Autoreferat

6 czerwca 2023

1. **Imię i nazwisko:** Maciej Wiśniewolski

2. **Posiadane dyplomy, stopnie naukowe:**

   a) Dyplom magistra z ekonomii - Szkoła Główna Handlowa 2002, promotor prof. dr hab. Sławomir Dorosiewicz - „Wycena opcji azjatyckich”
   b) Dyplom magistra z matematyki - Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego 2004, promotor prof. dr hab. Tomasz Bojdecki - „Wzór Feynmana-Kaca: uogólnienia i zastosowania”
   c) Dyplom doktora nauk matematycznych - Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego 2009, promotor prof. dr hab. Jacek Jakubowski - „Wycena wybranych instrumentów pochodnych w modelu SABR oraz modelu lognormalnym”

3. **Informacje o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych:**

   2010 - 2015: asystent w Instytucie Matematyki na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (1/2 etatu);
   2016 - 2019: adiunkt w Instytucie Matematyki na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (3/7 etatu);
   2020 - : adiunkt w Instytucie Matematyki na wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (pełen etat);

4. **Omówienie osiągnięć, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 Ustawy:**

   Jednotematyczny cykl publikacji, zgodnie z art. 219 ust. 1 pkt. 2 b Ustawy:

   Tytuł: **Charakteryzacja rozkładów funkcjonałów dyfuzji za pomocą teorii splotów i wycieczek**

   Publikacje stanowiące cykl:

   (a) [hab1] Jakubowski J., Wiśniewolski M., *Volterra integral equations of the first kind and applications to linear diffusions*, Transactions of the American Mathematical Society 373, 7455-7472 (2020).

   (b) [hab2] Jakubowski J., Wiśniewolski M., *Explicit solutions of Volterra integro-differential convolution equations*, Journal of Differential Equations, Volume 292, 416-426 (2021).

   (c) [hab3] Jakubowski J., Wiśniewolski M., *Another Look at the Hartman-Watson Distributions*, Potential Analysis 53, 1269–1297 (2020).

   (d) [hab4] Wiśniewolski M., *K-Hartman-Watson distributions: A study on distributional dependencies between functionals of geometric Brownian motion, GIG and Hartman-Watson distributions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 482(2) (2019).

   (e) [hab5] Jakubowski J., Wiśniewolski M., *A convolution formula for the local time of an Itô diffusion reflecting at 0 and a generalized Stroock–Williams equation*, Bernoulli 27 (3) 1870 - 1898 (2021).

   (f) [hab6] Jakubowski J., Wiśniewolski M., *On bivariate distributions of the local time of Itô-McKean diffusions*, Bernoulli (2023), https://doi.org/10.3150/23-BEJ1595.

   Szczegółowy opis osiągnięcia znajduje się na końcu niniejszego dokumentu.

5. Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową albo artystyczną realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej lub instytucji kultury, w szczególności zagranicznej.

   a) uczestnictwo w warsztatach naukowych dotyczących wyceny i zabezpieczania instrumentów pochodnych na stopę procentową prowadzonych przez R.Rebonato,

F.Mercurio, D.Brigo, w ramach pracy w instytucji finansowej (Wenecja 2006);
b) Polish MNiSW grant N N 201 547838 pod kierownictwem prof. dr hab. J.Jakubowskiego - Modelowanie stochastyczne rynków finansowych, wykonawca, równolegle z pracą w instytucji finansowej;
c) kompleksowe wdrożenie systemu informatycznego do wyceny i zarządzania ryzykiem opcji walutowych wiodącej na świecie jednostki technologicznej Murex (Francja), w ramach pracy w instytucji finansowej (2014-2017), wykonawca;
d) wyjazd naukowy do Instytutu Matematyki w Oxfordzie na zaproszenie prof. Jana Obłoja, w okresie pisania prac [hab3], [hab4] (XI 2018);
f) współorganizator międzynarodowych warsztatów Gaussian Multiplicative Chaos w ramach IDUB i semestru Simonsa, z udziałem prof. N. Berestyckiego, prof. G. Lamberta (2023);
g) współpraca z Illinois Institute of Technology (2022-).

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę.
   a) opieka nad doktorantami:
   - promotor pomocniczy, Zofia Miśkiewicz, doktorat, Uniwersytet Warszawski, 2019-2021;
   b) opieka nad studentami:
   - opiekun prac magisterskich, Uniwersytet Warszawski: Aleksandra Strzemieczna (2022), Aleksandra Nowak (2022), Piotr Wiącek (2022), Laura Grucza (2020), Dominik Fedor (2020), Kamila Gąsior (2017), Jan Fabianowski (2014), Sylwester Błaszczuk (2014), Damian Murawiński (2013), Wojciech Walczuk (2012), Adam Skalmierski (2011);
   - opiekun pracy licencjackiej, Tomasz Kostrzewa, Uniwersytet Warszawski,(2022);
   c) wykłady monograficzne i serie wykładów:
   - Wstęp do teorii funkcjonałów ruchu Browna i ich zastosowania w finansach 30h (2011-2012);
   - Stochastyczne równania różniczkowe, funkcjonały ruchu Browna i ich zastosowania w finansach 60h (2014-2015), (2016-2017);
   - Teoria dyfuzji i zastosowania w finansach 60h (2017-2018), (2018-2019);
   - Wstęp do teorii punktowych procesów Poissona i ich zastosowań 30h (2020-2021);
   - Punktowe Procesy Poissona 30h (2021-2022);
   - Procesy Markowa i zastosowania w finansach 30h (2022-2023);
   - Szkoła letnia „Procesy Markowa” w ramach projektu Szkoła Orłów (2021);
   d) współprowadzący seminarium magisterskiego, Metody probabilistyczne w finansach, 2009-2023;

e) opiekun koła naukowego „Finanse Obliczeniowe”, Uniwersytet Warszawski, 2017-2021;
f) opiekun studenta Tomasza Kostrzewy w ramach projektu MNiSW „Szkoła Orłów” (2020-2022), za opublikowaną pracę w ramach projektu student uzyskał wyróżnienie w konkursie PTM;

Szczegółowy opis osiągnięcia naukowego

Wstęp

1) Motywacja
Począwszy od pionierskiej pracy Bacheliera [3] i kilkadziesiąt lat młodszej, słynnej pracy Blacka i Scholesa [8], modelowanie matematyczne obiektów finansowych na stałe wrosło w analizę stochastyczną ([39], [42], [32]). Teoria semimartyngałów i procesów Markowa umożliwiły na przestrzeni kilkudziesięciu ostatnich lat wypracować spektrum klasycznych już metod i technik pozwalających rozwiązywać zadania stawiane przez potrzeby konkretnych zastosowań nie tylko w finansach, ale także fizyce, medycynie, naukach społecznych i szeroko rozumianej ekonomii ([10], [43], [69], [72], [40]). Przykładowo, ceny instrumentów pochodnych na rynkach finansowych modelowane są za pomocą skomplikowanych funkcjonałów procesów stochastycznych, a fundamentalne twierdzenie matematyki finansowej mówi, że do opisania ceny takich intrumentów potrzebna jest charakteryzacja ich rozkładów prawdopodobieństwa. Okazuje się, że probabilistyczny opis takich funkcjonałów wymaga użycia skomplikowanego aparatu matematycznego ([59], [23], [57], [82]). W ostatnich latach, techniki probabilistyczne związane z charakteryzacją procesów Markowa, a w szczególności funkcjonałów ruchu Browna, zaczęły odgrywać poważną rolę w teorii pól losowych i kwantowej teorii pola Liouvilla ([46], [6], [16], [70]).

2) Temat i cel badań
Tematem przewodnim cyklu publikacji [hab1]-[hab6] jest teoria funkcjonałów procesów Markowa, w szczególności ruchu Browna i procesów Bessela. Celem badań jest opis i charakterystyka wybranych funkcjonałów całkowych od wspomnianych wyżej procesów. Wykorzystywane są techniki teorii martyngałów, szeroko rozumianej teorii procesów Markowa oraz elementy teorii równań różniczkowych i całkowych. W wielu przypadkach charakteryzacja rozważanych obiektów jest możliwa dzięki wykorzystaniu specjalnych własności procesu, często nie posiadających analogicznych odpowiedników w przypadku ogólnym. Przykładem mogą być tu tożsamości Lam-

pertiego, Bougerola oraz szereg innych głębokich związków między procesami Bessela a ruchem Browna. W szczególności problemy poruszane w pracach [hab1]-[hab6] są kontynuacją pionierskich wyników Yora, Pitmana, Biane, Matsumoto i innych, którzy zasłynęli z pomysłowego wykorzystania teorii procesów Bessla do odpowiedzi na często trudne pytania dotyczące zachowania się funkcjonałów ruchu Browna ([54], [55], [15], [65], [64], [66], [67]). Ponieważ wiele zależności między rozkładami funkcjonalów całkowych procesów Markowa ma charakter splotowy, wykorzystaliśmy i rozwinęliśmy algebraiczny podejście do opisu splotów zapoczątkowane przez Lewa [47]. Okazuje się, że podejscie algebraiczne jest skuteczną alternatywą dla tradycyjnych analitycznych metod. Przykładem ilustrującym zastosowania funkcjonałów ruchu Browna w kontekście modeli finansowych jest problem wyceny opcji azjatyckich. Jeśli B jest ruchem Browna, a μ, σ są stałymi, to funkcja wypłaty takiego instrumentu jest w modelu Blacka-Scholesa postaci

$$X_t = \Big(\frac{1}{t}\int_0^t x e^{\sigma B_u + \mu u} du - K\Big)^+, \quad x > 0,\ K > 0.$$

Powszechnie wiadomo, że wyznaczenie rozkładu X_t jest trudnym zadaniem matematycznym. Problem ten jest silnie związany z rodziną rozkładów probabilistycznych Hartmana-Watsona, które pojawiaja się w wielu różnych problemach matematycznych i fizycznych. Opis rozkładów Hartmana-Watsona jest skomplikowany, a ich funkcje gęstości mają silnie oscylujący charakter skutecznie utrudniając podejście numeryczne ([37], [49], [4], [15], [26], [27]). Jak się jednak okazuje, lokalne własności rozkładów HW, w połaczeniu z wykorzystaniem zaawansowanych technik probabilistycznych, umożliwiają znalezienie alternatywnego i łatwiejszego ich opisu. W końcu, wykorzystanie teorii czasu lokalnego oraz wycieczek procesów Markowa otwiera nową perspektywę patrzenia na własności funkcjonałów całkowych procesów Markowa. Podejście wykorzystujace elementy teorii potencjału połaczone z opisem funckjonału bazującym na wykorzystaniu stowarzyszonego procesu punktowego pozwala na uzyskanie zupełnie nowych informacji o badanym obiekcie. Na tym polu uzyskalismy szereg nowych wyników.

3) Struktura opisu osiągnięcia

Cykl prac wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego opisuje rozkłady prawdopodobieństwa i własności trajektorii funkcjonałów procesów Markowa ważnych dla zastosowań, wykorzystając wybrane, zaawansowane techniki probabilistyczne i elementy teorii równań różniczkowych i całkowych. W szczególności wykorzystanie teorii równań całkowych Volterry i teorii wycieczek procesów Markowa umożliwiły charakteryzację kilku skomplikowanych problemów. Wśród badanych zagadnień znajdują się:

1) równania Volterry w algebrach splotowych i rozkłady pierwszego momentu dojścia dyfuzji,
2) opis rozkładów Hartmana-Watsona oraz ich zaskakujące własności,
3) analiza stochastyczna czasu lokalnego dyfuzji zadanych stochastycznym równaniem różniczkowym, opis funkcjonałów na przestrzeni funkcyjnej wycieczek i uogólnienie równania Stroocka-Williamsa oraz charakteryzacja jednowymiarowych i dwuwymiarowych rozkładów czasu lokalnego dyzfuzji Itô-McKean, w tym opis rozkładów procesu wycieczek dyfuzji od hiperpłaszczyzny.

Kolejne punkty stanowią szczegółowy opis wymienionych osiągnięć.

1 Równania Volterry w algebrach splotowych i rozkłady pierwszego momentu dojścia dyfuzji

Równania całkowe Volterry odgrywają kluczową rolę w wielu gałęziach matematyki. Ich rola jest związana z formalnym zapisem tzw. efektu pamięci, gdy zależność obiektu od funkcji uwzględnia jej wartości z przeszłości. Szczególnym zainteresowaniem cieszą się równania Volterry typu splotowego, gdzie wspomniana zależność od historii modelowana jest poprzez splatanie odpowiednich funkcji. Znaczenie rozważań tego typu wynika z zostosowań tej teorii w modelach fizycznych, ekonomicznych, medycznych i innych ([77], [25], [14], [31]).

W klasie funkcji lokalnie całkowanych na $\mathbb{R}_+$ rozróżniamy dwa zasadnicze rodzaje całkowych równań Volterry typu splotowego. Załóżmy, że f, g są pewnymi zadanymi funkcjami lokalnie całkowalnymi na $\mathbb{R}_+$, a funkcję szukaną oznaczymy przez y. Wówczas splotowe równanie całkowe Volterry pierwszego rodzaju definiujemy jako

$$f * y = g, \tag{1}$$

gdzie operacja $*$ oznacza splot funkcji f i g, czyli

$$f * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)ds, \quad t \geq 0.$$

Równanie całkowe Volterry drugiego rodzaju jest postaci

$$y = f + g * y. \tag{2}$$

Analityczne sposoby rozwiązywania równań drugiego rodzaju są znane w literaturze ([7], [25], [31], [14], [74]). Oryginalnym podejściem do tematu równań całkowych Volterry typu splotowego drugiego rodzaju jest algebraiczne podejście rozwinięte przez

Lewa [47]. Ponieważ algebraiczny opis dobrze pasuje do pewnych problemów probabilistycznych, to podejście [47] stało się główną inspiracją pracy [hab1]. W podejściu [47] rodzina funkcji lokalnie całkowalnych na $[0, \infty)$ stanowi algebrę Banacha z odpowiednio zadaną klasą pół-norm. Szczególną rolę w tej algebrze odgrywają tzw. elementy quasi-odwrotne: każdemu elementowi f algebry odpowiada jednoznacznie wyznaczony element $f^{\ddagger}$ należący do algebry i taki, że

$$f + f^{\ddagger} = f * f^{\ddagger}.$$

Co więcej, pokazuje się, że $f^{\ddagger} = -\sum_{n\geq 1} f^{*n}$, gdzie potęgi splotowe definiujemy rekurencyjnie

$$f^{*1} = f, \quad f^{*n} = f * f^{*(n-1)},$$

a szereg występujący w definicji $f^{\ddagger}$ jest zawsze zbieżny (Lemat 2, [47]).

Pojęcie elementu quasi-odwrotnego pełni tutaj szczególną rolę, bo dzięki niemu otrzymujemy jawną postać rozwiązania Volterry drugiego rodzaju. Mianowicie, w algebrze splotowej rozwiązanie równania (2) zawsze istnieje, jest wyznaczone jednoznacznie i zadane wzorem

$$y = f - f * g^{\ddagger},$$

(Twierdzenie 2, [47]). Metody rozwiązywania równań pierwszego rodzaju znane wcześniej z literatury, dotyczyły tylko wybranych typów równań. Uniwersalne metody rozwiązywania takich równań, poza szczególnym przypadkiem, gdy równanie pierwszego rodzaju można sprowadzić do równania drugiego rodzaju, nie zostało wypracowane ([7], [19], [68], [74]).

W pracy [hab1] zaproponowano algebraiczne podejście do splotowych równań Volterry pierwszego rodzaju, a dokładniej mówiąc, celem badawczym pracy było znalezienie algebraicznych formuł opisujących rozwiązanie równania (1). W tym celu wprowadzone zostało pojęcie dekonwolucji. Niech $\mathcal{A}$ oznacza algebrę funkcji lokalnie całkowalnych na nieujemnej półprostej. Niech $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \setminus \{0\}$. Dla ustalonego $\phi \in \mathcal{A}^*$ powiemy, że element $f \in \mathcal{A}^*$ posiada ϕ-dekonwolucję, jeśli istnieje $h \in \mathcal{A}$ takie, że

$$f = \phi * h + \phi * f - \phi. \tag{3}$$

Wówczas h nazywamy ϕ-dekonwolucją funkcji f. Chociaż w pierwszej chwili warunek (3) nie wydaje się intuicyjny, to jego wprowadzenie wiąże się z wyznaczaniem elementów odwrotnych w algebrze splotowej rozszerzonej o element neutralny (takim elementem jest delta Diraca w zerze, jeśli odpowiednio zdefiniujemy splot funkcji z miarą). Dla ustalonych $f, g \in \mathcal{A}^*$, jeśli funkcja y jest rozwiązaniem równania (1) to trójkę (y, f, g) nazywamy trójką splotową. W pracy [hab1], dla ustalonego ϕ, wyznaczamy algebraiczną postać funkcjonału $\phi * y$. W rezultacie, jeśli ϕ zostanie wybrane z klasy jąder dla których potrafimy rozwiązać równanie $\phi * y = f_1$, $f_1 \in \mathcal{A}^*$, to tym samym potrafimy znaleźć postać rozwiązania y. Dla $\phi \in \mathcal{A}^*$ klasę $\mathcal{H}_\phi$ definiujemy jako zbiór elementów $g \in \mathcal{A}$ takich, że istnieje rozwiązanie $d_\phi(g) \in \mathcal{A}$ równania $\phi * d = g$. Tę sytuacje opisuje poniższe twierdzenie.

Twierdzenie 1.1. *(Thm.1.3 [hab1]) Niech $(y, f, g) \in (\mathcal{A}^*)^3$ będzie trójką splotową, a $\phi \in \mathcal{A}^*$ jest ustalone. Jeśli h jest ϕ-dekonwolucją f to*

$$\phi * y = \mathcal{S}_\phi(h, g), \tag{4}$$

gdzie

$$\mathcal{S}_\phi(h, g) = h^\ddagger * g - g - \phi * (h^\ddagger * g - g). \tag{5}$$

Jeśli dodatkowo $\mathcal{S}_\phi(h, e) \in \mathcal{H}_\phi$ to

$$g = d_\phi(\mathcal{S}_\phi(h, e)). \tag{6}$$

Aby zilustrować znaczenie ostatniego twierdzenia, podajemy w pracy konkretne przykłady ϕ-dekonwolucji dla $\phi(t) = t$ oraz $\phi(t) = \sqrt{t}$ (dla takich jąder, postać d_ϕ jest znana z [19]). Jednakże, główna motywacja i wynik pracy [hab1] dotyczy algebraicznych form rozwiązania (1) w kontekście probabilistycznym. Sciślej mówiąc, koncntrujemy się na pewnej klasie procesów Markowa nazywanych w literaturze dyfuzjami typu Itô-McKean [40], [69], [72], [73]. Są to procesy Markowa X o ciągłych trajektoriach rozpatrywane w ogólnym kontekście, czyli gdy generator w sensie uogólnionym jest zadany przez stowarzyszoną z procesem funkcję skali s i miarę prędkości m. Jeśli oznaczymy generator procesu X przez $\mathcal{G}$ to dla dyfuzji Itô-McKean $\mathcal{G} = \frac{d}{ds}\frac{d}{dm}$. Załóżmy, że $E \subset \mathbb{R}$ oznacza przestrzeń stanów X. Pierwszy moment dojścia procesu X do punktu $a \in E$ to moment zatrzymania zdefiniowany jako

$$\sigma_a = \inf\{t > 0 : X_t = a\}. \tag{7}$$

O ile dla ruchu Browna wyznaczenie rozkładu σ_a jest klasycznym zadaniem, to w przypadku innych dyfuzji, zadanie to staje się dużo trudniejsze i było przedmiotem intensywnych badań. Dobrym przykładem jest tutaj opis momentu dojścia dla procesów Bessela, rozwiązany za pomocą zaawansowanej analizy zespolonej przez Hamana i Matsumoto [34], [35]. Innym przykładem może być badanie rozkładu momentu dojścia dla procesu Ornsteina-Uhlenbecka, znany wcześniej w literaturze tylko w postaci transformaty albo rozwinięcia w szereg [2], [33], [73].

Klasyczny wynik dotyczący problemu opisania rozkładu pierwszego dojścia dyfuzji do punktu jest związany z faktem, że transformata Laplacea tego rozkładu jest rozwiązaniem problemu Cauchy'ego

$$\mathcal{G}\psi - \lambda\psi = 0, \quad \lambda > 0, \tag{8}$$

z odpowiednio zadanymi warunkami brzegowymi, gdzie jak poprzednio, $\mathcal{G}$ oznacza generator rozpatrywanej dyfuzji [44], [45], [11]. Ściślej mówiąc, transformata Laplacea rozkładu pierwszego dojścia do y, gdy startujemy z x, wyraża sie wzorem $\frac{\psi(x,\lambda)}{\psi(y,\lambda)}$, gdzie ψ jest rozwiązaniem (8). Kent i Bondesson [44], [45], [11] odkryli równolegle, że rozkłady momentów pierwszego dojścia są nieskończenie podzielne i należą do wspólnej klasy rozkładów nazwanych potem rozkładami Bondessona. Jednakże rozwiązanie problemu (8) jest często trudnym zadaniem, a dodatkową trudnością jest odwrócenie uzyskanej transformaty Laplacea. Przestrzeń stanów dyfuzji opisujemy za pomocą przedziału (l, r), gdzie oba końce mogą być skończone lub nie. Jeśli lewy koniec przestrzeni stanów nie jest tak zwaną granicą naturalną (czyli gdy odpowiednie całki po funkcji skali wzgledem miary predkości są nieskończone [10]), to rozwiązanie (8) można otrzymać za pomocą rozwinięcia w szereg Sturm-Liouville. Wówczas, uzyskany rozkład ma reprezentację w postaci szeregu rozkładów wykładniczych [44]. Powyższy schemat nie działa, gdy lewy koniec przestrzeni stanów jest granicą naturalną. Dobrym przykładem takiej sytuacji jest proces Bessela o dodatnim indeksie, gdy punkt startu procesu leży powyżej wartości stanu, do którego proces ma dojść. Wówczas transformata Laplaca jest ilorazem zmodyfikowanych funkcji Bessela. Problem odwrócenia tej transformaty okazał się trudny i rozwiązany stosunkowo niedawno przez Hamanę i Matsumoto [34], [35] za pomocą technik zaawansowanej analizy zespolonej. W ogólności, nie ma uniwersalnej metody rozwiązywania problemu (8), a nawet jeśli już problem uda sie rozwiązać, kolejnym wyzwaniem staje się odzyskanie postaci rozkładu z transformaty Laplace.

Motywowani chęcią wypracowania uniwersalnego podejścia do badania rozkładów momentu pierwszego dojścia, w pracy [hab1] przedstawiamy nowe, oryginalne podejście do tego tematu. Naturalnym punktem wyjścia jest tutaj równanie całkowe typu splotowego Volterry pierwszego rodzaju. Przez $p_t(x, y)$ oznaczamy funkcję gęstości przejścia względem miary prędkości dyfuzji X. Wówczas $p_t(x, y)$ jest ciągła względem swoich argumentów oraz

$$\mathbb{P}_x(X_t \in A) = \int_A p_t(x, y)m(dy),$$

gdzie $A \subset E$ jest podzbiorem borelowskim przestrzeni stanów ([73, 1.2], [10, Chapter II, p. 4]). Wiadomo również, że rozkład momentu dojścia σ_y dyfuzji Itô-McKean do punktu $y \in E$ ma gęstość $g_{y,x}$ względem $\mathbb{P}_x$, a odwzorowanie $t \mapsto g_{y,x}(t)$ jest ciągłe. Co więcej, jeśli przez R_λ oznaczymy funkcję Greena dyfuzji X, tzn.

$$R_\lambda(x,y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x,y)dt, \quad \lambda > 0,$$

to splotowe równanie Volterry dla gęstości momentu dojścia uzyskujemy z tożsamości

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda \sigma_y} = \frac{R_\lambda(x,y)}{R_\lambda(y,y)} \tag{9}$$

[73, (3)]. Po odwróceniu transformaty Laplace'a, otrzymujemy trójkę splotową

$$(p(y,y), g_{y,x}, p(x,y)),$$

które jako funkcje argumentu t, spełniającą równanie

$$p(y,y) * g_{y,x} = p(x,y). \tag{10}$$

Kluczem do otrzymania zasadniczego wyniku pracy [hab1] jest pewna szczególna obserwacja. Otóż gęstości przejścia pewnych dyfuzji $p_\cdot(y,y)$ na diagonali, tzn. dla równych argumentów $x = y$, mają charakterystyczną asymptotyczną własność. Dla pewnych, ustalonych $y \in E$ zauważamy, że $p_t(y,y) \approx \frac{c}{\sqrt{t}}$, gdy t jest asymptotycznie bliskie 0 i stałej $c > 0$. Przykładowo, dla ruchu Browna mamy $p_t(y,y) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}$ dla każdego y, dla ruchu Browna odbitego w punkcie y mamy $p_t(y,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}$, dla procesu Bessela z indeksem γ oraz $y > 0$ mamy $p_t(y,y) \approx \frac{y^{-2\gamma-1}}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}$, a dla kwadratowego, radialnego procesu Ornsteina-Uhlenbecka z parametrami $\gamma, v > 0$ oraz $y > 0$ mamy $p_t(y,y) \approx \frac{2\sqrt{\gamma}}{y^v\sqrt{2\pi t}}$. Formalnie:

Definicja 1.2. *Dla ustalonego $y \in E$ mówimy, że $p_\cdot(y,y)$ spełnia hipotezę S, jeśli istnieje funkcja $\xi(\cdot,y) \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$ taka, że $p_t(y,y) = \frac{\xi(t,y)}{\sqrt{t}}$ dla $t > 0$ oraz $\lim_{t\downarrow 0} \xi(t,y) = c > 0$.*

Dla procesów spełniajacych Hipotezę S otrzymujemy następującą charakterystkę rozkładów pierwszego dojścia.

Twierdzenie 1.3. *(Thm.2.3 [hab1]) Niech $y \in E$ będzie ustalone. Załóżmy, że $p_\cdot(y,y)$ spełnia hipotezę S. Niech $\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,\infty)}(t)$. Wówczas $\Delta * p(y,y) \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$ oraz dla $\psi := \frac{1}{c\pi}\big(\Delta * p(y,y)\big)'$ mamy $\psi \in \mathcal{A}$ oraz*

$$(c\,\pi) * g_{y,x} = \Delta * p(x,y) - \big(\Delta * p(x,y)\big) * (-\psi)^{\ddagger}. \tag{11}$$

Równość (11) oznacza, że

$$\mathbb{P}_x(\sigma_y \leq t) = \frac{1}{c\pi}\Big[\big(\Delta * p(x,y)\big)(t) - \Big(\big(\Delta * p(x,y)\big) * (-\psi)^{\ddagger}\Big)(t)\Big],$$

czyli znajdujemy algebraiczną postać dystrybuanty pierwszego dojścia do punktu dla dyfuzji X. Alternatywna charakterystyka funkcji $g_{y,x}$, wykorzystująca pojęcie ϕ-dekonwolucji, jest nastepująca.

Twierdzenie 1.4. *(Corr.2.5 [hab1]) Niech $x, y \in E$ ustalone. Załóżmy, że $p.(y,y)$ spełnia hipotezę S, a $\bar{p}(y)$ jest zdefiniowana jako*

$$\bar{p}_t(y) = (\Delta * p(y,y))(t) - c\pi, \quad t > 0, \text{ oraz } \quad \bar{p}_0(y) = \lim_{t\to 0} \bar{p}_t(y). \tag{12}$$

Niech $\phi \in \mathcal{A}^*$ oraz załóżmy, że istnieje rozwiązanie $h \in \mathcal{A}$ równania całkowego typu splotowego

$$h * \phi = \bar{p}(y) + \phi - \bar{p}(y) * \phi. \tag{13}$$

Wtedy

$$\phi * g_{y,x} = h^{\ddagger} * e - e - \phi * \Big(h^{\ddagger} * e - e\Big) \tag{14}$$

dla e danego przez

$$e = \big(\Delta * p(y,y)\big) * (-\psi)^{\ddagger}, \quad \psi = \frac{1}{c_1}\big(\Delta * p(y,y)\big)', \tag{15}$$

gdzie $\Delta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} 1_{(0,\infty)}(t)$, $c_1 = c\pi$, a c jest stałą z hipotezy S.

W pracy [hab1] podajemy szereg przykładów. W szczególności, algebraiczny sposób opisu rozkładów pierwszego dojścia do punktu dla procesów dyfuzji daje się zastosować w problemach związanych z procesami zabitymi i mostami. Takie podejście stanowi alternatywę dla metod opisnaych w pracach [65], [64], [66], [67].

Podczas prac nad algebraicznym podejściem do całkowych równań Volterry pierwszego rodzaju, rozwinęliśmy koncepcję uogólnienia podejścia [47] na przypadek dwuwymiarowy. Koncepcja związana była z postacią równania różniczkowo-całkowego, które spełnia dystrybuanta czasu lokalnego dyfuzji. Uogólnienie na przypadek dwuwymiarowy zrealizowaliśmy w pracy [hab2] w kontekście klasy równań różniczko-całkowych postaci

$$\frac{\partial Q(t,z)}{\partial z} = \alpha(t,z) - \int_0^t \beta(t-u) Q(u,z)du, \quad (t,z) \in (0,T) \times (0,T), \tag{16}$$

z warunkiem brzegowym $Q(t,0) = \gamma(t)$, gdzie $T > 0$, α, β, γ są funkcjami lokalnie całkowalnymi na $\mathbb{R}_+$.

Aby rozwiazać równanie (57) wprowadzamy algebrę bi-splotową. Definiujemy operację Δ

$$(f\Delta g)(t,z) = \int_0^t \int_0^z f(u,w)g(t-u, z-w)dudw, \quad t,z \geq 0,$$

i uogólniamy algebraiczną konstrukcję algebry splotowej w przypadku jednowymiarowym [47] na przypadek dwywymiarowy. Znamienne jest to, że problem (57) jest sformułowany wyłącznie w języku splotów jednowymiarowych. Tzw. bi-sploty są wykorzystane wyłącznie jako element techniki rozwiązania problemu i dowodu głównego twierdzenia [hab2].

Głównym rezultatem [hab2] jest jawny wzór rozwiązania (57). Warte podkreślenia jest to, że dzięki naszej nowej metodzie, otrzymujemy rozwiązanie ogólnego problemu postaci

$$\Gamma Q = \alpha + \beta * Q, \tag{17}$$

gdzie α, β są zadanymi funkcjami, a Γ jest operatorem różniczkowym postaci

$$\Gamma = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}, \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Wyniki otrzymywane w tej teorii rzadko przyjmują postać wzorów jawnych. Znane w literaturze, rozwiązania metodą rozkładu Adomiana, czy metodą iteracyjno-wariacyjną, są rozwiazaniami przybliżonymi, znajdowanymi numerycznie. Metoda transformaty Laplacea wymaga na końcu jej odwrócenia, co wiąże się zazwyczaj z kosztownym problemem numerycznym. Przegląd metod rozwiązywania równań tego typu można znaleźć w monografii Wazwaz [79] oraz pracach McLean [56], Mustapha oraz McLean [60], [31], Fakhar-Izadi oraz Dehghan [25], czy Costarelli oraz Spigler [13].

W sformułowaniu głównego wyniku wykorzystujemy pojęcie eksponenty splotowej. Dla $f \in \mathcal{A}$ definiujemy σ-skonczoną miarę $\mathcal{E}^*(f)$ na $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

$$\mathcal{E}^*(f)(D) = \delta_0(D) + \int_D \sum_{i \geq 1} \frac{f^{*i}(t)}{i!} dt, \quad D \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \tag{19}$$

gdzie δ_0 oznacza miarę Diraca w 0.

Twierdzenie 1.5. *(Thm.2.1 [hab2]) Gdy $T > 0$ klasyczne rozwiązanie równania (57) na $(0,T) \times (0,T)$ z warunkiem brzegowym $Q(t,0) = \gamma(t)$, $t \in (0,T)$ jest dane wzorem*

$$Q(t,z) = \gamma(t) + \int_0^z \Big(\alpha(t,v) - \int_0^t \beta(t-u)\gamma(u)du\Big)dv \tag{20}$$
$$- \int_0^z \int_0^t \int_0^v g(t-s, v-w)\Big(\alpha(s,w) - \int_0^s \beta(s-r)\gamma(r)dr\Big)dwdsdv$$

dla $(t,z) \in (0,T) \times (0,T)$, gdzie

$$g(t,z) = \int_{[0,t]} \beta(t-u)\mathcal{E}^*(-z\beta(\cdot))(du). \tag{21}$$

Rozwiązanie problemu ogólnego (17) opisuje

Twierdzenie 1.6. *(Thm.2.1 [hab2]) Niech $n \in \mathbb{N}$, a α_n, β_n są funkcjami lokalnie całkowalnymi na $\mathbb{R}_+^2$ oraz $\mathbb{R}_+$ odpowiednio. Dla $T > 0$ oraz $(t,z) \in (0,T) \times (0,T)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, n-1$ i operatora Λ_n danego (18), klasyczne rozwiązanie równania*

$$\Lambda_n Q(t,z) = \alpha_n(t,z) - \int_0^t \beta_n(t-u)Q(u,z)du, \quad (t,z) \in (0,T) \times (0,T) \tag{22}$$

z warunkiem brzegowym $Q(t,0) = \gamma(t)$ for $t \in (0,T)$, jest dane wzorem

$$Q(t,z) = Q_0\Big(t, z, 1^{*n} * \alpha_n(\cdot, z), 1^{*n} * \beta_n + \sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i * 1^{*(n-i-1)} + \lambda_{n-1}\Big),$$

gdzie Q_0 jest dane wzorem (20).

2 Rozkłady Hartmana-Watsona

Relacje typu splotowego odgrywają istotną rolę w wielu różnych dziedzinach matematyki. W pracy [hab3] odkryte zostały nowe relacje splotowe dla szczególnej funkcji występującej w opisie ważnej klasy rozkładów probabilistycznych - rozkładów Hartmana-Watsona (HW).

Zmienna losowa z rozkładu HW z parametrem $x > 0$ jest zadana gęstością $\eta(t,x) = \frac{u(t,x)}{I_0(x)}$, $t > 0$, gdzie funkcję $u(\cdot, x)$ zwykle definiujemy poprzez jej związek z transformatą Laplace zmodyfikowanej funkcji Bessela I_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}t} u(t,x)dt = I_\lambda(x). \tag{23}$$

Rozkłady HW są integralną częścią opisu rozkładu łącznego wektora (B_t, A_t), gdzie B jest ruchem Browna, a $A_t = \int_0^t e^{2B_u} du$ (dzięki zastosowaniu twierdzenia Girsanova możemy przejść do badania analogicznego problemu z dryfem, gdy zamiast B_t rozpatrujemy $B_t + \mu t$, $\mu \in \mathbb{R}$).

Rozkłady HW są ważne w zastosowaniach finansowych. W modelu Blacka-Scholesa funkcjonał A_t jest składową wypłaty opcji azjatyckich i reprezentuje średnią cenę instrumentu bazowego ([26], [15], [51]). Instrumenty tego typu cieszą się dużą popularnością na rynkach finansowych i towarowych ([59]). Rezultat Matsumoto i Yora [54, Thm. 4.1] daje postać rozkładu łącznego (B_t, A_t)

$$\mathbb{P}\Big(A_t \in dy, B_t \in dx\Big) = \frac{1}{y} \exp\Big(- \frac{1 + e^{2x}}{2y}\Big) u\Big(t, \frac{e^x}{y}\Big) dydx, \tag{24}$$

gdzie postać funkcji u została wyprowadzona przez Yora [83]

$$u(t, x) = \frac{x e^{\pi^2/(2t)}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{2t} - x\cosh(k)} \sinh(k) \sin(\pi k/t) dk, \quad x > 0. \tag{25}$$

Jak zaobserwowali Barrieu, Rouault i Yor [4] oraz Bernhart i Mai [6], reprezentacja (25) jest trudna w numerycznej implementacji. Powodem tego jest oscylujący charakter funkcji $t \mapsto u(t, x)$ dla wartości t bliskich 0. Problem określenia wartości fukcji $u(\cdot, \cdot)$ i jej znaczenie dla zastosowań, zrodziły potrzebę poszukiwania alternatywnego sposobu jej opisu ([27]).

Rozkłady z klasy HW są związane z ważnymi dla statystyki rozkładami typu von Mises-Fisher. Wystepują również w reprezentacji funkcji charakterystycznej planarnego ruchu Browna, a także pojawiają się w enigmatyczny sposób w przeróżnych problemach probabilistycznych ([36], [37]). Przykładowo, w przypadku dyfuzji będącej rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = X_t dW_t + X_t^2 \frac{I_1(X_t)}{I_0(X_t)} dt, \quad X_0 = x > 0, \tag{26}$$

Kent [45] zaobserwował, że moment eksplozji trajektorii X (czyli pierwszy moment wyjścia procesu z przestrzeni stanów) jest skończony prawie na pewno, a jego rozkład to rozkład HW z parametrem x.

Pewne nowe podejście do opisu rozkładu łącznego wektora (B_t, A_t) zaproponował Lyasoff [49], wskazując nowy typ całkowych reprezentacji rozkładów HW. W kontekście potrzeby poszukiwania nowych formuł efektywnie opisujących rozkłady HW zainspirowało nas to do dalszych badań w tym kierunku. Praca [hab3] jest studium poświęconym badaniu nowych reprezentacji funkcji u. W szczególności, duża część pracy opisuje formuły spolotwe związane z u i w konsekwencji prowadzące do odkrycia nowych własności rozkładów HW.

W pierwszej kolejności, wykorzystując związki między funkcjami Bessela wyprowadzamy nową postać transformaty Fouriera funkcji $y \mapsto \frac{u(t,y)}{y}$. Następnie, wykorzystując postać gęstości zmiennej A_t otrzymaną przez Alili i Grueta [1], znajdujemy nową, nieznaną dotąd reprezentację funkcji u.

Twierdzenie 2.1. *(Thm.3.7 [hab3]) Dla $t, y > 0$,*

$$u(t,y) = \frac{ye^{\frac{\pi^2}{8t}}}{\sqrt{2\pi^3 t}} \int_0^\infty \cos\Big(- xy + \frac{\pi}{2t} \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)\Big) \times \\ \times \exp\Big(- \frac{\Big(\ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big)\Big)^2}{2t}\Big) dx. \tag{27}$$

Zaobserwowaliśmy związek $u(t,\cdot)$ z pewnym operatorem $\mathcal{T}_t$ zdefiniowanym dla $\alpha \geq 1$ na przestrzeni $\mathcal{G}_\alpha$ funkcji mierzalnych na $\mathbb{R}_+$ i spełniających warunek

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}}{x} |g(x)| dx < \infty.$$

Operator $\mathcal{T}_t : \mathcal{G}_\alpha \to \mathcal{G}_\alpha$ jest postaci

$$\mathcal{T}_t f(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{yt} K_0(x-y) dy, \quad x > 0,$$

gdzie K_0 oznacza zmodyfikowaną funkcję Bessela. Okazuje się, że dla ustalonego $t > 0$ funkcja $x \mapsto u(t,x)$ należy do $\mathcal{G}_\alpha$, a $u(t,\cdot)$ jest punktem stałym operatora $\mathcal{T}_t$.

Twierdzenie 2.2. *(Thm.5.1 [hab3]) Dla $t > 0$ mamy*

$$u(t,x) = \frac{1}{t} \int_0^x \frac{K_0(x-y)}{y} u(t,y) dy, \quad x > 0, \tag{28}$$

tzn. $\mathcal{T}_t u(t,x) = u(t,x)$, $x > 0$.

Ten teoretyczny fakt, w połączeniu z zastosowaniem teorii wycieczek procesów Markowa, pozwala spojrzeć na u z nieznanej dotąd strony. Okazuje się, że otrzymujemy relację splotową zmieniającą całkowanie po czasie na całkowanie po przestrzeni stanów, czyli odpowiednik formuły czasu przebywania dla czasu lokalnego.

Twierdzenie 2.3. *(Thm.5.3 [hab3]) Dla $t > 0, x > 0$ zachodzi*

$$\int_0^x I_0(x-y) \frac{u(t,y)}{y} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} u(s,x) ds. \tag{29}$$

Kluczowym pomysłem w dowodzie ostatniego twierdzenia jest wykorzystanie tzw. formuły master teorii wycieczek ([69, Ch. XII]). Przez odpowiedni, losowy podział trajektorii procesu Markowa otrzymujemy fragmenty trajektorii, które możemy dalej zanurzyć w odpowiednio wybranej przestrzeni funkcyjnej. Takie funkcje stają się wartościami tzw. procesu punktowego wycieczek, stowarzyszonego z wyjściowym procesem Markowa. Jeśli proces jest rekurencyjny, to proces punktowy jest punktowym procesem Poissona. Parametryzacja fragmentacji trajektorii odbywa sie za pomocą czasu lokalnego, a ściślej, za pomocą subordynatora będącego odwrotnością czasu lokalnego. Patrzymy na proces przez pryzmat wizyt trajektorii w określonym stanie, np. 0. Wiemy jak wygląda stochastyczna struktura dopełnienia zbioru punktów, w których proces jest równy 0. Takie dopełnienie jest przeliczalną sumą przedziałów otwartych (τ_{s-}, τ_s), gdzie τ_s oznacza odwrotność czasu lokalnego. Dzięki formule master, wartość oczekiwaną funkcjonału $\int_0^t e^{-\lambda s} f(X_s)ds$ możemy zapisać, z jednej strony w języku teorii potencjału wykorzystując rozkłady pierwszego momentu dojścia do punktu, a z drugiej, w terminach procesu punktowego o wartościach w przestrzeni funkcyjnej oraz wspomnianego czasu lokalnego. W tym drugim opisie następuje swoisty podział na część związaną z przestrzenią funkcyjną i część losową opisaną przez czas lokalny.

W konsekwencji, formuła z Twierdzenia 2.3 prowadzi do nowego opisu funkcji u. W tym celu, definiujemy rodzinę funkcji

$$\phi_t(x) = e^{-x} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \frac{u(t-s,x)}{x} ds, \quad t > 0,\ x \geq 0, \tag{30}$$

oraz $\phi_0 \equiv 0$. Jeśli założymy, że funkcja ϕ_t jest znana, możemy popatrzyć na (30) jako na całkowe równanie typu splotowego Abela względem $u(\cdot, x)$. Ponieważ znamy postać jego rozwiązania ([19, Volterra integral equations 1.1.5]), u wyznaczamy jako

$$u(t,x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} x e^x \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{\partial \phi_s(x)}{\partial s} ds. \tag{31}$$

Zatem widać, że dla nowego opisu funkcji u musimy scharakteryzować funkcję $\phi_t(x)$. Wykorzystując formułę na zmianę z całkowania po czasie na całkowanie po przestrzeni stanów (Twierdzenie 2.3), dowodzimy następujące fakty.

Twierdzenie 2.4. *(Thm.5.3 [hab3]) Dla $t > 0$ oraz $\lambda \geq 0$,*

$$\mathbb{P}\Big(\cosh(B_t) \leq 1 + \lambda \Big) = \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda x}) \phi_t(x) dx, \tag{32}$$

gdzie B jest standardowym ruchem Browna. Co więcej, funkcja $x \mapsto \phi_t(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa i miarą Lévy'ego pewnego subordynatora.

Wniosek 2.5. *(Corr.5.4 [hab3]) Niech $t > 0$, a zmienna losowa ξ_t ma rozkład z gęstością ϕ_t. Jeśli ξ_t i rodzina rozkładów wykładniczych $(\epsilon_x)_{x>0}$, są niezależne, to*

$$\cosh(B_t) \stackrel{law}{=} 1 + \epsilon_{\xi_t} \stackrel{law}{=} 1 + \frac{\epsilon_1}{\xi_t},$$

oraz dla $\alpha > 0$,

$$\mathbb{E}(\xi_t)^{-\alpha} = \frac{\mathbb{E}\Big(\cosh(B_t) - 1\Big)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Zaprezentujemy jeszcze jedną konsekwencję badań nad rozkładami HW z pracy [hab3]. Jest ona istotna w kontekście poszukiwania nowych reprezentacji u, dla których można zastosować przybliżenia numeryczne. Niech

$$H_1(t,y) = \mathbb{E}\Big(\cos\Big(-y\sinh(B_t) + \frac{\pi}{2t}B_t\Big)\cosh(B_t)\Big),$$
$$H_2(t,y) = \mathbb{E}\Big(e^{-y\cosh(B_t)}\sinh(B_t)\sin\Big(\frac{\pi B_t}{t}\Big)\Big), \quad y \geq 0,\ t > 0.$$

Obie funkcje mogą być ewaluowane w standardowy sposób metodami Monte Carlo. Istotnym problemem, który powodował silną oscylację u w sąsiedztwie 0 był czynnik $e^{\frac{\pi^2}{2t}}/\sqrt{t}$, który szybko wzrasta dla coraz mniejszych wartości t. Dzięki nowej reprezentacji u możemy ten kłopotliwy czynnik wyeliminować.

Fakt 2.6. *(Prop.3.11 [hab3]) Dla dowolnych $t > 0$, $y \geq 0$,*

$$u(t,y) = \frac{y}{2\pi}\frac{(H_1(t,y))^{\frac{4}{3}}}{(H_2(t,y))^{\frac{1}{3}}}. \tag{33}$$

Rezultaty równoległego etapu badań nad rozkładami HW, w nieco innym kontekście w porównaniu do podejścia [hab3], zaprezentowaliśmy w pracy [hab4]. Znaleziono tam pewne zaskakujące własności rozkładów HW.

W pierwszej kolejności, wprowadzamy zupełnie nową klasę rozkładów prawdopodobieństwa, która jest silnie związaną z rodziną zmiennych losowych HW. Nowa rodzina rozkładów została nazwana rozkładami K-Hartmana-Watsona (KHW).

Definicja 2.7. *Dla ustalonego $t > 0$ powiemy, że η_t ma rozkład KHW, jeśli jest on zadany gęstością*

$$\mathbb{P}\big(\eta_t \in dx\big) = 2K_0(x)\frac{u(t,x)}{x}1_{(0,\infty)}(x)dx. \tag{34}$$

Przez rozkład typu GIG oznaczamy rozkład z rodziny odwrotnych rozkładów gaussowskich. Badanie związków rozkładów HW oraz rozkładu łącznego (B_t, A_t) z rozkładami typu GIG były zanispirowane wynikami Matsumoto i Yora [52], [53]. Wykazaliśmy następujacy związek z rozkładami KHW.

Twierdzenie 2.8. *(Thm.4.4 [hab4]) Niech $t > 0$, a zmienna η_t ma rozkład KHW i jest niezależna od rodziny $(G_x)_{x>0}$ rozkładów GIG z paramterami $1, x$. Wówczas*

$$(A_t, e^{B_t}) \stackrel{law}{=} (G_{\eta_t}, \eta_t G_{\eta_t}). \tag{35}$$

Zauważmy, że związek w ostatnim twierdzeniu pozwala wyrazić rozkład wektora po lewej stronie (35) w postaci niezależnych komponentów po prawej stronie.

W pracy [hab4] podajemy szereg innych związków między rozkładami HW i KHW, ale jeden z nich jest szczególnie ciekawy. Pokótce go zaprezentujemy. Niech $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$, a dla $x > 0$ zdefiniujmy hiperpłaszczyznę $\mathcal{H}_x$

$$\mathcal{H}_x = \{(y,z) \in \mathbb{R}_+^2 : z = yx\}.$$

Dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$, niech $\mathcal{H}_x^1(A)$ oznacza rzut $A \cap \mathcal{H}_x$ na pierwszą współrzędną

$$\mathcal{H}_x^1(A) = \{\theta > 0 : (\theta, x\theta) \in A \cap \mathcal{H}_x\}.$$

Definicja 2.9. *Dla $\alpha \in \mathbb{R}$ i $x > 0$ definiujemy rozkład GIG z parametrami $\alpha, 1$ i x na hiperpłaszczyźnie $\mathcal{H}_x$, jako miarę skoncentrowaną na $\mathcal{H}_x$ taką, że dla każdej nieujemnej borelowskiej funkcji F na $\mathbb{R}_+^2$ oraz $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$*

$$\begin{aligned} &\int_{A\cap\mathcal{H}_x} F(y,z)\, d\widehat{\mu}_{\alpha,1,x}(y,z) \\ &\qquad = \int_{\mathcal{H}_x^1(A)} F(\theta, \theta x) \frac{1}{2K_\alpha(x)} x^\alpha \theta^{\alpha-1} \exp\Big(-\frac{1}{2\theta} - \frac{x^2\theta}{2}\Big) d\theta. \end{aligned}$$

Rozkład ten oznaczamy przez $\widehat{\mu}_{\alpha,1,x}$.

Okazuje się, że ma miejsce intrygujący związek między opisywanym wyżej rozkładem łącznym (B_t, A_t), a abstrakcyjnym rozkładem GIG na hiperpłaszczyźnie. Relacja ta nawiązuje swoim charakterem do oryginalnych wyników Hartmana i Watsona [37] z taką różnicą, że rozkłady dyfuzji opisywanych przez Hartmana i Watsona były skoncentrowane na sferze o wymiarze będącym liczbą naturalną.

Twierdzenie 2.10. *(Thm.5.4 [hab4]) Niech $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ i $t > 0$. Niech η_t ma rozkład KHW, a $\widehat{\mu}_{\alpha+\beta,1,x}$ niech będzie rozkładem GIG na hiperpłaszczyźnie $\mathcal{H}_x$. Dla każdej nieujemnej, borelowskiej funkcji F na $\mathbb{R}_+^2$ i każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^2)$ mamy*

$$\begin{aligned} &\int_A F(x,y) x^\alpha y^\beta \mathbb{P}\Big(A_t \in dx, e^{B_t} \in dy\Big) \\ &\qquad = \int_0^\infty \psi_{\alpha,\beta}(x) \Big[\int_{A\cap\mathcal{H}_x} F(y,z)\, d\widehat{\mu}_{\alpha+\beta,1,x}(y,z)\Big] \mathbb{P}(\eta_t \in dx), \end{aligned} \tag{36}$$

gdzie $\psi_{\alpha,\beta}(x) = x^{-\alpha} K_{\alpha+\beta}(x)/K_0(x)$ for $x > 0$.

3 Sploty i teoria wycieczek dla dyfuzji

W tej sekcji zostaną omówione wyniki dotyczące charakteryzacji rozkładów funkcjonałów dyfuzji. Wyniki pracy [hab5] dotyczą sytuacji, gdy badany proces jest dyfuzją Itô, czyli gdy proces X jest semimartyngałem zadanym przez stochastyczne równanie różniczkowe (SDE). W pracy [hab6] badamy rozkłady funkcjonałów całkowych w ogólniejszym przypadku dla tzw. regularnych dyfuzji, nazywanych w literaturze również dyfuzjami Itô-McKean ([40], [69], [10]).

Zasadnicze wyniki obu prac [hab5], [hab6] otrzymane zostały z połączenia trzech technik: analizy stochastycznej dla czasu lokalnego, algebraicznego opisywania splotów i wykorzystania teorii wycieczek procesów Markowa. O ile zarys wykorzystania splotów i teorii wycieczek pojawił się już wcześniej w kontekście pracy [hab3], to analiza stochastyczna czasu lokalnego jest tutaj nowym elementem.

W pierwszej kolejności przedstawimy wyniki pracy [hab5]. Rozważamy dyfuzje Itô X o wartościach w $E = [0, \infty)$, które spełniają następujące stochastyczne równanie różniczkowe SDE

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t + \mu(X_t)dt, \tag{37}$$

gdzie B jest ruchem Browna względem $\mathbb{P}_x$ oraz $\mathbb{P}_x(X_0 = x) = 1$. Funkcje σ i μ są mierzalne i lokalnie ograniczone oraz spełniają określone założenia sprecyzowane dalej, tak by (37) miało rozwiązanie jednoznaczne w sensie rozkładu ([17], [24], [38], [43]).

Dalej zakładamy, że z prawdopodobieństwem 1, trajektorie procesu X po dojściu do $0 \in E$ natychmiat odbijają się, tzn. zbiór czasu przebywania trajektorii w stanie $\{0\}$ ma miarę Lebesguea równą zero. Znanych jest wiele przykładów procesów o takich własnościach: ruch Browna (z dryfem) odbity od 0, kwadratowy proces Bessela z indeksem $\mu \in (-1, 0)$ ([69, Ch. XI]), radialny proces Ornsteina-Uhlenbecka ([10, App. I, 26]), dyfuzje Pearsona ([22]) i inne ([10], [40], [72]).

Oznaczmy przez $\mathcal{M}_X$ klasę funkcji $f \in \mathcal{C}^2(E)$ spełniających warunek

$$\mathbb{E}_x f(X_t) = f(x) + \mathbb{E}_x \int_0^t \mathcal{G}f(X_s)ds, \qquad t \geq 0,\ x \in E, \tag{38}$$

oraz takich, że funkcja $u : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}$ zdefiniowana wzorem

$$u(t, x) = \mathbb{E}_x f(X_t) \tag{39}$$

jest klasy $\mathcal{C}^{1,2}((0, \infty) \times E)$. Założenie to pozwoli nam wykorzystać analizę stochastyczną i twierdzenie Feynmana-Kaca do opisu funkcjonałów całkowych czasu lokalnego X.

Badania [hab5] zainspirowane zostały wynikami Peskira [62], który wykorzystał elementy analizy stochastycznej dla czasu lokalnego do wyprowadzenia probabilistycznej reprezentacji rozwiązania równania Stroocka-Williamsa. Idąc podobnym tropem, w [hab5] rozwijamy swoisty rachunek dla czasu lokalnego, który finalnie doprowadza nas do zupełnie nowych formuł splotowych opisujących rozkłady funkcjonałów całkowych czasu lokalnego.

Twierdzenie 3.1. *(Thm.3.3 [hab5]) Niech h będzie funkcją borelowską, ograniczoną na $[0,\infty)$, $h(0)=1$ oraz niech $f\in\mathcal{M}_X$ będzie ograniczona. Załóżmy, że $\widetilde{X}$ jest procesem niezależnym od X oraz takim, że $\widetilde{X}$ ma względem $\mathbb{P}_x$ taki sam rozkład jak X startujący z 0. Wtedy, dla dowolnego $t>0$, zachodzi*

$$\mathbb{E}_x\int_0^t h(L_s)\Big[\mathcal{G}f(X_s)-\mathcal{G}f(\widetilde{X}_{t-s})\Big]ds=\mathbb{E}_x\int_0^t\Big[\mathcal{G}f(X_s)-\mathcal{G}f(\widetilde{X}_s)\Big]ds, \tag{40}$$

gdzie $\mathcal{G}$ oznacza generator X.

Dalej wykorzystujemy teorię wycieczek procesów Markowa [9], [69], [50], [73], [71]. W tym celu wprowadzamy przestrzeń funkcji ciągłych $u:[0,\infty)\to E$ i definuiujemy

$$R(u)=\inf\{t>0:u(t)=0\}.$$

Zakładamy, że $0<R(u)\le\infty$, $u(0)=0, u(v)>0$ dla $v\in(0,R(u))$ oraz $u(t)=0$ dla wszystkich $t\ge R(u)$. Niech $\delta:[0,\infty)\to E$ oznacza funkcję tożsamościowo równą 0. Oznaczamy U^δ przestrzeń $U\cup\{\delta\}$ i rozszerzamy σ-ciało zbiorów cylindrycznych $\mathcal{U}$ do $\mathcal{U}^\delta=\sigma(\mathcal{U},\{\delta\})$.

Fundamentalną ideą teorii wycieczek jest wprowadzenie punktowego procesu wycieczek $(e_s)_{s>0}$ o wartościach w U^δ. Proces $(e_s)_{s>0}$ powstaje z podziału trajektorii X na fragmenty między kolejnymi wizytami procesu w stanie 0, a następnie przez odpowiednie zanurzenie tych fragmentów w przestrzeni funkcyjnej U^δ. Przestrzeń wycieczek zanurzamy w przestrzeń kanoniczną. Przez $n(\cdot)$ oznaczamy tzw. miarę charakterystyczną, która jest miarą intensywności procesu punktowego ([9, Chapter III]). Zwykle, gdy mówimy o procesie wycieczek w kontekście przestrzeni kanonicznej, miarę n oznaczamy przez $\widehat{\mathbb{P}}$.

W pracy [hab5] wykorzystujemy teorię wycieczek do opisu rozkładów funkcjonałów całkowych czasu lokalnego. Przedmiotem naszych rozważań są dyfuzje zadane stochastycznym równaniem różniczkowym. Jeśli dyfuzja jest rekurencyjna, proces wycieczek $(e_s)_{s>0}$ jest punktowym procesem Poissona ([69, Chapter XII, Section 1]). Podstawowym narzędziem używanym w teorii wycieczek jest tzw. formuła master. Esencją formuły master jest rozdzielenie źródła losowości rozpatrywanych obiektów na część opisaną przez punktowy proces Poissona wycieczek oraz część związaną z czasem lokalnym ([69], [9], [50], [73], [71]). Sformułujemy poniżej formułę master dla wycieczek procesu X od 0, czyli odpowiadającą założeniom pracy [hab5].

Twierdzenie 3.2. *(Master Formula, Prop. 1.10, 2.6; Ch. XII [69]) Załóżmy, że H jest nieujemnym, prognozowalnym procesem określonyym na $\mathbb{R}_+ \times \Omega \times U^\delta$ oraz znikającym we wszystkich punktach dla których $e_s = \delta \equiv 0$. Niech $\tau_s = \inf\{t > 0 : L_t > s\}$ oznacza odwrotność czasu lokalnego, a zbiór losowy G (tzw. zbiór lewych końców przedziałów wycieczek) jest zdefiniowany przez*

$$G = \{\tau_{s-} : \tau_{s-} \neq \tau_s\}.$$

Mamy wówczas

$$\mathbb{E} \sum_{\tau_{s-} \in G} H(\tau_{s-}(\omega), \omega, e_s(\omega)) = \mathbb{E} \int_0^\infty \int_U H(t, \omega, u) n(du) dL_t. \tag{41}$$

W pracy [hab5] zastosujemy formułę master dla specjalnej klasy funkcjonałów całkowych. Zamiast dzielić trajektorię procesu, podzielimy losowo trajektorię takiego funkcjonału. W tym celu rozważamy lokalnie całkowalną funkcję $a : [0, \infty) \to [0, \infty)$, a następnie na przestrzeni wycieczek U^δ definiujemy funkcjonał

$$F_a(u) = \int_0^{R(u)} a(u(v)) dv. \tag{42}$$

Funkcjonał odpowiadjący (42), ale rozważany w przestrzeni kanonicznej, przyjmuje postać

$$\widehat{F}_a(x) = \mathbb{E}_x \int_0^\sigma a(X_r) dr, \qquad x \in E, \tag{43}$$

gdzie σ jest momentem pierwszego dojścia dyfuzji X do stanu 0, czyli stanu początku i końca wycieczki. Formuła master połączy ze sobą oba funkcjonały. Nasze podejście wymaga pewnych technicznych założeń dotyczących funkcji a i nazywamy je założeniami (A). W pracy [hab5] omawiamy w jaki sposób zweryfikować czy założenia (A) są spełnione. Powiemy dalej, że $\mathbb{A}_X \neq \emptyset$, gdy istnieje funkcja a, która spełnia założenia typu (A). Przez $\widehat{X}$ oznaczamy proces w przestrzeni kanonicznej otrzymany z X przez przypisanie mu wartości ∞ po pierwszym dojściu trajektorii X do stanu 0 (taką konstrukcję nazywa się zabiciem procesu w 0). Mamy następujące formuły splotowe dla czasu lokalnego, których dowód opiera się na połączeniu teorii wycieczek i teorii algebry splotowej.

Twierdzenie 3.3. *(Thm.4.4 [hab5]) Załóżmy, że $\mathbb{A}_X \neq \emptyset$. Jeśli h jest borelowska i ograniczona, $h(0) = 1$, φ należy do algebry splotowej funkcji lokalnie całkowalnych $\mathcal{A}$,* *to*

$$\Big(1 * \mathbb{E}_0 \int_0^{\cdot} \varphi(\cdot - u) h(L_u) dL_u\Big)(t) = \big(\varphi * p(0,0) * \mathbb{E}_0 h(L.)\big)(t), \quad t > 0. \tag{44}$$

Jeśli H jest dodatnia i borelowska na $(0,\infty)$, to dla dowolnych $t, x \geq 0$ i $f \in \mathcal{M}_X$:

$$\mathbb{E}_0 H(L_t) f(X_t) = f(0)\mathbb{E}_0 H(L_t) + \int_0^t \big(\mathbb{E}_0 H(L_u)\big)\big(\mathbb{E}_0 \mathcal{G} f(X_{t-u})\big) du. \tag{45}$$

Co więcej,

$$\mathbb{E}_x H(L_t) f(X_t) = H(0)\mathbb{E}_x f(\widehat{X}_t) + \mathbb{E}_x\big(1_{\{t \geq \sigma_0\}} Q_{H,f}(t - \sigma_0)\big), \tag{46}$$

gdzie $Q_{H,f}(t) = \mathbb{E}_0 H(L_t) f(X_t)$.

Uzyskana w ostatnim twierdzeniu formuła splotowa ma liczne zastosowania. W szczególności pozwala uzyskać wzór na transformatę Laplace'a czasu lokalnego X

$$\mathbb{E}_x e^{-\lambda L_t} = 1 - \mathbb{E}_x\Big[1_{\{\sigma \leq t\}}\Big(1 * \big(-\lambda p.(0,0)\big)^{\dagger}\Big)(t - \sigma)\Big] \tag{47}$$

oraz formułę opisującą momenty

$$\mathbb{E}_0 L_t^m = m! \int_0^t (p_u(0,0))^{*m} du. \tag{48}$$

Wzór na momenty czasu lokalnego dyfuzji został uzyskany za pomocą funkcji Greena w [21]. Jak się okazuje, w pracy [hab6] rozszerzymy opis rozkładów czasu lokalnego na przypadek ogólnych dyfuzji, niekoniecznie zadanych równaniem SDE. Molchanov, Ostrovski [58] uzyskali jawną postać transformaty Laplace czasu lokalnego procesu Bessela. W pracy [hab5] uzyskujemy znacznie więcej. Jeśli oznaczymy

$$g_t(z)dz = \mathbb{P}_0(L_t \in dz),$$

formuła splotowa pozwala wyprowadzić nastepujący wzór

$$g_t(z) = \frac{2}{\pi\kappa(\mu)\Gamma(-\mu)t^{-\mu}} \int_0^\infty E_{-2\mu}(-w^2) \cos\Big(\frac{zw}{\kappa(\mu)\Gamma(-\mu)t^{-\mu}}\Big) dw,$$

gdzie E_a oznacza funkcję Mittag-Lefflera z parametrem a.

Jednak najbardziej spektakularnym zastosowaniem splotowych formuł czasu lokalnego w pracy [hab5] jest uogólnienie równania Stroocka-Williamsa. Problem ten jest zgadnieniem Cauchy'ego postaci

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{G}u, \quad t > 0,\ x \geq 0, \tag{49}$$

$$u(0,x) = f(x),\ x \geq 0; \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \alpha \frac{\partial u}{\partial t}(t,0), \quad t > 0. \tag{50}$$

W oryginalnej wersji problem dotyczył ruchu Browna z dryfem, czyli gdy operator drugiego rzędu jest postaci $\mathcal{G} = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \mu\frac{d}{dx}$, a $\mu \in \mathbb{R}$ jest stałą. Problem okazał się trudny i rozważany był w wielu pracach: Stroocka i Williamsa [75], [76], Williamsa i Andrewsa [80], Panga i Stroocka [61] i wielu innych. Zasadnicza trudność zagadnienia brała się stąd, że tradycyjna reprezentacja Feynmana-Kaca nie działa dla wszystkich wartości rozważanych parametrów. Innymi słowy, rozwiązanie problemu nie zawsze ma reprezentację w postaci wartości oczekiwanej funkcjonału zależącego bezpośrednio od wartości procesu. Dopiero piękny wynik Peskira [62] dał wyczerpującą odpowiedź na postawione pytanie. Pomysł Peskira opierał sie na wyprowadzeniu probabilistycznej reprezentacji rozwiązania wykorzystującej w swej konstrukcji nie tylko proces, ale również jego czas lokalny. Ponieważ w pracy [hab5] rozwinęliśmy analizę stochastyczną dla czasu lokalnego, wynik Peskira zainspirował nas do poszukiwania reprezentacji rozwiązania (49) wykorzystującej czas lokalny w przypadku innych postaci operatora $\mathcal{G}$. To co udało nam się uzyskać, to probabilistyczna reprezentacja rozwiązania problemu, gdy $\mathcal{G}$ jest generatorem dyfuzji Itô. Warto podkreślić, że lokalne własności ruchu Browna wykorzystane przez Peskira [62] nie przeniosły się bezpośrednio na przypadek ogólny i dopiero wykorzystanie formuł splotowych dla czasu lokalnego przyniosło zamierzony efekt. Rozważaliśmy dwa przypadki.

W pierwszym trajektoria dyfuzji X po dojściu do 0, natychmiast się od niego odbijała. W takiej sytuacji wypracowaliśmy nastepującą reprezentację rozwiązania zagadnienia.

Twierdzenie 3.4. *(Thm.5.1 [hab5]) Załóżmy, że $\alpha > 0$. Dla $f \in \mathcal{C}_b^2(E)$ niech $Q_{\alpha,f}(t) := \mathbb{E}_0 e^{-\alpha L_t} f(X_t)$ oraz załóżmy, że $Q_{\alpha,f} \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$ oraz $\mathbb{A}_X \neq \emptyset$. Rozwiązanie (49)-(50) jest jedyne i ma reprezentację probabilistyczną*

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x e^{-\alpha L_t} f(X_t) - \alpha\ \mathbb{E}_x \int_0^t e^{-\alpha L_r}\big(\Phi - 1 * \Phi - f(0)\big)(t-r)dL_r, \tag{51}$$

gdzie $t, x \geq 0$ oraz $\widehat{p}(t) = n(R > t)$, a Φ jest dane wzorem

$$\Phi := \frac{1}{\alpha}\Big(\widehat{p} * Q'_{\alpha,f}\Big) + Q_{\alpha,f} - \Big(\frac{1}{\alpha}\big(\widehat{p} * Q'_{\alpha,f}\big) + Q_{\alpha,f}\Big) * \Big(-\frac{\widehat{p}}{\alpha}\Big)^{\ddagger}. \tag{52}$$

W drugim przypadku opuściliśmy założenie o natychmiastowym odbiciu trajektorii od 0. Wtedy proces zadany jest równaniem

$$d\widetilde{X}_t = 1_{\{\widetilde{X}_t > 0\}}\sigma(\widetilde{X}_t)dB_t + 1_{\{\widetilde{X}_t > 0\}}\mu(\widetilde{X}_t)dt, \quad 1_{\{\widetilde{X}_t = 0\}}dt = \frac{1}{2\rho}d\widetilde{L}_t, \tag{53}$$

gdzie $\widetilde{L}_t$ oznacza czas lokalny procesu $\widetilde{X}$ w punkcie 0, a ρ jest dodatnią stałą ([18], [63]). Okazało się, że można skonstruować probabilistyczną reprezentację rozwiązania problemu (49) wykorzystującą proces $\widetilde{X}$ i jego czas lokalny. Dla $f \in \mathcal{C}_b^2$, $\alpha > 0$ definiujemy $\widetilde{Q}_{\alpha,f}(t) := \mathbb{E}_0 e^{-\alpha\widetilde{L}_t} f(\widetilde{X}_t)$.

Twierdzenie 3.5. *(Thm.5.2 [hab5]) Przy założeniu, że rozwiązanie (53) jest jedyne względem rozkładu, a funkcja $\widetilde{Q}_{\alpha,f} \in \mathcal{C}^1[0,\infty)$, jednoznaczne rozwiązanie problemu (49) jest postaci:*
1. Dla $2\alpha\rho \neq 1$

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x e^{-\alpha \widetilde{L}_t} f(\widetilde{X}_t) + \alpha\ \mathbb{E}_x \int_0^t \big(\kappa\ \widetilde{\Phi} - 1 * \widetilde{\Phi} - f(0)\big)(t-r) e^{-\alpha \widetilde{L}_r} d\widetilde{L}_r, \quad t, x \geq 0, \tag{54}$$

gdzie $\kappa = 1 - \frac{1}{2\alpha\rho}$, a funkcja Φ jest zadana wzorem

$$\widetilde{\Phi} = \frac{1}{\kappa\alpha}\Big(\widehat{q} * \widetilde{Q}'_{\alpha,f}\Big) + \frac{1}{\kappa}\widetilde{Q}_{\alpha,f} - \Big(\frac{1}{\kappa\alpha}\Big(\widehat{q} * \widetilde{Q}'_{\alpha,f}\Big) + \frac{1}{\kappa}\widetilde{Q}_{\alpha,f}\Big) * \Big(-\frac{\widehat{q}}{\kappa\alpha}\Big)^{\ddagger}. \tag{55}$$

2. Dla $2\alpha\rho = 1$ oraz $\gamma' \in \mathcal{A}$ rozwiązanie jest postaci

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x e^{-\alpha \widetilde{L}_t} f(\widetilde{X}_t) + \alpha\ \mathbb{E}_x \int_0^t \big(\widetilde{Q}_{\alpha,f} - \widetilde{Q}_{\alpha,f} * (-\gamma')^{\ddagger}\big)(t-r) e^{-\alpha \widetilde{L}_r} d\widetilde{L}_r, \quad t, x \geq 0. \tag{56}$$

Czas lokalny pełni kluczowa rolę w opisie rozkładów funkcjonałów procesów Markowa, które niekoniecznie muszą być zadane stochastycznym równaniem różniczkowym. W pracy [hab6] podjęliśmy się zadania kompleksowego opisu rozkładów czasu lokalnego dyfuzji Itô-McKean. Jest to najbardziej ogólna klasa dyfuzji, to znaczy procesów Markowa o ciągłych trajektoriach (w szczególności dyfuzje Itô jest szczególnym przypadkiem dyfuzji Itô-McKean). Przypomnijmy, że podstawowe własności tych procesów zostały omówione w punkcie I niniejszego opisu. W pracy [hab6] wykorzystaliśmy ogólną teorię wycieczek [50], [28], [29], [30], [71], [78] oraz [81].

Zaczniemy od opisu rozkładów jednowymiarowych. Niech X oznacza dyfuzję Itô-McKean o przestrzeni stanów $[0,\infty)$, dla której 0 jest punktem natychmiastowego odbicia. Przez L oznaczamy proces czasu lokalnego X w 0. Oznaczamy $Q(t,z) = \mathbb{P}_0(L_t \leq z)$ oraz

$$p(t) = p_t(0,0), \quad \widehat{p}(t) = n(R > t), \quad \tau_t = \inf\{s > 0 : L_s > t\},$$

gdzie $p_t(\cdot,\cdot)$ jest funkcją gęstości przejścia X, a $n(\cdot)$ jest miarą charakterystyczną procesu wycieczek. Udowodniliśmy, że Q jest rozwiązaniem równania

$$p * \frac{\partial Q}{\partial z} + Q - 1 = 0. \tag{57}$$

Twierdzenie 3.6. *(Thm. 2.1 [hab6]) Funkcja Q jest jednoznacznym rozwiązaniem równania (57) w klasie mierzalnych i ograniczonych funkcji F spełniających warunki:*

i) dla każdego $z \geq 0$, funkcja $t \mapsto F(t,z)$ jest ciągła,
ii) dla $t \geq 0$, funkcja $z \mapsto F(t,z)$ jest różniczkowalna w sposób ciągły na $(0,\infty)$ oraz $F(t,0) = 0$,
iii) istnieje funkcja ψ taka, że $|\partial F(t,z)/\partial z| \leq \psi(t)$ dla każdego $z \geq 0$ oraz $\int_0^\infty e^{-\lambda t}\psi(t)dt < \infty$ dla wszystkich $\lambda > 0$.

Przy niewielkich, dodatkowych założeniach, funkcję Q można rozwinąć w szereg. Ściślej mówiąc, oznaczamy $\rho_t(dz) = \mathbb{P}(L_t \in dz)$ i powiemy, że $\widehat{p}$ związana z X spełnia założenia C, jeśli

1. $\widehat{p} \in \mathcal{C}^1(0,\infty)$ oraz $\widehat{p}^{*(n+1)} \in \mathcal{C}^n(0,\infty)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

2. Dla każdego $z \geq 0$, funkcja

$$t \mapsto \sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}\widehat{p}^{*n}(t)}{\partial^{n-1}t} \tag{58}$$

   jest lokalnie całkowalna.

3. Dla każdego $\lambda > 0$, $\int_0^\infty e^{-\lambda t}|\widehat{p}(t)|dt < \infty$.

Wtedy:

Twierdzenie 3.7. *(Thm. 2.3 [hab6]) Przy założeniach C, mamy dla $z \geq 0$ oraz $t > 0$*

$$\rho_t(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-z)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}\widehat{p}^{*n}(t)}{\partial^{n-1}t}. \tag{59}$$

Okazuje się, że rozkład czasu lokalnego można opisać wprowadzając pojęcie eksponenty splotowej. Dla funkcji lokalnie całkowalnej f definiujemy

$$\mathcal{E}^*(f) = \delta_0 + \sum_{i\geq 1} \frac{f^{*i}}{i!}. \tag{60}$$

Dodatkowo $J_0(z) = (\pi)^{-1}\int_0^\pi \cos(z \sin v)dv$ oraz wprowadzamy φ

$$\varphi(t,s) = 1 * \mathcal{E}^*(-tp)(s), \quad t \geq 0, s \geq 0. \tag{61}$$

Funkcja φ pełni specjalną rolę dzięki tożsamości

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s}\varphi(t,s)dsdt = \frac{1}{\lambda G_\lambda(0,0)}, \quad \lambda > 0. \tag{62}$$

W ogólności, mamy

Twierdzenie 3.8. *(Thm. 2.4 [hab6]) Niech $\lambda > 0$. Wówczas*

$$\int_0^\infty e^{-\lambda s}\rho_s(w)ds = \Big[\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s}\varphi(t,s)J_0(2\sqrt{wt})dsdt\Big], \tag{63}$$

gdzie J_0 jest funkcją Bessela z indeksem 0, a φ jest zadane (61). Co więcej, jeśli

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s}|\varphi(t,s)|dsdt < \infty, \quad \lambda > 0, \tag{64}$$

to dla $w \in [0,\infty)$

$$\rho_s(w) = \Big(\int_0^\infty J_0\big(2\sqrt{wt}\big)\varphi(t,s)dt\Big). \tag{65}$$

W kolejnych twierdzeniach podajemy opis rozkładu łącznego (X_t, L_t). W szczególności, udowodniliśmy fakt uogólniający opis momentów addytywnych funkcjonałów w terminach funkcji Greena, podany przez Fitzimmonsa i Pitmana.

Twierdzenie 3.9. *Niech $n \in \mathbb{N}$, a f niech będzie funkcją mierzalną i ograniczoną na E. Wtedy dla dowolnego $t > 0$,*

$$\mathbb{E}_0 L_t^n f(X_t) = n! \int_E f(z)\Big(\int_0^t p_{t-u}(0,z)(p_\cdot(0,0))^{*n}(u)du\Big)m(dz). \tag{66}$$

Wykorzystując teorię wycieczek wyprowadziliśmy postać rozkładu łącznego (X_t, L_t), w szczególności postać funkcji gęstości przejścia ostatniego wektora, jako procesu Markowa na E^2. Oznaczamy $\mathbb{P}_{\tau_u}(dz) = \mathbb{P}_0(\tau_u \in dz)$.

Twierdzenie 3.10. *Niech $t > 0$, $x \in E$. Wtedy*

$$\int_0^t \mathbb{P}_{x,0}\big(X_s \in dz, L_s \in dv\big)ds = \big(g_{x,0}(\cdot) * p_\cdot(0,z) * \rho_\cdot(v)\big)(t)\ m(dz)dv. \tag{67}$$

Funkcja gęstości przejścia procesu Markowa (X, L), to znaczy,

$$p^{X_{t-s},L_{t-s}}((x,l);(z,v))m(dz)dv := \mathbb{P}_{x_0,0}\Big(X_t \in dz, L_t \in dv | X_s = x, L_s = l\Big), \quad x_0 \in E,$$

ma postać

$$p^{X_{t-s},L_{t-s}}((x,l);(z,v)) = \Big(g_{z,0}(\cdot) * g_{x,0}(\cdot) * \mathbb{P}_{\tau_{v-l}}(\cdot)\Big)(t-s), \quad t \geq s,\ v \geq l. \tag{68}$$

Wykorzystując ogólną teorię wycieczek opisujemy rozkład wycieczek dwuwymiarowego procesu Markowa $X^{(1)}, X^{(2)}$, gdzie współrzędne są niezależnymi dyfuzjami Itô-McKean, od hiperpłaszczyzny

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in [0,\infty) \times [0,\infty) : y = 0\}. \tag{69}$$

Burdzy [12] opisał rozkłady wycieczek n-wymiarowego procesu Wienera od hiperpłaszczyzny $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. My opisaliśmy rozkłady dla $d = 2$, ale w sytuacji, gdy współrzędne są dowolnymi dyfuzjami Itô-McKean odbijajacymi się od 0.

Zgodnie z opisem w monografii [9], ponieważ $\mathcal{H}$ jest zbiorem domkniętym, istnieją $(\mathcal{P}^{(x_1,x_2)}, A)$, gdzie $\mathcal{P}^{(x_1,x_2)}$, $(x_1, x_2) \in [0,\infty) \times [0,\infty)$, jest rodziną σ-skończonych miar na przestrzeni funkcyjnej U, której elementy oznaczamy jako $u = (u_1, u_2)$, a A jest addytywnym funkcjonałem, takie, że dla wszystkich nieujemnych, prognozowalnych procesów Z oraz funkcji f znikających na funkcjach tożsamościowo równych 0, zachodzi ogólna wersja formuły master

$$\mathbb{E}_{0,0} \sum_{s \in G \cap [0,t]} Z_s(f \circ \theta_s) = \mathbb{E}_{0,0} \int_0^t Z_u \mathcal{P}^{(X_u^{(1)}, X_u^{(2)})}(f) dA_u, \tag{70}$$

gdzie G oznacza zbiór lewych końców przedziałów wycieczek ([9], Ch.VII or [12]), a funkcja $(x_1, x_2) \mapsto \mathcal{P}^{(x_1,x_2)}(f) = \int_U f(u)\mathcal{P}^{(x_1,x_2)}(du)$ jest mierzalna. W naszym przypadku, proces A jest czasem lokalnym $L^{(2)}$ drugiej współrzędnej $X^{(2)}$ w 0, a $G = \{\tau_{s-}^{(2)} : \tau_{s-}^{(2)} \neq \tau_s^{(2)}\}$, dla $\tau_s^{(2)}$ będącego odwrotnością $L^{(2)}$. Przez $p^{(1)}$ oraz $p^{(2)}$ oznaczamy gęstości przejścia względem miary prędkości odpowiednio dla obu współrzędnych $X^{(1)}, X^{(2)}$.

Dla $r > 0$ oznaczamy przez $\widehat{e}_{(x_1,x_2)}(r)(\cdot,\cdot)$ rozkład

$$\widehat{e}_{(x_1,x_2)}(r)(dz_1, dz_2) = \mathcal{P}^{(x_1,x_2)}(\widehat{X}_r^{(1)} \in dz_1, \widehat{X}_r^{(2)} \in dz_2). \tag{71}$$

Twierdzenie 3.11. *Rozkład wycieczek od hiperpłaszczyzny $\mathcal{H}$ spełnia tożsamość*

$$\begin{aligned}\int_E \Big(\widehat{e}_{(x_1,0)}(\cdot)(dz_1, dz_2) * \phi(\cdot, x_1)\Big)(t)\ m^{(1)}(dx_1) \\ = \Big(\int_0^t p_r^{(1)}(0, z_1) p_r^{(2)}(0, z_2) dr\Big) m^{(1)}(dz_1) m^{(2)}(dz_2)\end{aligned} \tag{72}$$

dla prawie wszystkich $t > 0$ a.e., gdzie

$$\phi(t, x_1) = p_t^{(1)}(0, x_1)\Big(\int_0^t p_v^{(2)}(0,0) dv\Big). \tag{73}$$

Probabilistyczna wersja ostatniej tożsamości jest następująca

Wniosek 3.12. *Przy założeniach twierdzenia 3.11, formuła (72) jest równoważna*

$$\int_0^t \mathbb{E}_{0,0}\Big(\widehat{e}_{(X_{t-r}^{(1)},0)}(r)(dz_1, dz_2)\ L_{t-r}^{(2)}\Big) dr = \int_0^t \mathbb{P}_{0,0}(X_r^{(1)} \in dz_1, X_r^{(2)} \in dz_2) dr.$$

W pracy [hab 6] prezentujemy szereg innych konsekwencji związanych z opisem rozkładu łącznego (X_t, L_t) i ilustrujemy je przykładami.

Literatura

[1] Alili L., Gruet J.C., *An explanation of a generalized Bougerol's identity in terms of hyperbolic Brownian motion.* (1997), in [83].

[2] Alili L., Patie P., Pedersen J. L., *Representations of the first hitting time density of an Ornstein-Uhlenbeck process.* Stochastic Models, 21(4) (2005), 967-980.

[3] Bachelier L., *Théorie de la spéculation.* Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3 (17) (1900), 21–86.

[4] Barrieu P., Rouault A., Yor M., *A study of the Hartman-Watson distribution motivated by numerical problems related to the pricing of Asian options.* J. Appl. Probab. 41 (2004), 1049-1058.

[5] Berestycki N., *An elementary approach to Gaussian multiplicative chaos.* Electron. Commun. Probab. 22 (2017), 1 - 12.

[6] Bernhart G., Mai J., *A Note on the Numerical Evaluation of the Hartman-Watson Density and Distribution Function.* Innovations in Quantitative Risk Management (2015), 337-345.

[7] Bitsadze A., *Integral Equations of First Kind.* World Scientific, Singapore, 1995.

[8] Black F., Scholes M., *The pricing of options and corporate liabilities.* J. Political Economy 81, (1973), 637-659.

[9] Blumenthal R. M., *Excursions of Markov Processes.* Birkhauser, Basel, Berlin, Boston, 1992.

[10] Borodin A., Salminen P., *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae.* Birkhäuser (2nd ed.), 2002.

[11] Bondesson L., *Classes of infinitely divisible distributions and densities.* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 57 (1981), 39-71.

[12] Burdzy K., *Brownian Excursions from Hyperplanes and Smooth Surfaces.* Trans. AMS, 295(1) (1986), 35-57.

[13] Costarelli D., Spigler R., *A collocation method for solving nonlinear Volterra integro-differential equations of neutral type by sigmoidal functions.* J. Integral Equations Applications, 26 (2014), 15-52.

[14] Diekmann O., van Gils S., *Invariant manifolds for Volterra integral equations of convolution type*. J. Differential Equations 54 (1984), 139-180.

[15] Donati-Martin C., Ghomrasni R., Yor M., *On certain Markov processes attached to exponential functionals of Brownian motion: application to Asian options*. Revista Matemática Iberoamericana 17.1 (2001), 179-193.

[16] Duchon J., Robert R., Vargas V., *Forecasting volatility with the multifractal random walk model*. Math. Finance 22(1) (2012), 83–108.

[17] Cherny A.S., Engelbert H.J., *Singular Stochastic Differential Equations*. LNM 1858, Springer, 2005.

[18] Engelbert H.J., Peskir G., *Stochastic Differential Equations for Sticky Brownian Motion*. Stochastics 86 (2014), 993-1021.

[19] Eqworld - The World of Mathematical equations, http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm

[20] Fakhar-Izadi F., Dehghan M., *The spectral methods for parabolic Volterra integro-differential equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 235 (2011), 4032-4046.

[21] Fitzsimmons P.J., Pitman J., *Kac's moment formula and the Feynman-Kac formula for additive functionals of a Markov process*. Stoch. Process. Appl. 79 (1999), 117-134.

[22] Forman J., Sørensen M., *The Pearson diffusions: A class of statistically tractable diffusion processes*. Scandinavian Journal of Statistics 35 (2008), 438-465.

[23] Fouque Jean-Pierre, George Papanicolaou, and K Ronnie Sircar, *Derivatives in financial markets with stochastic volatility*. Cambridge University Press, (2000).

[24] Friedman A., *Stochastic Differential Equations and Applications*. Vol. 1, Academic Press, New York, 1975.

[25] Friedman A., Shinbrot M., *Volterra integral equations in Banach spaces*. Trans. Amer. Math. Soc. 126 (1967), 131-179.

[26] Geman H., Yor M., *Bessel processes, Asian options, and perpetuities*. Math. Finance 3 (1993), 349-375.

[27] Gerhold S., *The Hartman-Watson distribution revisited: asymptotics for pricing Asian options*. J. Appl. Probab. 48 (2011), 892-899.

[28] Getoor R. K., *Excursions of a Markov process.* Ann. Probab., 7 (1979), 244-266.

[29] Getoor R. K., Sharpe M. J., *Excursions of Brownian motion and Bessel processes.* Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 47 (1979), 83-106.

[30] Getoor R. K., Sharpe M. J., *Excursions of dual processes.* Adv. Math. 45 (1982), 259-309.

[31] Gripenberg G., Londen S.-O., Staffans O., *Volterra Integral and Functional Equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[32] Gulisashvili, A., *Analytically Tractable Stochastic Stock Price Models.* Springer Finance, 2012.

[33] Hamana Y., *The probability distributions of the first hitting times of radial Ornstein–Uhlenbeck processes.* Studia Math. 251 (2020), 65-88.

[34] Hamana Y., Matsumoto H., *The probability densities of the first hitting times of Bessel processes.* J. Math-for-Industry 4 (2012), 91-95.

[35] Hamana Y., Matsumoto H., *The probability distributions of the first hitting times of Bessel processes.* Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), 5237-5257.

[36] Hartman P., *Completely monotone families of solutions of nth order linear differential equations and infinitely divisible distributions.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 4(3), (1976), 267-287.

[37] Hartman, P., Watson, G., *Normal distribution functions on spheres and the modified Bessel functions.* Ann. Probab. 5 (1974), 582-585.

[38] Janson S., Tysk J., *Feynman–Kac formulas for Black–Scholes–type operators.* Bull. London Math. Soc. 38 (2006), 269-282.

[39] J. Hull, A. White, *The pricing of options on assets with stochastic volatilities.* J. Finance 42 (1987), 281-300.

[40] Itô K., McKean H. P., *Diffusion Processes and Their Sample Paths.* Springer, Berlin, 1995.

[41] Jakubowski J., Wiśniewolski M., *Another Look at the Hartman-Watson Distributions.* Potential Anal 53 (2020), 1269-1297.

[42] Jeanblanc M., Yor M., Chesney M. *Mathematical Methods for Financial Markets.* Springer-Verlag London 2009.

[43] Karatzas I., Shreve S., *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer-Verlag, 1991.

[44] Kent J., *Eigenvalue expansions for diffusion hitting times*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 52 (1980), 309-319.

[45] Kent J., *The spectral decomposition of a diffusion hitting time*. Ann. Prob. 10 (1982), 207-219.

[46] Kupiainen A., Rhodes R., Vargas V., *Integrability of Liouville theory: proof of the DOZZ formula*. Annals of Mathematics, 191(1) (2020), 81–166.

[47] Lew J., *On linear Volterra integral equations of convolution type*. Proc. Amer. Maths. Soc. 35 (1972), 450-455.

[48] Lipton A., Kaushansky V., *On the First Hitting Time Density of an Ornstein-Uhlenbeck Process*. preprint 2018.

[49] Lyasoff A., *Another look at the integral of exponential Brownian motion and the pricing of Asian options*. Finance and Stochastics 20, (2016), 1061-1096.

[50] Maisonneuve B., *Exit systems*. Ann. Probab. 3 (1975), 399-411.

[51] Mansuy R., Yor M., *Aspects of Brownian Motion*. Universitext, Springer, 2008.

[52] Matsumoto H., Yor M., *An analogue of Pitman's 2M - X theorem for exponential Wiener functionals, part I: A time inversion approach*. Nagoya Math. J. 159 (2000), 125-166.

[53] Matsumoto H., Yor M., *An analogue of Pitman's 2M - X theorem for exponential Wiener functionals, part II: The role of the generalized inverse Gaussian laws*. Nagoya Math. J. 162 (2001), 65-86.

[54] Matsumoto H., Yor M., *Exponential functionals of Brownian motion, I, Probability laws at fixed time*. Probab. Surveys 2 (2005), 312-347.

[55] Matsumoto H., Yor M., *Exponential functionals of Brownian motion, II, Probability laws at fixed time*. Probab. Surveys 2 (2005), 348-384.

[56] McLean W., Thomée V., Wahlbin L.B., *Discretization with variable time steps of an evolution equation with a positive-type memory term*. J. Comput. Appl. Math. 69 (1996), 49-69.

[57] Mijatovic A., Pistorius M., *Continuously monitored Barrier options under Markov processes*. Math. Fin. Vol. 23, No. 1, (2013), 1-38.

[58] Molchanov S. A., Ostrovski E., *Symmetric stable processes as traces of degenerate diffusion processes*. Teor. Verojatnost. i Primenen. 14 (1969), 127-130.

[59] Musiela M., Rutkowski M., *Martingale methods in financial modelling*. Vol. 36. Springer Science and Business Media, (2006).

[60] Mustapha K., McLean W., *Discontinuous Galerkin method for an evolution equation with a memory term of positive type*. Math. Comput. 268 (2009), 1975-1995.

[61] Pang, H., Stroock, D. W., *A peculiar two point boundary value problem*. Ann. Probab. 35 (2007), 1623-1641.

[62] Peskir G., *A Probabilistic Solution to the Stroock-Williams Equation.* Ann. Probab. 42 (2014), 2197–2206.

[63] Peskir G., *On boundary behaviour of one-dimensional diffusions: From Brown to Feller and beyond*. Research Report No. 8 (2014), Probab. Statist. Group Manchester, William Feller, Selected Papers II, Springer, (2015), 77-93.

[64] Pitman J., Yor M., *Bessel processes and infinitely divisible laws,* In: Stochastic Integrals, Volume 851 of Lecture Notes in Mathematics. 285-370. Springer, Berlin, 1980.

[65] Pitman J., Yor M., *Decomposition at the maximum for excursions and bridges of one-dimensional diffusions*, In: Itô's Stochastic Calculus and Probability Theory. Springer, Tokyo, 1996, 293-310.

[66] Pitman J., Yor M., *A decomposition of Bessel bridges*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 59 (1982), 425-457.

[67] Pitman J., Yor M., *The law of the maximum of a Bessel bridge*. Electronic Journal of Probability 4 (15) (1999).

[68] Polyanin A. D., Manzhirov A. V., *Handbook of Integral Equations*. CRC Press, Boca Raton, 2008.

[69] Revuz D., Yor M., *Continous Martingales and Brownian Motion*. Springer-Verlag (3rd ed.), 2005.

[70] Rhodes R., Vargas V., *Gaussian multiplicative chaos and applications: A review.* Probab. Surveys, 11 (2014), 315-392.

[71] Rogers L. C. G., *A guided tour through excursions.* Bull. London Math. Soc. 21 (1989), 305-341.

[72] Rogers L. C. G., Williams D., *Diffusions, Markov Processes, and Martingales. Vol. 2: Itô Calculus.* John Wiley and Sons, Chichester, New York, 1987.

[73] Salminen P., Vallois P., Yor M., *On excursion theory of linear diffusions.* Japanese Journal of Mathematics 2 (2007), 97-127.

[74] Srivastava H. M., Buschman R.G., *Theory and Applications of Convolution Integral Equations.* Springer, Netherlands, 1992.

[75] Stroock D. W., Williams D., *A simple PDE and Wiener-Hopf Riccati equations.* Comm. Pure Appl. Math. 58 (2005), 1116-1148.

[76] Stroock D. W., Williams D., *Further study of a simple PDE.* Illinois J. Math. 50 (2006), 961-989.

[77] Volterra V., *Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations.* Dover Publications, New York, 1959.

[78] Walsh J. B., *Excursions and local time.* Astérisque 52-53 (1978), 159-192.

[79] Wazwaz A., *Linear and Nonlinear Integral Equations: Methods and Application.* Springer, Berlin Heidelberg 2011.

[80] Williams D., Andrews S., *Indefinite inner products: a simple illustrative example.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 141 (2006), 127-159.

[81] Williams D., *Path decompositions and continuity of local time for one-dimensional diffusions.* Proc. London Math. Soc. (3) 28 (1974), 738-768.

[82] Wystup U., *FX Options and Structured Products.* Wiley, 2007.

[83] Yor, M. (Ed.), *Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian Motion.* A collection of research papers, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, 1997 .