacji bozonowych, kwadratowych hamiltonianów na przestrzeni Focka. W naszej pracy podaliśmy ogólne warunki, dla których takie operatory mogą zostać zdiagonalizowane za pomocą transformacji Bogoliubowa w sensie (59). Nasze wyniki obejmują przypadek, gdy układy kwantowe mają nieskończenie wiele stopni swobody a związane z nimi jednociałowe operatory kinetyczne (ten związany z $\mathrm{d}\Gamma$ w (36)) i parujące (ten dany przez K_2 w (36)) są nieograniczone. Nasze warunki dostateczne są optymalne w tym sensie, że stają się konieczne, gdy odpowiednie operatory jednociałowe komutują.

Prace [B5]-[B8] są efektem wieloletniej współpracy z R. Reuversem i J.P. Solovejem (w ostatniej pracy dołączył do nas S. Fournais). Projekt dotyczył jednorodnego gazu Bosego w stanie termodynamicznym scharakteryzowanym przez dodatnią temperaturę T i potencjał chemiczny μ. Naszym celem było wyprowadzenie i zbadanie wariacyjnego sformułowania teorii Bogoliubowa dla układów bozonowych w dodatniej i zerowej temperaturze. Jak wyjaśniliśmy w rozdziale 4, oryginalne przybliżenie Bogoliubowa polega na przepisaniu hamiltonianu tak, aby był on kwadratowy w operatorach kreacji i anihilacji. Dobrze wiadomo, że stany podstawowe lub stany Gibbsa takich hamiltonianów są stanami kwaziswobodnymi. W [B5] odwróciliśmy tę ideę i zachowaliśmy pełny hamiltonian. Ograniczyliśmy za to naszą przestrzeń Hilberta dostanów gaussowskich. Procedura ta doprowadziła nas do nietrywialnego funkcjonału opisującego energię swobodną. Jest on dany przez

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(\gamma,\alpha,\rho_0) = (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} p^2\gamma(p)dp - \mu\rho - TS(\gamma,\alpha) + \frac{\widehat{w}(0)}{2}\rho^2 \\
+ \frac{1}{2}(2\pi)^{-6}\iint_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} \widehat{w}(p-q)\left(\alpha(p)\alpha(q)+\gamma(p)\gamma(q)\right)dpdq \\
+ \rho_0(2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\widehat{w}(p)\left(\gamma(p)+\alpha(p)\right)dp.
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Tutaj, ρ jest gęstością w układzie

$$
\rho = \rho_0 + (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\gamma(p)dp =: \rho_0 + \rho_\gamma.
$$

Entropia $S(\gamma,\alpha)$ dana jest przez

$$
\begin{aligned}
S(\gamma,\alpha) = \quad (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} s(\gamma(p),\alpha(p))dp \quad = \quad (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3} s(\beta(p))dp \\
= (2\pi)^{-3}\int_{\mathbb{R}^3}\left[\left(\beta(p)+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\beta(p)+\frac{1}{2}\right) - \left(\beta(p)-\frac{1}{2}\right)\ln\left(\beta(p)-\frac{1}{2}\right)\right]dp,
\end{aligned}
\tag{86}
$$

gdzie

$$
\beta(p) := \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\gamma(p)\right)^2 - \alpha(p)^2}.
$$

Dziedzina funkcjonału $\mathcal{D}$ dana jest przez

$$
\mathcal{D} = \{(\gamma,\alpha,\rho_0)|\gamma\in L^1((1+p^2)dp), \gamma(p)\geq 0, \alpha(p)^2 \leq \gamma(p)(1+\gamma(p)), \rho_0 \geq 0\}.
$$

Funkcja $\gamma(p)$ opisuje rozkład pędu bozonów, $\alpha(p)$ opisuje parowanie cząstek w układzie, a liczba ρ_0 jest interpretowana jako gęstość kondensatu. Wyprowadzenie funkcjonału zostało zrobione na poziomie formalnym. Ścisłe uzasadnienie tej procedury pozostaje problemem otwartym.

W [B5] pokazaliśmy, że opisany powyżej problem wariacyjny jest matematycznie dobrze postawiony. Dokładniej, udowodniliśmy istnienie minimizerów dla dowolnej temperatury, potencjału chemicznego i wymiaru przestrzennego (wielkości te są parametrami problemu). Ponadto, pokazaliśmy, że w układzie dochodzi do przejścia fazowego. To znaczy, pokazaliśmy, że minimizery (zauważmy, że nie ma ich jedyności) w dostatecznie wysokich temperaturach spełniają $\rho_0 = 0$ (a więc nie ma kondensacji), podczas gdy z drugiej strony dla minimizerów w dostatecznie niskich temperaturach pokazaliśmy $\rho_0 > 0$ (kondensacja). Ponadto pokazaliśmy również, że w ramach naszego modelu istnieje równoważność pomiędzy nadciekłością (która w naszym modelu wyrażała się warunkiem $\alpha(p)\not\equiv 0$) a kondensacją w tym sensie, że dla minimizera $\alpha(p)\equiv 0 \iff \rho_0 = 0$.

W pracy [B6] rozważaliśmy funkcjonał $\mathcal{F}$ w tak zwanej granicy gazu rozrzedzonego. To znaczy, przeanalizowaliśmy własności minimizerów w granicy, gdy $a\rho^{1/3} \ll 1$. Tutaj a oznacza długość rozpraszania (cf. (9)), a ρ jest gęstością gazu. Warunek gazu rozrzedzonego oznacza, że efektywny zasięg oddziaływania między cząstkami (dany przez długość rozpraszania) jest znacznie mniejszy niż średnia odległość między cząstkami $\rho^{-1/3}$ (dla gazu trójwymiarowego). Obecność małego parametru pozwala na analizę ilościową funkcjonału. Została ona przeprowadzona w kontekście dwóch wielkości: energii swobodnej $\inf_{\gamma,\alpha,\rho_0}\mathcal{F}(\gamma,\alpha,\rho_0)$ oraz temperatury krytycznej (tj. temperatury, w której pojawia się kondensacja). Dla tej ostatniej wielkości pokazaliśmy, że zmiana temperatury krytycznej $\Delta T_c = T_c - T_{fc}$ w porównaniu z temperaturą krytyczną idealnego gazu Bosego

$$T_{fc} = 4\pi\left(\frac{\rho}{\zeta(3/2)}\right)^{2/3}$$

(przyjęliśmy $\hbar = 2m = k_B = 1$) dana jest przez

$$\frac{\Delta T_c}{T_{fc}} \approx 1.49\rho^{1/3}a.$$

W szczególności zmiana ta jest liniowa w długości rozpraszania - tak jak przewiduje literatura fizyczna.

W pracy [B7] analizowaliśmy kwestię temperatury krytycznej w dwuwymiarowym gazie bozonów. Dlatego modelu pokazaliśmy, że

$$T_c \approx \frac{4\pi\rho}{\ln(14.4/4\pi b)}$$

gdzie $b = 1/|\ln(\rho a^2)|$ jest dwuwymiarowym odpowiednikiem warunku granicy gazu rozrzedzonego. W ten sposób otrzymaliśmy pierwsze analityczne wyprowadzenie temperatury przejścia Kosterlitza–Thoulessa, które zawiera obliczenie współczynnika w logarytmie (u nas 14.4).

Wreszcie, w artykule [B8] rozszerzyliśmy analizę funkcjonału Bogoliubova na dwa wymiary w bardzo niskich temperaturach. Dla dostatecznie słabych oddziaływań wyprowadziliśmy asymptotykę energii stanu podstawowego obejmującą dwa wyrazy rozwinięcia. Dokładniej, przy odpowiednich założeniach na wielkość potencjału oddziaływania międzycząstkowego, pokazaliśmy, że w temperaturze zerowej

$$\inf_{\gamma,\alpha,\rho_0}\mathcal{F}(\gamma,\alpha,\rho_0) = 4\pi\rho^2 b + 4\pi\rho^2 b\ln b + O(\rho^2 b^2).$$

Wyprowadzenie tej asymptotyki zaczynając od pełnego problemu wielociałowego pozostaje problemem otwartym.

Pełne zagadnienie wielu ciał w kontekście gazu bozonów rozważaliśmy wraz z P.T. Namem ponownie w artykule [B9]. W pracy tej rozważamy jednorodny, średniopolowy gaz Bosego na jednostkowym torusie w trzech wymiarach. Jak wspomnieliśmy w rozdziale 3, powszechnie (patrz np. [48]) wiadomo, że stan podstawowy takiego układu wykazuje kondensację Bosego–Einsteina w sensie (13). W [B9] badaliśmy następny wyraz znaczący w asymptotyce zredukowanej macierzy gęstości. Pokazaliśmy, że stan podstawowy Ψ_N takiego układu spełnia

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{Tr}\left|\gamma^{(1)}_{\Psi_N} - \Big(N - \sum_{p\neq 0}\gamma_p^2\Big)|u_0\rangle\langle u_0| - \sum_{p\neq 0}\gamma_p^2|u_p\rangle\langle u_p|\right| = 0$$

gdzie

$$u_p(x) = e^{ip\cdot x}, \quad \gamma_p = \frac{\alpha_p}{\sqrt{1-\alpha_p^2}}, \quad \alpha_p = \frac{\widehat{w}(p)}{p^2 + \widehat{w}(p) + \sqrt{p^4 + 2p^2\widehat{w}(p)}}.$$

W szczególności, wnioskiem z naszego dowodu jest rozwinięcie asymptotyczne energii stanu podstawowego aż do rzędu $O(N^{-3/2})$. W naszym dowodzie wykorzystujemy schemat renormalizacyjny oparty o uogólnione, kubiczne transformcje Bogoliubowa.

W mojej ostatniej pracy [B10], wraz z Robertem Seiringerem, skierowałem swoją uwagę na jeden z najważniejszych modeli kwantowej mechaniki statystycznej - kwantowy model Heisenberga. Jest to sieciowy model spinowy zdefiniowany poprzez hamiltonian

$$H_\Lambda := \sum_{\langle x,y\rangle \subset \Lambda} (S^2 - \vec{S}_x \cdot \vec{S}_y), \tag{87}$$

gdzie Λ jest skończoną kostką w $\mathbb{Z}^d$, suma obejmuje wszystkie (nieuporządkowane) pary najbliższych sąsiadów $\langle x, y\rangle$ in Λ, zaś $\vec{S} = (S^1, S^2, S^3)$ oznacza trzy składowe operatora spinu o liczbie kwantowej S, tj. generatory rotacji w $2S+1$-wymiarowej reprezentacji algebry Liego grupy $SU(2)$. Hamiltonian H_Λ działa na przestrzeni Hilberta $\mathfrak{h}_\Lambda = \otimes_{x\in\Lambda}\mathbb{C}^{2S+1}$. W naszej pracy badaliśmy układy niskowymiarowe (tj. gdy $d = 1, 2$). Naszą uwagę skupiliśmy na analizie asymptotyki energii swobodnej dla niskich temperatur ($\beta = 1/T \to \infty$). W $d = 1$ pokazaliśmy, że

$$\lim_{\beta\to\infty} f(\beta, S) S^{\frac{1}{2}} \beta^{\frac{3}{2}} = C_1 := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \ln\left(1 - e^{-p^2}\right) dp = \frac{-\zeta(\frac{3}{2})}{2\sqrt{\pi}}, \tag{88}$$

gdzie ζ oznacza funkcję dzeta Riemanna. Nasz wynik udowodnił w tym kontekście poprawność tzw. teorii fal spinowych. Jest to teoria efektywna opisująca niskoenergetyczne własności układów spinowych w języku kwazicząstek zwanych magnonami. Przewiduje ona dokładnie takie zachowanie, jak to podane w (88). Nasz dowód dostarcza również analogicznego górnego ograniczenia w $d = 2$. Odpowiednie dolne ograniczenie w $d = 2$ pozostaje problemem otwartym.

Lista publikacji nie uwzględnionych w Osiągnięciu Naukowym w Rozdziale 4 (autorzy podani alfabetycznie, równy wkład wszystkich autorów)

[B1] J. Dereziński, **M. Napiórkowski**, J. P. Solovej
On the Minimization of Hamiltonians over Pure Gaussian States in: "Complex Quantum Systems. Analysis of Large Coulomb Systems", Lecture Note Series, IMS, NUS, ed. H. Siedentop, World Scientific p. 151-162 (2013)

[B2] J. Dereziński, K.A. Meissner, **M. Napiórkowski**
On the Energy-Momentum Spectrum of a Homogeneous Fermi Gas, Annales Henri Poincaré 14, 1-36 (2013)

[B3] J. Dereziński, **M. Napiórkowski**
Excitation spectrum of interacting bosons in the mean-field infinite-volume limit, Annales Henri Poincaré 15 (12), 2409-2439 (2014). Erratum: Annales Henri Poincaré 16 (7), 1709-1711 (2015)

[B4] P.T. Nam, **M. Napiórkowski**, J. P. Solovej
Diagonalization of bosonic quadratic Hamiltonians by Bogoliubov transformations, Journal of Functional Analysis 270 (11), 4340-4368 (2016)

[B5] **M. Napiórkowski**, R. Reuvers, J. P. Solovej
Bogoliubov free energy functional I. Existence of minimizers and phase transition, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 229 (3), 1037-1090 (2018)

[B6] **M. Napiórkowski**, R. Reuvers, J. P. Solovej
Bogoliubov free energy functional II. The dilute limit, Communications in Mathematical Physics 360 (1), 347-403 (2018)

[B7] **M. Napiórkowski**, R. Reuvers, J. P. Solovej
Calculation of the Critical Temperature of a Dilute Bose Gas in the Bogoliubov Approximation, EPL (Europhysics Letters) 121 (1), 10007 (2018)

[B8] S. Fournais, **M. Napiórkowski**, R. Reuvers, J. P. Solovej
Ground state energy of a dilute two-dimensional Bose gas from the Bogoliubov free energy functional, Journal of Mathematical Physics 60, 071903 (2019)

[B9] P.T. Nam, **M. Napiórkowski**
Two-term expansion of the ground state one-body density matrix of a mean-field Bose gas, Calculus of Variations and Partial Differential Equations 60 (3), 1-30 (2021)

[B10] **M. Napiórkowski**, R. Seiringer
Free energy asymptotics of the quantum Heisenberg spin chain, Letters in Mathematical Physics 111, 31 (2021)

6 INFORMACJA O OSIĄGNIĘCIACH DYDAKTYCZNYCH, ORGANIZACYJNYCH ORAZ POPULARYZUJĄCYCH NAUKĘ LUB SZTUKĘ

A. DOŚWIADCZENIE W NAUCZANIU

2016 – jako adiunkt prowadziłem ćwiczenia do następujących przedmiotów: Algebra z geometrią I i II, Analiza I R (R oznacza kurs rozszerzony), Analiza II R, Analiza I, II i IV, Algebra I R, Algebra II R, Wstęp do kwantyzacji (kurs monograficzny po angielsku), Analiza Zespolona i Funkcje Specjalne I, Matematyczny Wstęp do Kwantowej Teorii Pola (kurs monograficzny po angielsku). Byłem również wykładowcą kursu Algebra z geometrią oraz Matematyczny wstęp do mechaniki kwantowej wielu ciał (kurs monograficzny)

2018 – 2019 Podczas mojego pobytu na LMU w Monachium wykładałem Równania Różniczkowe Cząstkowe I oraz prowadziłem seminarium studenckie "Matematyka Kondensacji Bosego–Einsteina."

2010 – 2014 jako doktorant prowadziłem ćwiczenia do następujących przedmiotów: Algebra I R, Analiza I, Analiza III, Geometria Różniczkowa I.

B. DZIAŁALNOŚĆ ORGANIZACYJNA

- od 2020 roku jestem współorganizatorem seminarium Katedry Metod Matematycznych Fizyki "Teoria Dwoistości"
- jestem warszawskim koordynatorem projektu edukacyjnego w ramach sojuszu 4EU+ o tytule "Quantum Mechanics from Condensed Matter to Computing"
- Wraz z prof. Michałem Wrochną (Cergy) i prof. Christianem Gerardem (Orsay) jestem współorganizatorem konferencji "Mathematical physics: new developments and perspectives", 5-6 września 2022 w Paryżu
- Wraz z prof. P.T. Namem i prof. Rupertem Frankiem (obaj LMU Monachium) jestem współorganizatorem konferencji "Mathematical results of many-body quantum systems", 6-11 czerwca 2022 w Monachium

C. POPULARYZACJA NAUKI

Wystąpienia i konferencje popularnonaukowe

- Prelegent na Warszawskim Festiwalu Nauki (wrzesień 2018)
- Prelegent w programie Copernicus Center "Nauka na żywo" (marzec 2019 - film dostępny na YouTube)

7 INNE INFORMACJE ZAWODOWE

- Obecnie sprawuję opiekę nad postdokiem, dr. Benem Li. Jego stanowisko jest finansowane z grantu NCN-DFG Beethoven Classic 3, *Mathematical results of many-body quantum systems*, którego jestem kierownikiem.
- Jestem stypendystą Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców (2020-2023).

References

[1] Z. Ammari, M. Falconi and B. Pawilowski, "On the rate of convergence for the mean field approximation of many-body quantum dynamics", *Comm. Math. Sci.* **14** (5), 1417–1442 (2014)

[2] I. Anapolitanos, "Rate of Convergence Towards the Hartree–von Neumann Limit in the Mean-Field Regime", *Lett. Math. Phys.* **98**, 1–31 (2011)

[3] C. Bardos, F. Golse and N.J. Mauser, "Weak coupling limit of the N-particle Schrödinger equation", *Methods Appl. Anal.* **7**(2), 275–293 (2000)

[4] N. Benedikter, G. de Oliveira and B. Schlein, "Quantitative Derivation of the Gross-Pitaevskii Equation", *Comm. Pure App. Math.* **68** (8), 1399–1482 (2015)

[5] C. Boccato, S. Cenatiempo and B. Schlein, "Quantum many-body fluctuations around nonlinear Schrödinger dynamics", *Ann. Henri Poincaré* **18** (1), 113–191 (2017)

[6] S. N. Bose, "Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese", *Z. Phys.* **26**, 178–181 (1924)
L. Bossmann, "Derivation of the 1d nonlinear Schrödinger equation from the 3d quantum many-body dynamics of strongly confined bosons", *J. Math. Phys.* **60**, 031902 (2019)

[7] L. Bossmann, "Derivation of the 2d Gross–Pitaevskii Equation for Strongly Confined 3d Bosons", *Arch. Rational Mech. Anal.* **238**, 541–606 (2020)

[8] L. Bossmann and S. Teufel, "Derivation of the 1d Gross-Pitaevskii Equation from the 3d Quantum Many-Body Dynamics of Strongly Confined Bosons", *Ann. Henri Poincaé* **20**, 1003–1049 (2019)

[9] C. Brennecke and B. Schlein, "Gross–Pitaevskii dynamics for Bose–Einstein condensates", *Anal. & PDE* **12** (6), 1513–1596 (2019)

[10] H. Brezis and T. Gallouet, "Nonlinear Schrödinger evolution equations", *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications* 4 (1980), pp. 677-681

[11] H. Brezis and S. Wainger, "A note on limiting cases of Sobolev embeddings", *Comm. Partial Diff. Equations* 5 (1980), pp. 773-789.

[12] L. Chen and J. O. Lee, "Rate of convergence in nonlinear Hartree dynamics with factorized initial data", *J. Math. Phys.* **52**, 052108 (2011)

[13] X. Chen and J. Holmer, "Focusing Quantum Many-body Dynamics: The Rigorous Derivation of the 1D Focusing Cubic Nonlinear Schrödinger Equation", *Arch. Rational Mech. Anal.* **221**, 631–676 (2016)

[14] X. Chen and J. Holmer, "The rigorous derivation of the 2D cubic focusing NLS from quantum many-body evolution", *Int. Math. Res. Not.* **14**, 4173–4216 (2017)

[15] J.J.W. Chong and Z. Zhao, "Dynamical Hartree–Fock–Bogoliuobv approximation of interacting bosons", arXiv:1711.00610 (2020)

[16] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman and E.A. Cornell, "Observation of Bose–Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor", *Science* **269**, 198–201 (1995)

[17] A. Einstein, "Quantentheorie des einatomigen idealen Gases", *Sitzber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss.* 261–267, (1924)

[18] A. Elgart and B. Schlein, "Mean field dynamics of boson stars", *Comm. Pure App. Math.* **60** (4), 500–545 (2007)

[19] L. Erdös and B. Schlein, "Quantum Dynamics with Mean Field Interactions: a New Approach", *J. Stat. Phys.* **134**, 859–870 (2009)

[20] L. Erdös, B. Schlein and H.-T. Yau, "Derivation of the cubic non-linear Schrödinger equation from quantum dynamics of many-body systems", *Invent. Math.* **167**, 515–614 (2007)

[21] L. Erdös, B. Schlein and H.-T. Yau, "Rigorous derivation of the Gross-Pitaevskii equation with a large interaction potential", *J. Amer. Math. Soc.* **22**, 1099–1156 (2009)

[22] L. Erdös, B. Schlein and H.-T. Yau, "Derivation of the Gross-Pitaevskii equation for the dynamics of Bose-Einstein condensate", *Ann. of Math. (2)* **172**, 291–370 (2010)

[23] L. Erdös and H.-T. Yau, "Derivation of the nonlinear Schrödinger equation from a many body Coulomb system", *Adv. Theor. Math. Phys.* **5**, 1169–1205 (2001)

[24] J. Fröhlich, A. Knowles and A. Pizzo, "Atomism and quantization", *J. Phys. A* **40** (12), 3033-3045 (2007)

[25] J. Ginibre and G. Velo, "The classical field limit of scattering theory for nonrelativistic many-boson systems. I", *Commun. Math. Phys.* **66**, 37–76 (1979)

[26] M. Grillakis and M. Machedon, "Pair excitations and the mean field approximation of interacting Bosons, I", *Commun. Math. Phys.* **324**, 601–636 (2013)

[27] M. Grillakis and M. Machedon, "Uniform in N estimates for a Bosonic system of Hartree–Fock–Bogoliubov type", *Comm. PDE* **44**(12), 1431–1465 (2019)

[28] M. G. Grillakis, M. Machedon and D. Margetis, "Second-order corrections to mean field evolution of weakly interacting bosons. I", *Commun. Math. Phys.* **294**, 273–301 (2010)

[29] M. G. Grillakis, M. Machedon and D. Margetis, "Second-order corrections to mean field evolution of weakly interacting bosons. II", *Adv. Math.* **228**, 1788–1815 (2011)

[30] E.P. Gross, "Structure of a quantized vortex in boson systems", *Il Nuovo Cimento* **20**, 454–457 (1961)

[31] K. Hepp, "The classical limit for quantum mechanical correlation functions", *Comm. Math. Phys.* **35**, 265–277 (1974)

[32] M. Jeblick and P. Pickl, "Derivation of the Time Dependent Two Dimensional Focusing NLS Equation", *J. Stat. Phys.* **172**(5), 1398–1426 (2018)

[33] K.B. Davis, M.-O. Mewes, M.R. Andrews, N.J. van Druten, D.S. Durfee, D.M. Kurn, W. Ketterle, "Bose–Einstein condensation in a gas of sodium atoms", *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3969–3973 (1995)

[34] A. Knowles and P. Pickl, "Mean-field dynamics: singular potentials and rate of convergence", *Commun. Math. Phys.* **298**, 101–138 (2010)

[35] E. Kuz, "Rate of Convergence to Mean Field for Interacting Bosons", *Comm. PDE* **40** (10), 1831–1854 (2015)

[36] M. Lewin, P. T. Nam and N. Rougerie, "A note on 2D focusing many-boson systems", *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017), 2441–2454

[37] M. Lewin, P. T. Nam and B. Schlein, "Fluctuations around Hartree states in the mean-field regime", *Amer. J. Math.* **137** (6), 1613–1650 (2015)

[38] M. Lewin, P. T. Nam, S. Serfaty and J. P. Solovej, "Bogoliubov spectrum of interacting Bose gases", *Comm. Pure Appl. Math.* **68**, 413–471 (2015)

[39] A. Michelangeli and A. Olgiati, "Gross-Pitaevskii non-linear dynamics for pseudo-spinor condensates", *J. Nonlinear Math. Phys.* **24**(3), 426–464 (2017)

[40] A. Michelangeli and B. Schlein, "Dynamical Collapse of Boson Stars", *Commun. Math. Phys.* **311**, 645–687 (2012)

[41] P. T. Nam, M. Napiórkowski, J. Ricaud and A. Triay, "Optimal rate of condensation for trapped bosons in the Gross–Pitaevskii regime", to appear in Anal. PDE (in press), arXiv preprint arXiv:2001.04364

[42] A. Olgiati, "Remarks on the Derivation of Gross–Pitaevskii Equation with Magnetic Laplacian", In: Michelangeli A., Dell'Antonio G. (eds) *Advances in Quantum Mechanics*. Springer INdAM Series, vol 18. Springer, Cham.

[43] O. Penrose and L. Onsager, "Bose–Einstein Condensation and Liquid Helium", *Phys. Rev.* **104** (3), 576–584 (1956)

[44] P. Pickl, "A simple derivation of mean-field limits for quantum systems", *Lett. Math. Phys.* **97**, 151–164 (2011)

[45] P. Pickl, "Derivation of the time dependent Gross–Pitaevskii equation with external fields", *Rev. Math. Phys.* **27**, 1550003 (2015)

[46] L. P. Pitaevskii, "Vortex lines in an imperfect Bose gas" *Sov. Phys. JETP.* **13**, 451–454 (1961)

[47] I. Rodnianski and B. Schlein, "Quantum fluctuations and rate of convergence towards mean field dynamics", *Commun. Math. Phys.* **291**, 31–61 (2009)

[48] R. Seiringer, "The excitation spectrum for weakly interacting bosons", *Commun. Math. Phys.* **306**, 565–578 (2011)

[49] J. P. Solovej, "Many body quantum mechanics", Lecture notes at the Erwin Schrödinger Institute 2014, available online

[50] H. Spohn, "Kinetic equations from Hamiltonian dynamics: Markovian limits", *Rev. Mod. Phys.* **52**, 569–615 (1980)

[51] M. I. Weinstein, "Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolation estimates", *Commun. Math. Phys.* 87 (1983), pp. 567–576

Marcin Napiórkowski