Autoreferat

1. **Imię i nazwisko:** John M. NOBLE

2. **Posiadane dyplomy**

   - MA Matematyka i Filozofia Naturalna, Uniwersytet w Edynburgu, lipiec 1988
   - M.Sc. Matematyka, Uniwersytet w Warwick, wrzesień 1989,
   - doktorat z zakresu zastosowań rachunku prawdopodobieństwa (stochastyczne równania różniczkowe cząstkowe) Uniwersytet Kalifornijski, Irvine, wrzesień 1992.
     Tytuł rozprawy doktorskiej: Równanie Ewolucji z Potencjałem Losowym (*Evolution Equation with Random Potential*)

3. **Zatrudnienie w instytutach badawczych i na uczelniach**

   - **Październik 2012 - obecnie** Adiunkt, Statystyka Matematyczna, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski.
   - **Październik 2000 - Grudzień 2013** Wykładowca (statystyka matematyczna), MAI, Uniwersytet w Linköping, Szwecja.
   - **Czerwiec 1998 - Wrzesień 2000** Europejski stopień podoktorski stypendium w Lizbonie w Portugalii, a następnie w KTH, Sztokholm, Szwecja
   - **Luty 1998 - Maj 1998** Stypendium wizytujące, Departament Statystyki, Uniwersytet Nowej Południowej Walii, Sydney, Australia
   - **Styczeń 1996 - Styczeń 1998** Stypendium podoktoranckie w Scuola Normale Superiore, Piza, Włochy
   - **Październik 1992 - Styczeń 1996** Tymczasowy wykładowca, Wydział Statystyki, University College, Cork, Irlandia.

4. **Publikacje (te objęte habilitacją; te podyplomowe i nie objęte habilitacją, zawarte w rozprawie doktorskiej)**

Opublikowane artykuły habilitacyjne

- 2022 John M. Noble 'Lp Solutions for Stochastic Evolution Equation with Nonlinear Potential' Studia Mathematica 264 (2) (2022), pp 181 - 240
- 2018 John M. Noble 'Effect of Stochastic Perturbations for Front Propagation in Kolmogorov Petrovskii Piscunov Equations' Stochastic Processes and their Applications 128 no 10 (2018), pp 3531-3557
- 2015 John M. Noble 'Time Homogeneous Diffusion with Drift and Killing to Meet a Given Marginal' Stochastic Processes and their Applications 125 (2015), pp. 1500-1540

- 2013 John M. Noble 'Time Homogeneous Diffusions with a Given Marginal at a Deterministic Time' Stochastic Processes and Applications vol. 123 (2013) no. 3 pp 675 - 718

Inne opublikowane prace

Książka

Bayesian Networks: An Introduction
Timo Koski, John Noble (341 stron)
Wiley, Wrzesień 2009

Artykuły (nie objęte habilitacją) po doktoracie

- 2012 Timo J.T. Koski, John M. Noble 'A Review of Bayesian Networks and Structure Learning' Mathematica Applicanda vol 40 no 1 pp 51 - 103
- 2005 Referowane materiały konferencyjne *Configuring Fault-Tolerant Servers for Best Performance*
  Diana Szentivanyi, Simin Nadjm-Tehrani, J.M. Noble
  Opublikowane w 'Configuring Fault-Tolerant Servers for Best Performance' materiały z konferencji 310-314 wydawca: IEEE Computer Society, Los Alamitos
- 2005 Referowane materiały konferencyjne *Optimal Choice of Checkpointing Interval for High Availability*
  Diana Szentivanyi, Simin Nadjm-Tehrani, J.M. Noble
  Opublikowane w 'Pacific Rim Dependable Computing Conference' pp 159 - 166 wydawca: IEEE Computer Society, Los Alamitos
- 2003 John M. Noble: *On the Stochastic Burgers Equation* w 'Probabilistic Problems in Atmospheric and Water Sciences' (Materiały konferencyjne edytowany przez Haman, Jakubiak, and Zabczyk, publisher: Wydawnictwa ICM, Warsaw 2003)
- 2001: *Competition Systems in a Random Environment: A Convergence Result* J.M.Noble, E. Thönnes, Stochastic Analysis and Applications, vol. 19 no. 6
- 2000: *Magnetic Field in a Turbulent Conducting Fluid* Stochastic Analysis and Applications vol. 18 no. 3 pp 429 - 452
- 1997 *The Directed Polymer in a Random Environment* Stochastic Analysis and Applications vol. 15 no. 4 pp 585 - 612
- 1996: *Anderson Model with Lévy Potential* Journal of Differential and Integral Equations vol. 9, no.2, pp 187 - 198

Artykuły, na których oparto pracę doktorską

- 1997: *Evolution Equation with Gaussian Potential* Journal of Nonlinear Analysis: Theory Methods and Applications vol. 28 no. 1 pp 103 - 135
- 1996:*Measure Valued Branching in Random Medium* Stochastic Analysis and Applications, vol. 14 no.4 pp 421 - 432
- 1995: *Almost Sure Behaviour for Evolution with Random Potential* Stochastic Analysis and Applications vol. 13 no.3 pp 323 - 334

Uogólnione dyfuzje i problemy odwrotne z zastosowaniami w finansach i stochastycznych równaniach różniczkowych cząstkowych

Poniżej podam szczegółowy opis naukowy czterech opublikowanych artykułów wchodzących w skład habilitacji, dwa o uogólnionych dyfuzjach i ich odwrotnych problemach z zastosowaniem w finansach i dwa o stochastycznych równaniach różniczkowych cząstkowych. Te artykuły to (w kolejności prezentacji):

- John M. Noble 'Time Homogeneous Diffusions with a Given Marginal at a Deterministic Time' Stochastic Processes and Applications vol. 123 (2013) no. 3 pp 675 - 718
- John M. Noble 'Time Homogeneous Diffusion with Drift and Killing to Meet a Given Marginal' Stochastic Processes and their Applications 125 (2015), pp. 1500-1540
- John M. Noble 'Lp Solutions for Stochastic Evolution Equation with Nonlinear Potential' Studia Mathematica Studia Mathematica 264 (2) (2022), pp 181 - 240
- John M. Noble 'Effect of Stochastic Perturbations for Front Propagation in Kolmogorov Petrovskii Piscunov Equations' Stochastic Processes and their Applications 128 no 10 (2018), pp 3531-3557

Pierwsze dwa artykuły są związane z uogólnionymi dyfuzja i ich problemami odwrotnymi. Pierwsza praca przedstawia wynik o największym znaczeniu wśród przedstawionych (zawiera rozwiązanie dość długo otwartego problemu), podczas gdy druga jest artykułem uzupełniającym, rozszerzającym wcześniejszą metodę tak, by stosowała się do sytuacji z dryfem i zabijaniem procesu. Uwzględnienie pola śmierci (*killing field*) wymagało znacząco nowych technik.

Trzeci artykuł, rozwiązania Lp dla ewolucji stochastycznej z nieliniowym potencjałem, jest matematycznie najbardziej wymagający, podczas gdy czwarty przedstawia wyniki dotyczące stochastycznego KPP.

Wszystkie te artykuły są pracami jednego autora.

Dla każdego z tych artykułów podam krótkie podsumowanie wyników, motywację i tło oraz skrótowy opis dowodów głównych rezultatów i użytych technik matematycznych.

Trzy z tych artykułów ukazały się w czasopiśmie „Stochastic Processes and their Applications", które Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego ocenia na 100 punktów, podczas gdy jeden pojawił się w opracowaniu „Studia Mathematica", które również wyceniane jest na 100 punktów przez MNiSW.

1 *Time Homogeneous Diffusions with a Given Marginal at a Deterministic Time* Stochastic Processes and Applications vol. 123 (2013) no. 3 pp 675 - 718

To chyba najważniejszy ze wspomnianych artykułów; rozwiązywał dość długo otwarty problem.

1.1 Wprowadzenie

W tym artykule rozwiązałem następujący problem: mając rozkład prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}$ taki, że $\int |x|\mu(dx) < +\infty$, z wartością oczekiwaną oznaczoną przez: $e(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x\mu(dx)$, pytamy czy istnieje uogólniona dyfuzja X w sensie Knighta [14] oraz Kotaniego i Watanabe [16] taka, że dla ustalonego $t > 0$, gdy $X_0 = e_0(\mu)$, $\mathcal{L}(X_t) = \mu$, gdzie $\mathcal{L}$ oznacza rozkład prawdopodobieństwa zadanej zmiennej losowej.

1.2 Tło

Ten sam wynik udowodnił Ekström, Hobson, Janson i Tysk [7], używając zupełnie innych technik. Oni też przybliżali rozkład docelowy za pomocą miar atomowych, ale odwoływali się do ogólnych wyników z topologii algebraicznej aby stwierdzić istnienie procesu. Myślę, że prawdopodobnie zakończyli swoją pracę miesiąc wcześniej niż ja moją, jednak moi recenzenci, z pełną znajomością tej drugiej pracy, jej treści i tego, kiedy została napisana, określili moją jako „niezależną i jednoczesną"; obaj recenzenci wskazali również na fakt, że zaprezentowane podejścia do problemu były zupełnie inne.

Problem konstrukcji uogólnionej dyfuzji z danym rozkładem o zwartym nośniku w niezależnym losowym czasie o rozkładzie wykładniczym został w pełni opisany przez Coxa, Hobsona i Obłója w [5]. Jest to o wiele łatwiejszy problem, ponieważ może być wyrażony jako odwracanie rezolwenty (ze względu na wykładniczy rozkład losowego czasu). Problem skonstruowania dyfuzji martyngałowej, która ma rozkład μ w ustalonym czasie t, został rozwiązany przez Jianga i Tao w [11] *pod pewnymi warunkami dotyczącymi gładkości.*

W [22], Monroe konstruuje ogólny stabilny symetryczny proces z zadanym rozkładem brzegowym w ustalonym czasie, ale nie wymaga, aby uzyskany proces był martyngałem.

Metoda dowodowa, którą tutaj opracowałem, tylko dowodzi istnienia, może jednak również stanowić podstawę *konstrukcji* w interesujących przypadkach, ponieważ kluczem do istnienia jest pokazanie (w sytuacji dyskretnej), że istnieje punkt, który spełnia układ równań wielomianowych, a znane są dość wydajne metody numeryczne do lokalizowania rozwiązań takich układów równań, gdy oni są wiadomo, że te rozwiązania istnieją.

1.3 Motywacja

Temat procesu mocno-markowowskiego generowanego przez uogólnione operatory różniczkowe Kreĭna-Fellera drugiego rzędu jest interesujący sam w sobie. Dokładniej, odwrotny problem obliczania ciągu m, wprowadzony przez Kreĭna [17], opracowany przez Kacsa i Kreĭna [12]), dla którego rozwiązanie f parabolicznego równania $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial^2 f}{\partial m \partial x}$ z warunkiem początkowym $s = 0$ ma ustalone zachowanie przy $s = t > 0$ jest długotrwałym problemem, interesującym z punktu widzenia fizyki matematycznej.

W ostatnich latach zainteresowanie problemem było bardzo duże; zostało odnowione ze względu na zastosowania w dziedzinie modelowania rynków finansowych. Ponieważ jest to obecnie siła napędowa tego problemu w zastosowaniach, pokrótce przedstawię motywację finansową.

Ogólną motywacją w finansach jest automatyzacja procesu wyceny i zarządzania ryzykiem instrumentów pochodnych. Bardziej szczegółowo, jest to problem ustalania cen szerokiej gamy opcji europejskich, biorąc pod uwagę aktualną cenę rynkową aktywów bazowych i kwotowania opcji rynkowych europejskich opcji kupna przy różnych cenach wykonania K dla terminu zapadalności t lub, bardziej ogólnie, kilku terminów zapadalności. Tutaj omawiamy problem znajdowania procesu, który spełnia pojedynczy *uśmiech zmienności*, ale metodę można stosunkowo łatwo rozszerzyć by wykazać istnienie odcinkowo jednorodnego procesu, który spełnia podane uśmiechy w terminach zapadalności $t_1, \ldots, t_m$. Problem konstruowania procesu w celu ułatwienia wyceny opcji omawia Peter Carr w [4], który opracowuje odpowiedni model, znany jako *model lokalnej wariancji gamma*. Jest to problem o znaczeniu praktycznym; z wymienionych cen opcji, problem wnioskowania cen opcji przy nienotowanych cenach wykonania i terminach zapadalności pojawia się zarówno na giełdach, jak i pozagiełdowych transakcjach. Problem określenia odpowiednich danych wejściowych dla modelu, dzięki któremu wynik jest zgodny z określonym zestawem cen rynkowych, jest znany jako *kalibracja*.

Jednym z najprostszych przykładów procedury kalibracji jest obliczenie implikowanej zmienności we wzorze Blacka–Scholesa. Na podstawie jednej ceny opcji, wejściowa zmienność do modelu Blacka–Scholesa jest obliczana tak, aby wycena była zgodna z podaną ceną rynkową. Gdy podanych jest kilka cen, każda o innym terminie zapadalności, chwilową zmienność można uznać za kawałkami stałą funkcję czasu, która zmienia się przy każdym terminie zapadalności opcji. Kiedy bierze się pod uwagę różne ceny wykonania, każda o tej samej zapadalności, uśmiech implikowanej zmienności utrudnia bezpośrednie rozszerzenie modelu Blacka–Scholesa na radzenie sobie z takim zestawem informacji.

Zasugerowano kilka sposobów radzenia sobie z faktem, że zmienność implikowana przy jednym terminie zapadalności nie jest stała jako funkcja ceny wykonania i istnieje wiele sposobów na skonstruowanie modelu, który jest zgodny z danym zestawem cen opcji na rynku wolnym od arbitrażu. Jedno takie podejście można znaleźć u Rubinsteina [30], który przedstawia dyskretny model czasu, w którym proces cenowy jest procesem Markowa na siatce dwumianowej. Wersję modelu Rubinsteina z ciągłymi czasem i przestrzenią stanów można znaleźć u Carra i Madana [3].

Madan i Yor [19] podają alternatywny sposób skonstruowania dyfuzji martyngałowej, która jest zgodna z uśmiechem zmienności.

Podejście Petera Carra w [4] jest zasadniczo inne; wynikający z tego proces neutralny pod względem ryzyka dla ceny aktywów bazowych zestawu europejskich opcji stworzony by dostosować się do jednego uśmiechu to jednorodny względem czasu proces, który nie jest dyfuzją. Opiera się na bezdryfowej, jednorodnej dyfuzji, która przebiega wedle niezależnego zegara gamma. Oznacza to, że jeśli X oznacza bezdryfową, czasowo-jednorodną dyfuzję, to proces cen akcji S jest określony przez $S_r = X_{\Gamma_r}$, gdzie Γ jest niezależnym subordynatorem gamma. *Subordynator* jest jednowymiarowym procesem Lévy'ego, który prawie na pewno rośnie; dla *subordynatora gamma*, proces Lévy'ego jest procesem gamma. Zegar gamma jest znormalizowany, tak aby Γ_t miało rozkład wykładniczy, gdzie t jest terminem zapadalności opcji, których ceny są podane lub obserwowane.

Problem „dyfuzji osiągającej zadany rozkład brzegowy" odnosi się do sytuacji, w której dla pojedynczego ustalonego terminu zapadalności t, ceny europejskiej opcji kupna (lub sprzedaży) podane są w całym zakresie cen wykupu K i pokazuje istnienie neutralnej względem ryzyka miary, przy której proces cen akcji ewoluuje zgodnie z dyfuzją martyngałową, gdzie rozkład w czasie t zgadza się z tym zdefiniowanym przez dane.

1.4 Zarys dowodu

Dowód przebiega wedle pięciu kroków, które nakreśliłem we wstępie do artykułu. Twierdzenie o punkcie stałym z kroku 2 jest sednem artykułu, więcej szczegółów podam poniżej. Wspomniane kroki to:

(a) Rozważany jest czas dyskretny i skończona przestrzeń stanów; przy takich założeniach podane są warunki przy których istnieje odpowiedni łańcuch Markowa o danym rozkładzie w chwili zatrzymania w niezależnym czasie geometrycznym (Twierdzenie 2.5, udowodnione w rozdziale 3). Rozwiązanie, kiedy istnieje, jest jedyne, a konstrukcja jest jawna.

(b) Wynik ten jest następnie rozszerzany w celu ustalenia warunków, przy których istnieje łańcuch Markowa z danym rozkładem, gdy zatrzyma się w niezależnym czasie o ujemnym rozkładzie dwumianowym. Wykorzystuje to fakt, że zmienna ujemna dwumianowa jest sumą niezależnych zmiennych o rozkładzie geometrycznym i używa twierdzenia o punkcie stałym (Twierdzenie 2.6, udowodnione w rozdziale 4). Rozszerzenie od czasu geometrycznego do ujemnego dwumianowego, udowodnione w sekcji 4, jest sednem artykułu.

(c) Niezależny czas $\tau \sim NB(r, a)$ ma wartość oczekiwaną $\mathbb{E}[\tau] = \frac{ra}{(1-a)}$. Niech $(X_n^{(a)})_{n\geq 0}$ oznacza dyskretny łańcuch taki, że $X_\tau^{(a)}$ ma określony rozkład końcowy. Konstruujemy kawałkami stały proces $(Y_t^{(a,\delta)})_{t\geq 0}$, gdzie $Y_{n\delta}^{(a,\delta)} = X_n^{(a)}$. Niech $T = \tau\delta$, wtedy $Y_T^{(a,\delta)}$ ma zadany rozkład. Parametry $a \nearrow 1$ i δ są wybierane tak, że $\frac{ra\delta}{(1-a)} = t$. Wynika z tego, że $\mathbb{E}[T] = t$ i $\mathrm{Var}(T) = t^2\left(\frac{1}{r} + \frac{\delta}{t}\right) \xrightarrow{\delta\to 0} \frac{t^2}{r} \xrightarrow{r\to+\infty} 0$. Dla stałego r, gdy $\delta \to 0$, rozkład T zbiega do Gamma($r, \frac{t}{r}$), podczas gdy $Y^{(a,\delta)}$ zbiega do procesu Markowa z czasem ciągłym $\tilde{Y}^{(r)}$ na dyskretnej przestrzeni stanów, z zadanym rozkładem końcowym w niezależnym czasie T o rozkładzie gamma (Twierdzenie 2.7, udowodnione w Sekcja 5.1).

(d) Następnie przechodzimy do granicy $r \to +\infty$; T zbiega do t wg prawdopodobieństwa, podczas gdy $\tilde{Y}^{(r)}$ zbiega do procesu Markowa z czasem ciągłym na dyskretnej przestrzeni stanów z zadanym rozkładem końcowym w czasie t. (Twierdzenie 2.8, udowodnione w rozdziale 5.2).

(e) Na koniec brana jest pod uwagę dowolna przestrzeń stanów. Docelowa miara μ jest aproksymowana ciągiem atomowych miar $\mu^{(n)}$, w których waga każdego atomu jest w przybliżeniu wagą atomu μ w tym punkcie, jeśli ta waga jest niezerowa, lub około $\frac{1}{2^n}$ w przeciwnym wypadku. Miejsca atomów definiują skończoną przestrzeń stanów i poprzednie wyniki uzasadniają istnienie uogólnionej dyfuzji $Y^{(n)}$ z rozkładem marginalnym $\mu^{(n)}$ w wyznaczonym czasie $t > 0$. Przykład pokazuje, jak łańcuchy Markowa z czasem ciągłym na skończonej przestrzeni stanów można opisać językiem uogólnionych dyfuzji. Rozważane jest duże n i, poprzez branie podciągów, pokazane jest, że istnieje miara łańcuchowa m i odpowiadający jej uogólniony proces dyfuzji, który ma rozkład krańcowy $\mu = \lim_{n\to+\infty} \mu^{(n)}$ w czasie $t > 0$. To jest treść twierdzenia 2.9, udowodnionego w rozdziałach 6 i 7; w pierwszym z nich przygotowywany jest grunt do rozważań ciągów Kreĭna, w drugim zaś pojawia się dowód wyniku.

Twierdzenie o punkcie stałym Docelowa miara prawdopodobieństwa to $p = (p_1, \ldots, p_M)$ na przestrzeni stanów $S = (i_1, \ldots, i_M)$, gdzie $-\infty < i_1 < \ldots < i_M < +\infty$. p ma wartość oczekiwaną $e_0(p) = \sum_{j=1}^{M} i_j p_j$.

Zacznijmy od problemu znalezienia martyngałowego procesu Markowa X na S z czasem dyskretnym takiego, że $\mathbb{P}(X_\tau = i_j) = p_j$, gdzie τ jest niezależnym czasem losowym o rozkładzie geometrycznym:

$$p_\tau(k) = (1-a)a^k \qquad k \geq 0.$$

Niech P oznacza macierz przejścia i niech $q_j = 1 - P_{jj}$ (tj. prawdopodobieństwo, że proces zmienia stan w chwili j). Ponieważ proces ma być *martyngałem*, który skacze tylko do najbliższych sąsiadów, prawdopodobieństwa przejścia $(P_{jk})_{k\in S}$ są całkowicie wyznaczone przez q_j. Niech l oznacz indeks dla którego $i_{l-1} < e_0 \leq i_l$ oraz

$$\mathcal{L}(p,j) = \begin{cases} \frac{(i_{j+1}-i_{j-1})}{(i_{j+1}-i_j)(i_j-i_{j-1})} \left(\sum_{k=1}^{j-1}(i_j - i_k)p_k\right) & 2 \leq j \leq l-1 \\ \frac{(i_{j+1}-i_{j-1})}{(i_{j+1}-i_j)(i_j-i_{j-1})} \left(\sum_{k=j+1}^{M}(i_k - i_j)p_k\right) & l \leq j \leq M-1 \\ 0 & j = 1 \quad \text{lub} \quad M \end{cases} \tag{1}$$

przyjmijmy ponadto

$$\mathcal{F}(p,j) = \begin{cases} \frac{\mathcal{L}(p,j)}{p_j} & j \in \{1,\dots,M\}, \qquad \mathcal{L}(p,j) > 0 \\ 0 & \mathcal{L}(p,j) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Twierdzenie 2.5 orzeka, że istnieje jednoznaczne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\max_{k \in \{1,\dots,M\}} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \mathcal{F}(p,k) \leq 1$$

i jest zadane przez

$$\begin{cases} q_j = \left(\frac{1}{a} - 1\right) \mathcal{F}(p,j) & j \in \{2,\dots,M-1\} \\ q_1 = q_M = 0. \end{cases}$$

To okazuje się być stosunkowo prostym rachunkiem.

Następnie koncentruję się na trudniejszym problemie znalezienia martyngałowego procesu Markowa z czasem dyskretnym takiego, że $\mathbb{P}(X_\tau = i_j) = p_j$, gdzie

$$\mathbb{P}(\tau = k) = \binom{r+k-1}{r-1} (1-a)^r a^k.$$

Jeśli przez P oznaczymy macierz przejścia, to ze względu na martyngałowość, wielkości $q_j = 1 - P_{jj}$ wyznaczają macierz przejścia (gdy proces skacze tylko do najbliższych sąsiadów, prawdopodobieństwa każdego przejścia są określane tak, by proces był martyngałem). Wtedy krótki rachunek daje

$$\mathbb{P}(X_\tau = i_k | X_0 = i_j) = (1-a)^r (I - aP(q))^{-r}_{jk}$$

Rozważając ujemny czas dwumianowy jako sumę niezależnych czasów geometrycznych i „odrywając" jeden z nich możemy dostać (uwzględniając jawne rozwiązanie dla procesu zatrzymanego w czasie geometrycznym)

$$q_j = \begin{cases} \left(\frac{1}{a} - 1\right) \mathcal{F}((1-a)^{-r-1} p (I - aP(q))^{r-1}, j) & j \in \{2,\dots,M-1\} \;\; 0ij = 1, M \end{cases}$$

Aby uzyskać łatwiejszą do analizy formę (z mniejszą liczbą zmiennych), niech $\lambda = \frac{a}{1-a} q$ i zdefiniujmy N jako

$$\begin{cases} N_{jj} = 1 + \lambda_j & j = 1,\dots,M \\ N_{j,j+1} = -\lambda_j \alpha_{j,j+1} & j = 1,\dots,M-1 \\ N_{j,j-1} = -\lambda_j \alpha_{j,j-1} & j = 2,\dots,M \\ N_{j,k} = 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie $\alpha_{j,j+1} = \frac{(i_j - i_{j-1}}{i_{j+1} - i_{j-1}}$ i $\alpha_{j,j-1} = \frac{i_{j+1} - i_j}{i_{j+1} - j a_{j-1}}$. Wtedy $N(\lambda) = (1-a)^{-1}(1 - aP(q))$. Przez postawienie $h(b, \lambda) = bN^{r-1}(\lambda)$ (dla wektora wierszowego b), problem sprowadza się do wykazania istnienia λ takiego, że

$$\lambda = \mathcal{F}(h(p, \lambda)).$$

Jest to twierdzenie o punkcie stałym, które używa twierdzenia Schaudera o punkcie stałym. Po pierwsze, h jest przekształcane w $h^{(\epsilon)}$ aby zapewnić ograniczoność, a tym samym rozwiązanie zmodyfikowanego problemu punktu stałego. Następnie bierzemy $\epsilon \searrow 0$; po pierwsze, pokazuję że $\sup_\epsilon \max_j \lambda_j^{(\epsilon)} < +\infty$, a potem pokazuję $\inf_\epsilon \min_j \lambda_j^{(\epsilon)} > 0$. W ten sposób, biorąc $\epsilon \searrow 0$, wykazujemy, że istnieje punkt stały dla naszego problemu.

1.5 Otwarte problemy

Wydaje się, że można bezpośrednio zastosować przedstawioną metodę do docelowego rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}^d$ dla $d \geq 1$. Metoda [7] jest wyraźnie ograniczona do przypadku $d = 1$.

Głównymi nierozstrzygniętymi problemami otwartymi są tutaj jednoznaczność (użyte twierdzenie o punkcie stałym było twierdzeniem Schaudera, które nie daje jednoznaczności) oraz sposób na skonstruowanie dyfuzji.

2 *Time homogeneous diffusion with drift and killing to meet a given marginal* (Stochastic Processes and their Applications 125 (2015), pp. 1500-1540)

To jest artykuł uzupełniający. Próbowałem podążać tymi samymi ścieżkami rozumowania, jednak problem przejawił pewną liczbę nowych wyzwań; na przykład przy dryfowaniu i zabijaniu, problematyczny okazuje się stan początkowy (a bez dryfowania i zabijania jest to po prostu wartość oczekiwana docelowej miary). Dryf jest niwelowany poprzez odpowiednią zmianę współrzędnych; ważne jest, by oczekiwana wartość miary docelowej była dobrze zdefiniowana we współrzędnych wolnych od dryfu. Ponadto, przechodząc od czasu dyskretnego do ciągłego, granice muszą być przyjmowane w taki sposób, aby wartości oczekiwane zbiegały tak, że graniczna miara prędkości jest skończona i (stąd) proces graniczny nie wygasa z prawdopodobieństwem 1.

2.1 Wprowadzenie

Oczywiście po wykazaniu, że dla *dowolnego* podanego rozkładu brzegowego z dobrze zdefiniowaną wartością oczekiwaną istnieje *uogólniona dyfuzja*, które ma taki rozkład w danym momencie, naturalnym pytaniem jest rozważenie, czy to samo zachodzi w obecności *dryfu* i *zabijania* pól.

Pytanie, czy mój poprzedni artykuł stanowił podstawę do takich badań zadał mi Peter Carr, który pracował dla banku Morgan Stanley w tamtym czasie i zapewnił mnie, że ma to praktyczne znaczenie w finansach. Podczas gdy ja pokazałem *istnienie* (przy założeniach stawianych na dryf i pole zabijania), trudno jest stwierdzić, jak opracować *konstrukcję* z przedstawionego dowodu, więc praca (w obecnej formie) nie ma (jeszcze) praktycznego zastosowania.

W tym artykule udowodniono, że dla każdego rozkładu prawdopodobieństwa μ na $\mathbb{R}$, z zadanym polem dryfu $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz polem zabijania $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ które spełnia założenia postawione w artykule i podanym czasie końcowym $t > 0$, istnieje ciąg Kreĭna m, $\alpha \in (0, 1]$ (ściśle dodatnie), początkowy warunek $x_0 \in \mathbb{R}$ i proces X z infinitezymalnym generatorem $\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial m \partial x} + b\frac{\partial}{\partial m} - \frac{\partial K}{\partial m}\right)$ gdzie $k = \frac{\partial K}{\partial x}$ taki, że dla dowolnego zbioru borelowskiego $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$$\mathbb{P}\left(X_t \in B | X_0 = x_0\right) = \alpha\mu(B).$$

Na początku można pokazać, że problem z dryfem, ale *bez* zabijania, może być rozstrzygnięty po prostej zmianie współrzędnych, całkowicie na podstawie dowodu z poprzedniego artykuły (pod pewnymi warunkami na dryf, aby zapewnić, że proces w nowych współrzędnych ma dobrze zdefiniowaną wartość oczekiwaną); problem *bez* pola zabijania (przy tych założeniach) staje się zatem wnioskiem z poprzedniego artykułu (z pewnymi dodatkowymi - już zarysowanymi - trudnościami w pokazaniu zbieżności).

Pole zabijania stwarza *znaczne* dodatkowe trudności i wymaga istotnie nowych technik. Przedstawione dowody próbują naśladować w jak największym stopniu rozumowanie z poprzedniego artykułu, jednak w kluczowych miejscach potrzebne są istotnie nowe pomysły aby uwzględnić pole zabijania.

2.2 Tło i motywacja

Tło jest mniej więcej to samo, co w poprzednim artykule. Odwrotny problem wyznaczania funkcji a dla której rozwiązanie f równania parabolicznego

$$\frac{\partial f}{\partial s} = a\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial}{\partial x} - k\right) f$$

gdzie początkowy warunek w $s = 0$ to rozkład Diraca $f(0, x) = \delta_{x_0}(x)$ w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ i gdzie zadany jest warunek końcowy $f(t, x)$ dla $s = t > 0$, jest oczywiście interesujący sama w sobie. Tutaj a jest rozumiane jako $a(x) = \frac{1}{m'(x)}$, gdzie m jest ciągiem Kreĭn.

Ogólny problem motywujący w zakresie finansów, cen i zarządzania ryzykiem pochodnych papierów wartościowych jest taki sam, jak poprzednio, patrz Carr i Nadtochiy w [4] (2014) oraz model lokalnej wariancji gamma.

Dodatkowo w tym artykule dryf i zabijanie mają znaczenie, gdy ceny zarówno numéraire jak i zasobu są modelowane przez procesy stochastyczne. Kowariancja między ceną numéraire i ceną aktywów zmienia dryf procesu zdyskontowanej ceny aktywów, stąd wymóg włączenia dryfu b; włączenie pola zabijania jest również przydatne w tym kontekście i rozszerza klasę dostępnych modeli, gdy numéraire nie jest wolny od ryzyka.

2.3 Wyniki i metoda dowodowa

Niech μ będzie miarą prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ zadanymi funkcjami dryfu i zabijania. Określmy

$$\widetilde{b}(x) = \begin{cases} b(x) & x \in \text{suppt}(\mu) \\ 0 & x \notin \text{suppt}(\mu) \end{cases}, \qquad B(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} \widetilde{b}(y)dy & x \geq 0 \\ -\int_{[x,0)} \widetilde{b}(y)dy & x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $\text{suppt}(\mu)$ oznacza nośnik miary μ. Niech

$$\widehat{k}(x) = \begin{cases} k(x) & x \in \text{suppt}(\mu) \\ 0 & x \notin \text{suppt}(\mu) \end{cases}, \qquad K(x) = \begin{cases} \int_{[0,x]} \widehat{k}(y)dy & x \geq 0 \\ -\int_{[x,0)} \widehat{k}(y)dy & x < 0. \end{cases} \tag{4}$$

Założenia dotyczące dryfu b, pola zabijania k i miary μ Docelowa miara prawdopodobieństwa, dryf i pole zabijania (μ, b, k) spełniają następujące warunki.

(a) B określone w (3) i K określone w (4) są absolutnie ciągłe względem μ.

(b) Niech $l_-(x) = \sup\{y \in \text{suppt}(\mu) \cap (-\infty, x)\}$ i niech $l_+(x) = \inf\{y \in \text{suppt}(\mu) \cap (x, +\infty)\}$, wtedy

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \lim_{h \downarrow 0} \int_{l_-(x)-h}^{l_+(x)+h} |\widetilde{b}(x)| dx < 1 \tag{5}$$

gdzie $\widetilde{b}$ jest określone przez (3).

(c) Niech $c : (0,1) \to \mathbb{R}_+$ oznacza funkcję określoną przez:

$$c(x) = \frac{(\ln \frac{1}{x}) - (1-x)}{(1-x)^2}. \tag{6}$$

Niech γ spełnia:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(1 - \sup_{x \in \mathbb{R}} \lim_{h \downarrow 0} \int_{l_-(x)-h}^{l_+(x)+h} |\widetilde{b}(x)| dx \right). \tag{7}$$

Wymagane jest, aby (b, μ) spełniało:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{0 \wedge x}^{0 \vee x} e^{F(b,y)} dy \right) \mu(dx) < +\infty \tag{8}$$

gdzie

$$F(b,y) = 2\left(\int_{0\wedge y}^{0\vee y}\left|\widetilde{b}(x)\right|dx + c(\gamma)\sup_{\underline{t}:(0\wedge y)=t_0<\ldots<t_n=(0\vee y)}\sum_{i=0}^{n-1}\left\{\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}|\widetilde{b}(x)|dx\right)^2\right\}\right) \tag{9}$$

i $\widetilde{b}$ jest zdefiniowane przez (3). Tutaj maksimum jest brane po ciągach o długości n dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Okazuje się, że jest to wystarczający warunek aby zapewnienić, że oczekiwana wartość procesu we współrzędnych bez dryfu jest dobrze zdefiniowana.

(d) $\lim_{x\to\pm+\infty}\frac{\partial K}{\partial\mu}(x) = 0$.
Niech $z_+ = \sup\{x \in \mathrm{suppt}(\mu)\}$ i $z_- = \inf\{x \in \mathrm{suppt}(\mu)\}$. Wtedy $\frac{\partial K}{\partial\mu}(x)$ jest zdefiniowany jako 0 dla $x > z_+$ i $x < z_-$.

W dowodzie sprowadzamy problem do „współrzędnych bez dryfu". W założeniu 3. zapewniamy, że we współrzędnych wolnych od dryfu proces ma dobrze zdefiniowaną wartość oczekiwaną, aby umożliwić wykorzystanie technik z poprzedniego artykułu. Punkt 4., założenie dotyczące pola zabijania, ma zapewnić, że biorąc ciąg rozwiązań dyskretnych problemów, proces graniczny nie wygasa z prawdopodobieństwem 1.

W artykule dowiedziono, że jeśli (μ, b, k) spełniają te założenia, to istnieje miara łańcuchowa m, $\alpha \in (0,1]$ i $x_0 \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial m\partial x} + \frac{\partial B}{\partial m}\nabla_m - \frac{\partial K}{\partial m}, \tag{10}$$

gdzie ∇_m jest zdefiniowanym niżej operatorem gradientu, który jest infinitezymalnym generatorem procesu X spełniającego

$$\mathbb{P}(X_t \in B | X_0 = x_0, X_t \notin \{D\}) = \mu(B) \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tutaj D to *stan cmentarny*, $X_t \in \{D\}$ oznacza, że proces został zabity do czasu t i

$$\alpha := 1 - \mathbb{P}(X_t \in \{D\}) > 0.$$

Operator gradientu ∇_m jest zdefiniowany w następujący sposób. Niech $z_- = \inf\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathrm{suppt}(m)\}$ i $z_+ = \sup\{x \in \mathbb{R} | x \in \mathrm{suppt}(m)\}$. Dla $x \in (z_-, z_+)$, określmy:

$$\begin{cases} x_m^* = \lim\inf_{\epsilon\searrow 0}\{y > x + \epsilon | y \in \mathrm{suppt}(m)\} \\ x_{m*}(x) = \lim\sup_{\epsilon\searrow 0}\{y < x - \epsilon | y \in \mathrm{suppt}(m)\} \end{cases}$$

a dla funkcji testowych, gdzie jest dobrze zdefiniowany, operator ∇_m jest zdefiniowany jako:

$$\nabla_m f(x) = \begin{cases} \lim_{h\searrow 0}\frac{f(x_m^*(x)+h) - f(x_{*m}-h)}{x_m^* - x_{*m} + 2h} & x \in (z_-, z_+) \\ 0 & \text{inne} \end{cases}$$

Jeśli t jest zastąpiony przez czas wykładniczy, α, x_0 i m są jednoznacznie wyznaczone, i dana jest jawna konstrukcja. Jeśli t jest czasem deterministycznym, wykazane jest tylko istnienie, chociaż metoda dowodu może wskazywać na to, jak konstruować przybliżenia.

Uwagi do hipotezy

(a) Dla γ zdefiniowanego przez (7), z (5) wynika, że $\gamma > 0$ (gdzie nierówność jest ostra).

(b) Dla $x \in (0, 1)$ rozwinięcie w szereg potęgowy daje:

$$\log \frac{1}{x} = -\log(1 - (1 - x)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1 - x)^j}{j}$$

więc

$$c(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - x)^j}{j + 2}.$$

Zatem w zakresie $x \in (0, 1)$, $\lim_{x\uparrow 1} c(x) = \frac{1}{2}$, $c(x)$ maleje względem x i $\lim_{x\downarrow 0} c(x) = +\infty$.

(c) Stosunkowo prostym problemem jest wykazanie istnienia miary m, dającej $\alpha > 0$ i proces z generatorem infinitezymalnym

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial m \partial x} + \frac{\partial B}{\partial m}\nabla_m\right) - k \tag{11}$$

dla danego dryfu b i pola zabijania k, o rozkładzie

$$\mathbb{P}(X_\tau \in \{D\}) = 1 - \alpha < 1 \qquad \mathbb{P}(X_\tau \in A) = \alpha\mu(A) \qquad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

gdzie τ to czas końcowy, μ to zadana miara, D oznacza stan cmentarny, a $\{X_\tau \in \{D\}\}$ oznacza, że proces został zabity do czasu τ. W przypadku omawianym w tym artykule, z podobnymi dowodami, występuje jednoznaczność i jawna konstrukcja, gdy zatrzymujemy się po niezależnym czasie geometrycznym / wykładniczym. Szukając procesu z generatorem zadanym przez (11), założenie o polu zabijania k może być rozluźnione; Część 4d założeń jest nieistotna dla tego problemu, ponieważ jest związana tylko z zapewnieniem, że granica procesów na zatomizowanych przestrzeniach stanów nie zanika z prawdopodobieństwo 1 do czasu kończącego dla generatora danego przez (10). Ten problem rozwiązuje się bez tego założenia dla generatora podanego przez (11).

Dowód składa się z czterech kroków opisanych poniżej. Schemat jest ten sam, co w poprzednim artykule, ale znacząco nowe podejście jest potrzebne w 1. Pewna modyfikacja twierdzenia o punkcie stałym jest potrzebna do rozwiązania 2. Dla 3. techniki są podobne jak w poprzednim artykule.

W przypadku 4. graniczna procedura uwzględnia wskazane dwie nowe kwestie; założenia dotyczące dryfu aby zapewnić, że proces we współrzędnych bez dryfu ma dobrze zdefiniowaną wartość oczekiwaną; również konieczne jest wykazanie, że granica oczekiwanych wartości to oczekiwana wartość granicy. Założenie dotyczące pola zabijania k jest konieczne, aby prawdopodobieństwo, że proces został zabity do czasu końcowego nie zbiegało do 1 przy braniu granicy.

(a) Rozważany jest czas dyskretny i skończona przestrzeń stanów; przedstawione są warunki przy których istnieje odpowiedni łańcuch Markowa o danym rozkładzie w niezależnym, *geometrycznym* czasie. Rozwiązanie, jeśli istnieje, jest jednoznaczne, a konstrukcja jest jawna.

(b) Analiza ta jest następnie rozszerzana w celu ustalenia warunków, przy których istnieje łańcuch Markowa z danym rozkładem po zatrzymaniu w niezależnym, ujemnym czasie dwumianowym. Wykorzystywany jest fakt (jak z poprzednim artykule), że ujemna zmienna dwumianowa jest sumą niezależnych zmiennych geometrycznych i używa się twierdzenia o punkcie stałym.

(c) Dalej brane są granice ujemnych czasów dwumianowych przy zmniejszaniu siatki czasowej w celu uzyskania czasu z rozkładem Gamma, jak w poprzednim artykule. Następnie brane są granice w celu uzyskania deterministycznego czasu. Argumenty są podobne do tych z poprzedniego artykułu, przy czym dodatkowo należy dbać o to, aby graniczny proces nie wygasał z prawdopodobieństwem 1.

(d) Na koniec brana jest pod uwagę dowolna przestrzeń stanów. Jak w poprzednim artykule, docelowa miara jest przybliżana przez ciąg miar atomowych. Dryf jest niwelowany poprzez zmianę współrzędnych, po czym rozważany jest ciąg miar atomowych w przekształconych współrzędnych. Problem zabijania jest rozwiązany przez rozważenie

   - procesu bez zabijania,
   - warunkowego rozkładu czasu uśmiercenia.

   W obu sytuacjach mamy zbieżność, jednak druga z nich wymaga zupełnie nowych rozważań; ten problem nie występował bez pola zabijania. Trudność polega na zapewnieniu, że współczynnik dyfuzji nie zbiega do nieskończoności i prawdopodobieństwo, że proces został zabity nie zbiega do 1 w branej granicy. Dowód wymaga założenia 4d.

2.4 Metody dowodu

Na początku rozważany jest dyskretny problem z M stanami $-\infty < i_1 < \ldots < i_M < +\infty$. Dryfy $(b_j)_{j=1}^{M}$ są uwzględnione; wpływają one na prawdopodobieństwo skoku w lewo lub w prawo przy opuszczaniu stanu, patrz równanie (16). Oczywiście, założenie 2.2 (nierówność (15)) na pole dryfu w sytuacji dyskretnej jest konieczne, aby wielkości $q_{j,j-1}$ i $q_{j,j+1}$ były prawdopodobieństwami.

Równanie (14) przekształca pole zabijania k_j na współczynniki zabijania $\widetilde{k}_j$, które dadzą odpowiednie wyrażenie po umieszczeniu w infinitezymalnym generatorze; uzasadnia to Lemat 2.5 (wyrażenie na infinitezymalny generator podane na końcu sformułowania lematu).

Dla dyskretnego problemu z M stanami $i_1 < \ldots < i_M$, dodajemy stan cmentarny D, któremu nadajemy numer $M+1$. Następnie definiujemy *macierz przejścia* $\widetilde{P}^{(h)}$ dla długości kroku czasowego h, λ_j intensywność pozostanie w j-tym stanie gdzie, pod warunkiem opuszczenia i_j cząstka umiera z prawdopodobieństwem $\widetilde{k}_j$. Pod warunkiem pozostania przy życiu, skacze do i_{j+1} z prawdopodobieństwem $q_{j,j+1}$ lub do i_{j-1} z prawdopodobieństwem $q_{j,j-1}$. Biorąc $h \searrow 0$, Θ z definicji 2.4 to intensywność łańcucha Markowa z czasem ciągłym; lemat 2.5, z podaną definicją a_j pokazuje, że w ten sposób zdefiniowany przez Θ łańcuch Markowa z czasem ciągłym ma generator infinitezymalny poprawnej postaci.

W sekcji 3 pokazane jest, jak problem z dryfem (bez zabijania) może zostać przekształcony przez odpowiednią zmianę współrzędnych w bezdryfowy problem z poprzedniego artykułu. Takie przekształcenia nie są wyznaczone jednoznacznie; transformacja jest przeprowadzona w taki sposób, że gdy miara docelowa μ jest przybliżona przez miary atomowe $\mu^{(N)}$ takie, że $\mu^{(N)} \to \mu$, przestrzenie stanów problemów zdyskretyzowanych również zbiegają.

Wyniki sformułowane są w sekcji 5, natomiast dowód *z* dryfem, ale *bez* zabijania podano w sekcji 6. Dla dyskretnego problemu ze skończoną przestrzenią stanów, problem był zredukowany do poprzedniego artykułu (bez dryfu lub zabijania). Trudność stanowi branie granicy. Po pierwsze, Lemat 6.1 pokazuje że przy (8) z założenia, $\sup_N \sum_{j=1}^{M_N} |\kappa_{N,j}| p_j^{(N)} < +\infty$ gdzie dyskretny problem na poziomie N ma M_N stanów, zdyskretyzowana miara docelowa to $p^{(N)}$, a zdyskretyzowana przestrzeń stanów to $(\kappa_{N,j})_{j=1}^{M_N}$). Po drugie, Lemat 6.2 pokazuje, że dla wyboru współrzędnych wolnych od dryfu, funkcje kawałkami liniowe $\kappa_N(x)$, takie, że $\kappa_N(i_{N,j}) = \kappa_{N,j}$, gdzie $(i_{N,j})_{j=1}^{M_N}$ oznacza przestrzeń stanów dla problemu w „oryginalnych" współrzędnych, zbiegają do funkcji $\kappa(x)$. To był (oczywiście) cały sens wyboru współrzędnych wolnych od dryfu. Pozostała część sekcji 6 uzasadnia zbieżność procesów we współrzędnych bez dryfu i jak można to przekształcić z powrotem w zbieżność procesów w oryginalnych współrzędnych do procesu z poprawnym infinitezymalnym generatorem.

Motywacja do Sekcji 4: należy przypomnieć sobie (z poprzedniego artykułu), że rozwiązanie dla czasu geometrycznego $\mathrm{Geom}(a)$ spełnia:

$$\frac{1}{1-a}\left(p(I-aP(q))\right)_j = \begin{cases} 0 & j \neq l-1, l \\ \frac{e_0 - i_{l-1}}{i_l - i_{l-1}} & j = l \\ \frac{i_l - e_0}{i_l - i_{l-1}} & j = l-1 \end{cases}$$

(równanie (9) w poprzednim artykule) i to samo jest prawdziwe w tym przypadku, z P zastąpionym przez $\widetilde{P}^{(h)}$ (Równanie (17) Definicja 2.3). Krok czasowy został zdefiniowany jako h i $a = \frac{t}{t+h}$ tak, że $\mathbb{E}[\tau] = t$, gdzie $\tau \sim \mathrm{Geom}(a)$. Ponadto istnieje również stan cmentarny, o którym należy pamiętać. Równanie pełniące tę samą rolę w sytuacji z zabijaniem podano jako (60) (Lemat 7.4). Tutaj, podczas gdy p (prawdopodobieństwo docelowe, uwarunkowane przeżyciem) jest określone, wartość $1-\alpha$ (prawdopodobieństwo stanu cmentarnego) wynika z obliczeń, podczas gdy $\widehat{p} = \alpha p$.

Wraz z wprowadzeniem zabijania, funkcja $\mathcal{G}$ zdefiniowana w sekcji 4 (równanie (26)) odgrywa tę samą rolę co $\mathcal{F}$ podane w (2) z poprzedniego artykułu.

Problem trafienia w zadany rozkład docelowy po zatrzymaniu w niezależnym czasie geometrycznym (czas dyskretny) lub czasie wykładniczym (czas ciągły) jest sformułowany jako Twierdzenie 5.1, w sekcji 8 znajduje się dowód, którego kluczowe fragmenty opierają się na Lemacie 7.4. W tym wypadku mamy jednoznaczne rozwiązanie, a wartość $\alpha \in (0,1)$, czyli prawdopodobieństwo, że proces jest wciąż żywy w τ, jest wyznaczona jednoznacznie.

Sekcja 5 przedstawia główne wyniki; Czasy geometryczne/wykładnicze, Ujemne czasy dwumianowe/ Gamma, czas deterministyczny.

Po ustaleniach z sekcji 7, dowody przebiegają już łatwiej. W sekcji 8, po znalezieniu analogicznych wielkości, dowód dla czasów geometrycznych/wykładniczych jest bezpośredni. Sekcja 9 podaje twierdzenie o punkcie stałym, które uzasadniane jest w podobny sposób, chociaż należy zachować ostrożność, ponieważ w stanach i_1 i i_M, proces nadal podlega zabijaniu.

Wreszcie w sekcji 10 przechodzi się do granicy. Dodatkowym problemem jest to, że należy ustalić, iż dla ciągu miar łańcuchowych $m^{(N)}$, nie ma podciągu dla którego $m^{(N_j)} \to 0$, co odpowiadałoby procesowi dochodzenia do stanu cmentarnego z prawdopodobieństwem 1. Jest to rola założenia 1.1 część 4, które zapewnia, że tak się nie stanie. To założenie jest niezbędne; w przeciwnym razie możemy wysłać proces do stanu cmentarnego po prostu przyspieszając go.

2.5 Otwarte problemy

Podobnie jak w poprzednim artykule, powinno być możliwe rozszerzenie do osiągnięcia miary docelowej na $\mathbb{R}^d$ dla $d \geq 2$. Interesujące jest również pytanie, czy istnieje *jedyny* generator proponowanego typu, a także konstrukcja tego generatora; konstrukcja byłaby łatwiejsza, gdyby występowała jednoznaczność.

3 *Lp Solutions for Stochastic Evolution Equation with Nonlinear Potential* Studia Mathematica (2022) 264 (2) pp 181 - 240

Z czterech przedstawionych artykułów ten prawdopodobnie zawiera najwięcej innowacji w zakresie zestawu narzędzi matematycznych i jego zastosowań.

3.1 Wprowadzenie

Ten artykuł dotyczy stochastycznego równania różniczkowego cząstkowego

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}u_{xx} + u^\gamma \xi \\ u(0,.) = u_0 \end{cases} \tag{12}$$

gdzie ξ to biały szum w przestrzeni/czasie modelowany przez losowe pole gaussowskie, $\gamma \in (1, +\infty)$ a stan początkowy u_0 to nieujemne przekształcenie mierzalne, niezależne od ξ, spełniające $u_0 \geq 0$ i

$$\begin{cases} \lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{S}^1}(u_0(x) \wedge n)dx\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{S}^1} u_0(x)dx\right)^2\right] < +\infty \\ \gamma \in (1, \infty) \end{cases} \tag{13}$$

Zmienna *przestrzenna* to $x \in \mathbb{S}^1 = [0, 1]$, przy czym identyfikujemy $0 = 1$. Składnik stochastyczny jest interpretowany w rozumieniu [32]. Wynik jest taki, że istnieje nieujemne rozwiązanie u takie, że dla wszystkich $\alpha \in [0, 1)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^1} u(t, x)^{2\gamma} dx dt\right)^{\alpha/2}\right] \leq K(\alpha)\mathbb{E}\left[\left(\int_{\mathbb{S}^1} u_0(x)dx\right)^\alpha\right] < +\infty.$$

gdzie stała $K(\alpha) < +\infty$ pochodzi z nierówności Burkholdera–Davisa–Gundy'ego. Rozwiązanie spełniające ten warunek jest jednoznaczne. Pokazano również, że rozwiązania spełniają

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \left(\int_{\mathbb{S}^1} u(t, x)^p dx\right)^{\alpha/p} dt\right] < +\infty \quad \forall T < +\infty, \qquad 0 < p < +\infty, \qquad \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Wykorzystane techniki nie mogą być zastosowane, gdy warunki początkowe zawierają rozkłady Diraca (są to sytuacje, które są wykluczone przez warunek na u_0). W przedstawionym opisie indeksy dolne oznaczają pochodne; u_t oznacza pochodną funkcji $u : \mathbb{R}_+ \times S^1 \times \Omega \to \mathbb{R}$ względem pierwszej zmiennej (*czasu*), podczas gdy u_{xx} to druga pochodna w odniesieniu do drugiej zmiennej (*przestrzeni*). Równanie (12) jest skrótem odpowiedniego stochastycznego równania całkowego

$$u(t, x) = P_t u_0(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^1} p(t - s, x - y)u^\gamma(s, y)W(ds, dy) \tag{14}$$

gdzie p jest rozwiązaniem równania ciepła $p_t = \frac{\kappa}{2} p_{xx}$, z warunkiem początkowym $p(0, z) = \delta_0(z)$. $\xi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1 \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest używany do oznaczenia białego szumu w przestrzeni/czasie; dla $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^1)$, $\int_A \xi dt dx = W(A)$. Warunek początkowy u_0 jest niezależny od pola białego szumu ξ.

Oczywiście nie ma *mocnych* rozwiązań (12) w sensie p.d.e.; rozwiązania nie będą ani dwukrotnie różniczkowalne względem przestrzeni ani jednokrotnie różniczkowalne względem czasu.

3.2 Tło

Niech W będzie standardowym jednowymiarowym procesem Wienera. Rozważmy stochastyczne równanie różniczkowe zwyczajne:

$$u(t) = u_0 + \int_0^t u(s)^\gamma dW(y) \qquad u_0 \geq 0 \tag{15}$$

w rozumieniu Itô, dla $\gamma > 0$. Zostało ono dokładnie przestudiowane. Istnienie i zachowanie rozwiązań można uzyskać poprzez porównanie z odpowiednim procesem Bessela, w następujący sposób. Niech $Y(t) = u^{\alpha}(t)$, wówczas dla $\alpha \neq 0$ drobna modyfikacja wzoru Itô's daje:

$$Y(t) = u_0^{\alpha} + \alpha \int_0^t Y(s)^{1+(\gamma-1)/\alpha} dW(s) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \int_0^t Y(s)^{1+2(\gamma-1)/\alpha} ds. \tag{16}$$

Wzór Itô można zastosować do $f(u(t))$ dla funkcji $f \in C^2(\mathbb{R})$, ale dla $\alpha < 2$, $\alpha \neq 0$, $f(x) = |x|^{\alpha}$ nie jest dwukrotnie różniczkowalna w 0. Modyfikacja obejmuje rozważenie czasów zatrzymania $\sigma_{\epsilon} = \inf\{t : u(t) < \epsilon\}$ i zastosowanie wzoru Itô do $f(u(t \wedge \sigma_{\epsilon}))$. Z porównania z procesami Bessela w wymiarze większym niż 2 w (17) wynika, że $\lim_{\epsilon \to 0} \sigma_{\epsilon} = +\infty$ prawie na pewno.

Dla $\alpha = 1 - \gamma$, gdzie $\gamma \neq 1$,

$$Y\left(\frac{t}{(\gamma-1)^2}\right) = u_0^{1-\gamma} - (\gamma-1) W\left(\frac{t}{(\gamma-1)^2}\right) + \frac{\gamma}{2(\gamma-1)} \int_0^t \frac{1}{Y\left(\frac{r}{(\gamma-1)^2}\right)} dr$$

Teraz niech $\widetilde{W}(t) = -(\gamma-1) W\left(\frac{t}{(\gamma-1)^2}\right)$, tak aby $\widetilde{W}$ był standardowym ruchem Browna i niech $Z(t) = Y\left(\frac{t}{(\gamma-1)^2}\right)$. Następnie

$$Z(t) = u_0^{1-\gamma} + \widetilde{W}(t) + \frac{\left(\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}\right) - 1}{2} \int_0^t \frac{1}{Z(s)} ds \tag{17}$$

aby Z było $\frac{2\gamma-1}{\gamma-1}$ wymiarowym procesem Bessela. Wynika z tego, że dla $\gamma \neq 1$, $u^{1-\gamma}(t) = Z((\gamma-1)^2 t)$. Proces Bessela w wymiarze większym niż 2 jest oddzielony od 0 (patrz Revuz i Yor [29]). Ponieważ $\frac{2\gamma-1}{\gamma-1} > 2$ dla wszystkich $\gamma > 1$, więc z warunku początkowego $u_0 > 0$ wynika, że rozwiązanie u jest dobrze zdefiniowanym nieujemnym lokalnym martyngałem, spełniającym $\sup_{0 \leq t < +\infty} u(t) < +\infty$. Zachodzi następująca asymptotyka:

$$\frac{u^{2(1-\gamma)}(t)}{(\gamma-1)^2 t} \xrightarrow{(d)} Y$$

gdzie zmienna losowa Y ma gęstość:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(2\gamma-1)/(2\gamma-2)}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2\gamma-1}{2\gamma-2}\right)} y^{1/(2\gamma-2)} e^{-y/2} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

Jest to bezpośrednie skalowanie (nienumerowanego) wzoru z wniosku (1.4) na dole strony 441 w Revuz i Yor [29].

Naturalnym pytaniem, które należy zadać, jest to, w jakim stopniu właściwości jednowymiarowego równania są zachowywane w obecności mieszania. Na przykład, rozważmy operator A

zdefiniowany na funkcjach określonych na przestrzeni przeliczalnej $\mathcal{X}$ taki, że $\sum_{y\in\mathcal{X}} A_{x,y} = 0$ dla każdego $x \in \mathcal{X}$, i układ stochastycznych równań różniczkowych:

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \sum_y A_{x,y} u(s,y) ds + \int_0^t u(s,x)^\gamma dW^{(x)}(s) \tag{18}$$

gdzie $u_0(x) > 0$ dla każdego x i $(W^{(x)})_{x\in\mathcal{X}}$ są niezależnymi procesami Wienera, każdy z tym samym współczynnikiem dyfuzji. Jak wprowadzone wyżej zależności zmieniają zachowanie układu?

Rozważmy teraz $\{A^{(h)}_{x,y} : x, y \in h\mathbb{Z}\}$, zdefiniowane przez: $A^{(h)}_{hx,h(x+1)} = A^{(h)}_{hx,h(x-1)} = \frac{1}{2h^2}$, $A^{(h)}_{hx,hx} = -\frac{1}{h^2}$, $A^{(h)}_{x,y} = 0$ w przeciwnym razie. Notacja $\mathbb{E}[.]$ będzie używane w całym tekście do oznaczenia wartości oczekiwanej. Dla każdego $x \in h\mathbb{Z}$, niech $(W^{(h,x)})_{x\in h\mathbb{Z}}$ będzie niezależnym procesem Wienera spełniającym

$$\mathbb{E}\left[W^{(h,x)}(t)\right] \equiv 0 \quad \text{i} \quad \mathbb{E}\left[W^{(h,x)}(s)W^{(h,x)}(t)\right] = (s \wedge t)\frac{1}{h}.$$

Zwróćmy uwagę, że dyfuzja niezależnych procesów Wienera zmienia się, gdy $h \to 0$. Ponadto, dla $f \in C^2(\mathbb{R})$ (funkcje dwukrotnie różniczkowalne), $\lim_{h\to 0} A^{(h)} f = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} f$. Operator $A^{(h)}$ jest dyskretnym laplasjanem na siatce $h\mathbb{Z}$, a jego granicą jest operator $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ (laplasjan na $\mathbb{R}$). Formalnie równanie graniczne (18) przy $h \to 0$, gdy $A^{(h)}$ jest wstawione w miejsce A i $W^{(h,\cdot)}$ jest wstawione w miejsce $W^{(\cdot)}$, jest równaniem (12), gdzie ξ jest białym szumem w czasie/przestrzeni i końcowy wyraz (12) jest zdefiniowany wedle teorii miar martyngałowych zgodnie z Walshem [32].

Równanie (12), z $\gamma > 1$, ale innym warunkiem na zmienną przestrzenną, zostało dobrze zbadane; główne wyniki pochodzą z Mueller [24], Mueller i Sowers [25], Mueller [26] oraz Mueller [27], a także Krylov [18]. W pracach [24], [25] [26] i [27] rozważane jest równanie z nieujemnym i ciągłym warunkiem początkowym $u(0,x)$ i warunkami brzegowymi Dirichleta $u(t,0) = u(t,J) = 0$ oraz rozwiązania dla $t > 0$ i $0 \leq x \leq J$.

Shiga [31] rozważa równanie na $\mathbb{R}$ dla różnych zakresów γ. Dla $\gamma \geq 1$, wskazuje na *własność silnej dodatniości*, wykazanej w Mueller [23]; jeśli warunek początkowy jest nieujemny i ściśle dodatni na zbiorze miar dodatnich, to rozwiązanie jest ściśle dodatnie do czasu eksplozji normy L^∞.

Shiga [31] rozważa przybliżone równania z ucięciem $(u \wedge n)^\gamma$. Równanie przybliżające to:

$$\begin{cases} u^{(n)}_t = \frac{1}{2} u^{(n)}_{xx} + (u^{(n)} \wedge n)^\gamma \xi \\ u^{(n)}(0,x) = u_0(x) \wedge n \end{cases} \tag{19}$$

Zgodnie z twierdzeniem 2.3 w Shiga [31], równanie (19) ma jednoznaczne rozwiązanie, które jest nieujemne dla skończonych wartości n. Dlatego każde rozwiązanie (12) otrzymane jako granica $u^{(n)}$ spełniających (19) będzie nieujemne. Shiga bierze pod uwagę przestrzeń stanów $\mathbb{R}$; rozumowanie dla $\mathbb{S}^1$ jest takie samo. Walsh dowodzi istnienia, jednoznaczności oraz regularności rozwiązań równań podobnych do (19) ([32], Twierdzenie 3.2 i wniosek 3.4). Jego wyniki dotyczące regularności zależą od warunku początkowego

W [24] uzasadniono istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania (12) dla $1 \leq \gamma < \frac{3}{2}$. Rozwiązania (12) zgadzają się z rozwiązaniami (19) do czasu $\sigma_n = \inf\{t : \sup_x u(t,x) \geq n\}$. Mamy istnienie, jednoznaczność oraz ciągłość do czasu $\sigma = \lim_{n\to+\infty} \sigma_n$ i wtedy pokazuje się, że $\mathbb{P}(\sigma = +\infty) = 1$ dla $\gamma < \frac{3}{2}$, gdzie $\mathbb{P}$ oznacza miarę prawdopodobieństwa.

W [25] Mueller i Sowers badają równanie (12) ponownie z warunkami brzegowymi Dirichleta i tymi samymi założeniami na warunki początkowe. W [25] rozważana jest $\gamma > \frac{3}{2}$ i, dla tak samo zdefiniowanego σ, pokazano że istnieje $\gamma_0 \geq \frac{3}{2}$ taka, że dla $\gamma > \gamma_0$ mamy $\mathbb{P}(\sigma < +\infty) > 0$. Wykorzystane podejście polega na powiązaniu rozwiązania z procesem gałązkowym, gdzie duże „piki" są traktowane jako cząstki w procesie gałązkowym, a potomstwo to piki, które są pewien czynnik wyższe. Uzasadniono, że dla $\gamma > \gamma_0$, wartość oczekiwana liczby potomstwa jest większa niż jeden. Wynika z tego, że proces gałązkowy przetrwa z dodatnim prawdopodobieństwem, co odpowiada $\sigma < +\infty$. Zdarzenie $\{\sigma < +\infty\}$ odpowiada zdarzeniu $\{\lim_{t\uparrow\sigma} \|u(t,.)\|_\infty = +\infty\}$. W Mueller [27], techniki z [25] zostały poprawione, aby pokazać, że dla wszystkich $\gamma > \frac{3}{2}$ następuje eksplozja $\|u(t,.)\|_\infty$ w skończonym czasie z dodatnim prawdopodobieństwem.

Prace Muellera i Sowersa [25] i Muellera [27] pokazują że norma przestrzenna L^∞ eksploduje dla $\gamma > \frac{3}{2}$ z dodatnim prawdopodobieństwem, więc każda technika udowodnienia istnienia rozwiązania opierająca się na długim czasie istnienia normy przestrzennej L^∞ jest skazana na porażkę. Mueller [26] pokazuje lokalne istnienie i jednoznaczność dla równania (12) (z warunkami brzegowymi Dirichleta) z nieograniczonymi warunkami początkowymi, co wskazuje na to, że mogą istnieć rozwiązania L^p poza czasem wybuchu normy L^∞. Ponadto rozważenie jednowymiarowego s.o.d.e. (15) może sugerować, że istnieje dobrze zdefiniowane rozwiązanie z długim czasem istnienia normy L^p dla pewnego $0 < p < +\infty$, ponieważ s.o.d.e. ma dobrze zdefiniowane rozwiązanie z prawdopodobieństwem 1. W tym artykule równanie jest rozpatrywane na $\mathbb{S}^1$, okręgu jednostkowym. To oznacza to, że zmienna przestrzenna przyjmuje swoje wartości w $[0,1]$, gdzie 0 i 1 są utożsamione. Zamiast warunków brzegowych Dirichleta, utożsamia się $u(t,0) = u(t,1)$ i $\frac{d^2}{dx^2}$ jest brane jako laplasjan na $\mathbb{S}^1$. Chociaż w artykule nie ma pełnego dowodu wyników porównujących, $\mathbb{P}(\sigma < +\infty)$ (prawdopodobieństwo wybuchu normy L^∞) powinno być *mniejsze* przy warunkach brzegowych Dirichleta niż na okręgu. Jest to podane jako twierdzenie w załączniku, w którym znajduje się również szkic dowodu.

Załóżmy, że istnieje rozwiązanie równania (12), rozważanego na okręgu jednostkowym, z nieujemnym warunkiem początkowym spełniającym $\int_{\mathbb{S}^1} u(0,x)dx = C$ dla pewnego $C > 0$. Niech $U(t) = \int_{\mathbb{S}^1} u(t,x)dx$. Wtedy $\{U(t) : t \geq 0\}$ jest nieujemnym lokalnym martyngałem, więc z ogólnego wyniku o nieujemnych lokalnych martyngałach (podanego niżej) spełnia: $\sup_{n\geq 1} n\mathbb{P}(\sup_t U(t) > n) \leq K < +\infty$ dla pewnego K. Wynika stąd, że $\int_{\mathbb{S}^1} u(t,x)dx$ jest prawie na pewno ograniczone w czasie. Co więcej, wariacja kwadratowa U jest równa $\langle U\rangle(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^1} u(s,x)^{2\gamma} dxds$. Mueller i Sowers [25], a następnie Mueller [27] pokazują, że z dodatnim prawdopodobieństwem występuje eksplozja normy L^∞ dla $\gamma > \frac{3}{2}$. Mój wkład polega na wykazaniu istnienia rozwiązań w odpowiednich przestrzeniach L^p dla wszystkich $\gamma > 1$; jeśli „proces masy całkowitej" jest dobrze zdefiniowanym lokalnym martyngałem, to jego wariacja kwadratowa jest dobrze zdefiniowana i stąd naturalna wartość p przy szukaniu rozwiązań w L^p to $p = 2\gamma$.

3.3 Zarys dowodów

Sekcja 2 przedstawia niektóre z kluczowych nierówności martyngałowych, które zostały użyte; równania przybliżające

$$u^{(n)}(t,x) = P_t(u_0(x) \wedge n) + \int_0^t \int_{\mathbb{S}^1} p(t-s, x-y)(u^{(n)}(s,y) \wedge n)^\gamma W(dy, ds)$$

gdzie (oczywiście) proces 'masy całkowitej' $U^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{S}^1} u^{(n)}(t,x)dx$ jest martyngałem z wariacją kwadratową

$$\langle U^{(n)}, U^{(n)} \rangle(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{S}^1} (u^{(n)}(s,y) \wedge n)^{2\gamma} dyds.$$

Fakt, że mamy w związku z tym *jednostajne* ograniczenia na $\mathbb{E}\left[\sup_t U^{(n)}(t)^\alpha\right]$ dla $\alpha \in (0,1)$ jest prostym zastosowaniem nierówności Burkholdera–Davisa–Gundy'ego, dających jednostajne ograniczenia (niezależne od n) na

$$\mathbb{E}\left[\langle U^{(n)}, U^{(n)} \rangle^{\alpha/2}(+\infty)\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^1} u^{(n)}(t,x) \wedge n)^{2\gamma} dxdt\right)^{\alpha/2}\right]$$

dla $\alpha < 1$. To względnie proste, jednak kluczowe dla pokazania że ciąg $u^{(n)}$ ma podciąg zbieżny (w odpowiednim sensie) i, co najważniejsze, że granica spełnia równanie graniczne. Istnienie granicy nie jest wymagającym wynikiem; pokazanie, że granica spełnia równanie graniczne stanowi większe wyzwanie.

Zauważmy, że nierówności martyngałowe dają ograniczenia tylko dla $\alpha < 1$. Teoria stochastycznych równań różnieczkowych cząstkowych Walsha, opracowana w drobiazgowych szczegółach w [32], przedstawiona jest w sytuacji, gdy wszystko podporządkowane jest przestrzeni L^2, jednak tutaj a priori nie mamy jednostajnych ograniczeń w L^2. Dlatego w sekcji 3 przeformułowuje się kluczowe elementy teorii Walsha, w sposób dający odpowiednio delikatne rozszerzenie, tak aby zaprezentowane konstrukcje i wyniki znajdowały zastosowanie w naszej sytuacji. Ta sekcja ma raczej rutynowy charakter, jednak jest ważna, aby ustalić podłoże teoretyczne, w którym wszystko jest dobrze zdefiniowane.

3.3.1 Istnienie

W sekcji 4 podaję formalną definicję rozwiązania i udowadniam jego istnienie. Dowód istnienia składa się z 5 kroków

Uwaga na temat „słabej zbieżności” Najpierw wyjaśnię termin *słabej zbieżności*, którym się posługuję. Nie ma on nic wspólnego z probabilistycznym pojęciem „słabej zbieżności”, które odnosi się do zbieżność rozkładów prawdopodobieństwa. To *mogłoby* być podejście do problemu; pokaż słabą zbieżność $u^{(n)}$ (w probabilistycznym sensie zbieżności rozkładów), następnie użyj twierdzenia Skorohoda, aby uzyskać ciąg $\widetilde{u}^{(n)}$ gdzie dla każdego n $\widetilde{u}^{(n)}$ ma taki sam rozkład jak $u^{(n)}$ i gdzie wszystkie $\widetilde{u}^{(n)}$ są zdefiniowane na tej samej przestrzeni prawdopodobieństwa i prawie na pewno zbieżne do granicy $\widetilde{u}$, jednak problem z tym podejściem jest taki, że wynik Skorohoda nie mówi nam absolutnie nic o nowej przestrzeni prawdopodobieństwa, na przykład czy faktycznie dopuszcza *arkusz Wienera* (*Wiener sheet*), a nawet jeśli tak, to czy $\widetilde{u}^{(n)}$ są rozwiązaniami dla stochastycznych równań różniczkowych cząstkowych na tej przestrzeni.

Skoro więc mamy już dobrze zdefiniowaną przestrzeń prawdopodobieństwa, ciąg s.p.d.e. spełnianych przez $(u^{(n)})_{n\geq 1}$ jest dobrze zdefiniowany na tej przestrzeni, chcielibyśmy pozostać na *tej samej* przestrzeni prawdopodobieństwa przez cały czas. Pojęcie *słabej zbieżności* odnoszące się do ciągów w refleksywnych przestrzeniach Banacha jest zatem bardziej odpowiednie niż probabilistyczne pojęcie słabej zbieżności, więc konstruuję odpowiednią refleksywną przestrzeń Banacha. Rozważam $U^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{S}^1} u^{(n)}(t,y)dy$, ciąg martyngałów i znajduję odpowiednią refleksywną przestrzeń Banacha dla tych martyngałów, z których wyodrębniam podciąg słabo zbieżny (gdzie słowo „słabo” jest wzięte w klasycznym rozumieniu Banacha). Następnie stosuje się klasyczny lemat Mazura, aby uzyskać *silnie zbieżne* kombinacje wypukłe.

Krok 1 Konstrukcję takiej refleksywnej przestrzeni Banacha otrzymujemy zauważając, że dla każdego $\alpha < 1$ istnieje stała $C(\alpha) < +\infty$ taka, że

$$\sup_n \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^1} \left(u^{(n)}(t,x)\wedge n\right)^{2\gamma} dxdt\right)^{\alpha/2}\right] < C(\alpha)$$

z racji tego, że $\int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^1} \left(u^{(n)}(t,x)\wedge n\right)^{2\gamma} dxdt$ jest wariacją kwadratową nieujemnego martyngału, z jednostajnym ograniczeniem na $\int u_0(x)dx$ dotyczącym warunków początkowych.

Jeśli przyjmiemy $\widehat{W}^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{S}^1}(u^{(n)}(t,x)\wedge n)dx$ to biorąc $\alpha = \frac{1+\gamma}{2\gamma} < 1$, oczywiste jest, że mamy jednostajne ograniczenie górna $K < +\infty$ dla

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\mathbb{E}\left[\widehat{W}^{(n)1+\frac{\gamma-1}{2}}(t)\right]dt < K.$$

Zauważmy, że dla $\gamma > 1$, $\frac{\gamma-1}{2} > 0$ prowadzi to naturalnie do przestrzeni Banacha $\mathcal{R}$ z normą:

$$\|F\|_{\mathcal{R}} := \left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\mathbb{E}[|F|^{(1+\gamma)/2}(t)]dt\right)^{2/(1+\gamma)}$$

oraz funkcjonałami liniowymi zdefiniowanymi jako:

$$\Lambda_G(F) = \int_0^\infty \mathbb{E}[F(t)G(t)]dt$$

dla G spełniającego

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\mathbb{E}[|G|^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}(t)]dt < +\infty.$$

Mamy zatem przestrzeń L^p, gdzie $p = \frac{1+\gamma}{2} > 1$ oraz jej przestrzeń dualną L^q, gdzie $q = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} < +\infty$. Przestrzeń jest zatem refleksywna, a zatem słabo zwarta, tak więc występuje słabo zbieżny podciąg $(\widehat{W}^{(n_j)})_{j\geq 1}$ ze słabą granicą, którą nazywamy U. Oznacza to, że dla każdego G w przestrzeni dualnej,

$$\lim_{j\to+\infty} \Lambda_G(\widehat{W}^{(n_j)}) = \Lambda_G(U).$$

Z lematu Mazura otrzymujemy zatem *silnie* zbieżne kombinacje wypukłe

$$\widehat{V}_k = \sum_{j=k}^{f(k)} \alpha_{kj}\widehat{W}^{(n_j)}$$

takie, że

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}\mathbb{E}[|\widehat{V}_k(t) - U(t)|^{(1+\gamma)/2}]dt = 0.$$

Nas interesują jednak $U^{(n)}$, a nie $\widehat{W}^{(n)}$; są dodatkowe kwestie, które muszą być kontrolowane;

$$U^{(n)}(t) = \widehat{W}^{(n)}(t) + E^{(n)}(t)$$

gdzie

$$E^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{S}^1} (u^{(n)}(t,x) - n)\mathbf{1}_{u^{(n)}(t,x)\geq n}dx.$$

Dla silnie zbieżnych kombinacji wypukłych bierzmy

$$\widetilde{V}_k(t) = \sum_{j=k}^{f(k)} \alpha_{kj}U^{(n_j)}(t) = \widehat{V}_k(t) + D_k(t)$$

gdzie

$$D_k(t) = \sum_{j=k}^{f(k)} \alpha_{kj}E^{(n_j)}(t)$$

Składniki D_k są rzeczywiście małe i $D_k \to 0$ w odpowiednim sensie, jednak udowodnienie tego zajęło mi 6 stron z udziałem rachunku Itô, przy czym należało zachować ostrożność, aby kontrolować składniki, które powinny zbiegać do 0. Być może istnieją „miękkie" wyniki, przy pomocy których można dowieść tego łatwiej i szybciej, jednak nie mogłem takich znaleźć.

„Małe" składniki są kontrolowane kosztem zmiany potęgi, do której podnoszę wyrażenie wewnątrz wartości oczekiwanej; ostatecznie w równanie (37) dostaję

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^2}|\widetilde{V}_k(t)-U(t)|dt\right)^{\alpha/2}\right] \stackrel{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \alpha\in(0,1). \tag{20}$$

Krok 2 : Pokazanie, że słaba granica jest martyngałem lokalnym.

Taka jest treść Lematu 19. Ponieważ każdy $\widetilde{V}_k$ jest lokalnym martyngałem, byłoby zaskakujące, gdyby jego granica U, rozumiana w tym sensie, *nie* była lokalnym martyngałem, ale przyjęte rozumienie zbieżności nie jest wystarczająco silne, aby wyciągnąć taki wniosek bezpośrednio.

Po pierwsze, pokazane jest, że istnieje podciąg $\widetilde{V}_{k_i}$ taki, że $|\widetilde{V}_{k_i}(t)-U(t)|$ zbiega punktowo do 0 prawie na pewno względem $\mathbb{P}\times\frac{dt}{(1+t)^2}$ a zbieżność jest prawie jednostajna. Z tego powodu rozważam

$$U(t) := \liminf_{i\to+\infty}\widetilde{V}_{k_i}(t)$$

i to spełnia (20). Następnie rozważam momenty zatrzymania $\sigma_{k,N} := \inf\{t : \widetilde{V}_k(t)\geq N\}$ i $\widetilde{\sigma}_N = \limsup_{k\to+\infty}\sigma_{k,N}$.

Czasy $\sigma_{k,N}$ są momentami zatrzymania. Filtracja jest *prawostronnie ciągła*, stąd $\widetilde{\sigma}_N$ też jest momentem zatrzymania. Ponadto arkusz Wienera jest kanonicznym procesem Fellera, który jest *ciągły*, a więc na mocy twierdzenia Blumenthala i Meyera (Twierdzenie 25.20 w Kallenberg [13]), wszystkie momenty zatrzymania względem filtracji są *przewidywalne*.

Ponadto fakt, że wszystkie momenty zatrzymania względem filtracji arkusza Wienera są *przewidywalne* można łatwo udowodnić za pomocą techniki z Revuz i Yor [29], rozdział 5, sekcja 3. Jest to absolutnie standardowy sposób postępowania dla osób, które pracują z s.p.d.e. związanymi z arkuszami Wienera.

Zatem, z ograniczonej zbieżności, dla każdego N i każdego $A\in\mathcal{F}_s$ i $s\leq t$ otrzymujemy

$$\mathbb{E}\left[\lim_{k\to+\infty}\widetilde{V}_k(\sigma_{k,N}\wedge t)\mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[(U(s)\mathbf{1}_{\{s<\widetilde{\sigma}_N\}}+N\mathbf{1}_{\{t\geq\widetilde{\sigma}_N\}})\mathbf{1}_A\right]$$

oraz

$$\mathbb{E}\left[\lim_{k\to+\infty}\widetilde{V}_k(\sigma_{k,N}\wedge t)\mathbf{1}_A\right] = \mathbb{E}\left[(U(t)\mathbf{1}_{\{t<\widetilde{\sigma}_N\}}+N\mathbf{1}_{\{t\geq\widetilde{\sigma}_N\}})\mathbf{1}_A\right]$$

zatem dla każdego N, $U(t)\mathbf{1}_{\{t<\widetilde{\sigma}_N\}}+N\mathbf{1}_{\{t\geq\widetilde{\sigma}_N\}}$ jest martyngałem. Teraz z przewidywalności momentu zatrzymania (równoważnie: twierdzenia o reprezentacji martyngałowej zgodnie z którym wszystkie martyngały ograniczone względem tej filtracji są ciągłe), mamy

$\lim_{t \nearrow \widetilde{\sigma}_N} U(t) = N$ na $\{\widetilde{\sigma}_N < +\infty\}$ stąd $\widetilde{\sigma}_N = \sigma_N := \inf\{t : U(t) \geq N\}$, zatem U jest lokalnym martyngałem.

Krok 3 Pokazanie, że $\lim_{t \to +\infty} U(t) = 0$.

Po pierwsze, ponieważ $\widetilde{V}_k$ jest nieujemnym martyngałem lokalnym, spełniającym $\widetilde{V}_k(0) \leq U(0)$, mamy

$$\mathbb{E}\left[\langle \widetilde{V}_k, \widetilde{V}_k \rangle^{\alpha/2}(+\infty)\right] < K(\alpha)\mathbb{E}[U(0)^\alpha] < +\infty \qquad \alpha \in (0,1)$$

na mocy nierówności Burkholdera–Davisa–Gundy'ego, gdzie stała $K(\alpha)$ jest uniwersalna.

Pewne standardowe zastosowania twierdzenia o zbieżności ograniczonej i nierówności Jensena (podane w artykule) dają

$$+\infty > K(\alpha)\mathbb{E}[U(0)^\alpha] \geq \mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty U(s)^{2\gamma} ds\right)^{\alpha/2}\right]$$

z czego można wywnioskować krok 3, korzystając z faktu, że martyngał lokalny U ograniczonej z dołu zbiega prawie na pewno do zmiennej losowej $U(+\infty)$.

Krok 4 : Od słabej do silnej zbieżności. W zasadzie jest to konsekwencja twierdzenia Girsanowa. Wcześniej nie widziałem twierdzenia Girsanowa użytego w takim kontekście. Być może dlatego, że wiele pracy w literaturze dotyczącej s.p.d.e. skupia się na słabej zbieżności w sensie zbieżności miar prawdopodobieństwa; nieczęsto chce się zachować ciąg na *tej samej* przestrzeni probabilistycznej. Dlatego nie zostały opracowane techniki dla ciągów z *tą samą* przestrzenią probabilistyczną przy rozważaniu problemów zbieżności.

Martyngał lokalny może być postrzegany jako zamiana miary. Zaczynając od $\mathbb{P}$, rozważamy zmianę miary wywołaną przez U, którą nazywamy $\mathbb{Q}$ i zmianę miary wywołaną przez $U^{(n_j)}$ którą nazywamy $\mathbb{Q}^j(A)$ i rozważamy pochodną Radona Nikodyma $\mathbb{Q}^j$ względem $\mathbb{Q}$. Biorąc $U(t) = U(0)\exp\left\{L(t) - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle(t)\right\}$ i $U^{(n_j)}(t) = U^{(n_j)}(0)\exp\left\{L^j(t) - \langle L^j, L^j\rangle(t)\right\}$, pochodna Radona Nikodyma $\mathbb{Q}^j$ względem $\mathbb{Q}$ jest zdefiniowana przez martyngał lokalny:

$$\exp\left\{(L^j - L)(t) - \frac{1}{2}\langle L^j - L, L^j - L\rangle(t)\right\}.$$

Szczegóły są zamieszczone w artykule; dostajemy *dwie* słabe zbieżności: $L^j - L$ do 0 *i* wariacji kwadratowej $\langle L^j - L, L^j - L\rangle$ do 0 i używając tego możemy wywnioskować *silną* zbieżność $L^j - L$ do 0.

Kluczowym punktem jest dobrze znany wynik (podany w Revuz i Yor [29] Rozdział 8 Sekcja 1, s. 325 - 233), że jeśli M jest martyngałem względem $\mathbb{Q}$, to $\mathcal{M}^j$ zdefiniowane przez $d\mathcal{M}^j = dM - d\langle M, L^j\rangle$ jest martyngałem względem $\mathbb{Q}^j$. Jeśli przyjmiemy $\mathcal{M}^j(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^j}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_t]$ dla pewnego $A \in \mathcal{F}$ i $M(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_t]$, to

$$d\mathcal{M}^j(t) = dM(t) - d\langle M, L^j\rangle(t).$$

Biorąc pod uwagę granice lewej (pewne dodatkowe szczegóły są potrzebne, ale istotne jest to, że kombinacje Mazura dają $\lim_{k\to+\infty}\sum_j \alpha_{kj}\mathcal{M}^j(t) = \mathbb{Q}(A|\mathcal{F}_t))$ i prawej strony (zbieżność lewej strony implikuje $\sum_j \alpha_{kj}L^j \to L$), dostajemy *dwie* zbieżności: $U^{(n_j)} \rightharpoonup U$ (słaba zbieżność) *i* $L^j \rightharpoonup L$ (słaba zbieżność), skąd (dokładne uzasadnienie podane w artykule) otrzymujemy *silną* zbieżność $L^j \to L$.

Z silnej zbieżności $L^j - L$ do 0, razem z tym, że $U(t) \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, dostajemy

$$\lim_{j\to+\infty}\mathbb{E}\left[\sup_t |U^{(n_j)}(t) - U(t)|^\alpha\right] = 0 \qquad \alpha\in(0,1)$$

i, zgodnie z nierównością Burkholdera–Davisa–Gundy'ego, istnienie f takiego, że

$$\lim_{j\to+\infty}\mathbb{E}\left[\left(\int_0^\infty\int_{\mathbb{S}^1}((u^{(n_j)}\wedge n)^\gamma - f)^2(t,x)dxdt\right)^{\alpha/2}\right] = 0 \qquad \alpha\in(0,1)$$

Stąd mamy już wszystko, co jest potrzebne do wykazania istnienia; $u^{(n_j)}(t,x)\wedge n_j$ będący ciągiem Cauchy'ego w odpowiedniej przestrzeni (zdefiniowanej w artykule) zbiegający do funkcji u, podczas gdy $u^{(n_j)\gamma}$ zbiega do u^γ w przestrzeniach, które pozwalają stwierdzić, że obiekt graniczny spełnia graniczne równanie.

3.3.2 Jednoznaczność

W dowodzie istnienia skonstruowałem przekształcenie progresywnie mierzalne względem $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Wskazuje to na fakt, że zachodzi jednoznaczność, ponieważ jej brak zazwyczaj wymaga dodatkowego składnika w formie dodatkowych informacji, niewynikających z wiedzy o arkuszu Wienera, aby określić rozwiązanie.

Nieliniowość u^γ dla $\gamma > 1$ powoduje jednak, że standardowe próby zbliżone do technik z wykorzystaniem lematu Gronwalla nie znajdują tu zastosowania. Dlatego rozważałem rozwiązanie u jako proces Markowa; jeśli weźmiemy dwa różne rozwiązania u i v, para (u,v) to proces Markowa. W tej sekcji wykorzystałem ogólną teorię procesów Markowa, zaczerpniętą z Kallenberga [13], pisząc w sposób jawny generator tego procesu i używając tego aby pokazać, że jeśli $u_0 = v_0$ to $u(t,.) = v(t,.)$ prawie na pewno dla wszystkich $t > 0$.

3.3.3 Wyższe normy

W tej sekcji badałem właściwości $\|u\|_p$ dla większych wartości p. Głównym narzędziem było branie pod uwagę, dla ustalonego t, martyngału (względem s) $(P_{t-s}u_s)_{0\leq s\leq t}$. W ten sposób jedyną techniką, której użyłem, było zastosowanie wzoru It'o do odpowiednich funkcji; potrzebowałem również względnie standardowych oszacowań na jądro ciepła. W ten sposób można było pokazać, że dla *wszystkich* $p > 1$ i *wszystkich* $T < +\infty$ i $\alpha\in(0,\frac{1}{2})$,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T \|u\|_{2p}^\alpha dt\right] < +\infty.$$

4 *Effect of Stochastic Perturbations for Front Propagation in Kolmogorov Petrovskii Piscunov Equations* Stochastic Processes and their Applications 128 no 10 (2018), pp 3531-3557

To chyba najbardziej rutynowy z prezentowanych tutaj artykułów; ergodyczność (a tym samym zbieżność długofalowych średnich) wynika z „miękkich” rezultatów znalezionych u Kallenberga [13].

4.1 Wprowadzenie

Ten artykuł dotyczy równań typu Fishera Kolmogorova Petrovskiego Piscunova w jednym wymiarze przestrzennym, z zaburzeniem stochastycznym:

$$\begin{cases} \partial_t u = \left(\frac{\kappa}{2}u_{xx} + u(1-u)\right) dt + \epsilon u \partial_t \zeta \\ u_0(x) = \mathbf{1}_{(-\infty, -\frac{1}{N}\log 2)}(x) + \frac{1}{2}e^{-Nx}\mathbf{1}_{[-\frac{1}{N}\log 2, +\infty)}(x) \end{cases} \tag{21}$$

gdzie ζ to pole losowe Gaussa, adaptowane do przestrzeni probabilisycznej z filtracją $(\Omega, \mathcal{G}_t, \mathcal{G}, \mathbb{Q})$, spełniające:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\zeta] = 0, \qquad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\zeta(s,x)\zeta(t,y)] = (s \wedge t)\Gamma(x-y)$$

i $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$. Całka stochastyczna jest brana w sensie Itô. Pod uwagę brane są dwie sytuacje: po pierwsze, ζ jest po prostu standardowym procesem Wienera (czyli $\Gamma \equiv 1$): po drugie, $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R})$ i spełnia $\lim_{|z|\to+\infty} |\Gamma(z)| = 0$.

Wyniki są następujące: w pierwszej sytuacji (standardowy proces Wienera: $\Gamma(x) \equiv 1$), istnieje niezdegenerowane wędrujące czoło fali wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{\epsilon^2}{2} < 1$, z asymptotyczną prędkością fali

$$\max\left(\sqrt{2\kappa(1-\frac{\epsilon^2}{2})}, \left(\frac{1}{N}(1-\frac{\epsilon^2}{2}) + \frac{\kappa N}{2}\right)\mathbf{1}_{\{N < \sqrt{\frac{2}{\kappa}(1-\frac{\epsilon^2}{2})}\}}\right);$$

szum spowalnia prędkość fali. Jeśli rozważy się całkę stochastyczną w sensie Stratonowicza, to asymptotyczna prędkość fali jest klasyczną prędkością fali McKeana i nie zależy od ϵ.

Można więc sądzić, że spowolnienie jest wynikiem brania całki w złym sensie i że „właściwy” sens to sens Stratonowicza. Jednak w drugiej sytuacji (szum z kowariancją przestrzenna, która znika do 0 w $\pm\infty$, całka stochastyczna w sensie Itô), wędrujące czoło można zdefiniować dla *wszystkich* $\epsilon > 0$, jego przeciętna prędkość asymptotyczna nie zależy od ϵ, a ponadto jest *klasyczną* prędkością fali niezaburzonego równania KPP.

Tło Gdy $\epsilon = 0$, rozważane równanie sprowadza się do równania poruszającej się fali Fishera Kołmogorowa Pietrowskiego Piskunowa (odtąd FKPP);

$$u_t = \frac{\kappa}{2} u_{xx} + u(1-u)$$

wprowadzonego w 1937 przez Fishera [9] i Kołmogorowa, Pietrowskiego i Piscunova [15]. Od tego czasu poświęcono mu wiele uwagi; probabilistyczną interpretację rozwiązania w kontekście gałązkowego ruchu Browna podał McKean [20] i [21]. Udoskonalenia i bardziej precyzyjny opis asymptotyki podał Bramson [1], co zostało przez niego dalej rozwinięte w [2]. Dla równania FKPP (gdy $\epsilon = 0$ w równaniu (21)), występuje jednoparametrowa rodzina $F_\gamma : \gamma \geq \sqrt{2\kappa}$ rozwiązań wędrującego czoła $F_\gamma(x - \gamma t)$, gdzie $F(x) \simeq e^{-\nu x}$ dla dużych x i $\gamma = \frac{\kappa\nu}{2} + \frac{1}{\nu}$, $\nu \leq \sqrt{\frac{2}{\kappa}}$. Dla stanu początkowego u_0 takiego, że $u_0(x) \leq 1$ dla $x \leq 0$ i $u_0(x) \leq \exp\left\{-\sqrt{\frac{2}{\kappa}}x\right\}$ występuje zbieżność do wędrującego czoła z minimalną prędkością $\gamma_0 = \sqrt{2\kappa}$, w sensie

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left(\lim_{t\to+\infty} |u(t,x) - F_{\gamma_0}(x - g(t))| \right) = 0$$

gdzie $g(t)$ to *marker*, zdefiniowany przez: $u(t, g(t)) = \frac{1}{2}$ i $F_{\gamma_0}(0) = \frac{1}{2}$. Marker spełnia:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{g(t)}{t} = \gamma_0.$$

Wyniki dla prędkości wędrującego czoła, gdy $\Gamma \equiv 1$, są już znane z prac Elworthy'ego, Zhao i Gainesa [8] oraz Øksendala, Våge i Zhao [28], jednak prezentowane tutaj podejście jest inne i wykorzystuje odmienną definicję markera fali, co prowadzi do znacznie bardziej przejrzystego dowodu i nieco mocniejszych wyników. Wynik jest mocniejszy, ponieważ wyśrodkowując wokół $g(t)$, gdzie definiuję $g(t)$ tak, że $u(t, g(t)) \equiv \frac{1}{2}$ (zamiast patrzeć na $g(t)$ postaci $g(t) = \gamma t$), pokazuję że istnieje rozkład graniczny dla $u(t, . + g(t))$; fala jest zdefiniowana asymptotycznie. Główną częścią ustalenia, że fala jest zdefiniowana asymptotycznie, jest zbiór wyników zaczerpniętych z Kallenberga, dając powtarzalność Harrisa i ergodyczność, kiedy odpowiednio spojrzeć na proces; Øksendal, Våge i Zhao nie odwoływali się do takich środków.

Jest (oczywiście) naturalne, że zanik korelacji szumu (tzn. $\lim_{|x|\to+\infty} |\Gamma(x)| = 0$) powinien prowadzić do przyspieszenie fali; przyspieszenie związane z lokalizacją szumu odpowiada rozpadowi Elworthy-Zhao, który jest widoczny dla $\Gamma \equiv 1$.

Motywacja Istnieje wiele sformułowań jednowymiarowego równania Fishera KPP; to, które nas tutaj interesuje, to

$$u_t = \frac{\kappa}{2} u_{xx} + u(r - u).$$

Jest to dobrze zbadane równanie o kilku zastosowaniach. W rozważanym tutaj przykładzie u to gęstość zaludnienia, r jest naturalnym (niehamowanym) tempem wzrostu, które jest spowalniane przez gęstość populacji, konkurującej o te same zasoby. κ to miara dyfuzyjności populacji.

Naturalne jest rozważenie skutków *losowych* perturbacji naturalnego tempa wzrostu, wynikających z niejednolitości *środowiska*; niektóre obszary bardziej sprzyjają wzrostowi populacji niż inne, a środowisko może z czasem ulec zmianie. Podstawowy model dla takiego zjawiska mógłby opierać się na włączeniu efektów losowych poprzez rozważenie: $r(t,x) = 1 + \epsilon\xi^{(\delta)}(t,x)$ gdzie (na przykład) $\xi^{(\delta)}$ jest polem losowym Gaussa, ze średnią zero i kowariancją

$$\mathbb{E}\left[\xi^{(\delta)}(t,x)\xi^{(\delta)}(s,y)\right] = \frac{1}{\delta}\Gamma_0\left(\frac{t-s}{\delta}\right)\Gamma(x-y) \tag{22}$$

gdzie Γ_0 jest gładką funkcją nieujemną, spełniającą $\int \Gamma_0(z)dz = 1$. Ujemny współczynnik wzrostu implikuje że środowisko jest niesprzyjające ludności, a śmiertelność jest wyższa niż wskaźnik urodzeń. To by dało

$$u_t^{(\delta)} = \frac{\kappa}{2}u_{xx}^{(\delta)} + u^{(\delta)}(1-u^{(\delta)}) + u^{(\delta)}\xi^{(\delta)} \tag{23}$$

Teraz niech $\delta \to 0$ i niech ζ oznacza pole losowe Gaussa, ze średnią zero i kowariancją

$$\mathbb{E}[\zeta(s,x)\zeta(t,y)] = (s \wedge t)\Gamma(x-y).$$

Równanie graniczne to:

$$\partial_t u = \left(\frac{\kappa}{2}u_{xx} + u(1-u)\right)dt + \epsilon u \circ \partial\zeta; \tag{24}$$

ostrożna procedura graniczna dałaby całkę stochastyczną *Stratonowicza*. Łatwo jest przejść ze Stratonowicza do Itô; równanie (24) można zapisać jako:

$$\partial_t u = \left(\frac{\kappa}{2}u_{xx} + u(1 + \frac{\epsilon^2\Gamma(0)}{2} - u)\right)dt + \epsilon u\partial\zeta \tag{25}$$

gdzie całka stochastyczna jest w sensie Itô.

Stąd składnik szumu liniowego $\epsilon u\partial\zeta$ powstaje naturalnie, gdy punktem wyjścia jest podstawowy logistyczny model wzrostu FKPP z *szumem środowiskowym*, który wpływa na naturalne tempo wzrostu. Prowadzi to do stochastycznej całki w sensie Stratonowicza, którą można łatwo przekształcić w całkę Itô, zmieniając stałą jak opisano powyżej.

Oczywiście FKPP jest zupełnie podstawowym modelem w tym kontekście i wiele pracy wykonano na bardziej ogólnych równaniach reakcji i dyfuzji $u_t = u_{xx} + f(u)$ do modelowania dynamiki gęstości zaludnienia. Jeśli chodzi o wędrujące czoła, można się spodziewać (na przykład opierając się na argumentach z McKeana [20] dla prędkości fali), że prędkość będzie związana z wykładniczym zanikiem rozwiązania, tak aby wielkość $f'(0)u$ miała znaczenie. Rzeczywiście, w dowodach przedstawionych później, to logarytm rozwiązania i jego zachowanie gdy odległość poza czołem dąży do nieskończoności, ma kluczowe znaczenie dla określenia wykładniczego zaniku i prędkości fali (co sugeruje, że w bardziej ogólnej sytuacji wielkości $f'(0)$ powinna determinować zachowanie). Na przykład, jeśli zaburzone równanie to:

$$u_t = \frac{\kappa}{2} u_{xx} + u(1-u) + \sin(u^{100}\xi^{(\delta)})$$

gdzie $\xi^{(\delta)}$ to szum Gaussa o średniej zero z kowariancją podaną przez (22), wtedy nie będziemy oczekiwać, że to zaburzenie wpłynie na prędkość fali biegnącej, ponieważ $\lim_{u\downarrow 0} \frac{\sin(u^{100}\xi^{(\delta)})}{u} = 0$. Spodziewamy się zatem, że przedstawione techniki można łatwo zmodyfikować, aby poradzić sobie z bardziej ogólnymi sytuacjami i że $f'(0)$ jest najbardziej istotną cechą określającą prędkość wędrującego czoła fali dla zadanego warunku początkowego.

4.2 Metody dowodu

Większość rozumowania przeprowadzana jest w sytuacji, która jest określona w „Rozwiązanie jako proces Fellera" (początek str. 3545, z równaniem oznaczonym (24)). Tak samo jest w obu przypadkach: ζ jako proces Wienera i ζ jako pole losowe Gaussa z zanikającą korelacją przestrzenną. Używamy *podwójnego podejścia Prochorowa*, po pierwsze definiując metrykę Prochorowa D nad przestrzenią rozwiązań $\mathcal{L}$ (metryka D podana przez (26)), a następnie metrykę Prochorowa ρ w przestrzeni rozkładów prawdopodobieństwa nad $(\mathcal{L}, D)$. Zrobiwszy to, możemy powołać się na Kallenberga [13] (Twierdzenie 20.17), aby uzyskać powtarzalność Harrisa i ergodyczność (Twierdzenie 20.12).

Następnie musimy ustalić własności miary wspierającej μ w celu uzyskania prędkości i kształtu fali biegnącej.

$\Gamma \equiv 1$ W pierwszym przypadku, gdy „szum" to jednowymiarowy proces Wienera, możemy wykonać kilka uproszczeń. Najpierw rozważamy v, rozwiązanie równania FKKP z warunkiem początkowym $v_0 \equiv 1$ (Rozwiązanie $v(t)$ *nie będzie* miało w tym przypadku zależności przestrzennej). W Lemacie 2.1 możemy wyrazić wzorem jawnym funkcję generującą momenty dla rozkładu granicznego, z czego od razu widzimy konieczność warunku $\frac{\epsilon^2}{2} < 1$; w przeciwnym razie $v(t) \stackrel{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Jest to konieczny warunek by uzyskać nietrywialny rozkład stacjonarny.

Dla $\frac{\epsilon^2}{2} < 1$ rozważamy $\widetilde{u}(t,x) := \frac{u(t,x)}{v(t)}$. Normalizacja pociąga za sobą $\lim_{x\to-\infty} \widetilde{u}(t,x) = 1$ oraz $\lim_{x\to+\infty} \widetilde{u}(t,x) = 0$ i $\widetilde{u}(t,x)$ nie rośnie w x. Kiedy bierzemy iloraz, szum znika i dostajemy równanie (8), czyli:

$$\begin{cases} \widetilde{u}_t = \frac{\kappa}{2}\widetilde{u} + v\widetilde{u}(1-\widetilde{u}) \\ \widetilde{u}(0,x) = \mathbf{1}_{(-\infty, -\frac{1}{N}\log 2]}(x) + \frac{1}{2}e^{-Nx}\mathbf{1}_{(-\frac{1}{N}\log 2, +\infty)}(x). \end{cases}$$

Następnie rozważamy *marker* $g^{(a)}(t)$ taki, że $\widetilde{u}(t, g^{(a)}(t)) = a$ dla $a \in (0,1)$ i stosujemy miękkie wyniki (podwójnej metryki Prochorowa, twierdzenia Harrisa o powrotach i silną ergodyczność, zaczerpnięte z Kallenberga) do $\widehat{u}(t,x) := \widetilde{u}(t, g^{(a)}(t) + x)$.

Istnienie granicy $\overline{g}^{(a)} := \lim_{t\to+\infty} \frac{g^{(a)}(t)}{t}$ wynika z wyrażenia

$$\dot{g}^{(a)}(t) = -\frac{a(1-a)v(t)}{\widehat{u}_x(t,0)} + \frac{\frac{\kappa}{2}\widehat{u}_{xx}(t,0)}{\widehat{u}_x(t,0)}$$

razem z twierdzeniem ergodycznym. Podobnie, biorąc $\widetilde{\theta} = -(\log \widetilde{u})_x$, istnienie wartości $\widetilde{\theta}_N^{(a)}$ takiej, że

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{t\to+\infty} \widetilde{\theta}(t, g^{(a)}(t) + x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{t\to+\infty} \widetilde{\theta}(t, g^{(a)}(t + x)\right) = \widetilde{\theta}_N^{(a)}$$

wynika z twierdzenia ergodycznego.

Względnie bezpośrednie jest uzasadnienie, że $\overline{g}^{(a)} = \overline{g}$ nie zależy od a. Również, Lemat 2.7 stosuje wzór Feynmana-Kaca do równania na $\widetilde{u}(t, g(t) + x)$. Górne ograniczenie $\overline{g}$ jest uzyskiwane przez usunięcie składnika nieliniowego; łatwo jest uzasadnić równanie (17), czyli:

$$\overline{g} \leq \begin{cases} \sqrt{2\kappa\overline{v}} & N > \sqrt{\frac{2\overline{v}}{\kappa}} \\ \frac{\kappa N}{2} + \frac{\overline{v}}{N} & N \leq \sqrt{\frac{2\overline{v}}{\kappa}} \end{cases}$$

gdzie $\overline{v} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_0^t v(t) = \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[v(t)]$.

Na koniec, z równania na $\widetilde{\theta}$:

$$\dot{g}^{(a)} = -\frac{\kappa}{2}(\log \widetilde{\theta})_x(t, g^{(a)}(t)) + \frac{\kappa}{2}\widetilde{\theta}(t, g^{(a)}(t)) + \frac{v(t)(1-a)}{\widetilde{\theta}(t, g^{(a)}(t))}$$

z którego (wykorzystując to, że $\overline{g}^{(a)}$ nie zależy od a i biorąc $a \nearrow 1$)

$$\overline{g} = \frac{\kappa}{2}\widetilde{\theta}_N + \frac{\overline{v}}{\widetilde{\theta}_N}$$

z którego wynika już nasz rezultat dla przypadku $\Gamma \equiv 1$.

Γ spełniające $\lim_{z\to+\infty} |\Gamma(z)| = 0$ Prędkość fali w poprzednim przypadku była już znana z [28], zatem wyniki dla $\Gamma \equiv 1$ nie były niespodzianką. W drugiej części artykułu porównano to z zachowaniem, gdy występuje *oddzielenie* szumu, i tutaj uzyskanie prędkości fali jest nowym wynikiem.

Ponieważ w szumie występuje zależność przestrzenna, znaczna część zestawu narzędzi opracowanych dla przypadku szumy „sezonowego" (brak zależności przestrzennej) nie może być użyta. Wygodne jest zdefiniowanie markera w inny sposób; $g^{(a)}(t) = \{x : \mathbb{E}[u(t,x)] = a\}$ dla $0 < a < a^* := \sup_x (\liminf_{t\to+\infty} \mathbb{E}[u(t,x)])$. (Zwróćmy tutaj uwagę na wartości oczekiwane, których nie było w przypadku $\Gamma \equiv 1$). Oczywiście, wędrujące czoło nie istnieje, jeśli $a^* = 0$.

Lemat 3.3 pokazuje, że dla warunków początkowych spełniających $+\infty > C \geq \sup_x u_0(x) \geq \inf_x u_0(x) \geq c > 0$, istnieje *co najwyżej* jeden rozkład stacjonarny, który spełnia

$$\inf_x \left(\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[u^{(\gamma)}(t,x)] \right) > 0$$

i tak samo jest dla każdego $\gamma \in \mathbb{R}_+$. To jest intuicyjne; z zachowania „niezakłóconego" równania FKKP (np. McKean [20] i [21]) widzimy, że dla początkowego warunku z zanikaniem $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-\log u_0(x))}{x} = N$, prędkość fali wynosi $\frac{1}{N} + \frac{\kappa N}{2}$ dla małych N, które dążą do $+\infty$ gdy $N \to 0$, zatem dla początkowych warunków zaniku podwykładniczego prędkość czoła fali będzie większa niż jakikolwiek dryf γ.

Aby uzyskać wyniki, staramy się naśladować podejście dla $\Gamma \equiv 1$ i rozważamy $v^{(\gamma)} = -\log u^{(\gamma)}$. Przyjmujemy $w^{(\gamma)} = v_x^{(\gamma)}$. Prosta aplikacja wzoru Itô daje Równanie (30):

$$\begin{cases} \partial_t v^{(\gamma)} = \left(\frac{\kappa}{2} w_x^{(\gamma)} - \frac{\kappa}{2} w^{(\gamma)2} - \gamma w_x^{(\gamma)} - 1 + u^{(\gamma)} + \frac{\epsilon^2 \Gamma(0)}{2} \right) dt - \epsilon \partial_t \zeta \\ \partial_t w^{(\gamma)} = \left(\frac{\kappa}{2} w_{xx}^{(\gamma)} - \frac{\kappa}{2} (w^{(\gamma)2})_x + \gamma w_x^{(\gamma)} - u^{(\gamma)} w_x^{(\gamma)} \right) dt - \epsilon \partial_t \zeta_x \end{cases}$$

Z tego widać, że zasadnicza różnica wpływający na kształt wędrującego czoła (a co za tym idzie prędkości fali) to wyrażenie $w^{(\gamma)2}$ w równaniu na $v^{(\gamma)}$. Teraz, gdy

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[u^{(\gamma)}(t,x)] = 0,$$

przy pewnym dodatkowym wysiłku (względnie standardowym), możemy obliczyć funkcjonał charakterystyczny dla rozkładu granicznego $w^{(\gamma)}(t,.)$ i otrzymujemy

$$\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[w^{(\gamma)}(t,x)] = \mu \quad \text{i} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[w^{(\gamma)}(t,x)^2] = \mu^2 + \frac{\epsilon^2}{\kappa}\Gamma(0).$$

To jest kluczowy punkt dla wykazania różnicy prędkości fal dla dwóch rozważanych przypadków.

Możemy ustalić, że $a^* > 0$, co następnie pozwoli nam rozumować podobnie jak w przypadku $\Gamma \equiv 1$, by uzyskać Twierdzenie 3.2; mianowicie możemy powołać się na twierdzenia ergodyczne z Kallenberga, i użyć $\frac{1}{t}\int_0^t F(X_t)dt \to \mathbb{E}_\mu[F(X)]$ jako funkcjonału F, ergodycznego procesu Fellera X z miarą μ. Twierdzenie 3.2 mówi, że

$$\dot{g}^{(a)} \to \gamma = \begin{cases} \sqrt{2\kappa} & N > \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \\ \frac{\kappa N}{2} + \frac{1}{N} & N \leq \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \end{cases}$$

i, dla wszystkich $a \in (0, a^*)$,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lim_{t\to+\infty} -\frac{\partial}{\partial x}\mathbb{E}\left[\log u(t, g^{(a)}(t)+x)\right]\right) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\kappa}} iN > \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \\ NiN \leq \sqrt{\frac{2}{\kappa}} \end{cases}$$

które są asymptotycznymi wynikami dla klasycznego wędrującego czoła fali FKKP.

References

[1] Bramson, M. [1978]*Maximal Displacement of Branching Brownian Motion* Commun. Pure Appl. Math vol. 31 no. 5 pp. 531 - 581

[2] Bramson, M. [1983]*Convergence of Solutions of the Kolmogorov Equations to Travelling Waves* Mem. Amer. Math. Soc. vol. 44 no. 285

[3] Carr, P.; Madan, D. [1998] *Determining Volatility Surfaces and Option Values from an Implied Volatility Smile* Quantitative Analysis of Financial Markets, Vol II, M. Avellaneda, ed., pp 163 - 191

[4] Carr, P.; Nadtochiy, S. [2017] *Local Variance Gamma and Explicit Calibration to Option Prices* Math. Finance Vol. 27 no. 1 pp 151 - 193

[5] Cox, A.M.G.; Hobson, D.; Obłój, J. [2011]*Time Homogeneous Diffusions with a Given Marginal at a Random Time* ESAIM Probab. Stat. vol. 15 In honour of Marc Yor, suppl., S11 - S24

[6] Dym, H., McKean, H.P. [1976] *Gaussian processes, function theory and the inverse spectral problem* Academic Press, New York, Probability and Mathematical Statistics, vol. 31

[7] Ekström, E.; Hobson, D.; Janson, S.; Tysk, J. [2013] *Can Time Homogeneous Diffusions Produce Any Distribution?* Probability Theory and Related Fields, vol. 155, no. 3-4, pp. 493 - 520

[8] Elworthy, K.D.; Zhao, H.Z.; Gaines, J.G. [1994]*The Propagation of Travelling Waves for Stochastic Generalised KPP Equations* Mathematical and Computer Modelling vol. 20 pp. 131-166

[9] Fisher, R.A. [1937] *The Wave of Advance of Advantageous Games* Ann. Eugenics, vol. 7 pp 353 - 369.

[10] Hirsch, F.; Roynette, B.; Yor, M. [2010] *Constructions of Martingales Associated with Processes Increasing in the Convex Order, via Lévy and Sato Sheets* Expositiones Mathematicae, vol. 28 no. 4, pp. 299 - 324

[11] Jiang, L., Tao, Y. [2001] *Identifying the volatility of underlying assets from option prices* Inverse Probabl. **17** 1 pp 137 - 155

[12] Kac, I.S., Kreĭn, M.G. [1958] *Criteria for the discreteness of the spectrum of a singular string* Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika (2(3)), pp 136 - 153

[13] Kallenberg, O. [2002]*Foundations of Modern Probability* (second edition) Springer

[14] Knignt, F.B. [1981]*Characterisation of Lévy measures of inverse local times of gap diffusions* Seminar on stochastic processes 1981 Progr. Prob. Statist., vol. 1, Birkhauser Boston, Mass pp 53 - 78

[15] Kolmogorov, A.; Petrovskii, I.; Piscounov, N. [1937] *Étude de l'équation de la Diffusion avec Croissance de la Matière et son Application à une Probleme Biologique* Moscow Univ. Bull. Math. 1 pp 1 - 25

[16] Kotani, S.; Watanabe, S. [1982]*Kreĭn's spectral theory of strings and generalized diffusion processes* Functional analysis in Markov processes (Katata / Kyoto 1981) Lecture Notes in Mathematics vol. 923, Springer, Berlin.

[17] Kreĭn, M.G. [1952] *On a generalisation of investigations of Stieltjes* Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) **87** pp 881 - 884

[18] N.V. Krylov *On L^p-theory of stochastic partial differential equations in the whole space* SIAM J. Math. Anal. vol. 27 (1994) pp 313 - 340

[19] Madan, D.B.; Yor, M. [2002] *Making Markov martingales meet marginals: with explicit constructions* Bernoulli **8** pp 509 - 536

[20] McKean, H.P. [1975]*Application of Brownian Motion to the Equation of Kolmogorov Petrovskii Piskonov* Comm. Pure Appl. Math. vol. 28 pp323 - 331

[21] McKean, H.P. [1976]*A Correction to: 'Application of Brownian Motion to the Equation of Kolmogorov Petrovskii Piskunov* Comm. Pure Appl. Math. vol. 29 no. 5 pp. 553 - 554

[22] Monroe, I. [1972] *Using additive functionals to embed preassigned distributions in symmetric stable processes* Trans. Amer. Math. Soc. 163 pp 131 - 146

[23] C. Muller *On the Support of Solutions to the Heat Equation with Noise* Stochastics and Stoch. Rep. 37 (1991), pp. 225-245.

[24] C. Mueller *Long Time Existence for the Heat Equation with a Noise Term* Probab. Theory Relat. Fields vol. 90 (1991) pp. 505 - 517

[25] C. Mueller; R. Sowers *Blowup for the heat equation with a noise term* Probab. Theory Relat. Fields vol. 97 (1993) pp. 287 - 320

[26] C. Mueller *Singular Initial Conditions for the Heat Equation with a Noise Term* Ann. Probab. vol. 24 (1996) no. 1 pp. 377 - 396

[27] C. Mueller *The Critical Parameter for the Heat Equation with a Noise Term to Blow up in Finite Time* Ann. Probab. vol. 28 (2000) No. 4 pp. 1735-1746

[28] Øksendal, B.; Våge, G.; Zhao, H.Z. [2001] *Two Properties of Stochastic KPP Equations: Ergodicity and Pathwise Property* Nonlinearity, vol. 14 no. 3 pp. 639 - 662

[29] Revuz, D.; Yor, M. *Continuous Martingales and Brownian Motion* (third edition) Springer, 1999

[30] Rubinstein, M. [1994] *Implied Binomial Trees* Journal of Finance **49** no 3 pp 771 - 818

[31] Shiga, T. *Two Contrasting Properties of Solutions for One-Dimensional Stochastic Partial Differential Equations* Canad. J. Math. vol. 46 (1994) no. 2 pp. 415 - 437

[32] Walsh, J.B. [1986] *An Introduction to Stochastic Partial Differential Equations* In: Hennequin, P.L. (ed) École d'été de probabilités de Saint-Flour XIV-1984. Lecture Notes in Mathematics vol. 1180 pp. 265 - 439, Springer, Berlin

5. **Prezentacja działalności naukowej za granicą**

   - Wrzesień 2019: Konferencja honorująca Timo Koskiego: wygłosiłem seminarium pt. „Nieparametryczne metody bayesowskiej analizy skupień”
   - Listopad 2014: Seminarium w Instytucie Matematyki, Humboldt Uniwersytet, Berlin (zaproszenie od Petera Imkellera) „Dyfuzja by uzyskać zadany rozkład brzegowy, z uwzględnieniem dryfu i zabijania”

6. **Nauczanie**

Doktoranci

- Łukasz Rajkowski (rozprawa obroniona w grudniu 2021)
  Tytuł pracy: ‘Maximal a posteriori partition in non-parametric Bayesian mixture models with applications to clustering problems’
  Doktorat został nagrodzony „cum laude”.

Kursy

Prowadziłem kilka kursów na MIMUW:

- Statystyka (III rok) Wykłady, ćwiczenia, laboratoria komputerowe
- Statystyka wielowymiarowa (zajęcia magisterskie)
- Szeregi czasowe (zajęcia magisterskie)
- Sieci Bayesowskie (monograf)
- Analiza przeżycia (monograf)
- Seminarium magisterskie (statystyka) w latach 2013-14 i 2014-15 na temat nieparametrycznej statystyki bayesowskiej

Prace magisterskie

Opiekowałem się 11 pracami magisterskimi obronionymi na MIMUW w latach 2012-2022. Warto tu wyróżnić pracę Stanisława Cichomskiego „Coherent Distributions: Examination of some Open Problems”, który zdobył nagrodę.

Prace licencjackie opiekowałem się 2 obronionymi pracami licencjackimi.

7. **Sędziowanie i recenzje**

    - mam 85 opublikowanych recenzji dla „AMS Mathematical Reviews”.
    - recenzowałem artykuły do kilku czasopism, w tym:
        - AIMS Mathematics,
        - ‘Expert Systems with Applications’,
        - ‘Probability and Mathematical Statistics’,
        - ‘Acta Mathematica Scientia’,
        - ‘Journal of Difference Equations and Applications’.

John M. Noble (podpis elektroniczny)
(podpis wnioskodawcy)