

## Autoreferat

Joachim Jelisiejew

**Adres:** Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski,  
Banacha 2, 02-097 Warszawa

**Email:** j.jelisiejew@uw.edu.pl

**www:** <https://www.mimuw.edu.pl/~jjelisiejew/>

### Dyplomy i stopnie naukowe

wrz 2013 Magister matematyki, Uniwersytet Warszawski

Praca magisterska: *Deformacje schematów 0-wymiarowych i ich zastosowania*

promotor: dr hab. Jarosław Buczyński

wrz 2017 Doktorat z matematyki, Uniwersytet Warszawski

Praca doktorska: *Schematy Hilberta punktów i ich zastosowania*, z wyróżnieniem.

promotor: dr hab. Jarosław Buczyński, promotor pomocniczy: dr Weronika Buczyńska

### Dotychczasowe zatrudnienie

paź 19– teraz *adiunkt*, Instytut Matematyki, Uniwersytet Warszawski

paź 17–wrz 19 *adiunkt*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

## Osiągnięcie habilitacyjne

*Uogólnienia rozkładów Białynickiego-Biruli i zastosowania w teorii przestrzeni moduli*

- [Hab1] Joachim Jelisiejew, Łukasz Sienkiewicz  
*Białynicki-Birula decomposition for reductive groups*  
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Volume 131, November 2019, Pages 290-325.  
DOI: [10.1016/j.matpur.2019.04.006](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2019.04.006)
- [Hab2] Joachim Jelisiejew, Łukasz Sienkiewicz  
*Białynicki-Birula decomposition for reductive groups in positive characteristic*  
Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Volume 152, August 2021, Pages 189-210.  
DOI: [10.1016/j.matpur.2021.05.010](https://doi.org/10.1016/j.matpur.2021.05.010)
- [Hab3] Joachim Jelisiejew  
*Elementary components of Hilbert schemes*  
J. London Math. Soc., 100: 249-272 (2019).  
DOI: [10.1112/jlms.12212](https://doi.org/10.1112/jlms.12212)
- [Hab4] Joachim Jelisiejew  
*Pathologies on the Hilbert scheme of points*  
Inventiones mathematicae, 220(2), 581-610, 2020.  
DOI: [10.1007/s00222-019-00939-5](https://doi.org/10.1007/s00222-019-00939-5)
- [Hab5] Joachim Jelisiejew, Klemen Šivic  
*Components and singularities of Quot schemes and varieties of commuting matrices*  
Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), vol. 2022, no. 788, 2022, pp. 129-187.  
DOI: [10.1515/crelle-2022-0018](https://doi.org/10.1515/crelle-2022-0018)

**Szczegółowy opis naukowy osiągnięcia znajduje się na końcu tego dokumentu.**

**Informacja o wykazywaniu się istotną aktywnością naukową realizowaną w więcej niż jednej uczelni, instytucji naukowej, w szczególności zagranicznej**

Po uzyskaniu stopnia doktora przez dwa lata byłem zatrudniony jako adiunkt naukowy w Instytucie Matematyki PAN, a potem jako adiunkt im. Samuela Eilenberga na Uniwersytecie Warszawskim. Odbylem wizyty naukowe do Instytutu Fieldsa (Toronto, Kanada, około jeden miesiąc, wrzesień 2016) jak również do Niemiec: do Instytutu Maxa Plancka w Lipsku oraz do MFO w Oberwolfach (łącznie trzy tygodnie we wrześniu 2019). Odbylem także szereg krótszych wizyt naukowych, które zaowocowały opublikowanymi lub przyjętymi artykułami, których współautorami jest 18 naukowców z różnych instytucji zagranicznych. Dodatkowym plonem wizyt jest wynikająca z nich dobra rozpoznawalność międzynarodowa mojej działalności naukowej, dowiedziona m.in. zaproszeniami na dwie konferencje satelickie ICM 2022 oraz na spotkanie (w 2021 roku) *Stosowana Geometria Algebraiczna* stowarzyszenia *Society for Industrial and Applied Mathematics*.

## Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę lub sztukę

- *Opieka nad studentami.*
  - *Pomocniczy promotor* w doktoracie Łukasza Sienkiewicza, który obronił doktorat z wyróżnieniem 1 grudnia 2021.
  - *Pomocniczy promotor* w doktoracie Tomasza Mańdziuka, który obronił doktorat 8 czerwca 2022.
  - *Promotor pracy magisterskiej* Michała Szachniewicza, który obronił ją 14 lipca 2021 z wyróżnieniem. Za tę pracę zdobył on nagrody [im. Józefa Marcinkiewicza](#) oraz [mFundacji](#).
- *Wykłady.* Liczne wykłady na wydziale MIM UW, w tym dla studentów II stopnia, w szczególności:
  - *Teoria Deformacji i Przestrzeni moduli.* Semestr letni 2019/20.
  - *Algebra Przemienna* na poziomie książki Atiyah-Macdonald. Kilka razy.
  - *Fundamenty Geometrii Algebraicznej* seminarium wedle notatek Raviiego Vakil. Kilka razy.
  - *Zaawansowane narzędzia geometrii algebraicznej*, w programie m.in. dualność Serre’a z dowodem, twierdzenie o aproksymacji Artina, twierdzenie o znikaniu Kodaira wedle artykułu Deligne-Illusie. Semestr letni 2021/22.

Szczegółowe informacje o wykładach dostępne na stronie <https://www.mimuw.edu.pl/~jjelisiejew/former-teaching.html>

- *Notatki Algebra Przemienna*, 110 stron. Jeśli odzew będzie pozytywny, zamierzam je opublikować.
- *Organizacja wydarzeń naukowych, wybrane.*
  - Młodszy/techniczny organizator *Polskiego minisemestru Geometrii Algebraicznej* kwiecień – czerwiec 2016. Semestr był finansowany m.in. przez Fundację Simonsa oraz MNiSW.
  - Organizator sesji *Geometria Algebraiczna* podczas Polsko-Włoskiego spotkania towarzyszt matematycznych we wrześniu 2018.
  - Współorganizator *Kolokwium młodych naukowców* w IM PAN w roku akademickim 2018/19.
  - Główny organizator warsztatów *Algebraic Group Days*, Warszawa, grudzień 2019.
  - Współorganizator seminarium naukowego *Geometria Algebraiczna* na MIM UW, od września 2021.

- Główny organizator semestru *Geometria Algebraiczna z zastosowaniami w teorii tensorów i rozmaitości siecznych*, wrzesień – grudzień 2022. Semestr był finansowany m.in. przez fundację Simonsa oraz Narodowe Centrum Nauki.
- *Popularyzacja.*
  - *Konkurs Matematyczny Politechniki Białostockiej*. Jeden z głównych organizatorów, maj 2009 – teraz (13 edycji). <http://konkurs.wi.pb.edu.pl>
  - *Olimpiada Matematyczna*. Członek Komisji Zadaniowej, 2016-2019.
  - *Olimpiada Matematyczna Juniorów*. Członek Komitetu Głównego, od września 2019.
  - *Stowarzyszenie na rzecz edukacji matematycznej*. Redaktor i autor artykułów do dwóch zbiorów zadań z kółek matematycznych.
- *Członkostwo w gremiach.*
  - Panel doradczy konferencji *Effective Methods in Algebraic Geometry*. Od czerwca 2022.

### Inne informacje.

#### *Wybrane stypendia i nagrody.*

1. Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnego młodego naukowca, 2022–25.
2. Stypendium START Fundacji Nauki Polskiej, 2020.
3. Nagroda im. Kazimierza Kuratowskiego, IM PAN i PTM, 2019.
4. Nagroda Premiera za pracę doktorską, 2018.

## Szczegółowy opis osiągnięcia naukowego

### 1.1. Zarys wyników

W pracach składających się na osiągnięcie rozważam problemy na przecięciu algebry przemiennej oraz geometrii algebraicznej. Od strony technicznej, głównym narzędziem jest teoria deformacji.

W tej serii artykułów opisuję uogólnienia rozkładu Białynickiego-Biruli (prace [Hab1-Hab2](#)) oraz używam ich do badania bardzo osobliwych przestrzeni takich jak schematy Hilberta ([Hab3-Hab4](#)) i Quot ([Hab5](#)) punktów.

Klasyczny rozkład Białynicki-Birula konstruuje się dla gładkiej właściwej rozmaitości z działaniem  $\mathbb{G}_m$ . Drinfeld podał funktorialny opis tego rozkładu i skonstruował go dla działania  $\mathbb{G}_m$  na dowolnym schemacie skończonego typu. Główny wynik ([Hab1](#))-([Hab2](#)) jest uogólnieniem do działania innych grup algebraicznych na noetherowskim schemacie. W pracy ([Hab1](#)) są to grupy liniowo reduktywne, zaś w pracy ([Hab2](#)) są to grupy elementów odwracalnych w monoidach Kempfa; ta klasa zawiera wszystkie geometrycznie reduktywne grupy (w dodatniej charakterystyce jest to dużo większa klasa niż grupy liniowo reduktywne). Konstrukcja rozkładu używa algebraizacji pewnego schematu formalnego z pomocą dualności Tannaki. To podejście jest nowe nawet w przypadku  $\mathbb{G}_m$ .

Praca ([Hab3](#)) jest, chronologicznie, najstarsza z cyklu. Wprowadza on rozkład Białynickiego-Biruli schematu Hilberta punktów i używa go do znalezienia nowych składowych tego schematu. Topologia schematu Hilberta jest bardzo bogata lecz słabo zrozumiana; przed pracą ([Hab3](#)) znano tylko kilka jego składowych nieprzywiedlnych mimo badań trwających co najmniej od 1978 [[IE78](#)]. Artykuł ([Hab3](#)) podaje łatwe do policzenia kryteria znajdowania nowych nieprzywiedlnych składowych i pozwolił radykalnie zwiększyć liczbę znanych składowych.

Praca ([Hab4](#)) dowodzi, że dla schematu Hilberta punktów na  $\mathbb{A}^{16}$  zachodzi tzw. *Prawo Murphy’ego* z dokładnością do retrakcji: z dokładnością do retrakcji każdy typ osobliwości otrzymujemy w pewnym jego punkcie. Prawo Murphy’ego pokazuje, że schemat Hilberta punktów jest niezredukowany, co zamyka pytanie otwarte Fogarty’ego z 1968 (see [[Fog68](#), str.520], [[Ame10](#), Problem 1.25], [[CEVV09](#)]); to pytanie było uważane za najważniejszy problem otwarty dotyczący schematu Hilberta punktów. To samo prawo Murphy’ego implikuje, że dla każdej dodatniej charakterystyki  $p$  istnieją schematy skończone nad  $\mathbb{Z}/p$  które nie podnoszą się do charakterystyki zero. Pytanie o ich istnienie zadał Hartshorne [[Har10](#), str.148], patrz też [[Ame10](#), Problem 1.2], [[Lan18](#)].

W pracy ([Hab5](#)) klasyfikujemy składowe schematu Quot punktów w przypadku co najwyżej 7 punktów (przed tą pracą nieznanymi były żadne nietrywialne składowe). Konstruujemy również generycznie niezredukowaną składową schematu Quot 8 punktów (taka składowa w przypadku schematu Hilberta nie jest znana). Głównym technicznym wynikiem pracy jest jawny wzór na tzw. prymarną przeszkodę dla schematu Quot.

Motywacja do badania schematów Hilberta punktów pochodzi z klasycznego problemu klasyfikowania skończenie wymiarowych algebr jak i z zastosowań w teorii tensorów, patrz §1.2.3 i złożoności obliczeniowej. Motywacją dla uogólnień rozkładu Białynickiego-Biruli, szczególnie tych w ([Hab2](#)), jest geometryczna teoria reprezentacji, która zmotywowała również Drinfelda [[DG14](#)].

W opisie poniżej przedstawiam stan wiedzy przed powyższym cyklem prac oraz wyjaśniam jak główne wyniki i idee pięciu prac plasują się w badaniach na rozkładem Bia-

lynickiego-Biruli oraz geometrią schematów Hilberta i Quot punktów. W szczególności omijam wiele ich ważnych lecz bardziej technicznych wyników. Zainteresowanego nimi Czytelnika niestety odsyłam do wstępów odnośnych pięciu prac.

## 1.2. Stan wiedzy przed cyklem prac

**1.2.1. Rozkład Białynickiego-Biruli.** Klasyczny rozkład Białynickiego-Biruli [BB73] jest algebraicznym odpowiednikiem teorii Morse'a [Bot88]. Dla danej rozmaitości  $X$  z działaniem jednowymiarowego torusa  $\mathbb{G}_m$  dzieli on punkty  $X$  w zależności od tego, gdzie leży ich granica w zerze (lub w nieskończoności). Sytuacja różni się nieco od tej w teorii Morse'a: nie mamy funkcji Morse'a, a działa jednowymiarowy torus.

Rozkład Białynickiego-Biruli jest standardowym narzędziem badania geometrii i topologii *gładkiej* rozmaitości algebraicznej z działaniem  $\mathbb{G}_m$ . Ustalmy zatem gładką właściwą rozmaitość  $X$  nad ciałem  $\mathbb{k}$  oraz działanie na niej jednowymiarowego torusa  $\mathbb{G}_m := \text{Spec } \mathbb{k}[t^{\pm 1}]$ . Dla  $\mathbb{k}$ -punktu  $x \in X$  jego odwzorowanie orbity  $\mu: \mathbb{G}_m \rightarrow X$  jednoznacznie przedłuża się do funkcji  $\bar{\mu}: \mathbb{P}^1 \rightarrow X$  która daje dwa dodatkowe  $\mathbb{k}$ -punkty  $\bar{\mu}(0)$ ,  $\bar{\mu}(\infty)$  które są stałe dla działania  $\mathbb{G}_m$ . Zatem otrzymujemy dwa teoriozbiorowe przypisania na  $\mathbb{k}$ -punktach

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot (-): X(\mathbb{k}) \ni x \mapsto \bar{\mu}(0) \in X^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{k}) \quad (1.1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot (-): X(\mathbb{k}) \ni x \mapsto \bar{\mu}(\infty) \in X^{\mathbb{G}_m}(\mathbb{k}) \quad (1.2)$$

Nie są one ciągłe: już dla  $X = \mathbb{P}^1$  ze standardowym działaniem  $\mathbb{G}_m$  zachodzi

$$\lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \neq \infty \\ \infty & \text{dla } x = \infty. \end{cases}$$

Wynik Białynickiego-Biruli można streścić mówiąc, że brak ciągłości jest jedyną przeszkodą do tego, by (1.1)-(1.2) były morfizmami rozmaitości. Załóżmy, że  $\mathbb{k}$  jest algebraicznie domknięte. Na mocy wyniku Iversena podschemat  $X^{\mathbb{G}_m}$  jest gładki. Niech  $F_1, \dots, F_r$  będą jego składowymi. Definiujemy dodatnie (odpowiednio, ujemne) *komórki Białynickiego-Biruli* jako

$$X_i^+(\mathbb{k}) := \left\{ x \in X(\mathbb{k}) \mid \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot x \in F_i \right\} \quad (1.3)$$

$$X_i^-(\mathbb{k}) := \left\{ x \in X(\mathbb{k}) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x \in F_i \right\} \quad (1.4)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, r$ .

**Twierdzenie 1.1** (rozkład Białynickiego-Biruli [BB73]). *Dla każdego  $i = 1, 2, \dots, r$  istnieją gładkie lokalnie domknięte podrozmaitości  $X_i^+$ ,  $X_i^-$  w  $X$  takie, że zbiory  $\mathbb{k}$ -punktów  $X_i^+$  oraz  $X_i^-$  są zgodne z (1.3)-(1.4). Istnieją ponadto algebraiczne odwzorowania*

$$\lim_{t \rightarrow 0}: X_i^+ \rightarrow F_i \quad (1.5)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty}: X_i^- \rightarrow F_i \quad (1.6)$$

które na  $\mathbb{k}$ -punktach indukują odwzorowania granic opisane powyżej. Wreszcie, odwzorowanie  $\lim_{t \rightarrow 0}$  jest rozwłóknieniem przestrzeniami afinicznymi: istnieje pokrycie  $F_i$  zbiorami otwartymi w topologii Zariskiego  $(U_{ij})$  oraz izomorfizmy  $\lim_{t \rightarrow 0}^{-1}(U_{ij}) \simeq \mathbb{A}^{n_i^+} \times U_{ij}$  dla pewnego  $n_i^+$  takie, że diagram

$$\begin{array}{ccc} X_i^+ \supseteq \lim_{t \rightarrow 0}^{-1}(U_{ij}) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{A}^{n_i^+} \times U_{ij} \\ & \searrow \lim_{t \rightarrow 0} & \swarrow \text{pr}_2 \\ & & U_{ij} \end{array}$$

jest przemienny. To samo zachodzi dla  $\lim_{t \rightarrow \infty}$ . (Nie implikuje to, że  $X_i^+ \rightarrow F_i$  jest wiązką wektorową, bowiem odwzorowania przejścia nie muszą być liniowe.)

Istota twierdzenia jest widoczna już dla przypadku  $\dim X^{\mathbb{G}_m} = 0$ , gdzie każda podrozmaitość  $F_i$  jest punktem, a zatem  $X(\mathbb{k}) = \bigsqcup \mathbb{A}^{n_i^+}(\mathbb{k})$  jako zbiory. De facto, otrzymujemy dwa takie rozkłady, za pomocą  $X_i^+$  oraz  $X_i^-$ . Przykładowe zastosowania rozkładu Białynickiego-Biruli to rozkład Bruhat oraz wyniki Ellingsruda-Strømme [ES87] dotyczące gładkich schematów Hilberta.

Liczby  $n_i^+$  można wyznaczyć następująco. Niech  $X^- := \coprod_i X_i^-$  oraz  $X^+ := \coprod_i X_i^+$ . Z gładkości wynika, że dla każdego  $x \in F_i(\mathbb{k})$  zachodzi  $n_i^+ = \dim_{\mathbb{k}} T_x X^+ - \dim_{\mathbb{k}} T_x X^{\mathbb{G}_m}$  i podobnie  $n_i^- = \dim_{\mathbb{k}} T_x X^- - \dim_{\mathbb{k}} T_x X^{\mathbb{G}_m}$ . Skoro  $x$  jest  $\mathbb{G}_m$ -stały, to torus  $\mathbb{G}_m$  działa na  $T_x X$ , a zatem ta przestrzeń jest  $\mathbb{Z}$ -zgradowana. Oznaczamy przez  $(T_x X)_{<0}$ ,  $(T_x X)_{>0}$  jej ściśle dodatnią i ściśle ujemną część. W [BB73] dowiedziono, że

$$T_x X^+ = (T_x X)_{<0} \hookrightarrow T_x X \quad \text{and} \quad T_x X^- = (T_x X)_{>0} \hookrightarrow T_x X, \quad (1.7)$$

Nieintuicyjna zamiana znaków wynika z faktu, że to przestrzeń *kostyczna* gra główną rolę oraz  $(T_x X)_{<0}^\vee \simeq (T_x^\vee X)_{>0}$ .

Jeśli rozmaitość  $X$  jest nie tylko właściwa, ale rzutowa, to wkłada się ona ekwiwariantnie w przestrzeń rzutową  $\mathbb{P}(V)$  dla pewnej  $\mathbb{G}_m$ -reprezentacji  $V$ . Wybierając jedno takie włożenie otrzymujemy porządek częściowy na zbiorach punktów stałych [BB76], co ma następujące konsekwencje dla topologii.

**Twierdzenie 1.2** (homologie rozmaitości za pomocą rozkładu Białynickiego-Biruli, [CS79]).  
Przy notacji jak w Twierdzeniu 1.1 dla  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  oraz  $X$  rzutowego zachodzi

$$H_*(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H_{*-2n_i^+}(F_i(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_{i=1}^r H_{*-2n_i^-}(F_i(\mathbb{C}), \mathbb{Z}).$$

Zastosowania tego wyniku znajdują się w [Car02]. Dowód jest właściwie formalny i, przy pewnym nakładzie pracy, uogólnia się aż do motywów Chow [Kar00, CGM05]. W literaturze nazwa *rozkład Białynickiego-Biruli* odnosi się zarówno do Twierdzenia 1.1 jak i Twierdzenia 1.2, więc podkreślam, że w moim opisie nazwa ta odnosi się do Twierdzenia 1.1.

**1.2.2. Schematy Hilberta punktów.** Schemat Hilberta punktów  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(X)$  schematu  $X$  nad  $\mathbb{k}$  jest przestrzenią moduli, która parametryzuje skończone domknięte podschematy  $R \subseteq X$ , patrz [Ber12, Str96, FGI<sup>+</sup>05]. Dla  $X = \mathbb{A}_{\mathbb{k}}^n$  skonstruować taki podschemat  $R$  to



to samo co skonstruować skończoną  $\mathbb{k}$ -algebrę  $A$  z  $n$  ustalonymi generatorami [Poo08b], zatem zrozumienie (przestrzeni topologicznej  $\mathbb{k}$ -punktów) jest dobrym przybliżeniem klasyfikacji skończonych (przemiennych, łącznych, z jedyną)  $\mathbb{k}$ -algebr. Klasyfikacja ta dla stopni  $\leq 6$  daje skończenie wielu przypadków [Poo08a, Maz80], lecz już dla stopnia co najmniej 7 lista jest nieskończona: pojawiają się tzw. moduli. *Stopień* znaczy tutaj „liczba punktów” i jest zdefiniowany jako  $\dim_{\mathbb{k}} H^0(\mathcal{O}_R)$ . Stopień nie zmienia się przy deformacji, więc  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(X) = \coprod_d \text{Hilb}_d(X)$ , gdzie  $\text{Hilb}_d(X)$  parametryzuje podschematy stopnia  $d$ .

Badania schematu Hilberta dzielą się dość wyraźnie na cztery kierunki. Poniżej krótko omawiam je, podając nieco odnośników, które jednak są wybrane wedle mojego smaku i wiedzy i zdecydowanie nie tworzą jakkolwiek kompletnej listy.

Po pierwsze, bada się schematy Hilberta osobliwych  $X$ , głównie krzywych [AK80, OS12, Ren18, MRV17], motywacja pochodzi z geometrycznej kombinatoryki oraz teorii węzłów.

Dalej jest przypadek gładkich powierzchni, dla których schemat Hilberta jest gładki, jak udowodnił w słynnym artykule Fogarty [Fog68]. Rozważane powierzchnie są zwykle rzutowe i ich globalna geometria jest ważna, np. dzięki przykładom różnicowości hyperkählerowskich uzyskanych przez Beauville’a z powierzchni K3 oraz abelowych [Bea83]. W innym kierunku, Haiman użył  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^2)$  w dowodzie hipotezy  $n!$  i dodatniości współczynników Macdonalda [Hai01, Hai02, Hai03]. Schematy Hilberta w przypadku powierzchni można otrzymać alternatywnie jako różnicowości kołczanowe, co pozwala badać je również dla pewnych prostych klas osobliwości, jak różnicowości ilorazowe [BC20, CGGS21]. Zainteresowaniem cieszą się również podschematy schematu Hilberta, na przykład *punktowy schemat Hilberta* który parametryzuje schematy o nośniku jedynie w ustalonym punkcie [Bri77].

Trzeci kierunek badań, na którym skupiamy się poniżej, jest to przypadek gładkiej różnicowości  $X$  wymiaru większego niż 2. W tym przypadku lokalna struktura jest już osobliwa i skomplikowana, jednak celem jej zbadania można zastąpić  $X$  przez dowolną étalnie równoważną różnicowość, więc większość autorów zakłada  $X = \mathbb{A}^n$  lub  $X = \mathbb{P}^n$ . Dla każdego  $d$  schemat  $\text{Hilb}_d(\mathbb{P}^n)$  jest pokryty kopiami  $\text{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)$ . Poniżej skupiam się na  $\text{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)$  gdy interesuje mnie jedynie lokalna struktura. Wiadomo, że  $\text{Hilb}_d(\mathbb{A}^n)$  jest osobliwy dla wszystkich  $n \geq 3$ ,  $d \geq 4$ . Jest on przywiedlny w ogólności [Iar72], choć spójny [Har66]. Wiele pytań dotyczących tego schematu jest otwartych: na przykład nie jest skonstruowana jakkolwiek składowa (poza wygładzalną, patrz poniżej) dla  $n = 3$ . Można jednak uzyskać interesujące wyniki. Na przykład lokalizacja w sensie topologii połączona z doskonałymi teoriami przeszkód pozwoliła dokonać kilku efektywnych zliczeń w sensie geometrii enumeratywnej, patrz np. [BF08, BBS13].

Centralnym pojęciem topologii  $\text{Hilb}_d(X)$  jest *wygładzalność*. Rozważmy miejsce geometryczne  $\mathcal{L}$  składające się z  $R \subseteq X$  takich, że  $R$  jest gładki (więc geometrycznie  $R$  jest krotką punktów na  $X$ ). To miejsce jest otwarte, a jego domknięcie nazywamy *składową wygładzalną*  $\text{Hilb}_d^{\text{sm}}(X)$  schematu  $\text{Hilb}_d(X)$ . Wynik Fogarty’ego wspomniany wyżej można przeformułować jako stwierdzenie: wszystkie zero-wymiarowe  $R \subseteq \mathbb{A}^2$  są wygładzalne. Wszystkie skończone schematy są wygładzalne dla  $d \leq 7$ , zaś schematy Gorensteina są wygładzalne dla  $d \leq 13$  [CEVV09, CJN15]. Wygładzalność danego schematu jest kluczowa dla zastosowań (patrz §1.2.3). Pozytywne i negatywne wyniki są znane dla pewnych lokalnych funkcji Hilberta  $R$  [IE78, IK99, Jel14, Hui14, BCR22, Hui22, Sza22, SS21], lecz w ogólności nie było przed (Hab3) efektywnej metody sprawdzania, czy dany  $R$  jest



zupełnie niewygodny, czy nie. Opisujemy taką metodę w §1.3 według (Hab3).

Czwartym kierunkiem, ożywiającym poprzednie trzy, są zastosowania. Schemat Hilberta jest zdefiniowany w terminach geometrii algebraicznej, ale jego osobliwości utrudniają zrozumienie go. Badania są kontynuowane właśnie ze względu na jego przydatność w pozostałych dziedzinach matematyki. W mojej opinii, zastosowania te wywodzą się z dwóch głównych źródeł:

- Skończone algebry są wystarczająco podstawowymi obiektami, by pojawiać się w różnych częściach matematyki, a więc i schemat Hilberta punktów pojawia się tam. Na przykład, w motywicznej teorii homotopii jest on użyteczny dla znajdowania geometrycznych modeli spektrów [EHK<sup>+</sup>21, EHK<sup>+</sup>20a, EHK<sup>+</sup>20b, HJN<sup>+</sup>21].
- schemat Hilberta jest właściwym  $\mathbb{k}$ -schematem, który zawiera jako otwartą (niekoniecznie gęstą) podrozmaitość przestrzeni krotek  $d$  punktów na  $X$ . Zatem pozwala on zdegenerować krotkę punktów, na przykład zderzając je. Stosuje się to w klasycznej topologii [BJJM19] oraz, co może najważniejsze, w teorii tensorów i złożoności obliczeniowej mnożenia macierzy [Lan12].

Mniej słynnym kuzynem schematu Hilberta jest schemat Quot. Omawiamy go tu tylko dla przestrzeni afinicznej. Niech  $S = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ . Schemat  $Quot$   $Quot_r^d(\mathbb{A}^n)$  jest przestrzenią moduli dla surjekcji  $S$ -modułów  $S^{\oplus r} \rightarrow M$ , gdzie  $\dim M = 0$  oraz  $\dim_{\mathbb{k}} M = d$ . Innymi słowy, jest to przestrzeń modułów z ustalonym zbiorem  $r$  generatorów. Dla  $r = 1$  otrzymujemy przestrzeń cyklicznych modułów i w tym przypadku  $Quot_r^d(\mathbb{A}^n) \simeq Hilb_d(\mathbb{A}^n)$ , gdzie izomorfizm posyła  $p: S^{\oplus 1} \rightarrow N$  na  $S/\text{Ann}(N)$ . Schemat Quot jest formalnie nie bardziej skomplikowany niż schemat Hilberta, który zresztą był skonstruowany przez Grothendiecka jako szczególny przypadek schematu Quot. Historycznie patrząc, schemat Quot był mniej badany, być może ze względu na jego mniej jasną interpretację geometryczną, jednak jest on używany we wszystkich kierunkach wymienionych powyżej, patrz na przykład np. [Ric20, CGGS21, BR21, MR22]. Analogiem składowej wygładzalnej  $Hilb_d(\mathbb{A}^n)$  jest *główna składowa*  $Quot_r^d(\mathbb{A}^n)$  która parametryzuje moduły będące granicami modułów półprostych.

**1.2.3. Zastosowania w teorii tensorów.** Jednym z głównych problemów teorii złożoności, tylko nieco mniej słynnym niż  $N=NP$ , jest pytanie o asymptotyczną złożoność mnożenia macierzy [BCS13, Lan17, CHI<sup>+</sup>18]: jaka jest najmniejsza  $\omega$  taka, że można uzyskać iloczyn dwóch macierzy  $n \times n$  używając  $O(n^{\omega+\epsilon})$  podstawowych operacji arytmetycznych? Szybkie transformaty Fouriera nie wchodzą w grę, bowiem jedynie podstawowe działania arytmetyczne są dozwolone.

Jest z lekka szokujące, że konsensus wśród ekspertów przewiduje, że  $\omega = 2$ , zatem, z grubsza, mnożenie macierzy powinno asymptotycznie zajmować tak samo długo jak wczytanie ich. Obecne ograniczenie górne to  $\omega \approx 2.37$ , które otrzymano za pomocą tzw. metody laserowej Coppersmitha-Winograda [CW90, Wil12, LG14]. Metoda ta jako argument przyjmuje tensor minimalnej rangi brzegowej.

*Tensor* to po prostu element  $T \in A \otimes B \otimes C$ , gdzie  $A, B, C$  są  $\mathbb{C}$ -przestrzeniami liniowymi wymiaru  $m$ , zaś tensorowanie jest nad  $\mathbb{C}$ . Taki  $T$  ma *rangę*  $\leq r$  jeśli zapisuje się jako  $T = \sum_{i=1}^r a_i \otimes b_i \otimes c_i$  dla pewnych  $a_i \in A, b_i \in B, c_i \in C$ . Tensor  $T$  ma *rangę brzegową*  $\leq r$  jeśli jest granicą tensorów rangi  $\leq r$ . Tensor  $T$  jest *treściwy* (ang. *concise*)

jeśli stowarzyszone z nim  $\mathbb{C}$ -liniowe odwzorowania  $T_A: A^* \rightarrow B \otimes C$ ,  $T_B: B^* \rightarrow A \otimes C$ ,  $T_C: C^* \rightarrow A \otimes B$  są wszystkie injektywne. Treściwy tensor ma rangę brzegową  $\geq m$  i jest nazywany *tensoriem minimalnej rangi brzegowej* jeśli ma rangę brzegową dokładnie  $m$ .

Bürgisser optymistycznie wezwał do sklasyfikowania tensorów minimalnej rangi brzegowej w [BCS13, Problem 15.2, p.419], ale teraz wiadomo, że taka klasyfikacja jest trudniejsza niż klasyfikacja skończonych algebr wygładzalnych stopnia  $m$ , zatem niemożliwa w ogólności. Łącznikiem jest tutaj obserwacja, że istnieje dokładnie jeden treściwy tensor rangi  $m$  z dokładnością do działania  $\mathrm{GL}(A) \times \mathrm{GL}(B) \times \mathrm{GL}(C)$ . Ten tensor to  $\sum_{i=1}^m a_i \otimes b_i \otimes c_i$ , gdzie  $\langle a_i \rangle = A$  itd. Ten tensor jest również izomorficzny z tensorem mnożenia w algebrze  $\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C}$ . Degenerując stwierdzamy, że tensor mnożenia w wygładzalnej algebrze ma rangę brzegową  $\leq m$ . Tę implikację można odwrócić. Tensor jest  $1_A$ -generyczny jeśli w obrazie  $T_A$  leży macierz odwracalna. Podobnie definiujemy  $1_B$ -generyczne oraz  $1_C$ -generyczne tensory. Następująca tabela jest zawarta w [JLP22], które mocno korzysta z wyników [BL16, LM17]. Powyższy związek jest również przedyskutowany we wstępie do (Hab5).

tensor minimalnej rangi brzegowej	jest izomorficzny z	tensorem mnożenia w
$1_A$ -generyczny, treściwy		module w głównej składowej
$1_A$ - and $1_B$ -generyczny		wygładzalnej algebrze
$1_A$ -, $1_B$ - and $1_C$ -generyczny		wygładzalnej algebrze Gorensteina

Przestrzeń  $A \otimes B \otimes C$  jest wymiaru  $m^3$ , zatem jest efektywniej (modulo niezbędne założenie  $1_A$ -generyczności) znaleźć odpowiedni moduł lub algebrę bezpośrednio a potem analizować jej tensor. Wszystkie tensory minimalnej rangi brzegowej używane w metodzie laserowej dotychczas są  $1_A$ -,  $1_B$ - and  $1_C$ -generyczne. Najefektywniej działają potęgi tensora Coppersmitha-Winograda, który pochodzi z jedynej (nad ciałem algebraicznie domkniętym charakterystyki  $\neq 2$ ) algebry Gorensteina stopnia  $m$ , która ma przestrzeń styczną wymiaru  $m - 2$ .

### 1.3. Wyniki I. Rozkłady Białynickiego-Biruli

Po przedyskutowaniu stanu wiedzy, omawiam teraz wkład serii artykułów (Hab1)-(Hab5).

**1.3.1. Funktorialne rozkłady Białynickiego-Biruli.** Przypomnijmy, że dla  $\mathbb{k}$ -schematu  $Z$  jego funktor punktów  $\mathrm{Mor}(-, Z): \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  posyła  $S$  na zbiór  $\mathrm{Mor}(S, Z)$  morfizmów z  $S$  do  $Z$  nad  $\mathbb{k}$ . W klasycznym sformułowaniu rozkład Białynickiego-Biruli nie ma funktorialnych własności: twierdzenie nie mówi nic o funktorze punktów  $X^+$  lub  $X^-$ .

Pierwszym głównym odkryciem pracy (Hab3) było, że rozkład Białynickiego-Biruli schematu Hilberta punktów ma funktorialną interpretację. To stwierdzenie jest formalnie niespójne, bowiem rozkład Białynickiego-Biruli dla schematu Hilberta punktów nie jest określony, bowiem schemat ten nie jest gładki, a gładkość jest wymagana w Twierdzeniu 1.1. Spójniejsze sformułowanie powyższego odkrycia jest następujące: dla każdego  $\mathbb{k}$ -schematu  $X$  z działaniem  $\mathbb{G}_m$  istnieją schematy  $X^+$ ,  $X^-$ , zadane przez „ładne” funktory, który zgadzają się z rozkładem Białynickiego-Biruli z Twierdzenia 1.1 jeśli  $X$  jest gładki i rzutowy. By odróżnić te funktory i reprezentujące je schematy od klasycznej teorii Białynickiego-Biruli nazywam je *funktorialnym rozkładem Białynickiego-Biruli*. Podkreślam też, że funktorialne własności rozkładu Białynickiego-Biruli zostały odkryte przed (Hab3)

przez Drinfelda [Dri13]; praca (Hab3) doszła do tych samych wniosków niezależnie jednak tylko w bardzo szczególnym przypadku.

Omówmy teraz functorialny rozkład Białynickiego-Biruli. Niech  $X$  będzie  $\mathbb{G}_m$ -schematem oraz niech  $\overline{\mathbb{G}}_m^- := \text{Spec } \mathbb{k}[t^{-1}]$  i  $\overline{\mathbb{G}}_m^+ := \text{Spec } \mathbb{k}[t]$  będą częściowymi uzwarceniami  $\mathbb{G}_m$  przez dodanie punktu  $\infty := V(1/t)$  lub  $0 := V(t)$ , odpowiednio. Definiujemy funktory  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  przez

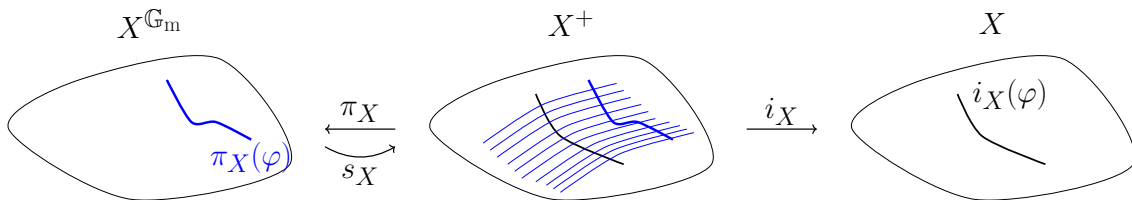
$$X^-(S) := \text{Mor}(\overline{\mathbb{G}}_m^- \times S, X)^{\mathbb{G}_m}, \quad \text{oraz} \quad X^+(S) := \text{Mor}(\overline{\mathbb{G}}_m^+ \times S, X)^{\mathbb{G}_m}, \quad (1.8)$$

gdzie  $\text{Mor}(-, -)^{\mathbb{G}_m}$  oznacza zbiór  $\mathbb{G}_m$ -ekwiwariantnych morfizmów, grupa  $\mathbb{G}_m$  działa na  $\overline{\mathbb{G}}_m^- = \mathbb{G}_m \cup \{\infty\}$ ,  $\overline{\mathbb{G}}_m^+ = \mathbb{G}_m \cup \{0\}$  w kanoniczny sposób oraz działa na  $S$  trywialnie.

**Przykład 1.3.** Mamy  $X^+(\mathbb{k}) = \text{Mor}(\overline{\mathbb{G}}_m^+, X)^{\mathbb{G}_m}$ ; jest to zbiór  $\mathbb{G}_m$ -ekwiwariantnych morfizmów  $\varphi: \overline{\mathbb{G}}_m^+ \rightarrow X$ . Niech  $x := \varphi(1) \in X$ , wtedy  $\varphi|_{\mathbb{G}_m}: \mathbb{G}_m \rightarrow X$  jest  $\mathbb{G}_m$ -ekwiwariantnym morfizmem z  $\mathbb{G}_m$ , zatem jest to odwzorowanie orbity punktu  $x$ . Tak więc  $\varphi(0)$  jest granicą punktu  $x$  przy  $t \rightarrow 0$ . Jeśli  $X$  jest separowany, taka granica jest jedyna.

Funktory  $X^+$ ,  $X^-$  przychodzą z naturalnymi transformacjami, które uogólniają odwzorowania granicy oraz lokalnie domknięte włożenia z Twierdzenia 1.1. Skupiamy się na  $X^+$ . Ustalmy dowolne  $S$  oraz  $\varphi \in X^+(S)$  odpowiadające  $\mathbb{G}_m$ -ekwiwariantnemu odwzorowaniu  $\varphi: \overline{\mathbb{G}}_m^+ \times S \rightarrow X$ . Mamy dwa obcięcia  $\varphi$  odpowiadające punktom  $0, 1 \in \overline{\mathbb{G}}_m^+$ ; pierwsze z nich posiada  $\mathbb{G}_m$ -ekwiwariantne cięcie:

- *Zapominanie o granicy.* Obcinamy  $\varphi$  do  $\varphi|_{1 \times S}: S \rightarrow X$ . Przekształcenie  $\varphi \mapsto \varphi|_{1 \times S}$  indukuje odwzorowanie  $i_X: X^+ \rightarrow X$ ,
- *Obcinanie do granicy.* Obcinamy  $\varphi$  do  $\varphi|_{0 \times S}: S \rightarrow X$ . Funkcja  $\varphi|_{0 \times S}$  jest ekwiwariantna, zatem jej obraz leży w  $X^{\mathbb{G}_m}$ . Otrzymujemy odwzorowanie  $\pi_X: X^+ \rightarrow X^{\mathbb{G}_m}$ .
- *Włożenie punktów stałych.* Z każdego  $\varphi_0: S \rightarrow X^{\mathbb{G}_m}$  możemy skonstruować  $\mathbb{G}_m$ -ekwiwariantne  $\varphi: \overline{\mathbb{G}}_m^+ \times S \rightarrow X$  dane przez  $\varphi = \varphi_0 \circ \text{pr}_2$ . Intuicyjnie, odpowiada to „stałej” orbicie punktu stałego. Otrzymujemy  $s_X: X^{\mathbb{G}_m} \rightarrow X^+$  spełniające  $\pi_X \circ s_X = \text{id}_{X^{\mathbb{G}_m}}$ .



Rysunek 1: Naturalne przekształcenia związane z  $X^+$ .

Ostatnim fragmentem struktury  $X^+$  jest działanie monoidu. Mnożenie na  $\mathbb{G}_m$  przedłuża się do mnożenia na  $\overline{\mathbb{G}}_m^+$ , co czyni z tej rozmaitości monoid. Monoid ten naturalnie działa na  $X^+$ , tzn. mamy naturalną transformację

$$\overline{\mathbb{G}}_m^+ \times X^+ \rightarrow X^+$$

która posyła  $S$ -punkt  $(\bar{g}, \varphi)$  na  $\varphi(\bar{g} \cdot -, -): \overline{\mathbb{G}}_m^+ \times S \rightarrow X$  oraz transformacja ta sprawia, że zwykle diagramy są przemienne.

Oczywiście, mamy też odpowiednie funkcje oraz działanie  $\overline{\mathbb{G}}_m^-$  dla  $X^-$ .

Przedyskutowawszy funktory, przechodzimy do reprezentowalności.

**Twierdzenie 1.4** ([Twierdzenie 1.1, Hab2], [Twierdzenie 1.1, Hab1]). *Niech  $X$  będzie Noetherowskim  $\mathbb{k}$ -schematem. Wtedy  $X^+$  jest reprezentowany przez  $\mathbb{k}$ -schemat z działaniem  $\overline{\mathbb{G}}_m^+$ , a odwzorowanie  $\pi_X: X^+ \rightarrow X^{\mathbb{G}_m}$  jest afiniczne skończonego typu. Zatem, jeśli  $X$  jest lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$ , to to samo zachodzi dla  $X^+$ . Również, jeśli  $X$  jest quasi-separowaną przestrzenią algebraiczną lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$ , to  $X^+$  jest reprezentowany przez przestrzeń algebraiczną lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$ .*

Historia Twierdzenia 1.4 oraz funktorów  $X^+$ ,  $X^-$  z naszej lokalnej perspektywy jest nieco skomplikowana:

- W (Hab3) użyłem wyników Haimana-Sturmfelsa o schemacie Hilberta z wielogradacją [HS04] by otrzymać reprezentowalność  $X^-$  w szczególnym przypadku schematu Hilberta punktów  $X := \text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  i wykorzystałem związane z nim odwzorowania by otrzymać wyniki o  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$ , patrz §1.4.
- Podczas wygładzania artykułu (Hab3) dowiedziałem się, że Drinfeld [Dri13] udowodnił Twierdzenie 1.4 dla schematów oraz przestrzeni algebraicznych skończonego typu.
- W (Hab1) z Sienkiewiczem uogólniliśmy wynik Drinfelda do schematów i przestrzeni algebraicznych lokalnie skończonego typu, otrzymując w szczególności część o przestrzeniach algebraicznych z Twierdzenia 1.4 (oraz w szczególności tę o schematach lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$ ).
- W (Hab2) z Sienkiewiczem uogólniliśmy te wyniki do noetherowskich schematów, otrzymując pozostałą część Twierdzenia 1.4 powyżej.

Po otrzymaniu reprezentowalności, chcemy sprawdzić, że w gładkim przypadku  $X^+$  zgadza się z klasycznym rozkładem Białynickiego-Biruli. Jest to następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.5** ([Twierdzenie 1.5, Hab1]). *Przy notacji z Twierdzenia 1.4 założmy, że  $X$  jest gładki. Wtedy  $X^+ \rightarrow X^{\mathbb{G}_m}$  jest rozwłóknieniem przestrzeniami afinicznymi. Założmy jeszcze, że  $X$  jest właściwy, wtedy  $X^+ \simeq \bigsqcup X_i^+$ , gdzie  $X_i^+$  są określone jak w Twierdzeniu 1.1.*

**1.3.2. Rozkład Białynickiego-Biruli dla grup innych niż  $\mathbb{G}_m$ .** Artykuły (Hab1)-(Hab2) rozszerzają rozkład Białynickiego-Biruli na przypadek grup innych niż  $\mathbb{G}_m$ . Ich podejście jest nowe nawet w klasycznym przypadku gładkiej rzutowej rozmaitości  $X$ .

Niech  $\mathbf{G}$  będzie liniową grupą algebraiczną nad  $\mathbb{k}$  i  $X$  będzie schematem z działaniem  $\mathbf{G}$ . By zdefiniować rozkład Białynickiego-Biruli przy tych założeniach, naturalnym jest zacząć od interpretacji funktorialnej (1.8). Jedyńm brakującym elementem jest uogólnienie  $\overline{\mathbb{G}}_m^+$ . Artykuł (Hab1) proponuje, by  $\overline{\mathbb{G}}_m^+$  uogólnić do afinicznego monoidu z grupą elementów odwracalnych  $\mathbf{G}$ .

Niech  $\overline{\mathbf{G}}$  będzie całkowitą afiniczną rozmaitością nad  $\mathbb{k}$  ze strukturą monoidu. Elementy odwracalne  $\overline{\mathbf{G}}$  składają się na grupę algebraiczną  $\overline{\mathbf{G}}^\times \subseteq \overline{\mathbf{G}}$  otwartą w  $\overline{\mathbf{G}}$ . Mówimy, że  $\overline{\mathbf{G}}$  ma grupę jedności  $\mathbf{G}$  jeśli  $\mathbf{G} \simeq \overline{\mathbf{G}}^\times$ . W tym rozdziale ustalamy jeden taki monoid  $\overline{\mathbf{G}}$ .

**Przykład 1.6.** Jeśli  $\mathbf{G} \simeq \mathbb{G}_m^n$  jest torusem, to  $\overline{\mathbf{G}}$  są dokładnie afinicznymi rozmaitościami torycznymi z torusem  $\mathbf{G}$ . W szczególności, dla  $\mathbf{G} = \mathbb{G}_m$  otrzymujemy trzy możliwe  $\overline{\mathbf{G}}$ , to znaczy  $\overline{\mathbb{G}}_m^+$ ,  $\overline{\mathbb{G}}_m^-$  oraz  $\mathbb{G}_m$ .

Dla  $\mathbf{G} = \mathrm{GL}_n$  jednym naturalnym wyborem  $\overline{\mathbf{G}}$  są macierze  $n \times n$ . W ogólności, jest raczej niemożliwe sklasyfikowanie możliwych  $\overline{\mathbf{G}}$ .

**Definicja 1.7.** Niech  $X$  będzie schematem z działaniem  $\mathbf{G}$  i niech  $\overline{\mathbf{G}}$  będzie jak powyżej. Rozkład Białynickiego-Biruli dla  $(X, \overline{\mathbf{G}})$  jest zdefiniowany jako funktor

$$X^+ := \mathrm{Mor}(\overline{\mathbf{G}} \times -, X)^{\mathbf{G}}.$$

W definicji powyżej, znak plus ma już tylko formalne znaczenie: w tej ogólności nie ma już żadnej oczywistej klasyfikacji  $\overline{\mathbf{G}}$ .

By otrzymać analog odwzorowania granicy z §1.3.1, zakładamy, że *monoid  $\overline{\mathbf{G}}$  jest spójny i ma zero*. To pozwala nam zdefiniować  $\pi_X: X^+ \rightarrow X^{\mathbf{G}}$  jak w §1.3.1. Można się zawsze zredukować do tej sytuacji, patrz [§3, (Hab1)].

Głównym wynikiem pracy (Hab1) jest, że przy powyższych założeniach teoria rozkładów Białynickiego-Biruli uogólnia się wiernie do przypadku liniowo reduktywnego. Przypomnijmy, że liniowa grupa algebraiczna  $\mathbf{G}$  jest *liniowo reduktywna* jeśli kategoria jej skończenie wymiarowych reprezentacji jest półprosta, tzn., każdy krótki ciąg dokładny reprezentacji rozszczepia się. Grupa  $\mathbf{G}$  jest *(geometrycznie) reduktywna* jeśli nie ma domkniętych normalnych podgrup izomorficznych z  $\mathbb{G}_a$ . W charakterystyce zero dwie definicje reduktywności pokrywają się. W dodatniej charakterystyce liniowa reduktywność implikuje reduktywność, ale nie w drugą stronę; jedyne liniowo reduktywne spójne grupy to torusy.

Przedstawmy teraz niektóre główne wyniki (Hab1).

**Twierdzenie 1.8** ([Twierdzenie 1.1, Hab1]). *Założmy, że  $\mathbf{G}$  jest liniowo reduktywna. Niech  $X$  będzie lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$ . Wtedy  $X^+$  jest reprezentowany przez schemat lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$  z działaniem  $\overline{\mathbf{G}}$ . Odwzorowanie  $\pi_X: X^+ \rightarrow X^{\mathbf{G}}$  jest afiniczne skończonego typu. To samo zachodzi, jeśli założymy jedynie, że  $X$  jest quasi-separowaną przestrzenią algebraiczną lokalnie skończonego typu nad ciałem  $\mathbb{k}$ ; tutaj oczywiście  $X^+$  jest być może reprezentowany przez przestrzeń algebraiczną, a nie schemat.*

**Twierdzenie 1.9** ([Twierdzenie 1.5, Hab1]). *Przy założeniach Twierdzenia 1.8, jeśli  $X$  jest dodatkowo gładki, to  $X^+$  jest jak w Twierdzeniu 1.1. Dokładniej, podschemat  $X^{\mathbf{G}}$  jest gładki; niech  $F_1, \dots, F_r$  będą jego spójnymi składowymi i niech  $X_i^+ := \pi_X^{-1}(F_i)$ . Wtedy*

1. *schemat  $X_i^+$  jest gładki oraz  $X_i^+ \rightarrow F_i$  jest rozwłóknieniem przestrzeniami afinicznymi z działaniem  $\overline{\mathbf{G}}$  po włóknach,*
2. *morfizm  $X_i^+ \rightarrow X$  jest lokalnie domkniętą immersją.*



Można zauważyć, że nie ma tu żadnych założeń o właściwości schematu. Zaiste nie są one potrzebne. Jednakże jest pewna cena, jaką płaci się za uogólnienie z  $\mathbb{G}_m$  do  $\mathbf{G}$ . Mianowicie, nie jest w tym ogólniejszym kontekście prawdą, że  $i_X : X^+(\mathbb{k}) \rightarrow X(\mathbb{k})$  jest surjekcją dla właściwego  $X$ . Faktycznie, obraz  $X^+(\mathbb{k})$  składa się z tych  $\mathbb{k}$ -punktów  $x \in X$  których orbitę  $\mathbf{G}x$  można uzwarcić co najmniej do  $\overline{\mathbf{G}}x$ , jest natomiast mnóstwo możliwych uzwarceń, patrz Przykład 1.6, więc  $X^+(\mathbb{k})$  nie musi być nawet gęste w  $X(\mathbb{k})$ . W pracy (Hab1) nie rozwijamy tego wątku, jedynie zauważamy, że dla danego  $x \in X(\mathbb{k})$  można wybrać monoid  $\overline{\mathbf{G}}$  tak, by  $x$  leżał w obrazie  $X^+(\mathbb{k})$ . Ten monoid można wybrać jako nietrywialny (czyli  $\overline{\mathbf{G}} \neq \mathbf{G}$ ) o ile wagi działania  $\mathbf{G}$  na przestrzeni stycznej do  $x$  są zawarte w ściśle wypukłym stożku. Kombinatoryka uzwarceń jest bardzo aktywnym polem badań już w przypadku naturalnego działania  $\mathbb{G}_m^n$  na  $\text{Gr}(k, n)$ , w którym łączy się z teorią matroidów oraz innymi obiektami kombinatorycznej geometrii algebraicznej, patrz np. [Pos06].

Powyższa teoria ma dwojake zastosowania: po pierwsze porządkuje oryginalną teorię dzięki zastąpieniu  $\mathbb{G}_m$  przez liniowo reduktywną grupę. Po drugie, są „rzeczywiste” zastosowania, przykładem których jest następujący.

**Przykład 1.10** ([Przykład 7.9, Hab1]). Niech  $X$  będzie gładką rzutową rozmaitością z działaniem  $\mathbb{G}_m^2$ . Niech  $G_1 := \mathbb{G}_m \times \{1\}$  oraz  $G_2 := \{1\} \times \mathbb{G}_m$ . Załóżmy, że  $X^{G_1} = X^{G_2}$  i że ten zbiór punktów stałych jest skończony. Niech  $x \in X^{\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m}$ . Rozważmy  $G_1^+$ ,  $G_2^+$  i komórki  $X_1^+$ ,  $X_2^+$  odpowiednio. Z Twierdzenia 1.1 wynika, że  $X_i^+ \simeq \mathbb{A}^{n_i}$ . Z pomocą Twierdzenia 1.9 możemy też dowieść, że  $X_1^+ \cap X_2^+ \simeq \mathbb{A}^{n_{12}}$  dla pewnego  $n_{12}$ . W ogólności  $X_1^+ \cap X_2^+$  nie jest podprzestrzenią liniową  $X_1^+$  ani  $X_2^+$ .

Dowód Twierdzenia 1.9 przy użyciu Twierdzenia 1.8 jest stosunkowo prosty; spostrzeżenie, że  $\pi_X$  jest afiniczne, jest kluczowe dla dowodu.

Dowód Twierdzenia 1.8 jest, technicznie patrząc, sednem (Hab1). Omówmy najpierw uproszczoną sytuację, w której problemy nie występują. Dla normalnego  $X$  oraz  $\mathbf{G}$  będącej torusem, z twierdzenia Sumihiro wynika istnienie ekwiwariantnego zanurzenia  $X \subseteq \mathbb{P}(V)$ . Daje ono afiniczne  $\mathbf{G}$ -stabilne pokrycie  $\mathcal{U} = \{X \setminus H \cap X\}_H$ , gdzie  $H$  przebiega  $\mathbf{G}$ -stabilne hiperpłaszczyzny. Dla każdego  $U \in \mathcal{U}$  odpowiadające mu  $U^+$  parametryzuje orbity, które posiadają granicę w  $U$ . Funktory  $U^+$  są reprezentowane przez domknięte podschematy  $U$  [Proposition 1.4, Hab1] i dają otwarte pokrycie  $X^+$  zatem i ten funktor jest reprezentowalny. Afiniczność  $\pi_X$  wynika z afiniczności  $U^+ \rightarrow U^{\mathbf{G}}$ .

W przypadku ogólniejszej grupy  $\mathbf{G}$  lub nienormalnego  $X$  sytuacja komplikuje się. Nie ma w ogólności nadziei na  $\mathbf{G}$ -stabilne otwarte pokrycie afiniczne: już dla krzywej nodalnej  $\mathbb{P}^1/(0 = \infty)$  z naturalnym działaniem  $\mathbb{G}_m$  punkt  $0 = \infty$  nie posiada  $\mathbf{G}$ -stabilnego otwartego otoczenia afinicznego. Istnieją za to  $\mathbf{G}$ -stabilne étalne otoczenia afiniczne.

**Twierdzenie 1.11** ([AHR20, Twierdzenie 2.6]). *Niech  $X$  będzie schematem lokalnie skończonego typu nad algebraicznie domkniętym ciałem  $\mathbb{k}$ . Załóżmy, że grupa algebraiczna  $\mathbf{G}$  działa na  $X$  oraz że  $x$  jest  $\mathbb{k}$ -wymiernym punktem  $X$  z liniowo reduktywnym stabilizatorem  $\mathbf{G}_x$ . Wtedy istnieje afiniczny schemat  $W$  z działaniem  $\mathbf{G}$  oraz  $\mathbf{G}$ -ekwiwariantne étalne otoczenie  $W \rightarrow X$  punktu  $x$ .*

Stosujemy powyższe twierdzenie (po zmianie bazy dla algebraicznego domknięcia) dla  $x \in X^{\mathbf{G}}$ . Otrzymana rodzina étalnych odwzorowań w  $X$  niekoniecznie jest pokryciem, ale pokrywa otoczenie zbioru  $X^+(\mathbb{k}) \subseteq X(\mathbb{k})$ . Twierdzenia 1.11 można w zasadzie użyć do

dowodu reprezentowalności  $X^+$  przez zejście, jednak w (Hab1) wybraliśmy inne podejście: użyliśmy formalnej wersji  $X^+$ . Niech  $\overline{\mathbf{G}}_n$  będzie  $n$ -tym pogrubieniem  $0 \in \overline{\mathbf{G}}$ . Zdefiniujemy

$$\widehat{\mathcal{D}}_X(S) = \lim \text{Mor}(\overline{\mathbf{G}}_n \times S, X)^{\mathbf{G}} := \{(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \varphi_n: \overline{\mathbf{G}}_n \times S \rightarrow X \text{ jest } \mathbf{G}\text{-ekwiwariantne} \\ \text{oraz } (\varphi_{n+1})|_{\overline{\mathbf{G}}_n \times S} = \varphi_n \text{ dla wszystkich } n\}.$$

Obcięcie  $\widehat{\mathcal{D}}_X$  do  $n$  pierwszych odwzorowań to  $\text{Mor}(\overline{\mathbf{G}}_n \times (-), X)^{\mathbf{G}}$ , który to funktor jest izomorficzny z  $\text{Mor}(\overline{\mathbf{G}}_n \times (-), X_n)^{\mathbf{G}}$ , gdzie  $X_n \subseteq X$  jest  $n$ -tym pogrubieniem  $X^{\mathbf{G}} \subseteq X$ . Każde pokrycie otwarte  $X_n$  jest  $\mathbf{G}$ -stabilne a zatem  $\text{Mor}(\overline{\mathbf{G}}_n \times (-), X)^{\mathbf{G}}$  jest reprezentowany przez schemat  $Z_n \rightarrow X^{\mathbf{G}}$  afiniczny nad  $X^{\mathbf{G}}$  oraz zanurzony w  $X$ , patrz [dowód Twierdzenia 6.16, Hab1]. Dalej dowód redukuje się do dwóch głównych kroków:

1. Dowodzimy, że otrzymany schemat formalny  $(Z_n \rightarrow X^{\mathbf{G}})_n$  można zalgebraizować do schematu  $\tilde{X} \rightarrow X^{\mathbf{G}}$  afinicznego nad  $X^{\mathbf{G}}$ . Główną rolę w tym kroku gra teoria reprezentacji  $\mathbf{G}$ .
2. Dowodzimy, że kanoniczne odwzorowanie zapominania  $X^+ \rightarrow \tilde{X}$  jest izomorfizmem. Głównym krokiem jest tu przejście do étalnego pokrycia  $X^+$  otrzymanego za pomocą Twierdzenia 1.11.

**1.3.3. Rozkład Białynickiego-Biruli w przypadku niereduktywnym.** Celem pracy Drinfelda [Dri13] była budowa solidnych fundamentów pracy, wspólnej z Gaitsgorym [DG14], nad uogólnieniem Twierdzenia Bradena [Bra03] dotyczącego hiperbolicznej lokalizacji D-modułów w kontekście geometrycznej teorii reprezentacji. Po opublikowaniu preprintu (Hab1) na serwerze arXiv, otrzymaliśmy pytania i komentarze sugerujące, że byłoby bardzo użytecznym z powyższego punktu widzenia mieć tę samą konstrukcję dla przypadku reduktywnego a nie tylko liniowo reduktywnego (to znaczy, w dodatniej charakterystyce). To dało główny impuls do napisania (Hab2). Interesującym ubocznym wynikiem tej pracy jest konstrukcja  $X^+$  w większej ogólności, bez założeń o tym, że  $X$  jest lokalnie skończonego typu.

Ustalmy grupę  $\mathbf{G}$  (nie zakładamy że  $\mathbf{G}$  jest geometrycznie reduktywna) oraz monoid  $\overline{\mathbf{G}}$  z zerem i grupą jedności  $\mathbf{G}$ . Dla geometrycznie reduktywnej grupy  $\mathbf{G}$ , sławetny wynik Kempfa daje centralną jednoparametrową podgrupę  $\mathbb{G}_m \rightarrow \mathbf{G}$  taką, że indukowane odwzorowanie  $\mathbb{G}_m \rightarrow \overline{\mathbf{G}}$  przedłuża się do morfizmu  $\mathbb{A}^1 \rightarrow \overline{\mathbf{G}}$  który posyła  $0 \in \mathbb{A}^1$  na zero  $\overline{\mathbf{G}}$ . Mówimy, że  $\overline{\mathbf{G}}$  jest *monoidem Kempfa* jeśli istnieje centralna jednoparametrowa podgrupa  $\mathbb{G}_m$  o powyższej własności. Z definicji, każdy monoid o geometrycznie reduktywnej grupie jedności  $\mathbf{G}$  jest monoidem Kempfa. Już to pokazuje, że w dodatniej charakterystyce jest znacznie więcej monoidów Kempfa niż monoidów z liniowo reduktywną grupą jedności. Istnieje nawet jeszcze więcej monoidów Kempfa, przykładowo monoid górnio trójkątnych macierzy, którego grupa jedności jest rozwiązalna.

Definicja oraz reprezentowalność  $X^+$  uogólniają się na ten przypadek jak poniżej.

**Twierdzenie 1.12** ([Twierdzenie 1.1, Hab2]). *Założmy, że  $\overline{\mathbf{G}}$  jest monoidem Kempfa z zerem. Niech  $X$  będzie Noetherowski. Wtedy  $X^+$  jest reprezentowany przez schemat z działaniem  $\overline{\mathbf{G}}$ . Odwzorowanie  $\pi_X: X^+ \rightarrow X^{\mathbf{G}}$  jest afiniczne skończonego typu. W szczególności, jeśli  $X^{\mathbf{G}}$  jest lokalnie skończonego typu nad  $\mathbb{k}$ , to taki jest również  $X^+$ .*



Niestety, przy tych słabszych założeniach o  $\mathbf{G}$  nie mogliśmy udowodnić, że  $\pi_X$  jest rozwałkaniem przestrzeniami afinicznymi dla gładkiego  $X$ . W tym kierunku otrzymujemy jedynie następujący wynik.

**Stwierdzenie 1.13.** *Przy założeniach Twierdzenia 1.12, jeśli  $\pi_X$  jest gładki w  $x \in X^{\mathbf{G}} \hookrightarrow X^+$ , wtedy w otoczeniu  $x$  odwzorowanie jest rozwałkaniem przestrzeniami afinicznymi.*

Dowód Twierdzenia 1.12 jest dość klarowny, choć technicznie wymagający. Strategia z przypadku liniowo redukcyjnego §1.3.2 zawodzi w dwóch miejscach:

1. dowód reprezentowalności i afiniczności  $\widehat{\mathcal{D}}_X \rightarrow X^{\mathbf{G}}$  jest bardziej skomplikowany ze względu na skomplikowanie  $\mathbf{G}$ -reprezentacji.
2. nie wiadomo, czy istnieją ekwiwariantne étalne otoczenia z Twierdzenia 1.11, zatem potrzeba nowej strategii dowodu, że odwzorowanie formalizacji  $X^+ \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_X$  jest izomorfizmem.

Pierwszy z tych problemów jest nietrywialny, ale rozwiązujemy go za pomocą technicznych narzędzi i przedyskutuję go tu tylko pokrótce. Głównym pomysłem jest przejście od  $\mathbf{G}$ -reprezentacji (odpowiednio,  $\overline{\mathbf{G}}$ -reprezentacji) do  $\mathbb{G}_m$ -reprezentacji (odpowiednio,  $\overline{\mathbb{G}}_m$ -reprezentacji), gdzie  $\mathbb{G}_m$  jest centralnym torusem z definicji monoidu Kempfa. Następnie w wywodzie używamy trzech pomysłów: po pierwsze, zamiast izotypicznych składowych stowarzyszonych z prostą reprezentacją  $\lambda$ , używamy *podkategorii Serre'a* które są zbudowane z reprezentacji mających ciąg kompozycyjny z prostymi podilorazami z ustalonego skończonego zbioru  $\lambda$ . Po drugie, wywód należy prowadzić w oparciu o rozszerzoną klasę: zamiast skończenie generowanych podmodułów rozważamy *uziemione* moduły, to znaczy, te których zbiór  $\mathbb{G}_m$ -wag jest ograniczony z dołu. Po trzecie, dowodzimy tezy zbliżonej do indukcji w sensie teorii reprezentacji: funktor  $\widehat{\mathcal{D}}_X$  jest początkowym  $\overline{\mathbf{G}}$ -funktoorem odwzorowującym się w algebraizację względem działania  $\mathbb{G}_m$ . Pieczołowita implementacja powyższej strategii zajmuje więcej niż połowę (Hab2).

Drugi problem pokonujemy z pomocą idei które stoją za dowodem Twierdzenia 1.11, to znaczy *dualności Tannaki* w sensie [HR19]: dowodzimy jej wersji dla globalnych stogów ilorazowych [Appendix, (Hab2)]. Omówmy tę część.

Morfizm schematów  $f: S_1 \rightarrow S_2$  indukuje funktor cofnięcia  $f^*$  na kategorii quasi-koherentnych snopów. Ten funktor jest prawodokładny, odwzorowuje snop strukturalny w snop strukturalny i jest przemienny z iloczynem tensorowym (tylko z dokładnością do izomorfizmu, który spełnia pewne warunki kompatybilności [SR72, I.4.1.1-4.2.4]). Intuicyjnie mówiąc, dualność Tannaki postuluje, że jeśli funktor  $F: \text{Qcoh}(S_2) \rightarrow \text{Qcoh}(S_1)$  spełnia te warunki, to jest on izomorficzny z  $f^*$  dla jedynego morfizmu  $f$ .

Można spytać, o dualność Tannaki dla stogów i to jest wynik, którego potrzebujemy: potrzebujemy go dla reprezentowalnych morfizmów stogów ilorazowych. Dla  $\mathbf{G}$ -schematu  $T$  odwzorowanie  $p_T: T \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{k})$  jest ekwiwariantne i indukuje cofnięcie snopów  $p_T^*: \mathbf{Rep}_{\mathbf{G}} \rightarrow \text{Qcoh}_{\mathbf{G}}(T)$ , które odwzorowuje  $\mathbf{G}$ -reprezentację  $V$  w  $V \otimes_{\mathbb{k}} \mathcal{O}_T$  z naturalną linearyzacją. Ekwiwariantny morfizm  $\varphi: Y \rightarrow X$  pomiędzy schematami z działaniem  $\mathbf{G}$  daje izomorfizm funktorów  $\alpha_{\varphi}: \varphi^* \circ p_X^* \rightarrow p_Y^*$ . Dowodzimy następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 1.14** ([Twierdzenie A.1, Hab2]). *Niech  $X$  będzie quasi-zwartym, quasi-separowanym  $\mathbf{G}$ -schematem. Niech  $Y$  będzie  $\mathbf{G}$ -schematem. Niech  $F: \text{Qcoh}_{\mathbf{G}}(X) \rightarrow \text{Qcoh}_{\mathbf{G}}(Y)$*

będzie kociągłym funktorem tensorowym i niech  $\alpha: F \circ p_X^* \rightarrow p_Y^*$  będzie izomorfizmem funktorów  $\mathbf{Rep}_{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{Qcoh}_{\mathbf{G}}(Y)$ . Wtedy istnieje jedyny  $\mathbf{G}$ -ekwiwariantny morfizm  $f: Y \rightarrow X$  taki, że  $(F, \alpha) \simeq (f^*, \alpha_f)$ .

W języku stogów sformułowanie jest może mniej tajemnicze i bliższe dualności Tannaki. Zauważmy, że jeśli mamy 2-przemienny diagram morfizmów stogów

$$\begin{array}{ccc} [Y/\mathbf{G}] & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & [X/\mathbf{G}] \\ & \searrow & \swarrow \\ & & [*/\mathbf{G}] \end{array}$$

to cofnięcie przez kanoniczne odwzorowanie  $\mathrm{Spec}(\mathbb{k}) \rightarrow [*/\mathbf{G}]$  daje ekwiwariantny morfizm  $Y \rightarrow X$ . Twierdzenie 1.14 zakłada, że mamy 2-przemienny diagram funktorów

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Qcoh}([Y/\mathbf{G}]) & \xleftarrow{\quad\quad\quad} & \mathrm{Qcoh}([X/\mathbf{G}]) \\ & \swarrow & \searrow \\ & & \mathrm{Qcoh}([*/\mathbf{G}]) \end{array}$$

Według zasady dualności Tannaki, niższy diagram powinien pochodzić od tego powyżej. Tego właśnie dowodzimy, mocno korzystając z wyników [HR19].

Wracając do omówienia dowodu Twierdzenia 1.12, mamy pokazać, że odwzorowanie  $X^+ \rightarrow \widehat{\mathcal{D}}_X$  jest izomorfizmem. Wystarczy pokazać, że  $\widehat{\mathcal{D}}_X$  posiada odwzorowanie „włożenia komórek”  $\widehat{\mathcal{D}}_X \rightarrow X$ . Z dualności Tannaki, wystarczy skonstruować funktor „cofnięcia”  $\mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(X) \rightarrow \mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(\widehat{\mathcal{D}}_X)$ . Dowodzimy, że  $\mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(\widehat{\mathcal{D}}_X) \simeq \lim_n \mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(Z_n)$  po obcięciu do snopów skończonego typu, gdzie  $i_n: Z_n \hookrightarrow X$  reprezentuje funktor inftyezymalny  $n$ -tego rzędu  $\mathrm{Mor}(\overline{\mathbf{G}}_n, X)^{\mathbf{G}}$ . Cofnięcia  $i_n^*$  składają się w szukane odwzorowanie  $\mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(X) \rightarrow \lim_n \mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(Z_n) \simeq \mathrm{Qcoh}_{\mathbf{G}}(\widehat{\mathcal{D}}_X)$ . To kończy nasze omówienie dowodu.

## 1.4. Wyniki II. Zastosowania rozkładów Białyńskiego-Biruli dla przestrzeni moduli

Artykuły (Hab3), (Hab4) oraz częściowo (Hab5) stosują rozkłady Białyńskiego-Biruli do przestrzeni moduli; de facto do schematów Hilberta i Quot zero-wymiarowych (czyli skończonych) obiektów. Jak wyjaśniłem w sekcji §1.1, przestrzenie te są istotne dla zastosowań poza geometrią algebraiczną.

**1.4.1. Rozkład Białyńskiego-Biruli dla schematów Hilberta punktów.** Schematy Hilberta punktów na wyższego-wymiaru ( $\dim \geq 3$ ) gładkich rozmaitościach (patrz §1.2.2) były bardzo słabo rozumiane przed pracą (Hab3). W szczególności, tylko kilka nieprzywiedlnych składowych było znanych i sprawdzenie wygładzalności danego podschematu  $R$  było ekstremalnie trudne już dla  $\deg R \geq 15$  (dla mniejszych stopni wyniki klasyfikacyjne takie jak [CEVV09, CJN15] były pomocne).

Głównym wkładem (Hab3) jest metoda znajdowania nieprzywiedlnych generycznie gładkich składowych  $\mathrm{Hilb}_{\mathrm{pts}}(\mathbb{A}^n)$ . Z ogólnych rozważań wynika, że na każdej nieprzywiedlonej składowej  $\mathcal{Z} \subseteq \mathrm{Hilb}_{\mathrm{pts}}(\mathbb{A}^n)$  istnieje  $e$  takie, że ogólny punkt  $[R] \in \mathcal{Z}$  odpowiada skończonemu schematowi  $R$  mającemu  $e$  geometrycznych spójnych składowych. Jeśli  $e = 1$ ,

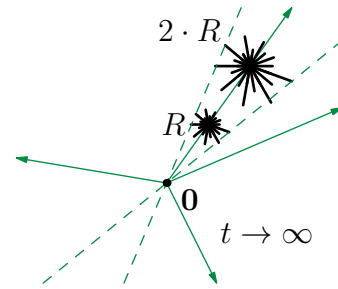
nazywamy  $\mathcal{Z}$  *elementarną składową*. Każda składowa  $\mathcal{Z}$  leży w domknięciu obrazu wymiernego odwzorowania z  $\mathcal{Z}_1 \times \dots \times \mathcal{Z}_e$ , gdzie  $\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_e$  są elementarnymi nieprzywiedlnymi składowymi  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  a wymierne odwzorowanie jest dane przez sumę rozłączną schematów. Podsumowując, poszukiwania składowych redukują się do poszukiwań elementarnych składowych, tzn., generatorów półgrupy wszystkich geometrycznych składowych, w której dodawanie jest indukowane sumą rozłączną schematów.

Rozważmy zwykle „mnożenie przez skalar” jako działanie  $\mathbb{G}_m$  na  $\mathbb{A}^n$ :

$$t \cdot (v_1, \dots, v_n) = (tv_1, \dots, tv_n). \quad (1.9)$$

Punkt  $\mathbb{A}^n$  ma granicę przy  $t \rightarrow \infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest on zerem. Co ciekawe, w tym przypadku niedostatek granic jest korzystny.

Działanie grupy algebraicznej na  $\mathbb{A}^n$  indukuje działanie na  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$ . Powyższe działanie  $\mathbb{G}_m$  daje działanie, które „przeskalowuje” podschematy, jak na rysunku. Następująca prosta obserwacja jest kluczowa.



**Lemat 1.15** ([Stw 3.3, Hab3]). *Skończony podschemat  $R \subseteq \mathbb{A}^n$  ma granicę przy  $t \rightarrow \infty$  wtedy i tylko wtedy, gdy jego nośnikiem jest jedynie punkt zero.*

Niech  $\text{Hilb}_{\text{pts}}^-(\mathbb{A}^n)$  oznacza rozkład Białynickiego-Biruli schematu  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  dla powyższego działania  $\mathbb{G}_m$ . Niech

$$\theta: \mathbb{A}^n \times \text{Hilb}_{\text{pts}}^-(\mathbb{A}^n) \rightarrow \text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$$

będzie odwzorowaniem które najpierw zapomina  $\text{Hilb}_{\text{pts}}^-(\mathbb{A}^n) \rightarrow \text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  a później przesuwają otrzymany schemat o wektor z  $\mathbb{A}^n$ . Z Lematu 1.15 wynika, że elementarne składowe to dokładnie nieprzywiedlne składowe  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  zawarte w obrazie  $\theta$ .

Następujące twierdzenie daje zdumiewająco prosty warunek na to by  $\theta$  było dominujące wokół danego punktu, generycznie wystarczy patrzeć na przestrzenie styczne.

**Twierdzenie 1.16** ([Theorems 4.5, 4.9, Hab3]). *Jeśli odwzorowanie styczne  $d\theta$  jest surjektywne w punkcie  $([R], 0)$ , to  $\theta$  jest otwartym włożeniem blisko tego punktu, a zatem każda składowa przechodząca przez  $[R]$  jest elementarna. Odwrotnie, jeśli  $\mathcal{Z}$  jest elementarną składową która jest generycznie zredukowana, to  $d\theta$  jest surjektywne dla ogólnego punktu  $[R] \in \mathcal{Z}$ .*

Jeśli  $d\theta$  jest surjektywne w  $([R], 0)$ , mówimy, że  $R$  ma *trywialne styczne ujemne* (TNT). Jest to własność niezależna od włożenia  $R$  [p.250, (Hab3)]. Dla jednorodnego  $I_R$  sprawdza się ona do warunku  $\dim_{\mathbb{k}}(T_{[R]} \text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n))_{<0} = n$ . Powyższe twierdzenie jest wysoce efektywnym narzędziem znajdowania składowych. Przed (Hab3) znanych było tylko kilka elementarnych składowych, tak mało, że mogły być wszystkie wymienione w [Remark 6.10, (Hab3)]. Na przykład, dla ustalonego  $\mathbb{A}^n$  znanych było tylko skończenie wiele elementarnych składowych, np. dla  $n = 4$  tylko dwie, wśród nich jedna „trywialna” elementarna składowa równa  $\text{Hilb}_1(\mathbb{A}^4)$ .

Następujące stwierdzenie daje nieskończoną rodzinę elementarnych składowych dla  $\mathbb{A}^4$  (oraz jawnie wyrażone gładkie punkty na nich, patrz [Wstęp, Hab3]).

**Stwierdzenie 1.17** ([Twierdzenie 1.4, Hab3]). *Dla każdego  $e \geq 2$  schemat Hilberta  $\text{Hilb}_{\binom{e+1}{2}-1}(\mathbb{A}^4)$  posiada elementarną składową.*

Patrząc bardziej ilościowo, jest interesującym pytaniem jak wiele jest elementarnych składowych dla danego stopnia  $d$ . Eksperymenty komputerowe za pomocą Twierdzenia 1.16 sugerują, że odpowiedź brzmi „mnóstwo”: dodając losowe formy ustalonych stopni do ideałów jednomianowych, wyprodukowałem ponad 50 nowych przykładów w stopniach  $\leq 40$ ; produkowanie dalej wydało mi się bezcelowe (patrz też Stwierdzenie 1.22 poniżej).

Najważniejsza idea dowodu Twierdzenia 1.16 pochodzi z infinitezymalnej teorii deformacji. Było, jak się mówi, wiadome ekspertom, że punkt  $[R] \in \text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  posiada teorię stycznych-przeszkód z przestrzenią styczną  $\text{Hom}_S(I_R, S/I_R)$  oraz przestrzenią przeszkód  $T^2(R) \subseteq \text{Ext}_S^1(I_R, S/I_R)$ , gdzie  $S = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$ . Następująca obserwacja wydaje się nowym wynikiem.

**Stwierdzenie 1.18** ([Twierdzenie 4.2, Hab3]). *Punkt  $[R] \in \text{Hilb}_{\text{pts}}^-(\mathbb{A}^n)$  posiada teorię stycznych-przeszkód z przestrzenią styczną  $(\text{Hom}_S(I_R, S/I_R))_{\geq 0}$  i przestrzenią przeszkód  $(T^2(R))_{\geq 0} \subseteq (\text{Ext}_S^1(I_R, S/I_R))_{\geq 0}$ .*

Definicja  $\geq 0$  dla niejednorodnych ideałów  $I_R$  znajduje się w [§2, Hab3]. Stwierdzenie to pokazuje następujący sposób znajdowania gładkich punktów.

**Wniosek 1.19.** *Przy założeniach Twierdzenia 1.16 jeśli dodatkowo  $(T^2(R))_{\geq 0} = 0$ , to  $[R] \in \text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  jest gładkim punktem (mimo iż może się zdarzyć, że  $T^2(R) \neq 0$ ).*

Powyższe stwierdzenie mówi też, że jedyne równania  $\text{Hilb}_{\text{pts}}^-(\mathbb{A}^n)$  to te pochodzące z  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$ . Wniosek 1.19 wynika ze Stwierdzenia 1.18 przez tzw. główne twierdzenie analizy przeszkód, które mówi, że odwzorowanie indukujące surjekcję na przestrzeniach stycznych i injekcję na przestrzeniach przeszkód jest gładkie w danym punkcie.

Idea Stwierdzenia 1.18 jest rozwinięta w [4.10-4.12, Hab3], gdzie również otrzymujemy teorię przeszkód dla schematu Hilberta flag, który parametryzuje pary zero-wymiarowych schematów  $R \subseteq M \subseteq \mathbb{A}^n$ ; wydaje się, że ten wynik nie znajduje się w literaturze.

Ostatnim wkładem (Hab3) jest hipotetyczny program dowodzenia niezredukowania  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$ . Pytanie o niezredukowanie było otwarte od czasów pracy Fogarty’ego [Fog68] i służyło za najważniejsze pytanie, miernik (braku) postępów w zrozumieniu  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$ . Praca (Hab3) dowodzi, że przykłady niezredukowania wynikałyby z następującej hipotezy, która mówi, że dodanie dostatecznie wielu zmiennych “zamienia każdy ideał na ideał o trywialnych stycznych ujemnych”.

**Hipoteza 1.20.** *Niech  $I_0 \subseteq S$  będzie ideałem o regularności  $r_0$ . Ustalmy  $r \geq r_0 + 2$ . Wtedy istnieje liczba  $t$ , pierścień wielomianów  $T = S[x_1, \dots, x_t]$  i podprzestrzeń liniowa  $L \subseteq T_r$  takie, że schemat zadany ideałem  $I_0 \cdot T + L + T_{\geq r+1}$  ma trywialne styczne ujemne.*

Hipoteza pozostaje otwarta i wskazuje na potencjalne przyszłe kierunki w badaniu schematu Hilberta, zwłaszcza na ideę *stabilizacji*: przejście z  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  do kogranicy  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^n)$  po  $n$  względem pewnych systemów takich jak liniowe domknięte włożenia  $\mathbb{A}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^{n+1}$ . Ten pomysł, zastosowany do  $d$  a nie  $n$ , jest użyty w klasycznym wyniku opisującym topologię  $\text{Hilb}_d(\mathbb{A}^2)$ , patrz [Nak99], a ostatnio został uogólniony z  $\mathbb{A}^2$  do  $\mathbb{A}^\infty = \text{colim}_n \mathbb{A}^n$  w [HJN<sup>+</sup>21, HJNY21]. Problem niezredukowania został rozwiązany w (Hab4) przy użyciu innej metody, jak wyjaśniamy poniżej.

Artykuł (Hab4) rozwiązuje dwa centralne problemy w dziedzinie schematów Hilberta punktów. Dowodzi on, że

- schemat Hilberta punktów jest w ogólności niezredukowany. Dokładniej, tak jest dla  $\text{Hilb}_d(\mathbb{A}^{14})$  przy  $d$  dostatecznie dużym i nad dowolnym ciałem, patrz [Przykład 5.4, (Hab4)]. Pytanie o niezredukowanie było otwarte od 1968, patrz [Fog68, p.520], [Ame10, Problem 1.25], [CEVV09].
- dla każdego ciała  $\mathbb{k}$  dodatniej charakterystyki, istnieją skończone  $\mathbb{k}$ -algebry niepodnoszące się do charakterystyki zero, patrz jawne konstrukcje w [Przykład 5.5, (Hab4)]. To pytanie także wydaje się otwarte już od lat '70, ale jest wymienione wprost dopiero przez Hartshorne'a [Har10, p.148], patrz też [Ame10, Problem 1.2], [Lan18]. (W pracy (Hab4) dowodzę również istnienia algebr podnoszących się do  $k$ -tego obciążenia pierścienia wektorów Witta, ale nie dalej, itp.)

Powyższe wyniki są otrzymane jako wnioski z o wiele ogólniejszego wyniku o *prawie Murphy'ego* dla  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}^{16})$ . By je sformułować, potrzebujemy ścisłej definicji pojęcia osobliwości. Mówimy, że dwa punktowane schematy  $(X, x)$ ,  $(Y, y)$  i *gładko równoważne* jeśli istnieje  $(Z, z)$  oraz odwzorowania punktowanych schematów  $(X, x) \leftarrow (Z, z) \rightarrow (Y, y)$  gładkie w  $z$ . *Osobliwość* jest klasą abstrakcji relacji gładkiej równoważności. To pojęcie zgadza się z intuicją: na przykład, każdy schemat o typie osobliwości  $[\text{Spec}(\mathbb{k}[\varepsilon]/\varepsilon^2), (\varepsilon)]$  jest niezredukowany i każdy schemat o typie osobliwości  $[\text{Spec}(\mathbb{Z}/p), (0)]$  leży nad  $\text{Spec}(\mathbb{Z}/p)$ .

Mówimy, że *prawo Murphy'ego zachodzi z dokładnością do retrakcji* dla schematu  $\mathcal{M}$  jeśli dla każdego typu osobliwości  $\Sigma$  skończonego typu nad  $\mathbb{Z}$  istnieje reprezentant  $(Y, y) \in \Sigma$ , otwarty podschemat  $(X, x)$  schematu  $\mathcal{M}$  oraz retrakcja  $(X, x) \rightarrow (Y, y)$  punktowanych schematów, tzn., morfizm posiadający cięcie.

**Twierdzenie 1.21** ([Twierdzenie 1.3, Hab4]). *Prawo Murphy'ego zachodzi z dokładnością do retrakcji dla  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{16})$ .*

Czytelnik może nabrać podejrzeń widząc  $\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{16}$  zamiast schematu Hilberta przestrzeni afinicznej nad ciałem. Jednakże z Twierdzenia 1.21 formalnie wynika to samo dla  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^{16})$  oraz dla typów osobliwości  $\mathbb{Q}$ -schematów (tak samo dla  $\mathbb{F}_p$ ). Twierdzenie jest sformułowane dla  $\mathbb{Z}$ , bowiem tylko w tej ogólności można rozważać podnoszenie (lub jego brak) do charakterystyki zero. To samo prawo Murphy'ego z dokładnością do retrakcji zachodzi dla  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^{16})$ , gdyż schemat ten zawiera  $\text{Hilb}_{\text{pts}}(\mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^{16})$  jako otwarty podschemat.

Znaczenie Twierdzenia 1.21 (i przypadków szczególnych wypunktowanych przed nim) polega na tym, że możemy produkować dane typy osobliwości dla zero-wymiarowych schematów, więc możemy *kontrolować* typ osobliwości deformacji otrzymanego schematu skończonego. Jest to nietrywialne, gdyż schemat skończony prawie nie posiada interesujących niezmienników geometrycznych, przykładowo nie ma nietrywialnych wiązek wektorowych. Zatem jest raczej niejasne jak miałyby się dowodzić, że, na przykład, nie podnosi się on do charakterystyki zero. Podsumowując, Twierdzenie 1.21 daje nadzieję również na wyprodukowanie interesujących nowych przykładów rozmaitości, które nie podnoszą się do charakterystyki zero. Jest stosunkowo mało takich przykładów, a większość z nich jest związana z kontrprzykładami na twierdzenia o znikaniu dla wiązek liniowych i wektorowych, które, jak wyjaśniłem powyżej, są zupełnie puste dla zero-wymiarowych schematów.

Głównym pomysłem w dowodzie Twierdzenia 1.21 jest użycie rozkładu Białynickiego-Biruli, ale implementacja tego pomysłu jest mocno nietrywialna. Główną rolę grają tu tzw.



obudowy TNT (ang. TNT frames), które wprowadzamy i które służą jako „stabilizatory” dla danego ideału  $I$ . Dla ideału  $I \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  i ustalonego  $a \geq 2$  *obudowa TNT wielkości  $a$  dla  $I$*  jest ideałem  $J \subseteq \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$  zdefiniowanym jako

$$J := I \cdot \mathbb{k}[y_1, \dots, y_n] + (x_1, \dots, x_n)^{a+1} + (y_1, \dots, y_n)^2 + \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right).$$

Obudowy TNT dają ekstremalnie bogate źródło elementarnych składowych schematów Hilberta poprzez Twierdzenie 1.16 oraz poniższe Stwierdzenie.

**Stwierdzenie 1.22** ([Stwierdzenie 1.4, Hab4]). *Jeśli  $n \geq 3$ ,  $I_2 = 0$  oraz głębokość  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]/I$  to co najmniej trzy, wtedy  $\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]/J$  ma trywialne styczne ujemne.*

Stwierdzenie 1.22 wraz z Twierdzeniem 1.16 pokazują, że pewne otoczenie otwarte

$$[J] \in \text{Hilb}_{\text{pts}}(\text{Spec}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]))$$

ma retrakcję na otoczenie otwarte  $[J] \in \text{Hilb}_{\text{pts}}^{\mathbb{G}_m}(\text{Spec}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]))$ . Jest to pierwsza z serii retrakcji. Ich złożenie jest retrakcją powyższego otoczenia na otoczenie  $[I + (x_1, \dots, x_n)^{a+1}] \in \text{Hilb}_{\text{pts}}^{\mathbb{G}_m}(\text{Spec}(\mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]))$ . Na mocy klasycznego wyniku Pienne i Schlessingera [PS85] jeśli  $I = I(V)_{\geq N}$  jest obcięciem saturowanego ideału  $V \subseteq \text{Proj } \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$  dla  $N \geq \text{reg } I(V) + 1$  oraz jeśli  $a \geq N + 2$ , to jednorodne deformacje  $I + (x_1, \dots, x_n)^{a+1}$  są równoważne deformacjom  $V \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$ . Ale na mocy prawdy Murphy’ego dowiedzonego przez Vakila [Vak06], już dla  $n = 5$  istnieje  $V \subseteq \mathbb{P}^{n-1}$  którego deformacje mają ustalony typ osobliwości. By spełnić założenie o głębokości, wkładamy powyższe obcięcie do  $\mathbb{A}^8$ , zatem obudowa jest podschematem  $\mathbb{A}^{16}$ .

Powyższa seria retrakcji jest uzyskana przy użyciu jeszcze kilku rozkładów Białynickiego-Biruli dla różnych działań torusa. Wymagają one ciężkiej technicznej pracy by dowieść odpowiednich trywialności „ujemnych” stycznych, by otrzymać analogi Twierdzenia 1.16. Wszystkie retrakcje można zastąpić jedną biorąc odpowiednie uzwarcenie torusa wyższej rangi i używając uogólnionego rozkładu Białynickiego-Biruli jak opisałem w §1.3.2.

Idee tej pracy stanowią już inspirację dla dalszych prac takich jak [Hui22, SS21, SS22, Sza21, Sza22], z których ostatnie dwie zostały przygotowane pod moim kierunkiem.

## 1.5. Wyniki III. Dalsze zastosowania do przestrzeni moduli i tensorów

Końcowa część naszego omówienia obejmuje pracę (Hab5). Jej wyniki można sformułować na trzy różne sposoby: bada ona

- schemat Quot punktów (patrz §1.2.2),
- różnorodności przemiennych krotek macierzy,
- różnorodność  $1_A$ -generycznych tensorów minimalnej rangi brzegowej (patrz §1.2.3).

Cele artykułu (Hab5) są dwojakie. Po pierwsze, stosujemy rozkład Białynickiego-Biruli oraz inne bardziej elementarne narzędzia do badania schematów Quot. Po drugie, pieczołowicie udowadniamy, że trzy powyższe obiekty badań są równoważne. Drugi z celów

jest ważny dla osób pracujących z przemiennymi macierzami oraz dla badaczy zainteresowanych tensorami, bowiem ich matematyczne „pochodzenie” sprawia, że często nie mają doświadczenia w geometrii algebraicznej odpowiedniego by własnoręcznie odtworzyć te równoważności.

Niech  $S = H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n})$  oraz niech  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  będzie schematem parametryzującym moduły ilorazowe  $S^{\oplus r}$  które są skończone stopnia  $d$ . Przed (Hab5) było wiadomo, że dla  $r = 1$  ten schemat jest nieprzywiedlny [Maz80, CEVV09], że dla  $n = 2$  i dowolnych  $r, d$  jest on również nieprzywiedlny, natomiast w przypadkach  $d \geq 4, n \geq 4, r \geq 2$  or  $d \gg 0, n = 3, r \geq 1$  jest on przywiedlny. Nie znana była żadna składowa nieprzywiedlna schematu Quot poza *główną składową* (parametryzującą półproste moduły i ich granice) oraz składowymi przychodzącymi ze schematu Hilberta ( $r = 1$ ). Z punktu widzenia teorii deformacji, głównym wynikiem (Hab5) jest klasyfikacja składowych schematu Quot punktów dla  $d \leq 7$ .

**Twierdzenie 1.23 (Hab5).** *Niech  $\mathbb{k}$  będzie ciałem charakterystyki zero. Wtedy liczba nieprzywiedlnych składowych  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  jest następująca*

	$d \leq 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d \gg 0$
$n \leq 2$	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...
$n = 3$	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...	1, ...	$\gg 0$
$n = 4$	1, ...	1, ...	1, 2, ...	1, 2, ...	1, 2, ...	1, 2, ...	$\gg 0$
$n = 5$	1, ...	1, ...	1, 2, ...	1, 3, 4, ...	1, 3, 4, ...	1, 4, 7, 8, ...	$\gg 0$
$n = 6$	1, ...	1, ...	1, 2, ...	1, 3, 4, ...	1, 4, 6, 7, ...	1, 5, 9, 11, ...	$\gg 0$
$n \geq 7$	1, ...	1, ...	1, 2, ...	1, 3, 4, ...	1, 4, 6, 7, ...	1, 6, 10, 12, 13, ...	$\gg 0$

Tabela 1: Liczba składowych  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$ . W każdej komórce, kolejne liczby odpowiadają liczbie składowych dla  $r = 1, 2, \dots$  zaś “...” oznacza, że liczba stabilizuje się na ostatniej wartości. W szczególności, widzimy, że dla  $r \geq 5$  już mamy wszystkie składowe (przy  $d \leq 7$ ).

Niech  $C_n(\mathbb{M}_d)$  oznacza rozmaitość  $n$ -krotek przemiennych  $d \times d$  macierzy; jest to schemat afiniczny wycięty z  $(\mathbb{A}^{d^2})^n$  przez formy stopnia dwa. Rozmaitość ta jest dość intensywnie badana [MT55, Ger61, Gur92, GS00, Knu05, DS09, Šiv12]. Jest ona nieprzywiedlna dla  $n = 2$ , nieprzywiedlna i toryczna dla  $d = 2$  (i dowolnego  $n$ ) oraz w ogólności przywiedlna dla  $n \geq 3$ . Mostem pomiędzy schematami Quot oraz  $C_n(\mathbb{M}_d)$  jest następujący diagram:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{U}^{\text{st}} & \xrightarrow{\text{gładkie, wymiar włókien } rd} & C_n(\mathbb{M}_d) \\
 \downarrow / \text{GL}_d & \lrcorner & \downarrow / \text{GL}_d \\
 \text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n) & \longrightarrow & \text{Mod}^d(\mathbb{A}^n)
 \end{array}$$

przestrzeń moduli	obiekt
$\text{Mod}^d(\mathbb{A}^n)$	moduły
$\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$	moduły z ustalonymi $r$ generatorami
$C_n(\mathbb{M}_d)$	moduły z ustaloną bazą
$\mathcal{U}^{\text{st}}$	moduły z ustaloną bazą i ustalonymi $r$ generatorami



Diagram pokazuje, że podstawowym obiektem badań jest stóg Artina  $\text{Mod}^d(\mathbb{A}^n)$  skończonych stopnia  $d$  modułów nad pierścieniem współrzędnych  $\mathbb{A}^n$ . Ten stóg jest prezentowany jako globalny stóg ilorazowy przez odwzorowanie z  $C_n(\mathbb{M}_d)$ . Posiada on również gładkie odwzorowanie z  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  które nie musi być dominujące dla małych  $r$  (są moduły niegenerowane przez  $r = 1$  element, na przykład), ale jest surjektywne dla  $r \geq d$ . Dla  $r \geq d$  rozmaitości  $C_n(\mathbb{M}_d)$  oraz  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  mają gładkie odwzorowania z  $\mathcal{U}^{\text{st}}$  zatem są gładko równoważne i ich étalnie-localna geometria jest taka sama. Odpowiednikiem poprzedniego twierdzenia jest następujące.

**Twierdzenie 1.24** ([Twierdzenie A, Hab5]). *Niech  $\mathbb{k}$  będzie algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero. Liczba nieprzywiedlnych składowych  $C_n(\mathbb{M}_d)$  dla  $d \leq 7$  taka jak pokazana w Tabeli 2. Wszystkie składowe mają gładkie punkty.*

	$d \leq 2$	$d = 3$	$d = 4$	$d = 5$	$d = 6$	$d = 7$	$d \gg 0$
$n \leq 2$	1	1	1	1	1	1	1
$n = 3$	1	1	1	1	1	1	$\gg 0$
$n = 4$	1	1	2	2	2	2	$\gg 0$
$n = 5$	1	1	2	4	4	8	$\gg 0$
$n = 6$	1	1	2	4	7	11	$\gg 0$
$n \geq 7$	1	1	2	4	7	13	$\gg 0$

Tabela 2: Liczba składowych  $C_n(\mathbb{M}_d)$

Schemat  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  posiada naturalne działanie  $\mathbb{G}_m$  pochodzące od mnożenia przez skalar na  $\mathbb{A}^n$  jak w (1.9). Powyższe wyniki mimo iż w pewnych obliczeniach inspirowane przez rozkład Białynickiego-Biruli dla tego działania, formalnie nie używają go. To częściowo dlatego, że wszystkie składowe powyżej są generycznie gładkie, zatem mogą być wskazane przez skonstruowanie rodziny i podanie jednego punktu o odpowiednio małej przestrzeni stycznej. Sytuacja jest zupełnie inna dla  $d = 8$ .

**Twierdzenie 1.25** ([Twierdzenie B, Hab5]). *Niech  $\mathbb{k}$  będzie algebraicznie domkniętym ciałem charakterystyki zero. Rozważmy miejsce geometryczne  $\mathcal{L}$  złożone z krotek 4 macierzy  $8 \times 8$  które mają niezerowe elementy tylko w prawym górnym rogu wielkości  $4 \times 4$ . Wtedy  $(\mathbb{k}I_4)^4 + \overline{\text{GL}}_8 \cdot \mathcal{L}$  jest składową  $C_4(\mathbb{M}_8)$  która jest generycznie niezredukowana (zatem nie ma gładkich punktów). Zatem, rozmaitość  $C_n(\mathbb{M}_d)$  ma generycznie niezredukowane składowe dla wszystkich  $n \geq 4$  oraz  $d \geq 8$ . Natomiast rozmaitość  $C_n(\mathbb{M}_d)$  jest generycznie zredukowana dla  $d \leq 7$  i dla każdego  $n$ . Podobnie, schemat  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  ma generycznie niezredukowaną składową dla  $n, r \geq 4$  oraz  $d \geq 8$ , podczas gdy jest on generycznie zredukowany dla  $d \leq 7$  oraz wszystkich  $r, n$ .*

Dowód niezredukowania w Twierdzeniu 1.25 można naszkicować następująco. Miejsce geometryczne  $\mathcal{L}^{\text{quot}}$  of  $\text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n)$  odpowiadające powyższemu  $\mathcal{L}$  ma wymiar 52, zaś jego punkty stałe względem działania  $\mathbb{G}_m$  mają wymiar 48. Dla punktu  $[M] \in (\mathcal{L}^{\text{quot}})^{\mathbb{G}_m}$  możemy rozważyć włókno  $Y$  dodatniego rozkładu Białynickiego-Biruli. Jest ono stożkiem afinicznym, tzn.,  $Y$  jest spektrum dodatnio zgradowanej  $\mathbb{k}$ -algebry  $B$ . Generatory  $B$  są dane przez bazę dualną do przestrzeni  $(T_{[M]} \text{Quot}_r^d(\mathbb{A}^n))_{<0} \simeq \text{Hom}(K, M)_{<0}$ , gdzie  $K = \ker(S^{\oplus r} \rightarrow M)$ . Obliczenie równań jest trudniejsze. Używamy do tego *przeszkód*

prymarnych [Man99], które pozwalają nam na dostęp do kwadratowych równań w  $B$ . Zauważmy, że  $\text{Ext}^i(K, M) \simeq \text{Ext}_S^{i+1}(M, M)$  dla każdego  $i$ , zatem mamy parowanie Yonedy  $\text{Hom}(K, M) \times \text{Hom}(K, M) \rightarrow \text{Ext}^1(K, M)$ .

**Twierdzenie 1.26** ([Twierdzenie 4.18, Hab5]). *Rozważmy punkt  $[M]$  schematu  $\text{Quot}$  oraz stowarzyszoną z nim teorię przeszkód z przestrzenią przeszkód  $\text{Ext}^1(K, M)$ . Wtedy dla  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Hom}(K, M)$  odwzorowanie przeszkody prymarnej posyła  $\varphi_1\varphi_2 \in \text{Sym}_2(\text{Hom}(K, M))$  na element  $\varphi_1 \cdot \varphi_2 + \varphi_2 \cdot \varphi_1 \in \text{Ext}^1(K, F/K)$ , gdzie  $\cdot$  oznacza parowanie Yonedy.*

W sytuacji Twierdzenia 1.25 równania kwadratowe są wystarczające do stwierdzenia, że  $\dim B \leq 4$ , co kończy dowód twierdzenia. To kończy również nasze omówienie.

## Literatura

- [AHR20] Jarod Alper, Jack Hall, and David Rydh. A Luna étale slice theorem for algebraic stacks. *Ann. of Math. (2)*, 191(3):675–738, 2020.
- [AK80] Allen B. Altman and Steven L. Kleiman. Compactifying the Picard scheme. *Adv. in Math.*, 35(1):50–112, 1980.
- [Ame10] American Institute of Mathematics Problem List. Components of Hilbert schemes. Available at <http://aimpl.org/hilbertschemes>, 2010.
- [BB73] A. Białyński-Birula. Some theorems on actions of algebraic groups. *Ann. of Math. (2)*, 98:480–497, 1973.
- [BB76] A. Białyński-Birula. Some properties of the decompositions of algebraic varieties determined by actions of a torus. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 24(9):667–674, 1976.
- [BBS13] Kai Behrend, Jim Bryan, and Balázs Szendrői. Motivic degree zero Donaldson-Thomas invariants. *Invent. Math.*, 192(1):111–160, 2013.
- [BC20] Gwyn Bellamy and Alastair Craw. Birational geometry of symplectic quotient singularities. *Invent. Math.*, 222(2):399–468, 2020.
- [BCR22] Cristina Bertone, Francesca Cioffi, and Margherita Roggero. Smoothable Gorenstein Points Via Marked Schemes and Double-generic Initial Ideals. *Experimental Mathematics*, 31(1):120–137, 2022.
- [BCS13] Peter Bürgisser, Michael Clausen, and Mohammad A Shokrollahi. *Algebraic complexity theory*, volume 315. Springer Science & Business Media, 2013.
- [Bea83] Arnaud Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4):755–782 (1984), 1983.
- [Ber12] José Bertin. The punctual Hilbert scheme: an introduction. In *Geometric methods in representation theory. I*, volume 24 of *Sémin. Congr.*, pages 1–102. Soc. Math. France, Paris, 2012.
- [BF08] Kai Behrend and Barbara Fantechi. Symmetric obstruction theories and Hilbert schemes of points on threefolds. *Algebra Number Theory*, 2(3):313–345, 2008.
- [BJJM19] Jarosław Buczyński, Tadeusz Januszkiewicz, Joachim Jelisiejew, and Mateusz Michałek. Constructions of  $k$ -regular maps using finite local schemes. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 21(6):1775–1808, 2019.
- [BL16] Markus Bläser and Vladimir Lysikov. On degeneration of tensors and algebras. In *41st International Symposium on Mathematical Foundations of*

- Computer Science*, volume 58 of *LIPICs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, pages Art. No. 19, 11. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2016.
- [Bot88] Raoul Bott. Morse theory indomitable. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (68):99–114 (1989), 1988.
- [BR21] Sjoerd V. Beentjes and Andrea T. Ricolfi. Virtual counts on Quot schemes and the higher rank local DT/PT correspondence. *Math. Res. Lett.*, 28(4):967–1032, 2021.
- [Bra03] Tom Braden. Hyperbolic localization of intersection cohomology. *Transform. Groups*, 8(3):209–216, 2003.
- [Bri77] Joël Briançon. Description de  $Hilb^n C\{x, y\}$ . *Invent. Math.*, 41(1):45–89, 1977.
- [Car02] James B. Carrell. Torus actions and cohomology. In *Algebraic quotients. Torus actions and cohomology. The adjoint representation and the adjoint action*, volume 131 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 83–158. Springer, Berlin, 2002.
- [CEVV09] Dustin A. Cartwright, Daniel Erman, Mauricio Velasco, and Bianca Viray. Hilbert schemes of 8 points. *Algebra Number Theory*, 3(7):763–795, 2009.
- [CGGS21] Alastair Craw, Søren Gammelgaard, Ádám Gyenge, and Balázs Szendrői. Quot schemes for Kleinian orbifolds. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 17:Paper No. 099, 21, 2021.
- [CGM05] Vladimir Chernousov, Stefan Gille, and Alexander Merkurjev. Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties. *Duke Math. J.*, 126(1):137–159, 2005.
- [CHI+18] Luca Chiantini, Jonathan D. Hauenstein, Christian Ikenmeyer, Joseph M. Landsberg, and Giorgio Ottaviani. Polynomials and the exponent of matrix multiplication. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(3):369–389, 2018.
- [CJN15] Gianfranco Casnati, Joachim Jelisiejew, and Roberto Notari. Irreducibility of the Gorenstein loci of Hilbert schemes via ray families. *Algebra Number Theory*, 9(7):1525–1570, 2015.
- [CS79] James B. Carrell and Andrew John Sommese. Some topological aspects of  $\mathbf{C}^*$  actions on compact Kaehler manifolds. *Comment. Math. Helv.*, 54(4):567–582, 1979.
- [CW90] Don Coppersmith and Shmuel Winograd. Matrix multiplication via arithmetic progressions. *J. Symbolic Comput.*, 9(3):251–280, 1990.
- [DG14] V. Drinfeld and D. Gaitsgory. On a theorem of Braden. *Transform. Groups*, 19(2):313–358, 2014.
- [Dri13] Vladimir Drinfeld. On algebraic spaces with an action of  $G_m$ . arXiv:1308.2604., 2013.
- [DS09] Alexandru Dimca and Balázs Szendrői. The Milnor fibre of the Pfaffian and the Hilbert scheme of four points on  $\mathbf{C}^3$ . *Math. Res. Lett.*, 16(6):1037–1055, 2009.
- [EHK+20a] Elden Elmanto, Marc Hoyois, Adeel A. Khan, Vladimir Sosnilo, and Maria Yakerson. Framed transfers and motivic fundamental classes. *J. Topol.*, 13:460–500, 2020.
- [EHK+20b] Elden Elmanto, Marc Hoyois, Adeel A. Khan, Vladimir Sosnilo, and Maria Yakerson. Modules over algebraic cobordism. *Forum Math. Pi*, 8:e14, 2020.

- [EHK<sup>+</sup>21] Elden Elmanto, Marc Hoyois, Adeel A. Khan, Vladimir Sosnilo, and Maria Yakerson. Motivic infinite loop spaces. *Cambridge J. Math.*, 9(2):431–549, 2021.
- [ES87] Geir Ellingsrud and Stein Arild Strømme. On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. Math.*, 87(2):343–352, 1987.
- [FGI<sup>+</sup>05] Barbara Fantechi, Lothar Göttsche, Luc Illusie, Steven L. Kleiman, Nitin Nitsure, and Angelo Vistoli. *Fundamental algebraic geometry*, volume 123 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Grothendieck’s FGA explained.
- [Fog68] John Fogarty. Algebraic families on an algebraic surface. *Amer. J. Math.*, 90:511–521, 1968.
- [Ger61] Murray Gerstenhaber. On dominance and varieties of commuting matrices. *Ann. of Math. (2)*, 73:324–348, 1961.
- [GS00] Robert M. Guralnick and B. A. Sethuraman. Commuting pairs and triples of matrices and related varieties. *Linear Algebra Appl.*, 310(1-3):139–148, 2000.
- [Gur92] Robert M. Guralnick. A note on commuting pairs of matrices. *Linear and Multilinear Algebra*, 31(1-4):71–75, 1992.
- [Hai01] Mark Haiman. Hilbert schemes, polygraphs and the Macdonald positivity conjecture. *J. Amer. Math. Soc.*, 14(4):941–1006 (electronic), 2001.
- [Hai02] Mark Haiman. Vanishing theorems and character formulas for the Hilbert scheme of points in the plane. *Invent. Math.*, 149(2):371–407, 2002.
- [Hai03] Mark Haiman. Combinatorics, symmetric functions, and Hilbert schemes. In *Current developments in mathematics, 2002*, pages 39–111. Int. Press, Somerville, MA, 2003.
- [Har66] Robin Hartshorne. Connectedness of the Hilbert scheme. *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 29(1):7–48, 1966.
- [Har10] Robin Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2010.
- [HJN<sup>+</sup>21] Marc Hoyois, Joachim Jelisiejew, Denis Nardin, Burt Totaro, and Maria Yakerson. The Hilbert scheme of infinite affine space and algebraic K-theory. to appear in *J. Eur. Math. Soc.*, 2021.
- [HJNY21] Marc Hoyois, Joachim Jelisiejew, Denis Nardin, and Maria Yakerson. Hermitian K-theory via oriented Gorenstein algebras, 2021. to appear in *Crelle’s Journal*.
- [HR19] Jack Hall and David Rydh. Coherent Tannaka duality and algebraicity of Hom-stacks. *Algebra Number Theory*, 13(7):1633–1675, 2019.
- [HS04] Mark Haiman and Bernd Sturmfels. Multigraded Hilbert schemes. *J. Algebraic Geom.*, 13(4):725–769, 2004.
- [Hui14] Mark E. Huibregtse. Some elementary components of the Hilbert scheme of points. *To appear in Rocky Mountain Journal of Mathematics, arXiv preprint arXiv:1407.1440*, 2014.
- [Hui22] Mark E. Huibregtse. More elementary components of the Hilbert scheme of points. *arXiv:2102.00494*, 2022.
- [Iar72] Anthony Iarrobino. Reducibility of the families of 0-dimensional schemes on a variety. *Invent. Math.*, 15:72–77, 1972.

- [IE78] Anthony Iarrobino and Jacques Emsalem. Some zero-dimensional generic singularities; finite algebras having small tangent space. *Compositio Math.*, 36(2):145–188, 1978.
- [IK99] Anthony Iarrobino and Vassil Kanev. *Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci*, volume 1721 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Appendix C by Anthony Iarrobino and Steven L. Kleiman.
- [Jel14] Joachim Jelisiejew. Local finite-dimensional Gorenstein  $k$ -algebras having Hilbert function  $(1,5,5,1)$  are smoothable. *J. Algebra Appl.*, 13(8):1450056 (7 pages), 2014.
- [JLP22] Joachim Jelisiejew, J. M. Landsberg, and Arpan Pal. Concise tensors of minimal border rank, 2022. arXiv:2205.05713.
- [Kar00] N. A. Karpenko. Cohomology of relative cellular spaces and of isotropic flag varieties. *Algebra i Analiz*, 12(1):3–69, 2000.
- [Knu05] Allen Knutson. Some schemes related to the commuting variety. *J. Algebraic Geom.*, 14(2):283–294, 2005.
- [Lan12] Joseph M. Landsberg. *Tensors: geometry and applications*, volume 128 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [Lan17] J. M. Landsberg. *Geometry and Complexity Theory*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2017.
- [Lan18] Adrian Langer. Lifting zero-dimensional schemes and divided powers. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 50(3):449–461, 2018.
- [LG14] François Le Gall. Powers of tensors and fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 39th international symposium on symbolic and algebraic computation*, pages 296–303, 2014.
- [LM17] J. M. Landsberg and Mateusz Michałek. Abelian tensors. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 108(3):333–371, 2017.
- [Man99] Marco Manetti. Deformation theory via differential graded Lie algebras. In *Algebraic Geometry Seminars, 1998–1999 (Italian) (Pisa)*, pages 21–48. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1999.
- [Maz80] Guerino Mazzola. Generic finite schemes and Hochschild cocycles. *Comment. Math. Helv.*, 55(2):267–293, 1980.
- [MR22] Sergej Monavari and Andrea T. Ricolfi. On the motive of the nested Quot scheme of points on a curve. *J. Algebra*, 610:99–118, 2022.
- [MRV17] Margarida Melo, Antonio Rapagnetta, and Filippo Viviani. Fine compactified Jacobians of reduced curves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 369(8):5341–5402, 2017.
- [MT55] T. S. Motzkin and Olga Taussky. Pairs of matrices with property  $L$ . II. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 80:387–401, 1955.
- [Nak99] Hiraku Nakajima. *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, volume 18 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [OS12] Alexei Oblomkov and Vivek Shende. The Hilbert scheme of a plane curve singularity and the HOMFLY polynomial of its link. *Duke Math. J.*, 161(7):1277–1303, 2012.

- [Poo08a] Bjorn Poonen. Isomorphism types of commutative algebras of finite rank over an algebraically closed field. In *Computational arithmetic geometry*, volume 463 of *Contemp. Math.*, pages 111–120. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
- [Poo08b] Bjorn Poonen. The moduli space of commutative algebras of finite rank. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 10(3):817–836, 2008.
- [Pos06] Alexander Postnikov. Total positivity, Grassmannians, and networks. arXiv:0609764. <https://arxiv.org/abs/math/0609764>, 2006.
- [PS85] Ragni Piene and Michael Schlessinger. On the Hilbert scheme compactification of the space of twisted cubics. *Amer. J. Math.*, 107(4):761–774, 1985.
- [Ren18] Jørgen Vold Rennemo. Homology of Hilbert schemes of points on a locally planar curve. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(7):1629–1654, 2018.
- [Ric20] Andrea T. Ricolfi. On the motive of the Quot scheme of finite quotients of a locally free sheaf. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 144:50–68, 2020.
- [Šiv12] Klemen Šivic. On varieties of commuting triples III. *Linear Algebra Appl.*, 437(2):393–460, 2012.
- [SR72] Neantro Saavedra Rivano. *Catégories Tannakiennes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 265. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.
- [SS21] Matthew Satriano and Andrew P. Staal. Small elementary components of Hilbert schemes of points, 2021. arXiv:2112.01481.
- [SS22] Matthew Satriano and Andrew P. Staal. Galois closures and elementary components of Hilbert schemes of points, 2022. arXiv:2210.14310.
- [Str96] Stein Arild Strømme. Elementary introduction to representable functors and Hilbert schemes. In *Parameter spaces (Warsaw, 1994)*, volume 36 of *Banach Center Publ.*, pages 179–198. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 1996.
- [Sza21] Michał Szachniewicz. Non-reducedness of the Hilbert schemes of few points, 2021. arXiv:2109.11805.
- [Sza22] Robert Szafarczyk. New elementary components of the Gorenstein locus of the hilbert scheme of points. *arXiv*, 2022.
- [Vak06] Ravi Vakil. Murphy’s law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces. *Invent. Math.*, 164(3):569–590, 2006.
- [Wil12] Virginia Vassilevska Williams. Multiplying matrices faster than Coppersmith-Winograd. In *Proceedings of the forty-fourth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 887–898, 2012.