

Autoreferat

Jan Peszek

1 Dane kandydata

Imię i nazwisko: Jan Peszek

Afiliacja: Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki

2 Posiadane dyplomy i stopnie naukowe

2016: Doktorat z Matematyki

Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Promotor: prof. Piotr B. Mucha

Tytuł rozprawy: Dynamika współoddziałujących cząstek

2011: Magisterium z Matematyki

Uniwersytet Warszawski, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Promotor: prof. Agnieszka Kałamańska

Tytuł pracy: O pewnych nieliniowych wariantach nierówności Galiardo-Nirenberga w nieliniowych zagadnieniach własnych, teorii pojemności i nierównościach izoperymetrycznych

3 Zatrudnienie

2024 – obecnie: Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, adiunkt

2019 – 2024: Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, adiunkt im. S. Eilenberga

2018 – 2019: Center for Scientific Computation and Mathematical Modeling, University of Maryland, College Park, Postdoctoral Researcher

2016 – 2019: Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, adiunkt

2016 – 2019: Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk w Warszawie, adiunkt

2015 – 2016: Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski, asystent

4 Omówienie osiągnięcia naukowego

Rozprawa habilitacyjna zatytułowana

Wieloskalowa analiza zachowań kolektywnych z osobliwymi oddziaływaniami

składa się z cyklu artykułów naukowych, zgodnie z art. 219 ust. 1 pkt 2b Ustawy:

- [A1] M. Fabisiak and J. Peszek, *Inevitable monokineticity of strongly singular alignment*. Mathematische Annalen, vol. 390, p. 589–637, (2024) 49 stron;
- [A2] J. Peszek and David Poyato, *Heterogeneous gradient flows in the topology of fibered optimal transport.*, Calculus of Variations and PDEs vol. 62, no. 258, p. 1-72, (2023) 72 strony;
- [A3] J. Peszek and R. Rodiac *Mean-field limit of 2D stationary particle systems with signed Coulombian interactions.*, Journal of the London Mathematical Society vol. 111, no. 1, e70068, (2025) 38 stron.

Wybrane prace poświęcone są analizie matematycznej układów równań różniczkowych zwyczajnych i cząstkowych pojawiających się w modelach zachowań kolektywnych. Kluczowym wspólnym elementem jest granica pola średniego i związany z nią rozwój metod słabych przejść granicznych splotów miar z osobliwymi jądrami.

Niektóre sformułowania wyników wymagają rozbudowanego wprowadzenia (w przypadku pracy [A2] – prawie 20 stron), wobec czego pewne szczegóły ich w pełni ścisłej prezentacji zostały pominięte (zawsze jednak z podaniem bezpośredniego odwołania). Niniejsza rozprawa skupia się na najbardziej kluczowych i niestandardowych conceptach.

Rozpoczynamy od ogólnego opisu wyników uzyskanych w pracach [A1]–[A3], umieszczając je w kontekście najistotniejszych kierunków badań nad matematycznym opisem dynamiki kolektywnej. Bardziej szczegółowe przedstawienie zagadnień podane jest poniżej. Na końcu sekcji przedstawiamy bardziej dogłębny opis elementów nowej metodologii powstałej w pracach [A1]–[A3].

Zarys ogólny

Zachowania kolektywne (lub dynamika kolektywna) stanowią interdyscyplinarną dziedzinę badań zajmującą się samobieżnymi autonomicznymi agentami, ich komunikacją i interakcjami, a także mechanizmami kooperacji prowadzącymi do powstawania szerokiej gamy zjawisk emergentnych. Typowe przykłady obejmują stada ptaków, ławice ryb, dystrybucję dóbr, powstawanie języków czy sterowanie bezzałogowymi statkami powietrznymi (UAV). W ostatnich latach pojawiły się również nowe kierunki, w których nowoczesne architektury sztucznej inteligencji interpretuje się z perspektywy matematycznej jako przykłady dynamiki kolektywnej. Wspólną cechą wybranych prac jest to, że podejmują one analizę klasycznych modeli zachowań kolektywnych z osobliwymi mechanizmami interakcji, prowadzoną konsekwentnie w różnych skalach: od mikroskopowej, przez mezoskopową, aż po makroskopową.

Dynamika kolektywna oraz wieloskalowa analiza przepływów mogą być w naturalny sposób powiązane z klasycznymi problemami fizyki matematycznej, w szczególności z dynamiką płynów i plazmy. W skali mezoskopowej zjawiska te opisywane są przez równania Boltzmanna i Własowa, wprowadzone odpowiednio w 1872 i 1938 roku. Rozważane tutaj układy są w pewnym stopniu związane z oboma podejściami: na poziomie mikro- i mezoskopowym wykazują nielokalne interakcje typu Własowa, natomiast w granicy makroskopowej pojawia się struktura hydrodynamiczna typu Eulera, z dysypacją przypominającą ułamkowy operator Laplace’a, zob. [B9] oraz [4]. Znaczenie takich procesów granicznych podkreśla Szósty Problem Hilberta, który postulował ścisłą dedukcję praw ruchu ośrodka ciągłego z zasad atomistycznych [23].

Kluczową cechą osobliwych oddziaływań jest to, że sytuują się one pomiędzy klasyczną nielokalnością typu Własowa a lokalnymi interakcjami typowymi dla programu Newtona–Boltzmanna–Eulera. Zachowują one swój nielokalny charakter, lecz osobliwość wywołuje efekty związane ze zderzeniami, takie jak wyrównanie prędkości w skończonym czasie, „sklejanie się” trajektorii czy bezwarunkowe unikanie kolizji zob. [B12, B14] oraz [11, 17, 19, 29, 47]. W tym sensie modele lokalne mogą być często odzyskiwane jako granice osobliwych nielokalnych interakcji, podczas gdy osobliwość oddziaływań prowadzi do zjawisk nieobecnych w przypadkach gładkich.

Krótki zarys. Cykl [A1]–[A3] stanowi przekrój mojej aktywności badawczej, łącząc trzy kluczowe prace z różnych kierunków, tworzące spójny cykl dzięki wspólnej metodologii oraz dwóm nadrzędnym tematom:

- wieloskalowej analizie dynamiki kolektywnej z osobliwymi oddziaływaniami,
 - słabym przejściom granicznym splotów miar z osobliwymi jądrami całkowitymi.
- W pracy [A1] dowodzimy, że pewne klasy odwzorowań o wartościach miarowych są monokinetyczne, tzn. rozkład prędkości koncentruje się w delcie Diraca. Prowadzi to do nowych rezultatów dotyczących istnienia słabych rozwiązań bezciśnieniowego ułamkowego układu *Euler–alignment*, bezpośredniej granicy pola średniego od skali mikro- do makroskopowej dla tego układu, a także do ścisłego uzasadnienia ansatzu monokinetycznego bez wprowadzania dodatkowych sił, stosowanych w klasycznych granicach hiperbolicznych. Wraz z kontynuacjami ([B1] oraz powstającym preprintem), praca ta wnosi nowe spojrzenie na od dawna otwarty problem dobrego postawienia zagadnień związanych z osobliwą dynamiką wyrównywania prędkości, w szczególności dla bezciśnieniowego ułamkowego układu *Euler–alignment*.
 - W pracy [A2] konstruujemy niejednorodne rozszerzenie teorii potoków gradientowych w przestrzeniach Wassersteina dla λ -wypukłych funkcjonałów energii w topologii optymalnego transportu po włóknach. Koncepcja ta w naturalny sposób wprowadza niejednorodne struktury wielofenotypowe (lub wielogatunkowe) do istniejących modeli, takich jak Kuramoto [26, 27, 30], Lohe [16, 18, 28] czy Keller–Segel [21]. Głównym bezpośrednim zastosowaniem [A2] jest dowód dobrego postawienia zagadnienia kinetycznego dla słabo osobliwego modelu Cuckera–Smale’a w wielu wymiarach [B17]. Dalsze zastosowania obejmują jednolitą w czasie granicę pola średniego dla tego modelu oraz dla pewnych dynamik typu Kuramoto, w szczególności dla modelu ruchu drogowego Aw–Rascle [B2].

- Artykuł [A3] poświęcony jest granicy pola średniego dla cząstek naładowanych (gdzie ładunek rozumiany jest jako masa o dowolnym znaku) z oddziaływaniami kulombowskimi. Ponieważ prowadzi to do splotów osobliwych jąder kulombowskich z miarami Radona, pojawiają się istotne trudności techniczne. Praca ta podejmuje także bardziej klasyczne zagadnienia związane z układami przyciągania–odpychania agentów [6, 8] oraz z wirami punktowymi [3], związanymi z równaniem Eulera.

Wspólną wartością dodaną artykułów [A1]–[A3] jest rozwój nowych technik przechodzenia do granicy w splotach $k * \mu^N$ jąder osobliwych k (zwykle niecałkowalnych w otoczeniu zera) z miarami Radona μ^N . W typowej sytuacji $\mu^N \rightarrow \mu$ w sensie wąskim (tj. testując funkcjami ograniczonymi ciągłymi) i zazwyczaj nie jest jasne, czy granicę można utożsamiać z $k * \mu$ (ani nawet, czy $k * \mu$ jest dobrze określone). Istotą tych prac jest zmiana perspektywy: osobliwość musi zostać zredukowana bez odwoływania się do jakiegokolwiek regularności μ^N lub μ . W praktyce μ^N jest zazwyczaj miarą empiryczną, podczas gdy μ może mieć zarówno części atomowe, jak i absolutnie ciągłe. W [A1] monokinetyczność pozwala kompensować osobliwość w zmiennej położenia za pomocą zmiennej prędkości w ujęciu kinetycznym, co zmniejsza rząd osobliwości jądra o jeden. W [A2], ze wsparciem wyników z pracy [B17], uzyskujemy podobną redukcję dzięki przekształceniu układu z drugiego rzędu w heterogeniczną dynamikę pierwszego rzędu. Wreszcie, w [A3] stosujemy techniki specyficzne dla wymiaru dwa (takie jak warunek *bezdywergencyjności w części skończonej*, zob. Definicja 4.10), aby przeprowadzić przejście graniczne. Kierunki te są podkreślone w Uwagach 4.6, 4.9 i 4.15.

Oznaczenia. Posługujemy się standardowymi oznaczeniami, których wykaz znajduje się na końcu rozprawy. Należy podkreślić, że większość symboli wprowadzanych w szczegółowych opisach artykułów [A1]–[A3] należy odczytywać lokalnie, tj. w ramach każdego opisu osobno. Na przykład symbol μ występuje w każdej z prac [A1]–[A3] w nieco innym znaczeniu, choć zawsze jako miara.

Całkowanie funkcji $f = f(x, y)$ po X względem zmiennej x oraz miary $\mu = \mu(x, y)$ oznaczamy przez

$$\int_X f(x, y) \mu(dx, y).$$

Jeśli całkujemy względem wszystkich zmiennych, piszemy czasem

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu := \int_{X \times Y} f(x, y) \mu(dx, dy).$$

W razie potrzeby, operatory różniczkowe wskazują zmienną różniczkowania; na przykład $\nabla_x f(x, y)$ oznacza, że gradient liczony jest wyłącznie względem zmiennej x .

Wreszcie, gdy rozważamy odwzorowanie o wartościach miarowych $\mu : [0, T] \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$, stosujemy skrót $\mu_t(x, v) := \mu(t, x, v)$, traktując takie odwzorowania jako krzywe w przestrzeni miar probabilistycznych $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$. W szczególności indeks dolny w μ_t nigdy nie oznacza pochodnej po czasie, którą zawsze zapisujemy jako ∂_t . Na przestrzeni miar stosujemy często topologię wąską (*eng. narrow topology*), w której zbieżność miar testowana jest funkcjami ciągłymi ograniczonymi.

Artykuł [A1]

Rozważmy mikroskopowy model Cuckera–Smale’a dla N cząstek (agentów):

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \frac{1}{N} \sum_{i \neq j=1}^N \psi(|x_i - x_j|)(v_j - v_i), \end{cases} \quad (x_i(0), v_i(0)) = (x_{i0}, v_{i0}) \in \mathbb{R}^{2d}, \quad (1)$$

gdzie $x_i(t), v_i(t)$ oznaczają położenie i prędkość i -tego agenta w chwili $t \geq 0$. Koncentrujemy się na silnie osobliwej wadze komunikacyjnej

$$\psi(s) = s^{-\alpha}, \quad \alpha \geq d.$$

W granicy pola średniego $N \rightarrow \infty$ układ cząsteczkowy formalnie aproksymuje kinetyczne równanie Cuckera–Smale’a, (niektóre rygorystyczne przejścia graniczne można znaleźć w pracach [B11] oraz [5, 9, 19]):

$$\partial_t \mu + v \cdot \nabla_x \mu + \operatorname{div}_v (F(\mu) \mu) = 0, \quad (2)$$

gdzie

$$F(\mu)(t, x, v) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \psi(|x - y|)(w - v) \mu(t, dy, dw),$$

a $\mu(t, x, v)$ oznacza rozkład (w sensie rozkładu prawdopodobieństwa) cząstek znajdujących się w punkcie $x \in \mathbb{R}^d$ o prędkości $v \in \mathbb{R}^d$ w chwili $t \geq 0$.

Artykuł [A1] dowodzi, że dla silnie osobliwych interakcji ($\alpha \geq d$) każde sensowne słabe sformułowanie (2) prowadzi koniecznie do *monokinetycznych* rozwiązań o wartościach miarowych, tzn. dla p.w. t, x rozkład prędkości $\sigma_{t,x}(\cdot) := \mu_t(x, \cdot)$ koncentruje się w delcie Diraca. Prowadzi to do dwóch głównych konsekwencji. Po pierwsze, każde słabe rozwiązanie o wartościach miarowych (2) jest jednocześnie słabym rozwiązaniem bezciśnieniowego ułamkowego układu *Euler–alignment*. W przeciwieństwie do [14, 25, 32], daje to wyprowadzenie makroskopowego układu *Euler–alignment* z kinetycznego modelu Cuckera–Smale’a *bez potrzeby* dodawania sił relaksacyjnych, jak w [14]. Po drugie, wykazujemy, że granica pola średniego od (1) do (2) jest sama w sobie monokinetyczna, co umożliwi konstrukcję słabych rozwiązań o wartościach miarowych ułamkowego układu *Euler–alignment* dla dowolnych zwartych danych początkowych w $\mathbb{R}$ oraz warunkowo w $\mathbb{R}^2$. Wcześniejsze wyniki dotyczące istnienia opierały się na założeniach progu krytycznego (*eng. critical threshold*) [7, 22, 44, 45], dodatniości w całej przestrzeni [B9], bądź okresowych warunkach brzegowych [13, 39–41, 43]. Nasze podejście, przeciwnie, dopuszcza ogólne dane początkowe oraz próżnię.

Główny rezultat 1: monokinetyczność

Tu i w dalszym ciągu rozprawy

$$\rho_t(x) := \int_{\mathbb{R}^d} \mu_t(x, dv), \quad u(t, x) := \frac{1}{\rho_t(x)} \int_{\mathbb{R}^d} v \mu_t(x, dv), \quad (3)$$

są lokalną gęstością oraz lokalną prędkością miary $\mu = \mu_t(x, v)$. Główny wynik dotyczący monokinetyczności brzmi następująco.

Twierdzenie 4.1 ([A1], Theorem 1.1). *Przypuśćmy, że nieujemna miara Radona μ na $[0, T] \times \mathbb{R}^{2d}$ o jednostajnie zwartym nośniku (którą utożsamiamy z rodziną miar probabilistycznych $\mu = \{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$) spełnia warunki steadily flowing oraz locally mass preserving (patrz niżej). Załóżmy ponadto, że*

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^{4d} \setminus \{x=x'\}} \frac{|v - v'|^{\alpha+2}}{|x - x'|^\alpha} d[\mu_t \otimes \mu_t] dt < \infty, \quad \alpha \geq d. \quad (4)$$

Wówczas μ jest monokinetyczna, tzn. rozkład prędkości w ρ_t -p.w. punktach x jest deltą Diraca. Innymi słowy $v = u(t, x)$ dla μ -p.w. (t, x, v) .

W powyższym twierdzeniu miara $\mu = \{\mu_t\}_{t \in [0, T]}$ spełnia następujące założenia.

(MP) Locally mass preserving. Dla dowolnego ograniczonego zbioru $C \subset \mathbb{R}^d$ oraz wszystkich $t_0 \leq t \in [0, T]$ zachodzi

$$\rho_t(\overline{C} + (t - t_0)\overline{B(M)}) \geq \rho_{t_0}(C),$$

gdzie M jest jednostajnym ograniczeniem nośnika w zmiennej v dla μ_t , $B(M)$ oznacza kulę o środku w 0 i promieniu M , natomiast $\overline{C}$ oznacza domknięcie zbioru C .

(SF) Steadily flowing. Istnieje zbiór $A \subset [0, T]$ pełnej miary Lebesgue'a, taki że dla każdego $t_0 \in A$ i dowolnej gładkiej, funkcji o zwartym nośniku $0 \leq \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ rodzina skończonych miar Radona $\rho_{t_0, t}[\phi]$ zdefiniowana dla każdego zbioru borelowskiego $B \subset \mathbb{R}^d$ przez

$$\rho_{t_0, t}[\phi](B) := \int_{B \times \mathbb{R}^d} \phi(v) dT_{\#}^{t_0, t} \mu_t$$

jest wąsko ciągła (*eng. narrowly continuous*) w punkcie $t = t_0$, jako funkcja zmiennej $t \in [0, T]$ obcięta do A . Tutaj $T_{\#}^{t_0, t} \mu_t$ oznacza miarę obrazową (*eng. pushforward measure*) μ_t wzdłuż odwzorowania $T^{t_0, t}(x, v) = (x - (t - t_0)v, v)$.

Uwaga 4.2 (O warunkach MP i SF). Monokinetyczność w Twierdzeniu 4.1 wymaga pewnego pojęcia przepływu, tzn. by masa w punkcie x była transportowana z prędkością v . Dla ogólnej miary $\mu = \mu(t, x, v)$ niebędącej rozwiązaniem żadnego równania różniczkowego, taki przepływ nie jest określony. W [A1], Twierdzenie 4.1 zapewnia, że każda wąska granica rozwiązań atomowych (2) jest monokinetyczna; dopiero później pokazujemy, że sama jest rozwiązaniem (2). Warunki MP i SF służą właśnie do zdefiniowania tego słabego przepływu. Zachodzą one np. wtedy, gdy $t \mapsto \mu_t$ jest wąsko ciągła lub ma ograniczoną wariację, ale ponieważ takiej regularności granicy pola średniego nie da się wykazać, przyjmujemy słabsze hipotezy. Wprowadzenie warunków MP i SF jest prawdopodobnie najgłębszym wynikiem pracy [A1] (nawet jeśli nie najbardziej spektakularnym).

Uwaga 4.3 (O warunku (4)). W przypadku modeli wyrównywania prędkości opartych na modelu Cuckera–Smale'a założenie (4) wynika bezpośrednio z nierówności energetycznej

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^{4d} \setminus \{x=x'\}} \frac{|v - v'|^2}{|x - x'|^\alpha} d[\mu_t \otimes \mu_t] dt \leq E[\mu_0] - E[\mu_T], \quad (5)$$

gdzie E oznacza standardową energię kinetyczną układu, a wyrażenie po lewej stronie nierówności stanowi odpowiednik hydrodynamicznej enstrofii. Istotnie, jeśli rozwiązanie równania (2) ma jednostajnie zwarty nośnik względem zmiennej v i jest ciągle w wąskiej topologii, to łatwo wykazać, że spełnia powyższą nierówność energetyczną, a zatem (w oparciu o ograniczonosc $|v - v'|$ w zwartym nośniku μ) założenie (4) jest spełnione. Naiwne spojrzenie na nierówność (5) ujawnia jej znaczenie dla monokinetyczności: gdyby μ była miarą Lebesgue'a to w przypadku, gdy $v \neq v'$, mamy nieskończoną całkę względem x . W ogólności jednak argument ten zawodzi i jest to źródłem najdelikatniejszych problemów w [A1] (opisanych niżej w sekcji Nowa Metodologia), które rozwiązujemy przy pomocy warunków MP i SF.

Główny rezultat 2: ułamkowy układ Euler–alignment

Jeśli dostatecznie regularna miara μ spełnia (2), to jej lokalne wielkości (3) spełniają układ

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(u(y) - u(x))\rho(x)\rho(dy) + P, \end{cases} \quad (6)$$

gdzie wyraz ciśnienia $P = (p_{ij})$ dany jest wzorem

$$p_{ij} = -\operatorname{div}_x \left(\int_{\mathbb{R}^d} (v_i - u_i(t, x))(v_j - u_j(t, x)) \mu_t(x, dv) \right), \quad \text{zob. [10, 20].}$$

Zauważmy, że w przeciwieństwie do przejścia makroskopowego opartego na ansatzu Maxwellowskim lub monokinetycznym (zob. [42]), Twierdzenie 4.1 pokazuje, że monokinetyczność miary μ wynika bezpośrednio z osobliwej interakcji, a nie jest narzucona. Ponadto, każde monokinetyczne rozwiązanie (2) prowadzi do $P = 0$ i sprowadza się do rozwiązania ułamkowego układu *Euler–alignment*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0, \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(|x - y|)(u(y) - u(x))\rho(x)\rho(dy). \end{cases} \quad (7)$$

Stwierdzenie to pozostaje prawdziwe także dla słabych rozwiązań o wartościach miarowych, o ile są one wąsko ciągle i mają jednostajnie zwarty nośnik (w szczególności spełniając nierówność energetyczną z Uwagi 4.3). Prowadzi to do drugiego głównego wyniku pracy [A1].

Twierdzenie 4.4 ([A1], Theorem 1.4). *Niech $\alpha \geq d$, a μ będzie słabym rozwiązaniem o wartościach miarowych (2). Wówczas μ jest monokinetyczna, a jej lokalne wielkości (3) spełniają układ Euler–alignment (7) w sensie słabym. Ścisłe sformułowania słabe (2) i (7) można znaleźć w [A1], Definicje 2.6 i 2.11.*

Główny rezultat 3: granica pola średniego między mikro i makroskopowym modelem

Twierdzenie 4.4 gwarantuje, że każde rozwiązanie układu mezoskopowego (2), jeśli istnieje, jest monokinetyczne, a zatem prowadzi do bezciśnieniowego układu *Euler–alignment*. Ostatecznym celem pracy [A1] jest konstrukcja takich rozwiązań poprzez bezpośrednią granicę

pola średniego od mikro- do makroskali, w czym kluczową rolę odgrywa Twierdzenie 4.1: umożliwia jednocześnie stosowanie opisu kinetycznego i hydrodynamicznego. Układ kinetyczny (2) pozwala uniknąć trudności związanych z konwekcją (bo jest liniowa), podczas gdy wyraz osobliwy jest łatwiejszy do uchwycenia po stronie hydrodynamicznej. Ponadto monokinetyczność zapewnia, że w przeciwieństwie do przejścia od Boltzmanna do Eulera, przy tak silnej osobliwości oddziaływań nie dochodzi do utraty informacji pomiędzy (2) a (7).

Twierdzenie 4.5 ([A1], Theorem 1.7). *Niech $T > 0$. Przypuśćmy, że ρ_0 jest miarą probabilistyczną o zwartym nośniku, a $u_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ należy do $L^\infty(\rho_0)$. Załóżmy ponadto, że $\alpha \in [d, 2]$, $d \in \{1, 2\}$. Wówczas istnieje przybliżający granicę pola średniego ciąg μ^N słabych rozwiązań (2), który zbiega wąsko do monokinetycznej miary μ . Ponadto lokalne wielkości (3) miary μ spełniają układ Euler-alignement w słabym sensie.*

Uwaga 4.6 (Redukcja osobliwości). Jak zaznaczono wcześniej w Zarysie Ogólnym, jednym z głównych osiągnięć prac [A1]–[A3] jest rozwinięcie nowych technik umożliwiających kontrolowanie słabej zbieżności splotów miar z osobliwymi jądrami. Dowód Twierdzenia 4.5 stanowi pierwsze miejsce, w którym takie metody okazują się niezbędne. Jądro $|s|^{-\alpha}$ przy $\alpha \geq d$ nie jest całkowalne, a jego osobliwości nie da się złagodzić poprzez regularność μ (lub ρ), gdyż miary te mogą zawierać części atomowe. Zamiast tego, osobliwość jest kontrolowana dzięki połączeniu nierówności energetycznej z Uwagi 4.3 ze strukturą monokinetyczną miary μ . Mówiąc ogólnie, monokinetyczność pozwala usunąć jeden rząd osobliwości z $|x - x'|^{-\alpha}$ poprzez wykorzystanie zmiennej prędkości w liczniku. Choć prędkość sama w sobie nie jest regularna, wciąż możemy zapisać

$$\frac{(u(x) - u(x'))(\phi(x) - \phi(x'))}{|x - x'|^\alpha} \lesssim \frac{|u(x) - u(x')|^2}{|x - x'|^\alpha} + |x - x'|^{2-\alpha},$$

gdzie powyższe wyrażenie pochodzi z formy dwuliniowej związanej z operatorem wyrównywania prędkości po prawej stronie (7), testowanej funkcją lipschitzowską ϕ . Pierwszy wyraz po prawej stronie jest całkowalny dzięki nierówności energetycznej z Uwagi 4.3, natomiast drugi wykazuje osobliwość zmniejszoną o dwa rzędy (jeden wynikający z funkcji testowej, a drugi stanowiący zasadniczy zysk pochodzący z monokinetyczności). Ten argument zawodzi w przypadku kinetycznym gdy funkcja testowa ϕ zależy od x i od v .

Artykuł [A2]

Potoki gradientowe w przestrzeni Wassersteina $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), W_2)$ (tj. w przestrzeni miar probabilistycznych o skończonym drugim momencie, wyposażonej w kwadratową metrykę Wassersteina) są ściśle powiązane z równaniami ciągłości. Począwszy od przełomowej pracy Otto [31], przestrzeń ta ma formalną strukturę riemannowską, która umożliwia rachunek subróżniczkowy. W konsekwencji, przy stosunkowo łagodnych założeniach, potok gradientowy funkcjonału $\mathcal{E} : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ rozwiązuje w sensie dystrybucji [1, 15] równanie

$$\partial_t \mu + \operatorname{div}(\mathbf{u} \mu) = 0, \quad -\mathbf{u}_t \in \partial_{W_2} \mathcal{E}[\mu_t],$$

gdzie $\partial_{W_2}\mathcal{E}[\mu_t]$ jest subróżniczką Frecheta w strukturze riemannowskiej W_2 .

Klasycznym przykładem, gdy μ ma gęstość ρ względem miary Lebesgue'a, jest $\mathcal{E}(\rho) = \int \rho \log \rho dx$, którego potok gradientowy w przestrzeni Wassersteina to równanie ciepła. Perspektywa ta różni się od przypadku L^2 , gdzie równanie ciepła pojawia się jako potok gradientowy funkcjonału $\mathcal{F}(\rho) = \int |\nabla \rho|^2 dx$.

Celem artykułu [A2] jest zbadanie nowej topologii optymalnego transportu w przestrzeni miar probabilistycznych $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, która wprowadza niejednorodność do potoków gradientowych Wassersteina. Przyjmując $d = d_1 + d_2$, traktujemy $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ jako trywialną wiązkę włóknistą z bazą $\omega \in \mathbb{R}^{d_2}$ i włóknem $x \in \mathbb{R}^{d_1}$. Dla $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ mających ten sam rozkład brzegowy $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{d_2})$, transport jest dozwolony jedynie wzdłuż włókien: przemieszczanie masy między różnymi włóknami $\omega_1 \neq \omega_2$ ma nieskończony koszt. W ten sposób transport optymalny odbywa się po włóknach, co w szczególności zachowuje wspólny rozkład brzegowy ν . Konstrukcja jest następująca.

Definicja 1 (Włóknista przestrzeń Wassersteina). *Niech $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{d_2})$ będzie dowolną miarą probabilistyczną. Definiujemy włóknistą przestrzeń Wassersteina $(\mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d), W_{2,\nu})$ jako*

$$\mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d) := \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^{2d}} |x|^2 \mu(dx, d\omega) < \infty, \quad \nu \text{ jest rozkładem brzegowym } \mu \right\}, \quad (8)$$

$$W_{2,\nu}(\mu_1, \mu_2) := \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} W_2^2(\mu_1^\omega, \mu_2^\omega) \nu(d\omega) \right)^{1/2}, \quad (9)$$

dla dowolnych $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d)$, gdzie $\{\mu_1^\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}^{d_2}}$ oraz $\{\mu_2^\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}^{d_2}}$ należące do $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{d_1})$ są ich rodzinami dezintegracji¹ (tj. rozkładami warunkowymi) względem zmiennej ω , a W_2 jest klasyczną kwadratową odległością Wassersteina w $\mathbb{R}^{d_1}$.

Pokazujemy, że $(\mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d), W_{2,\nu})$ ma strukturę riemannowską, co pozwala rozwijać odpowiednik klasycznej teorii potoków gradientowych dla funkcjonałów $\mathcal{E} : \mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$. Prowadzi to do *niejednorodnych potoków gradientowych* kontrolowanych przez rozkład brzegowy ν , które spełniają równanie

$$\begin{aligned} \partial_t \mu + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}\mu) &= 0, \quad (x, \omega) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}, \quad t \geq 0, \\ -\mathbf{u}_t &\in \partial_{W_{2,\nu}}\mathcal{E}[\mu_t], \quad \text{p.w. } t \geq 0, \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie $\partial_{W_{2,\nu}}$ oznacza włókniste uogólnienie klasycznej subróżniczki Fréchet'a względem W_2 .

Zauważmy, że w (10) dywergencja brana jest jedynie względem $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, co odzwierciedla fakt, że transport odbywa się wzdłuż włókien o stałym ω . Niemniej prędkość $\mathbf{u}_t(x, \omega)$ może w istotny sposób zależeć od całej wiązki $\mu = \{\mu_t^\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}^{d_2}}$, co objawia się w strukturze $\partial_{W_{2,\nu}}\mathcal{E}$. Dlatego (10) nie może być traktowane jako rodzina niepowiązanych równań ciągłości parametryzowanych przez ω . To sprzężenie włókien poprzez globalne pole prędkości stanowi główne źródło trudności w [A2].

¹Są to rozkłady warunkowe z twierdzenia o rozkładzie miary czyli tzw. *disintegration theorem*, w języku polskim nazywanego też czasem „twierdzeniem o plasterkowaniu miary”. Zob. [A2, Theorem 2.13].

Cel pracy [A2] jest trojaki. Najpierw rozwijamy abstrakcyjną teorię potoków gradientowych w topologii optymalnego transportu po włóknach, identyfikując strukturę riemannowską w duchu rachunku Otto. Następnie pokazujemy jej zastosowania w różnych kontekstach związanych przede wszystkim z dynamiką kolektywną. Wreszcie stosujemy tę koncepcję do wielowymiarowych dynamik typu Kuramoto, uzyskując nowe wyniki, w tym jednolitą w czasie granicę pola średniego. Ten ostatni wynik dotyczy również kinetycznego, słabo osobliwego modelu Cuckera–Smale’a w wielu wymiarach, zob. [B17].

Główny rezultat 1: abstrakcyjna teoria potoków gradientowych po włóknach.

Konstruujemy potoki gradientowe po włóknach, adaptując klasyczne λ -wypukłe podejście [1, 37, 46]; rozwijamy rachunek subróżniczkowy po włóknach i pokazujemy równoważność standardowych definicji potoków gradientowych (EVI, EDE, EDI)². Prowadzi to do pierwszego wyniku.

Twierdzenie 4.7 ([A2], Theorem 3.35). *Dla dowolnej $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^{d_2})$ niech $\mathcal{E} : \mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d) \rightarrow (-\infty, +\infty]$ będzie funkcjonalem spełniającym odpowiednie założenia, w tym λ -wypukłość $\mathcal{E}$. Wówczas istnieje jednoznaczny, lokalnie lipschitzowski i wykładniczo stabilny potok gradientowy $t \mapsto \mu_t \in \mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d)$ funkcjonatu $\mathcal{E}$, rozpoczynający się w dowolnym warunku początkowym $\mu_0 \in D(\mathcal{E}) := \{\mu : \mathcal{E}[\mu] < +\infty\}$, który w szczególności spełnia równanie (10) w sensie dystrybucji.*

Główny rezultat 2: zastosowania do modeli pierwszego rzędu.

Drugim celem pracy [A2] jest zilustrowanie, w jaki sposób potoki gradientowe po włóknach mogą modelować układy niejednorodne, w których różne siły działają na oddzielne komponenty (np. oddziaływania międzygatunkowe czy mieszaniny płynów). Omawiamy przykłady obejmujące modele takie jak Kuramoto [26, 27, 30], Lohe [16, 18, 28] czy Keller–Segel [21], a także układy z agentami niezamiennymi (*eng. noninterchangable agents*).

Twierdzenie 4.7 dostarcza abstrakcyjnych ram dla istnienia i stabilności takich niejednorodnych potoków. Ponadto identyfikujemy naturalne włókniste odpowiedniki trzech klasycznych funkcjonałów energii z następującym głównym przykładem: jeśli

$$\mu = \rho(x, \omega) dx \otimes d\nu(\omega) \in \mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d),$$

to definiujemy

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mu] = & \int_{\mathbb{R}^d} U(\omega, \rho(x, \omega)) dx \nu(d\omega) + \int_{\mathbb{R}^{2d}} V(\omega, x) \mu(dx, d\omega) \\ & + \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} W(\omega, \omega', x - x') \mu(dx, d\omega) \mu(dx', d\omega'), \end{aligned} \tag{11}$$

a w przeciwnym razie przyjmujemy $\mathcal{E}[\mu] = +\infty$. Tutaj U, V, W są włóknistymi odpowiednikami klasycznych energii wewnętrznej i potencjalnej oraz energii oddziaływań. Sformułowane i przeanalizowane są one w [A2], Sekcji 4, w szczególności [A2, Theorem 4.6].

²W jęz. ang. *Evolutionary Variational Inequality, Energy Dissipation Equality* oraz *Energy Dissipation Inequality*

Główny rezultat 3: wyrównywanie prędkości z osobliwą wagą komunikacyjną.

Ostatnia część pracy [A2] dotyczy funkcjonału energii typu Kuramoto (lub typu Hegselmann–Krause). Zakładamy, że $d_1 = d_2$ i oznaczamy tę wartość przez d , a następnie definiujemy

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_W[\mu] &= - \int_{\mathbb{R}^{2d}} \omega \cdot x \mu(dx, d\omega) + K \iint_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2d}} W(x - x') \mu(dx, d\omega) \mu(dx', d\omega'), \\ W(x) &= \frac{1}{2-\alpha} \frac{1}{1-\alpha} |x|^{2-\alpha}, \quad \nabla W(x) = \frac{1}{1-\alpha} \phi(|x|)x, \quad \phi(|x|) = |x|^{-\alpha}, \alpha \in (0, 1).\end{aligned}\tag{12}$$

Pokazujemy, że $\partial_{W_2, \nu} \mathcal{E}_W[\mu_t] = \{\mathbf{u}[\mu_t]\}$, a zatem (10) sprowadza się do

$$\partial_t \mu + \operatorname{div}_x(\mathbf{u}[\mu]\mu) = 0, \quad \mathbf{u}[\mu](t, x, \omega) = \omega - K \int_{\mathbb{R}^{2d}} \nabla W(x - x') \mu_t(dx', d\omega').\tag{13}$$

Twierdzenie 4.8 ([A2], Theorem 5.3). *Zagadnienie (13) jest dobrze postawione, a Twierdzenie 4.7 ma zastosowanie do powyższego funkcjonału energii $\mathcal{E}_W$ w (12). W konsekwencji, rozwiązania (13) pokrywają się z odpowiadającymi im potokami gradientowymi po włóknach (10). Ponadto, (13) generuje kontrakcję globalnie w czasie w odpowiednich metrykach typu włóknistego, co zapewnia, że każde rozwiązanie dąży do stanu stacjonarnego i jest globalnie w czasie odzyskiwane poprzez granicę pola średniego.*

Uwaga 4.9 (Redukcja osobliwości). Kontynuujemy wątek łagodzenia osobliwości z Uwagi 4.6. Teoria rozwinięta w [A2], a w szczególności Twierdzenie 4.8, prowadzi — w połączeniu z [B17] — do zupełnie nowego podejścia do osobliwych modeli wyrównywania prędkości. Okazuje się, że słabo osobliwy model Cuckera–Smale’a z macierzową komunikacją $\nabla^2 W$ o osobliwości rzędu $\alpha \in (0, 1)$ może zostać bezpośrednio przekształcony w równanie (13). W tym ujęciu osobliwość rzędu $\alpha \in (0, 1)$ zostaje całkowicie usunięta, ponieważ pole prędkości w (13) oparte jest na ∇W , które zachowuje się jak $|x|^{1-\alpha}$.

Artykuł [A3]

Badamy granice pola średniego rozwiązań $\mathbf{x}_N = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ układu

$$\frac{1}{M_N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N d_j (\nabla g(x_i - x_j) + \nabla F(x_i - x_j)) + \nabla V(x_i) = 0, \quad x_i \neq x_j, \quad i = 1, \dots, N,\tag{14}$$

gdzie d_j są rzeczywistymi współczynnikami mas (lub ładunków), a $M_N := \sum_{i=1}^N |d_i|$. Funkcje $g + F$ oraz V oznaczają odpowiednio energie oddziaływań i potencjalną i spełniają warunki

$$F \in C^1(\mathbb{R}^d), \quad F(x) = F(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

oraz

$$V \in C^1(\mathbb{R}^d), \quad V \text{ ograniczona z dołu}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\frac{V(x)}{2} + g(x) \right) = +\infty.\tag{15}$$

Cechą charakterystyczną tego zagadnienia jest kulombowska osobliwość g oraz możliwość występowania ładunków ujemnych d_i . Zakładamy, że

$$g(x) = \begin{cases} -\log|x|, & d = 2, \\ |x|^{2-d}, & d \geq 3, \end{cases} \quad -\Delta g = c_d \delta_0,$$

a zatem g jest (z dokładnością do stałej zależnej od wymiaru $c_d > 0$) podstawowym rozwiązaniem równania Laplace'a. Z częścią regularną F i ładunkami obu znaków, (14) obejmuje w szczególności stacjonarne układy przyciągania–odpychania agentów [6, 8] oraz stany równowagi wirów punktowych [3].

Rozwiązania $\mathbf{x}_N$ układu (14) są punktami krytycznymi hamiltonianu

$$\mathcal{H}_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{2M_N} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i=1}^N d_i d_j (g(x_i - x_j) + F(x_i - x_j)) + \sum_{i=1}^N d_i V(x_i).$$

Alternatywnie wektor $\mathbf{x}_N$ można traktować jako punkt krytyczny energii ciągłej

$$\mathcal{H}(\mu) = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} (g(x - y) + F(x - y)) \mu(dx) \mu(dy) + \int_{\mathbb{R}^d} V(x) \mu(dx), \quad (16)$$

gdy interpretujemy go jako miarę empiryczną $\mu = \mu^N$ daną wzorem

$$\mu^N := \frac{1}{M_N} \sum_{i=1}^N d_i \delta_{x_i}, \quad \text{gdzie } \mathbf{x}_N = (x_1, \dots, x_N) \text{ spełnia (14)}. \quad (17)$$

Naszym celem jest przejście do granicy $\mu^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mu$ i identyfikacja μ jako punktu krytycznego $\mathcal{H}$. Główne trudności wynikają z kulombowskiej osobliwości w g oraz ze znaków d_i , ponieważ przejście $\nabla g * \mu^N \rightarrow \nabla g * \mu$ nie daje się uzasadnić wprost. Dlatego wprowadzamy odpowiednie pojęcia krytyczności pochodzące z prac Sandiera i Serfaty [36] oraz Schocheta [38].

Warunki krytyczności

Aby podkreślić osobliwość g i uprościć zapis, przyjmujemy $F = V = 0$ (z wyjątkiem sformułowania opartego na wirowości). Przypadek ogólny F i V można znaleźć w [A3].

Słabe sformułowanie prędkościowe (*eng. weak velocity formulation*). Miara μ jest punktem krytycznym $\mathcal{H}$ jeśli dla $h := g * \mu$ tensor

$$[h, h]_{ij} := 2\partial_i h \partial_j h - |\nabla h|^2 \delta_{ij} \quad (18)$$

jest bezdywergencyjny w części skończonej (*eng. divergence-free in finite part*).

Definicja 4.10 (Bezdywergencyjność w części skończonej). *Mierzalne pole wektorowe X na $\mathbb{R}^d$ jest bezdywergencyjne w części skończonej, jeśli istnieje rodzina zbiorów $(E_\delta)_{\delta>0}$ taka, że:*

1. dla każdego zbioru zwartego $K \subset \mathbb{R}^d$ zachodzi $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\infty^1(K \cap E_\delta) = 0$;

2. $X \in L^1(\mathbb{R}^d \setminus E_\delta)$ dla każdego $\delta > 0$;

3. dla każdego $\delta > 0$ i $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \zeta^{-1}(\zeta(E_\delta))} X \cdot \nabla \zeta \, dx = 0.$$

Tutaj $\mathcal{H}_\infty^1$ oznacza *1-Hausdorff content*, zob. [A3, Definition 2.5] (dla uproszczenia można tutaj myśleć o jednowymiarowej mierze Hausdorffa).

Sformułowanie prędkościowe (*eng. velocity formulation*). Jeśli $h = \nabla g * \mu \in L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, wówczas słabe sformułowanie prędkościowe redukuje się do

$$\text{div}[h, h] = 0$$

w sensie dystrybucji. Taki warunek nazywamy sformulowaniem prędkościowym.

Sformułowanie wirowościowe (*eng. vorticity formulation*). W tym sformułowaniu μ jest punktem krytycznym, gdy

$$\frac{1}{2} \iint_{(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d) \setminus \{x=y\}} (\nabla g(x-y) + \nabla F(x-y)) \cdot (\varphi(x) - \varphi(y)) \mu(dx) \mu(dy) + \int_{\mathbb{R}^d} \nabla V(x) \cdot \varphi(x) \mu(dx) = 0$$

dla wszystkich $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

Główne rezultaty

Heurystyka głównych wyników pracy [A3] przedstawia się następująco. Dalsze wnioski, zależne od założeń na F i V , można znaleźć w [A3], zob. także Uwagę 4.14.

Twierdzenie 4.11 ([A3], Theorem 1.3). *Niech $\mathbf{x}_N = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$ będzie układem punktów krytycznych $\mathcal{H}_N$, a μ^N odpowiadającym mu ciągiem miar empirycznych (17). Wówczas dla każdego $1 \leq p < d/(d-1)$ istnieje miara Radona μ , taka że, po przejściu do podciągu, $\mu^N \rightarrow \mu$ wąsko. Ponadto odpowiednie potencjały elektryczne $\nabla g * \mu^N$ zbiegają do $\nabla g * \mu$, a jeśli $d = 2$, to μ jest punktem krytycznym $\mathcal{H}$ w sensie słabego sformułowania prędkościowego.*

Następny wynik podaje warunki zapewniające, że punkty krytyczne w powyższym twierdzeniu spełniają w istocie wzmocniony warunek krytyczności w sensie sformułowania prędkościowego.

Twierdzenie 4.12 ([A3], Theorem 1.4). *Niech $d = 2$. Przy założeniach Twierdzenia 4.11, jeśli μ należy do $H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$, to jest punktem krytycznym $\mathcal{H}$ w sensie sformułowania prędkościowego.*

Trzeci główny wynik wykorzystuje sformułowanie wirowościowe, inspirowane pracami [12, 38] dotyczącymi równania Eulera w 2D.

Twierdzenie 4.13 ([A3], Theorem 1.8). *Przy założeniach Twierdzenia 4.11, jeśli μ jest bezatomowa, to jest punktem krytycznym $\mathcal{H}$ w sensie sformułowania wirowościowego.*

Uwaga 4.14 (Równoważność pomiędzy sformułowaniem prędkościowym a wirowościowym).

Pełne sformułowania Twierdzeń 4.11, 4.12 oraz 4.13 można znaleźć w [A3]; przedstawiają one bardziej subtelne powiązania między różnymi pojęciami krytyczności. Sedno sprawy jest następujące. Dla każdej miary $\mu \in H_{\text{loc}}^{-1}(\mathbb{R}^2)$, która na mocy [12, Lemma 1.2.5] jest bezatomowa, warunki krytyczności w sensie sformułowania prędkościowego i wirowościowego, odpowiednio z Twierdzeń 4.12 i 4.13, są równoważne. Z drugiej strony, sformułowanie słabe prędkościowe z Twierdzenia 4.11 dotyczy również miar atomowych. Dalszą zaletą sformułowania opartego na potencjałach elektrycznych w ujęciu słabym prędkościowym jest jego przydatność do badania regularności miar granicznych: na przykład [34] pokazuje, że rozwiązania z $F = V = 0$ mają nośniki lokalnie zawarte w krzywych zadanych przez zbiory miary zero (wielowartościowych) funkcji harmoniczných; zob. także [35] dla pokrewnych wyników w przypadku Ginzburga–Landau.

Uwaga 4.15 (Redukcja osobliwości). Głównym motywem pracy [A3] jest analiza zbieżności $\nabla g * \mu^N$ do $\nabla g * \mu$ w sytuacji, gdy ∇g jest osobliwe, a miara μ może zawierać atomy. W takim przypadku trudność udaje się obejść dzięki słabemu sformułowaniu prędkościowemu oraz warunkowi bezdywergencyjności w części skończonej. Argumentacja opiera się w istotny sposób na dwuwymiarowym charakterze zagadnienia i, jak się wydaje, nie posiada znanej uogólnionej wersji dla wymiarów $d \geq 3$. Jednym z nowatorskich aspektów jest konstrukcja zbiorów E_δ w [A3, Proposition 4.4], uzyskana poprzez wycięcie małych otoczeń atomów miar empirycznych. Jest to dość elementarny pomysł, który wykracza poza metodologię pochodzącą z pracy Sandiera i Serfaty [36].

Nasz ostatni główny wynik stwierdza, że bezatomowe granice stabilnych punktów krytycznych $\mathcal{H}_N$ są stabilnymi punktami krytycznymi $\mathcal{H}$ w sensie sformułowania wirowościowego. Ta część pracy została przeprowadzona głównie przez mojego współpracownika Rémy’ego Rodiaca, i dlatego samo sformułowanie wyniku pomijamy; można je znaleźć w [A3].

Nowa metodologia

Poniżej przedstawiamy wybrane elementy nowej metodologii wyprowadzone w pracach [A1]–[A3]. Ze względu na rozmiar pracy [A2] wybieramy tylko jeden, kluczowy problem.

Monokinetyczność

Punktem wyjścia w dowodzie monokinetyczności w Twierdzeniu 4.1 jest twierdzenie o monokinetyczności z pracy Jabin–Rey [24], gdzie stosuje się podobną strategię, lecz z trzema istotnymi różnicami. Analiza w [24] dotyczy przypadku jednowymiarowego, a odwzorowanie czasowe $t \mapsto \mu_t$ ma ograniczoną wariację i stanowi rozwiązanie równania transportu, co pozwala autorom skonstruować przepływ bezpośrednio. W naszym przypadku rozważamy dowolny wymiar $d \geq 1$, funkcja $t \mapsto \mu_t$ nie musi mieć ograniczonej wariacji w czasie i nie spełnia a priori żadnego równania typu transportowego (w rzeczywistości to monokinetyczność

umożliwia później wykazanie, że spełnia odpowiednie równanie cząstkowe, więc nie możemy go wykorzystać w dowodzie Twierdzenia 4.1).

Zarówno w [A1], jak i w [24], główna trudność wynika z obecności przekątnej

$$\Delta := \{(x, x', v, v') \in \mathbb{R}^{4d} : x = x'\}.$$

Jeśli przekątna nie zostanie wyłączona z energii w (5), całka ta rozbiega na atomach miary ρ_t . W przypadku jednowymiarowym, w pracy [24] autorzy całkują oddzielnie po zbiorach $\{x < -\varepsilon\}$ oraz $\{x > \varepsilon\}$, odcinając przekątną wprost. Dla $d \geq 2$ takie podejście staje się niepraktyczne, dlatego wprowadzamy inną metodę. Korzystamy z regularyzowanego jądra

$$K_\eta(x) := \frac{1}{(|x| + \eta)^\alpha},$$

które splatamy z ρ_t , a następnie stosując nierówność Jensena oraz oszacowanie energii (5), otrzymujemy

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^{2d}} |v - u(t, x)|^{\alpha+2} (K_\eta * \rho_t)(x) d[\sigma_{t,x}(v) \otimes \rho_t(x)] dt \leq C < +\infty,$$

gdzie $\sigma_{t,x}$ oznacza rozkład prędkości określony dla ρ_t -p.w. x . Lemat Fatou prowadzi następnie do

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |v - u(t, x)|^{\alpha+2} d\sigma_{t,x}(v) \right) \liminf_{\eta \rightarrow 0} (K_\eta * \rho_t)(x) d\rho_t(x) dt < +\infty. \quad (19)$$

Po odpowiednich obliczeniach stwierdzamy, że

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} (K_\eta * \rho_t)(x) = +\infty$$

o ile pochodna Radona–Nikodyma miary ρ_t względem miary Lebesgue’a jest dodatnia lub nie istnieje. Zachodzi to dla prawie każdego t i dla ρ_t -p.w. x . Stąd skończoność całki w (19) wymusza

$$|v - u(t, x)|^{\alpha+2} = 0$$

wszędzie tam, gdzie powyższy $\liminf$ rozbiega.

Trudność tej argumentacji polega na tym, że aby oszacować człon splotowy z (19) przy użyciu (5), należy rozszerzyć dziedzinę całkowania w (5), tak aby obejmowała także przekątną Δ . Co ciekawe, Jabin i Rey napotykają identyczny problem w swoim jednowymiarowym dowodzie. Powyższy argument działa zatem tylko dla części bezatomowej miary ρ_t . Zmusza to do osobnego potraktowania części atomowej miary ρ_t , która stanowi jedyną część ρ_t niezaniedbywalną na przekątnej. Autorzy [24] wykorzystują regularność BV w czasie, aby poradzić sobie z tym komponentem. My nie zakładamy żadnej regularności czasowej $t \mapsto \mu_t$, ani nie wiemy a priori, czy μ spełnia jakiegokolwiek równanie PDE. W naszej sytuacji μ jest granicą miar empirycznych, a wykazanie jej monokinetyczności jest kluczowym pierwszym krokiem, by pokazać, że faktycznie spełnia układ *Euler–alignment*.

W tym miejscu wprowadzamy najbardziej techniczny nowy element artykułu: warunki MP oraz SF. Intuicyjnie, warunek SF dostarcza słabego odpowiednika przepływu, gwarantując że atom x_0 przemieszcza się z prędkością v , natomiast warunek MP zapewnia, że z rozszerzającego się otoczenia $x + tB(M)$ nie ucieka zbyt duża ilość masy. Zakładając, przy braku monotoniczności, że w czasie $t = t_0$ mamy atom w punkcie x_0 , założmy, że pewna część masy m_1 porusza się z prędkością v_1 , a inna część m_2 z prędkością v_2 , przy

$$0 < \delta := |v_1 - v_0|.$$

Wówczas atom w x_0 ulega rozerwaniu na dwie części wzdłuż trajektorii $x_0 + (t - t_0)v_1$ oraz $x_0 + (t - t_0)v_2$, które oddalają się od siebie z szybkością $\delta(t - t_0)$. Ponieważ wzdłuż przepływu praktycznie nie tracimy masy, możemy oszacować lewą stronę nierówności energii (5) od dołu poprzez wyrażenie

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} \frac{1}{(t - t_0)^\alpha} dt = +\infty,$$

co prowadzi do sprzeczności.

Podsumowując, warunki MP oraz SF są na tyle słabe, że można wykazać ich spełnienie dla granicy pola średniego μ , a jednocześnie wystarczająco silne, aby umożliwić przeprowadzenie powyższej argumentacji.

Zastosowanie dla układu Euler–alignment. Artykuł [A1] stanowi pierwszą pracę, w której monokinetyczność zostaje wykorzystana w dynamice wyrównywania prędkości jako narzędzie do uzyskania zarówno istnienia rozwiązań, jak i granicy pola średniego. Monokinetyczność jest kluczowa dla uzyskania dwóch istotnych wyników. Po pierwsze, dostarcza ona ścisłego uzasadnienia monokinetycznego domknięcia hydrodynamicznego dla układu *Euler–alignment*, bez potrzeby wprowadzania dodatkowych sił relaksacyjnych. Po drugie, stanowi fundamentalny element dowodu istnienia słabych rozwiązań. W rezultacie, adaptując techniki wykorzystujące pojęcia pokrewne mierze defektu diagonalnego (*eng. diagonal defect measure*), otrzymujemy pierwsze słabe rozwiązanie skonstruowane poprzez granicę pola średniego dla ułamkowego modelu *Euler–alignment*, które jest całkowicie odporne na powstawanie próżni.

Choć część stosowanych tu technik można odnaleźć we wcześniejszych pracach, samo wyprowadzenie i zastosowanie monokinetyczności — np. w kontroli konwekcji na poziomie kinetycznym (gdzie jest liniowa) oraz traktowanie osobliwego składnika wyrównywania prędkości na poziomie hydrodynamicznym (gdzie nierówność energetyczna kontroluje wpływ pojawiających się atomów) — jest nowatorskie w naszym podejściu.

Optymalny transport po włóknach

Choć sama topologia optymalnego transportu po włóknach została wprowadzona i badana już wcześniej, praca [A2] stanowi pierwsze dedykowane opracowanie potoków gradientowych w tym kontekście. Realizacja tego projektu wymagała istotnego przeformułowania technik stosowanych przez Ambrosio, Gigli i Savaré w monografii [1] dla potoków gradientowych funkcjonałów λ -wypukłych.

Analiza opiera się na dokładnym przepracowaniu znaczących fragmentów [1] oraz połączeniu tych metod z narzędziami teorii losowych miar probabilistycznych (*eng. random probability measures*), między innymi. W wielu miejscach zachodzi konieczność istotnej modyfikacji dostępnych technik, jednak najtrudniejsza kwestia dotyczy stabilności optymalności oraz charakteryzacji zbieżności w przestrzeni Wassersteina w kategoriach innych, dobrze poznanych topologii, które posiadają własności zwartości analogiczne do twierdzenia Prochorowa. Klasyczna stabilność optymalności mówi, że jeśli $\mu_n \rightarrow \mu$ i $\sigma_n \rightarrow \sigma$ w sensie wąskim, wówczas odpowiadające im plany optymalne $\gamma_n \in \Gamma_o(\mu_n, \sigma_n)$ zbiegną (po wyborze podciągu) wąsko do planu optymalnego między μ i σ . Dowód tego standardowego wyniku opiera się na Zasadniczym Twierdzeniu Optymalnego Transportu oraz na charakteryzacji planów optymalnych przez c -cykliczną monotoniczność ich nośników. Stabilność ta zachowuje ważność przy pewnych osłabionych założeniach, m.in. dla kosztów skończenie wartościowanych (zob. [2]) oraz kosztów ciągłych, nieskończenie wartościowanych (zob. [33]).

Włóknista odległość Wassersteina odpowiada jednak kosztowi (zob. [A2, Proposition 3.9])

$$c_\infty((x, \omega), (x', \omega')) := \begin{cases} |x - x'|^2, & \text{gdy } \omega = \omega', \\ +\infty, & \text{gdy } \omega \neq \omega', \end{cases}$$

który jest nieciągły i ma nieskończone wartości, co wymusza opracowanie nowych technik.

Próbując przeprowadzić dowód bezpośrednio, napotykamy następujący problem: w przypadku włóknistym, jeśli $\mu_n \rightarrow \mu$ i $\sigma_n \rightarrow \sigma$, to plany optymalne mają postać

$$\gamma_n(x, x', \omega, \omega') = \gamma_n^\omega(x, x') \otimes \nu(\omega) \otimes \delta_\omega(\omega'),$$

gdzie dla ν -p.w. ω zachodzi $\gamma_n^\omega \in \Gamma_o(\mu_n^\omega, \sigma_n^\omega)$, zob. [A2, Proposition 3.7]. Co więcej, dla ν -p.w. ω , twierdzenie Prochorowa gwarantuje istnienie podciągu zbieżnego wąsko: $\gamma_{n(\omega)}^\omega \rightarrow \gamma^\omega \in \Gamma_o(\mu^\omega, \sigma^\omega)$. Kluczowa trudność polega na wybraniu jednego podciągu, który działa jednocześnie dla p.w. wszystkich ω .

Nasze rozwiązanie polega na zastosowaniu włóknistej granicy górnej Kuratowskiego, co pozwala znaleźć jeden podciąg spełniający

$$\text{supp } \gamma^\omega \subseteq \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \text{supp } \gamma_n^\omega,$$

gdzie Ls oznacza granicę górną Kuratowskiego, zdefiniowaną dla dowolnego ciągu zbiorów (A_n) przez

$$\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} A_n := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\bigcup_{m \geq n} A_m}.$$

Chociaż uzyskaliśmy stabilność optymalności w formie wystarczającej dla naszych celów, kilka pokrewnych pytań pozostaje nadal otwartych.

Zastosowanie w dynamice wyrównywania prędkości. Włóknisty transport optymalny oraz niejednorodne przepływy gradientowe stanowią naturalny sposób wprowadzenia struktury wielofenotypowej do dynamiki kolektywnej, która w przeciwnym razie byłaby jednoodna. Jednak główną motywacją, jaka skłoniła Davida Poyato i mnie do rozwijania tej

teorii, było jej zastosowanie do słabo osobliwych dynamik wyrównywania prędkości. Przez kilka lat stan wiedzy w tym obszarze przedstawiał się następująco: dla $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ istnienie i warunkowa jednoznaczność zostały wykazane w [B11], natomiast dla $\alpha \in (0, 1)$ analogiczne wyniki uzyskano w [9], lecz jedynie w przypadku jednowymiarowym.

W [B17] wykazujemy równoważność słabo osobliwych dynamik wyrównywania prędkości dla $\alpha \in (0, 1)$ w wielu wymiarach, choć z macierzową wagą komunikacji. Rezultat ten stanowi pierwsze twierdzenie o istnieniu, jednoznaczności, stabilności oraz jednolitym w czasie przejściu do granicy pola średniego dla wielowymiarowej dynamiki wyrównywania prędkości z osobliwymi oddziaływaniami rzędu $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$. W zakresie $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ otrzymane przez nas oszacowanie stabilności oraz jednolita w czasie granica pola średniego są również nowe.

Warunek bezdywergencyjności w części skończonej dla potencjałów elektrycznych

Dowód zbieżności oraz warunku bezdywergencyjności w części skończonej dla granicy w słabym formułowaniu prędkościowym w Twierdzeniu 4.11 został przeprowadzony z użyciem technik inspirowanych podejściem Sandiera i Serfaty z [36]. Natrafiłszy jednak na istotną przeszkodę, mianowicie konstrukcję zbiorów E_δ z Definicji 4.10, w której konieczne jest odcięcie osobliwości miar empirycznych. Zwykle zbiory E_δ konstruuje się jako sumy zbiorów o małej p -pojemności:

$$E_\delta \approx \bigcup_{N \geq N_0 \gg 1} \{x \in \mathbb{R}^d : |f_N| \geq \delta_N\}, \quad \Delta f_N = \alpha_N := \mu^N - \mu, \quad \delta_N := \left(\frac{\|\alpha_N\|_{W^{-1,p}}}{1 + \|\alpha_N\|_{TV}} \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

W naszym przypadku ujęcie w kategoriach potencjałów elektrycznych (18) okazuje się problematyczne, ponieważ tak zdefiniowane zbiory E_δ nie gwarantują, że $[h_N, h_N]$, gdzie $h_N = g * (\mu^N - \mu)$, należy do $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus E_\delta)$. Jak wynika z (18), aby wyrażenie to było dobrze określone w L^1_{loc} , potrzebowalibyśmy, by splot ∇g z miarą empiryczną μ^N należał do L^2_{loc} , co nie jest prawdą.

Dlatego w [A3] modyfikujemy metodę, wprowadzając drugi etap konstrukcji, w którym pojawia się nowy zbiór $\tilde{E}_\delta$. Dla każdego $\ell \in \mathbb{N}$ bierzemy nośnik miary empirycznej μ^N

$$\{x_1^{N_\ell}, \dots, x_{N_\ell}^{N_\ell}\},$$

a wszystkie te punkty porządkujemy w jeden ciąg przeliczalny:

$$x_1 = x_1^{N_1}, \ x_2 = x_2^{N_1}, \ \dots, \ x_{N_1} = x_{N_1}^{N_1}, \ x_{N_1+1} = x_1^{N_2}, \ \dots$$

Innymi słowy, wypisujemy nośniki kolejnych miar μ^{N_ℓ} jeden po drugim, zaczynając od $\ell = 1$. Definiujemy następnie

$$\tilde{E}_\delta := E_\delta \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} B\left(x_i, (\delta 2^{-i})^{\frac{1}{d-p}}\right), \quad (20)$$

gdzie $B(x, r)$ jest kulą otwartą o środku w x i promieniu r . Ponieważ

$$\text{cap}_p(E) := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^p dx : u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), \ u \geq 1 \text{ w otoczeniu } E \right\}.$$

jest miarą zewnętrzną spełniającą oszacowanie

$$\text{cap}_p(B(x, r)) \leq r^{d-p} \text{cap}_p(B(0, 1)),$$

otrzymujemy (mając na uwadze, że $\text{cap}_p(K \cap E_\delta) \rightarrow 0$)

$$\text{cap}_p(K \cap \tilde{E}_\delta) \leq \text{cap}_p(K \cap E_\delta) + \delta \text{cap}_p(B(0, 1)) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 0.$$

W konsekwencji *1-Hausdorff content*, $\mathcal{H}_\infty^1(\tilde{E}_\delta)$ — szacowany z góry przez pojemność — dąży do zera, a $[h^N, h^N]$ należy do $L^1(\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{E}_\delta)$. Pozwala to kontynuować dowód na podobieństwo [36].

5 Przedstawienie istotnej działalności

Jestem autorem lub współautorem 18 oryginalnych prac naukowych i jednej przeglądowej opublikowanych (bądź przyjętych do druku) w czasopismach takich jak Journal of Differential Equations, SIAM Journal on Mathematical Analysis, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, Calculus of Variations and Partial Differential Equations oraz Mathematische Annalen. Zdecydowana większość z nich dotyczy dynamiki kolektywnej.

We wczesnym etapie mojej kariery naukowej, podczas studiów doktoranckich na Uniwersytecie Warszawskim i w pierwszych latach po ich zakończeniu, zajmowałem się osobliwymi modelami Cuckera–Smale’a, ze szczególnym uwzględnieniem ich granic dla dużych populacji. Badania te zaowocowały pracami [B14, B13]. Moje badania doktorskie były finansowane przez grant NCN Preludium dla doktorantów.

Bezpośrednio po obronie doktoratu pracowałem w Instytucie Matematycznym PAN w Warszawie, gdzie ukończyłem serię prac poświęconych silnie osobliwym modelom Cuckera–Smale’a [B12, B11, B10].

Podczas pobytu w Instytucie Matematycznym PAN zostałem równolegle zatrudniony na Uniwersytecie Stanu Maryland, College Park, pod opieką prof. Eitana Tadmora na stanowisku poddoktorskim. Skupiłem się tam na modelach dynamiki kolektywnej z interakcjami o charakterze topologicznym [B5, B6], a także dokończyłem część wcześniejszych badań [B7, B9, B8]. W tym czasie rozpocząłem też współpracę z Davidem Poyato, które ostatecznie zaowocowała pracami [A2] i [B17].

Po blisko czterech latach powróciłem na Uniwersytet Warszawski, gdzie zostałem zatrudniony na stanowisku adiunkta im. Samuela Eilenberga. Następnie otrzymałem grant NCN Sonata dla młodych naukowców. W tym okresie opublikowałem prace, które uważam za moje najważniejsze osiągnięcia badawcze, mianowicie artykuły [A1] i [A2], za które otrzymałem Nagrodę Indywidualną I Stopnia Rektora Uniwersytetu Warszawskiego za osiągnięcia naukowe. Artykuł [A1] został napisany wspólnie z moim doktorantem Michałem Fabisiakiem, natomiast artykuł [A2] powstał we współpracy z Davidem Poyato, badaczem znajdującym się na podobnym etapie kariery naukowej co ja.

Moje obecne zainteresowania naukowe koncentrują się na przepływach wynikających z dynamiki kolektywnej, ze szczególnym uwzględnieniem nowych zastosowań w sztucznej inteligencji. Jednym z obiecujących kierunków jest interpretacja nowoczesnych architektur uczenia maszynowego — takich jak modele transformerowe — przez pryzmat dynamiki kolektywnej.

5.1 Osiągnięcia organizacyjne i dydaktyczne

5.1.1 Działalność organizacyjna

Brałem udział w organizacji 7 międzynarodowych i 2 krajowych konferencji, warsztatów i szkół, zgodnie z wyszczególnieniem w Sekcji 8 *Wykazu osiągnięć naukowych*. W 4 przypadkach (3 międzynarodowych i 1 krajowym) byłem przewodniczącym komitetu organizacyjnego oraz kierownikiem projektu finansującego.

5.1.2 Dydaktyka

1. Na Wydziale Matematyki Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego:

- Analiza Funkcjonalna, wykłady (fakultet dla studentów 3-5 roku matematyki)
- Równania różniczkowe cząstkowe, kurs podstawowy i zaawansowany, wykłady i ćwiczenia (kurs podstawowy to fakultet dla 3-5 roku matematyki, kurs zaawansowany – dla 4-5 roku matematyki)
- Równania różniczkowe zwyczajne, ćwiczenia (przedmiot obowiązkowy dla 2 roku matematyki)
- Teoria Miary, wykład i ćwiczenia (fakultet dla 4-5 roku matematyki)
- Analiza Matematyczna, ćwiczenia (przedmiot obowiązkowy dla 1 roku informatyki)
- Prowadziłem cykl wykładów monograficznych i seminariów dla studentów 4–5 roku na temat dynamiki kolektywnej, potoków gradientowych Wassersteina oraz sztucznej inteligencji z perspektywy matematycznej. Koordynowałem także seminarium licencjackie z zakresu sztucznej inteligencji dla studentów matematyki w roku akademickim 2024/2025.

2. Na Uniwersytecie Stanu Maryland, College Park:

- Applications of Linear Algebra (wykład dla *undergraduate studies* z kierunków matematycznych i technicznych).

5.1.3 Działalność promotorska

- 2019-2023: Promotor 4 licencjatów, 2 magisteriów oraz 1 doktoranta (promotor pomocniczy) – Michała Fabisiaka na Wydziale Matematyki Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

5.2 Przedstawienie wyników spoza rozprawy habilitacyjnej

5.2.1 Nierówności typu Opiala; praca magisterska

W ramach mojej pracy magisterskiej (pod kierunkiem prof. Agnieszki Kałamajskiej) badałem nierówności drugiego rzędu typu Opiala (albo Gagliardo-Nirenberga), co zaowocowało dwiema publikacjami. W pierwszej pracy [B16] wykazaliśmy wersję L^p takich nierówności, rozszerzając wcześniejsze wyniki Maz’ji, i zastosowaliśmy je do uzyskania nowych oszacowań a priori dla nieliniowych zagadnień własnych.

Druga praca [B15] rozwijała te same idee w szerszym kontekście przestrzeni Orlicza, gdzie otrzymaliśmy modularowe odpowiedniki nierówności L^p i wykorzystaliśmy je do uogólnienia pojemnościowych i izoperymetrycznych nierówności Maz’ji.

5.2.2 Słabo osobliwy model Cuckera–Smale’a; praca doktorska

Znaczna część moich badań doktorskich (pod kierunkiem prof. Piotra Muchy) dotyczyła modelu powstawania stad Cuckera–Smale’a z osobliwymi wagami komunikacyjnymi. W przypadku mikroskopowym najpierw udowodniłem istnienie globalnych słabych rozwiązań kawałkami klasy C^1 dla $\psi(s) = s^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, wraz z warunkami wyrównywania prędkości w skończonym czasie [B14] (był to pierwszy wynik o istnieniu dla osobliwych modeli wyrównywania prędkości typu Cuckera–Smale’a). Na tej podstawie pokazałem następnie, że dla $0 < \alpha < 1/2$ składowa prędkości słabych rozwiązań jest absolutnie ciągła, co prowadzi do globalnego istnienia i jednoznaczności [B13]. Kolejnym krokiem był przypadek kinetyczny [B11]: dla $\psi(s) = s^{-\alpha}$ z $0 < \alpha < 1/2$ skonstruowaliśmy globalne słabe rozwiązania o wartościach miarowych jako granice pola średniego układu cząstek i wykazaliśmy słabo–atomową jednoznaczność, pokazując, że rozwiązania wychodzące z danych atomowych (czyli empirycznych) pozostają atomowe i pokrywają się z dynamiką mikroskopową.

W odrębnym kierunku badań [B10] analizowaliśmy model Cuckera–Smale’a sprzężony z nieściśliwym, lepkiem płynem nienewtonowskim o potęgowym tensorze naprężeń (z $p \geq 11/5$). W dziedzinie okresowej udowodniliśmy istnienie rozwiązań (silnych dla części płynowej i słabych dla części Cuckera–Smale’a) oraz skonstruowaliśmy funkcjonal Lapunowa charakteryzujący ich zachowanie dla dużych czasów.

5.2.3 Silnie osobliwy model Cuckera–Smale’a; wczesne badania podoktorskie

Unikanie kolizji. Bezpośrednio po doktoracie pracowałem nad osobliwymi wariantami modelu Cuckera–Smale’a i ich równaniami granicznymi. W przypadku mikroskopowym ustaliliśmy precyzyjne warunki bezwarunkowego unikania zderzeń, które wykorzystaliśmy do dowodu, że układ jest dobrze postawiony [B12] (praca wspólna z Carrillo, Choi i Muchą). Dla układu agentów związanego z układem (1), z $\psi(s) = s^{-\alpha}$ i $\alpha \geq 1$, zakładamy dążąc do sprzeczności, że w chwili t_0 dochodzi do zderzenia. Wybieramy podgrupę C agentów, którzy zderzają się ze sobą w chwili t_0 , i definiujemy

$$X_C^2(t) := \frac{1}{\#C} \sum_{i,j \in C} |x_i(t) - x_j(t)|^2, \quad V_C^2(t) := \frac{1}{\#C} \sum_{i,j \in C} |v_i(t) - v_j(t)|^2.$$

Rozdzielając oddziaływania na dominujące, silnie osobiwe interakcje wewnątrz grupy C oraz regularne, kontrolowalne interakcje między agentami z C a pozostałą częścią układu, otrzymujemy następujący układ dyssypatywnych nierówności różniczkowych (SDDI – *eng. system of dissipative differential inequalities*):

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} X_C \right| &\leq |V_C|, \\ \frac{d}{dt} V_C &\leq -c_0 \psi(X_C) V_C + c_1 X_C, \quad c_0, c_1 > 0. \end{aligned}$$

Wykazujemy, iż powyższy SDDI gwarantuje, że $X_C(t_0) \neq 0$, a zatem w chwili t_0 nie mogą wystąpić zderzenia. Metoda ta została następnie użyta w [29] oraz [B1] w celu wykazania unikania kolizji dla osobiwego wyrównywania prędkości z nieliniową zależnością od prędkości po prawej stronie (1). Praca [B12] stanowi pierwszą demonstrację bezwarunkowego unikania zderzeń wynikającego wyłącznie z sił wyrównywania prędkości, bez dodatkowego odpychania.

Euler-alignment w ujęciu Biesowowskim. W skali makroskopowej skonstruowaliśmy duże rozwiązania lokalne oraz małe rozwiązania globalne dla ułamkowego układu Euler-alignment w $\mathbb{R}^d$, wykorzystując techniki przestrzeni Biesowa do uzyskania jednolitych oszacowań gęstości mimo braku tłumienia w równaniu ciągłości, zob. [B9] (praca wspólna z Danchinem, Muchą i Wróblewskim).

Praca ta opiera się na następującym przeformułowaniu (7) z $\psi(s) = s^{-d-\alpha}$. Wprowadzając oznaczenie $\sigma := \rho - 1$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \partial_t \sigma + \operatorname{div}(\sigma u) &= -\operatorname{div} u, \\ \partial_t u + \kappa(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u &= F(u, \sigma), \quad \kappa > 0, \end{aligned} \tag{21}$$

gdzie

$$\begin{aligned} F(u, \sigma) &:= I_\alpha(u, \sigma) - \kappa \sigma(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} u - (u \cdot \nabla) u, \\ I_\alpha(u, \sigma) &:= \operatorname{pv} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{u(x+y) - u(x)}{|y|^{d+\alpha}} (\sigma(x+y) - \sigma(x)) dy. \end{aligned}$$

Zakładając, że dane początkowe dla σ oraz u są małe (tak że ρ jest perturbacją stałej, a początkowa prędkość nie zaburza tego układu), możemy traktować (21) jako sprzężony układ równania ciągłości oraz ułamkowego równania ciepła z *małą* prawą stroną. Kluczowym problemem jest zapewnienie, że wszystkie wyrazy po prawej stronie pozostają małe w odpowiednich normach funkcyjnych.

W szczególności szacujemy u w jednorodnej przestrzeni Biesowa $\dot{B}_{d,1}^{\alpha-2}$, a σ (czyli $\rho - 1$) w przestrzeni $\dot{B}_{d,1}^1$. Główna trudność polega na oszacowaniu wyrazu I_α w zależności od u i σ . Osiągamy to, korzystając zarówno z ilorazów różnicowych związanych z półnormami Biesowa oraz z rozkładów Littlewooda–Paley’a na poziomie transformaty Fouriera.

Artykuł przeglądowy. W artykule przeglądowym [B8] omówiliśmy osobiwe modele powstawania stad we wszystkich skalach: od mikroskopowego unikania zderzeń, przez kinetyczne granice pola średniego z rozwiązaniami o wartościach miarowych, po makroskopowy

układ *Euler–alignment* i pokrewne bezciśnieniowe równania typu Naviera–Stokesa, wskazując powiązania z dynamiką ośrodka porowatego.

5.2.4 Dynamika z oddziaływaniami opartymi na topologii układu; późniejszy okres podoktorski

Propagacja oddziaływań o ograniczonym zasięgu. Podczas mojego pobytu podoktorskiego na University of Maryland, College Park, zajmowałem się wariantami modelu Cucker–Smale’a z oddziaływaniami o ograniczonym zasięgu oraz indukowanymi gęstością. Dla jąder o ograniczonym zasięgu zidentyfikowaliśmy mechanizm progowy prowadzący do bezwarunkowego flockingu (*eng. flocking* oznacza wyrównanie prędkości przy jednoczesnej kontroli nad średnicą położeń), zarówno w ujęciu hydrodynamicznym, jak i cząsteczkowym [B6] (praca wspólna z Moralesem i Tadmorem).

Artykuł [B6] należy do pierwszych prac dotyczących propagacji interakcji w dynamice wyrównywania prędkości drugiego rzędu, tzn. związanej z równaniami takimi jak (1), z jądrem ψ o zwartym nośniku. Główną trudnością było wprowadzenie odpowiedniego języka opisującego łączność pomiędzy agentami, zwłaszcza w sytuacji, gdy połączenie jest *pośrednie*: mimo że $\psi(|x_i - x_j|) = 0$, istnieje łańcuch agentów łączący x_i z x_j . W języku teorii grafów oznacza to, że między agentami i oraz j istnieje ścieżka. Problem ten jest szczególnie niebanalny w ujęciu makroskopowym (7), gdzie nie dysponujemy prostą reprezentacją grafową lub za pomocą macierzy sąsiedztwa.

Aby rozwiązać to zagadnienie, wprowadzamy pojęcie *łączności łańcuchowej* (*eng. chain connectivity*). Dla ustalonego $r > 0$ mówimy, że ograniczona dziedzina D jest łańcuchowo połączona w skali r , jeśli istnieje skończone $n = n(r)$ takie, że dla każdej pary $x, y \in D$ istnieje łańcuch $B_{x,y}$ nakładających się kul B_i o promieniu r i środkach w D , spełniający

$$B_{x,y} = \{B_i\}_{i=1}^n, \quad \text{oraz} \quad \begin{cases} B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset, \\ x \in B_1, \ y \in B_n. \end{cases}$$

Przy założeniu gęstościowym, tj. istnienia $m > 0$ takiego, że $\rho(B_i \cap B_{i+1}) \geq m$, dowodzimy propagacji interakcji oraz flockingu warunkowego (zależnego od danych początkowych).

Pozostałe prace. Równolegle badaliśmy wersję modelu z q -najbliższymi sąsiadami (układ Cuckera–Donga), która jest źle postawiona w pobliżu granic klastrów. Aby temu zaradzić, wprowadziliśmy rozmyty (*eng. fuzzy*) układ q -najbliższych sąsiadów, w którym wygładzamy funkcję indykatora zbiorów zasięgu oddziaływań. Dla tego modelu udowodniliśmy stabilność rozwiązań o wartościach miarowych oraz wyprowadziliśmy kinetyczną granicę pola średniego [B4].

Wreszcie połączyliśmy perspektywę o stałym zasięgu z podejściem najbliższych sąsiadów w niesymetrycznym modelu wyrównywania prędkości, analizując jego własności matematyczne i ilustrując dynamikę numerycznie [B5]. Na tej podstawie opracowaliśmy metodę segmentacji danych z rygorystycznymi kryteriami zatrzymania, łącząc dynamikę konsensusu z metodami klasteryzacji takimi jak DBSCAN [B3].

W tym samym okresie powstała praca dotycząca badań nad modelem Cuckera–Smale’a z silnie osobliwymi oddziaływaniami i rozproszonym sterowaniem (*eng. decentralized control*) prowadzące do dynamiki, w której cząstki bezwarunkowo unikają zderzeń i zbiegają do ustalonej formacji zachowując początkowy całkowity pęd układu [B7].

5.2.5 Najnowsze prace i preprinty

Moje najnowsze prace i preprinty dotyczą osobliwych oraz macierzowych wariantów modeli Euler–alignment i Cuckera–Smale’a. W [B1] badamy dynamikę wyrównywania prędkości typu Cucker–Smale’a z nieliniową zależnością od prędkości, związaną z układem

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i, \\ \dot{v}_i = \frac{1}{N} \sum_{i \neq j=1}^N \psi(|x_i - x_j|) (|v_j|^{p-2} v_j - |v_i|^{p-2} v_i), \end{cases} \quad (x_i(0), v_i(0)) = (x_{i0}, v_{i0}) \in \mathbb{R}^{2d}, p \geq 2.$$

Wykorzystując techniki zbliżone do metody SDDI z [B12], wykazujemy unikanie kolizji i opierając się na nim, dowodzimy że powyższy układ jest dobrze postawiony. Na tej podstawie, korzystając z technik rozwiniętych w [A1], konstruujemy rozwiązania odpowiadającego modelu makroskopowego: bezciśnieniowego ułamkowego układu *Euler–alignment* z nieliniową zależnością od prędkości (układ *p-Euler–alignment*). Otrzymujemy rozwiązania dla wszystkich wymiarów d oraz wszystkich $\alpha \geq d$, z $p \in [\alpha, \alpha + 2]$.

Artykuł [B2] (zaakceptowany do publikacji) porównuje wielowymiarową uogólnioną wersję modelu ruchu drogowego Aw–Rascle’a z bezciśnieniowym układem *Euler–alignment* z wagą komunikacyjną o wartościach macierzowych, analizując ich powiązania na poziomie mikroskopowym, mezoskopowym oraz hydrodynamicznym. Mój główny wkład do [B2] polega na adaptacji technik z [A2], które okazują się wyjątkowo skuteczne dla dyssypatywnego nielokalnego układu Aw–Rascle’a (DNAR) na poziomie kinetycznym. Prowadzi to do wykazania, że układ jest dobrze postawiony, stabilny oraz, że rozwiązania można konstruować za pomocą jednolitej w czasie granicy pola średniego, jak również do szeregu wniosków dotyczących stabilności rozwiązań hydrodynamicznego układu DNAR.

Wreszcie, w prepryncie [B17] wprowadzamy wielowymiarowy kinetyczny model wyrównywania prędkości z osobliwą komunikacją macierzową. Definiujemy słabe rozwiązania i dowodzimy, że układ jest dobrze postawiony. Charakteryzujemy szybkość zbieżności do stanu stacjonarnego oraz pokazujemy, że rozwiązania można odzyskać za pomocą jednolitej w czasie granicy pola średniego. Praca częściowo wykorzystuje nasze wyniki dotyczące potoków gradientowych po włóknach [A2].

Osiągnięcie habilitacyjne

- [A1] M. Fabisiak i J. Peszek, “Inevitable monokineticity of strongly singular alignment”, *Math. Ann.*, 2023. adr.: <https://doi.org/10.1007/s00208-023-02776-7>.

- [A2] J. Peszek i D. Poyato, “Heterogeneous gradient flows in the topology of fibered optimal transport”, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, t. 62, nr. 9, Paper No. 258, 72, 2023, ISSN: 0944-2669,1432-0835. DOI: 10.1007/s00526-023-02601-8. adr.: <https://doi.org/10.1007/s00526-023-02601-8>.
- [A3] J. Peszek i R. Rodiac, “Mean-field limit of 2D stationary particle systems with signed Coulombian interactions”, *Journal of the London Mathematical Society*, t. 111, nr. 1, e70068, 2025. DOI: <https://doi.org/10.1112/jlms.70068>. eprint: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms.70068>. adr.: <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms.70068>.

Pozostałe publikacje autora

- [B1] Y.-P. Choi, M. Fabisiak i J. Peszek, “Alignment with Nonlinear Velocity Couplings: Collision Avoidance and Micro-to-Macro Mean-Field Limits”, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, t. 57, nr. 5, s. 5791–5820, 2025. DOI: 10.1137/24M1697360. eprint: <https://doi.org/10.1137/24M1697360>. adr.: <https://doi.org/10.1137/24M1697360>.
- [B2] N. Chaudhuri, J. Peszek, M. Szlenk i E. Zatorska, “Non-local dissipative Aw-Rascle model and its relation with Matrix-valued communication in Euler alignment”, *to appear in EMS Series of Congress Reports*, 2024. adr.: <https://arxiv.org/abs/2409.07593>.
- [B3] P. Minakowski i J. Peszek, “Data clustering as an emergent consensus of autonomous agents”, *Appl. Math. (Warsaw)*, t. 52, nr. 1, s. 101–122, 2025, ISSN: 1233-7234,1730-6280. DOI: 10.4064/am2507-2-2025. adr.: <https://doi.org/10.4064/am2507-2-2025>.
- [B4] P. B. Mucha i J. Peszek, “A fuzzy q -closest alignment model”, *Nonlinearity*, t. 37, nr. 8, Paper No. 085007, 21, 2024, ISSN: 0951-7715,1361-6544. DOI: 10.1088/1361-6544/ad5781. adr.: <https://doi.org/10.1088/1361-6544/ad5781>.
- [B5] P. Minakowski, P. B. Mucha i J. Peszek, “Density-induced consensus protocol”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, t. 30, nr. 12, s. 2389–2415, 2020, ISSN: 0218-2025. DOI: 10.1142/S0218202520500451. adr.: <https://doi.org/10.1142/S0218202520500451>.
- [B6] J. Morales, J. Peszek i E. Tadmor, “Flocking with short-range interactions”, *J. Stat. Phys.*, t. 176, nr. 2, s. 382–397, 2019.
- [B7] Y.-P. Choi, D. Kalise, J. Peszek i A. A. Peters, “A collisionless singular Cucker-Smale model with decentralized formation control”, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, t. 18, nr. 4, s. 1954–1981, 2019.
- [B8] P. Minakowski, P. B. Mucha, J. Peszek i E. Zatorska, “Singular Cucker–Smale Dynamics”, w *Active Particles, Volume 2*, ser. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology, N. Bellomo, P. Degond i E. Tadmor, red., Cham: Birkhäuser, 2019, s. 201–243.

- [B9] R. Danchin, P. B. Mucha, J. Peszek i B. Wróblewski, “Regular solutions to the fractional Euler alignment system in the Besov spaces framework”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, t. 29, nr. 1, s. 89–119, 2019.
- [B10] P. B. Mucha, J. Peszek i M. Pokorný, “Flocking particles in a non-Newtonian shear thickening fluid”, *Nonlinearity*, t. 31, nr. 6, s. 2703–2725, 2018, ISSN: 0951-7715, 1361-6544. DOI: 10.1088/1361-6544/aab594. adr.: <https://doi.org/10.1088/1361-6544/aab594>.
- [B11] P. B. Mucha i J. Peszek, “The Cucker-Smale equation: singular communication weight, measure-valued solutions and weak-atomic uniqueness”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, t. 227, nr. 1, s. 273–308, 2018.
- [B12] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi, P. B. Mucha i J. Peszek, “Sharp conditions to avoid collisions in singular Cucker-Smale interactions”, *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, t. 37, s. 317–328, 2017.
- [B13] J. Peszek, “Discrete Cucker–Smale Flocking Model with a Weakly Singular Weight”, *SIAM J. Math. Anal.*, t. 47, nr. 5, s. 3671–3686, 2015.
- [B14] J. Peszek, “Existence of piecewise weak solutions of a discrete Cucker-Smale’s flocking model with a singular communication weight”, *J. Differ. Equations*, t. 257, nr. 8, s. 2900–2925, 2014.
- [B15] A. Kałamajska i J. Peszek, “On certain generalizations of the Gagliardo-Nirenberg inequality and their applications to capacitary estimates and isoperimetric inequalities”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, t. 13, nr. 1, s. 271–290, 2013, ISSN: 1661-7738, 1661-7746. DOI: 10.1007/s11784-013-0106-7. adr.: <https://doi.org/10.1007/s11784-013-0106-7>.
- [B16] A. Kałamajska i J. Peszek, “On some nonlinear extensions of the Gagliardo-Nirenberg inequality with applications to nonlinear eigenvalue problems”, *Asymptot. Anal.*, t. 77, nr. 3-4, s. 169–196, 2012, ISSN: 0921-7134, 1875-8576. DOI: 10.3233/asy-2011-1079. adr.: <https://doi.org/10.3233/asy-2011-1079>.
- [B17] J. Peszek i D. Poyato, *Measure solutions to a kinetic Cucker-Smale model with singular and matrix-valued communication*, 2022. arXiv: 2207.14764 [math.AP]. adr.: <https://arxiv.org/abs/2207.14764>.

Literatura

- [1] L. Ambrosio, N. Gigli i G. Savaré, *Gradient flows in metric spaces and in the space of probability measures*. Basel: Birkhäuser, 2008.
- [2] L. Ambrosio i A. Pratelli, “Existence and stability results in the L^1 theory of optimal transportation”, w *Optimal Transportation and Applications*, ser. Lecture Notes in Mathematics, L. A. Caffarelli i S. Salsa, red., t. 1813, Berlin, Heidelberg: Springer, 2003, s. 123–160.
- [3] H. Aref, “Point vortex dynamics: a classical mathematics playground”, *J. Math. Phys.*, t. 48, nr. 6, s. 065401, 23, 2007, ISSN: 0022-2488. DOI: 10.1063/1.2425103. adr.: <https://doi-org.ezproxy.universite-paris-saclay.fr/10.1063/1.2425103>.

- [4] X. Bai, C. Tan i L. Xue, “Global well-posedness and asymptotic behavior for the Euler-alignment system with pressure”, *J. Differential Equations*, t. 407, s. 269–310, 2024, ISSN: 0022-0396,1090-2732. DOI: 10.1016/j.jde.2024.06.020. adr.: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2024.06.020>.
- [5] J. A. Carrillo i Y.-P. Choi, “Mean-field limits: from particle descriptions to macroscopic equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, t. 241, nr. 3, s. 1529–1573, 2021.
- [6] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi i S. P. Perez, “A review on attractive-repulsive hydrodynamics for consensus in collective behavior”, w *Active particles. Vol. 1. Advances in theory, models, and applications*, ser. Model. Simul. Sci. Eng. Technol. Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, s. 259–298, ISBN: 978-3-319-49994-9; 978-3-319-49996-3.
- [7] J. A. Carrillo, Y.-P. Choi, E. Tadmor i C. Tan, “Critical thresholds in 1D Euler equations with non-local forces”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, t. 26, nr. 1, s. 185–206, 2016, ISSN: 0218-2025. DOI: 10.1142/S0218202516500068. adr.: <https://doi.org/10.1142/S0218202516500068>.
- [8] J. A. Carrillo, A. Wróblewska-Kamińska i E. Zatorska, “Pressureless Euler with nonlocal interactions as a singular limit of degenerate Navier-Stokes system”, *J. Math. Anal. Appl.*, t. 492, nr. 1, s. 124400, 27, 2020, ISSN: 0022-247X,1096-0813. DOI: 10.1016/j.jmaa.2020.124400. adr.: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2020.124400>.
- [9] Y.-P. Choi i X. Zhang, “One dimensional singular Cucker-Smale model: Uniform-in-time mean-field limit and contractivity”, *J. Differential Equations*, t. 287, s. 428–459, 2021.
- [10] Y.-P. Choi, “The global Cauchy problem for compressible Euler equations with a nonlocal dissipation”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, t. 29, nr. 1, s. 185–207, 2019, ISSN: 0218-2025. DOI: 10.1142/S0218202519500064. adr.: <https://doi.org/10.1142/S0218202519500064>.
- [11] F. Cucker i J.-G. Dong, “Avoiding collisions in flocks”, *IEEE Trans. Automat. Control*, t. 55, nr. 5, s. 1238–1243, 2010.
- [12] J.-M. Delort, “Existence de nappes de tourbillon en dimension deux”, *J. Amer. Math. Soc.*, t. 4, nr. 3, s. 553–586, 1991, ISSN: 0894-0347,1088-6834. DOI: 10.2307/2939269. adr.: <https://doi.org/10.2307/2939269>.
- [13] T. Do, A. Kiselev, L. Ryzhik i C. Tan, “Global regularity for the fractional Euler alignment system”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, t. 228, nr. 1, s. 1–37, 2018.
- [14] A. Figalli i M.-J. Kang, “A rigorous derivation from the kinetic Cucker-Smale model to the pressureless Euler system with nonlocal alignment”, *Anal. PDE*, t. 12, nr. 3, s. 843–866, 2019, ISSN: 2157-5045. DOI: 10.2140/apde.2019.12.843. adr.: <https://doi.org/10.2140/apde.2019.12.843>.
- [15] N. Gigli, “On the geometry of the space of measures in $\mathbb{R}^d$ endowed with the quadratic optimal transportation distance”, prac. dokt., Scuola Normale Superiore, 2008.
- [16] F. Golse i S.-Y. Ha, “A mean-field limit of the Lohe matrix model and emergent dynamics”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, t. 234, s. 1445–1491, 2019.

- [17] S.-Y. Ha, J. Kim, J. Park i X. Zhang, “Complete cluster predictability of the Cucker-Smale flocking model on the real line”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, t. 231, nr. 1, s. 319–365, 2019.
- [18] S.-Y. Ha, D. Ko i S. W. Ryoo, “On the Relaxation Dynamics of Lohe Oscillators on Some Riemannian Manifolds”, *J. Stat. Phys.*, t. 172, s. 1427–1478, 2018.
- [19] S.-Y. Ha i J.-G. Liu, “A simple proof of the Cucker-Smale flocking dynamics and mean-field limit”, *Commun. Math. Sci.*, t. 7, nr. 2, s. 297–325, 2009.
- [20] S.-Y. Ha i E. Tadmor, “From particle to kinetic and hydrodynamic descriptions of flocking”, *Kinet. Relat. Models*, t. 1, nr. 3, s. 415–435, 2008, ISSN: 1937-5093. DOI: 10.3934/krm.2008.1.415. adr.: <https://doi.org/10.3934/krm.2008.1.415>.
- [21] S. He i E. Tadmor, “Multi-species Patlak-Keller-Segel system”, *Indiana Univ. Math. J.*, t. 70, nr. 4, s. 1577–1624, 2021.
- [22] S. He i E. Tadmor, “Global regularity of two-dimensional flocking hydrodynamics”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, t. 355, nr. 7, s. 795–805, 2017, ISSN: 1631-073X. DOI: 10.1016/j.crma.2017.05.008. adr.: <https://doi.org/10.1016/j.crma.2017.05.008>.
- [23] D. Hilbert, “Mathematical problems.”, *Math. Today (Southend-on-Sea). Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900, Translated from the German by Mary Winston Neson.*, t. 36(1), 2000.
- [24] P.-E. Jabin i T. Rey, “Hydrodynamic limit of granular gases to pressureless Euler in dimension 1”, *Quarterly of Applied Mathematics*, t. 75, s. 155–179, 2017, 26 pages, 1 figure. DOI: 10.1090/qam/1442. adr.: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01279961>.
- [25] T. K. Karper, A. Mellet i K. Trivisa, “Hydrodynamic limit of the kinetic Cucker-Smale flocking model”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, t. 25, nr. 1, s. 131–163, 2015, ISSN: 0218-2025. DOI: 10.1142/S0218202515500050. adr.: <https://doi.org/10.1142/S0218202515500050>.
- [26] Y. Kuramoto, “Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators”, w *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, ser. Lecture Notes in Physics, H. Araki, red., t. 30, Kyoto, Japan: Springer-Verlag, 1975, s. 420–422.
- [27] C. Lancellotti, “On the Vlasov limit for systems of nonlinearly coupled oscillators without noise”, *Transport Theor. Stat. Phys.*, t. 34, s. 523–535, 2005.
- [28] M. A. Lohe, “Quantum synchronization over quantum networks”, *J. Phys. A: Math. Theor.*, t. 43, s. 465 301, 2010.
- [29] I. Markou, “Collision-avoiding in the singular Cucker-Smale model with nonlinear velocity couplings”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, t. 38, nr. 10, s. 5245–5260, 2018.

- [30] J. Morales i D. Poyato, “On the trend to global equilibrium for Kuramoto oscillators”, *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, t. 40, nr. 3, s. 631–716, 2023, ISSN: 0294-1449,1873-1430. DOI: 10.4171/aihpc/47. adr.: <https://doi.org/10.4171/aihpc/47>.
- [31] F. Otto, “The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation”, *Comm. Part. Differ. Equat.*, t. 26, nr. 1–2, s. 101–174, 2001.
- [32] D. Poyato i J. Soler, “Euler-type equations and commutators in singular and hyperbolic limits of kinetic Cucker-Smale models”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, t. 27, nr. 6, s. 1089–1152, 2017, ISSN: 0218-2025. DOI: 10.1142/S0218202517400103. adr.: <https://doi.org/10.1142/S0218202517400103>.
- [33] A. Pratelli, “On the sufficiency of c -cyclical monotonicity for optimality of transport plans”, *Math. Z.*, t. 258, s. 677–690, 2008.
- [34] R. Rodiac, “Regularity properties of stationary harmonic functions whose Laplacian is a radon measure”, *SIAM J. Math. Anal.*, t. 48, nr. 4, s. 2495–2531, 2016, ISSN: 0036-1410. DOI: 10.1137/15M1021155. adr.: <https://doi-org.ezproxy.universite-paris-saclay.fr/10.1137/15M1021155>.
- [35] R. Rodiac, “Description of limiting vorticities for the magnetic 2D Ginzburg-Landau equations”, *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, t. 36, nr. 3, s. 783–809, 2019, ISSN: 0294-1449. DOI: 10.1016/j.anihpc.2018.10.001. adr.: <https://doi-org.ezproxy.universite-paris-saclay.fr/10.1016/j.anihpc.2018.10.001>.
- [36] E. Sandier i S. Serfaty, *Vortices in the magnetic Ginzburg-Landau model* (Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications). Birkhäuser Boston, Inc., 2007, t. 70, s. xii+322, ISBN: 978-0-8176-4316-4; 0-8176-4316-8.
- [37] F. Santambrogio, *Optimal Transport for Applied Mathematicians* (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications). Basel: Birkhäuser, 2015.
- [38] S. Schochet, “The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation”, *Comm. Partial Differential Equations*, t. 20, nr. 5-6, s. 1077–1104, 1995, ISSN: 0360-5302. DOI: 10.1080/03605309508821124. adr.: <https://doi-org.ezproxy.universite-paris-saclay.fr/10.1080/03605309508821124>.
- [39] R. Shvydkoy i E. Tadmor, “Eulerian dynamics with a commutator forcing”, *Trans. Math. Appl.*, t. 1, nr. 1, s. 26, 2017.
- [40] R. Shvydkoy i E. Tadmor, “Eulerian dynamics with a commutator forcing III. Fractional diffusion of order $0 < \alpha < 1$ ”, *Phys. D*, t. 376/377, s. 131–137, 2018.
- [41] R. Shvydkoy, “Global existence and stability of nearly aligned flocks”, *J. Dynam. Differential Equations*, t. 31, nr. 4, s. 2165–2175, 2019, ISSN: 1040-7294. DOI: 10.1007/s10884-018-9693-8. adr.: <https://doi.org/10.1007/s10884-018-9693-8>.
- [42] R. Shvydkoy, *Dynamics and analysis of alignment models of collective behavior*. Springer, 2021.
- [43] R. Shvydkoy i E. Tadmor, “Eulerian dynamics with a commutator forcing II: Flocking”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, t. 37, nr. 11, s. 5503–5520, 2017, ISSN: 1078-0947. DOI: 10.3934/dcds.2017239. adr.: <https://doi.org/10.3934/dcds.2017239>.

- [44] E. Tadmor i C. Tan, “Critical thresholds in flocking hydrodynamics with non-local alignment”, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, t. 372, nr. 2028, s. 20130401, 22, 2014, ISSN: 1364-503X. DOI: 10.1098/rsta.2013.0401. adr.: <https://doi.org/10.1098/rsta.2013.0401>.
- [45] C. Tan, “On the Euler-Alignment system with weakly singular communication weights”, *Nonlinearity*, t. 33, nr. 4, s. 1907–1924, kw. 2020, arXiv: 1901.02582, ISSN: 0951-7715, 1361-6544. DOI: 10.1088/1361-6544/ab6c39. adr.: <http://arxiv.org/abs/1901.02582> (term. wiz. 21.03.2022).
- [46] C. Villani, *Optimal transport: old and new* (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften). Berlin, Heidelberg: Springer, 2009, t. 338.
- [47] X. Yin, D. Yue i Z. Chen, “Asymptotic behavior and collision avoidance in the Cucker-Smale model”, *IEEE Trans. Automat. Control*, t. 65, nr. 7, s. 3112–3119, 2020.

Wykaz oznaczeń

Notacja stosowana w niniejszej rozprawie ma w dużej mierze charakter lokalny i jest specyficzna dla poszczególnych artykułów. Niektóre symbole (w szczególności μ) są używane wielokrotnie, z różnymi znaczeniami w różnych kontekstach. Dla wygody czytelnika notację uporządkowano w jednej części globalnej oraz trzech częściach odpowiadających poszczególnym artykułom.

Notacja globalna

$\mathbb{R}^d$	d -wymiarowa przestrzeń euklidesowa
x, v	zmiennie położenia i prędkości w $\mathbb{R}^d$
t	zmienna czasowa
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$	przestrzeń borelowskich miar probabilistycznych na $\mathbb{R}^d$
zbieżność wąska	słaba zbieżność testowana względem funkcji ciągłych i ograniczonych
δ_x	miara Diraca w punkcie x
$*$	operator splotu
$\nabla, \operatorname{div}$	gradient i dywergencja względem przestrzeni bazowej
$\nabla_x, \operatorname{div}_v$	gradient i dywergencja względem zmiennych x i v
$L^p(\Omega)$	przestrzeń Lebesgue'a ($1 \leq p \leq \infty$)
$C(\Omega)$	funkcje ciągłe
$C_b(\Omega)$	funkcje ciągłe i ograniczone
$C^1(\Omega)$	funkcje klasy C^1 na Ω
$C_c^\infty(\Omega)$	funkcje gładkie o zwartym nośniku
$\mathcal{M}(\Omega)$	(skończone) miary Radona na Ω
$\mathcal{M}^+(\Omega)$	nieujemne miary Radona na Ω
$\operatorname{supp} \mu$	nośnik miary μ
$\ \cdot\ _{L^p}$	norma L^p (istotne supremum dla $p = \infty$)
$p.w.$	prawie wszędzie (względem miary Lebesgue'a lub wskazanej miary)
$W^{k,p}(\Omega)$	przestrzeń Sobolewa funkcji o słabych pochodnych do rzędu k w $L^p(\Omega)$
$W^{-k,p}(\Omega)$	przestrzeń dualna do $W_0^{k,p'}(\Omega)$, gdzie $1/p + 1/p' = 1$
$W_{\operatorname{loc}}^{-k,p}(\Omega)$	lokalna dualna przestrzeń Sobolewa
$H^k(\Omega)$	przestrzeń Sobolewa $W^{k,2}(\Omega)$
$H^{-k}(\Omega)$	przestrzeń dualna do $H_0^k(\Omega)$
$H_{\operatorname{loc}}^{-1}(\Omega)$	lokalna dualna przestrzeń Sobolewa (przypadek $p = 2, k = 1$)

Notacja lokalna: Artykuł A1

μ	miara na $[0, T] \times \mathbb{R}^{2d}$ (sformułowanie kinetyczne)
$\{\mu_t\}_{t \in [0, T]} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{2d})$	identyfikacja μ z rodziną miar
μ^N	miara empiryczna związana z N -cząstkowym układem Cuckera–Smale’a
ρ_t	gęstość przestrzenna indukowana przez μ_t , zob. (3)
$u(t, x)$	lokalne pole prędkości związane z μ_t , zob. (3)
$\sigma_{t,x} = \sigma_{t,x}(v)$	warunkowy rozkład prędkości miary $\mu = \mu(t, x, v)$ w punkcie (t, x)
ψ	waga komunikacyjna w modelu Cuckera–Smale’a
α	wykładnik osobliwości wagi komunikacyjnej $\psi(r) = r^{-\alpha}$, zwykle $\alpha \geq d$
MP	warunek <i>locally mass-preserving</i>
SF	warunek <i>steadily flowing</i>
$\mu \otimes \nu$	miara produktowa na przestrzeni produktowej
$u \otimes v$	iloczyn tensorowy (zewnątrzny) wektorów: $(u \otimes v)_{ij} = u_i v_j$
$T_{\#}\mu$	miara obrazowa μ względem odwzorowania T

Notacja lokalna: Artykuł A2

d_1, d_2	wymiary przestrzeni włókna i bazy, $d = d_1 + d_2$
$(\mathcal{P}_{2,\nu}, W_{2,\nu})$	włóknista przestrzeń Wassersteina rzędu drugiego, zob. Def. 1
$\mu = \mu_t(x, \omega)$	zazwyczaj krzywa w $(\mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^{d_1+d_2}), W_{2,\nu})$ o ustalonym rozkładzie brzegowym ν
$\{\mu_t\}_{t \in [0, T]} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^{d_1+d_2})$	identyfikacja μ z rodziną miar
μ^ω	dezintegracja miary μ względem zmiennej ω
ν	zadany rozkład brzegowy na $\mathbb{R}^{d_2}$
W_2	kwadratowa odległość Wassersteina
$\mathcal{E}$	funkcjonał energii na $\mathcal{P}_{2,\nu}(\mathbb{R}^d)$
$\partial_{W_{2,\nu}} \mathcal{E}$	włóknista subróżniczka Wassersteina
EVI / EDE / EDI	wariacyjne sformułowania potoków gradientowych

Notacja lokalna: Artykuł A3

μ	miara Radona ze znakiem na $\mathbb{R}^d$ (granica pola średniego)
μ^N	empiryczna miara ze znakiem z rzeczywistymi wagami d_i
g	jądro kulombowskie, rozwiązanie podstawowe operatora $-\Delta$
$\mathcal{H}$	ciągły Hamiltonian układu makroskopowego
$\mathcal{H}_N$	dyskretny Hamiltonian układu N cząstek
h	potencjał elektryczny $h = g * \mu$
$[h, h]$	kwadratowy tensor naprężeń związany z h , zob. (18)
$\mathcal{H}_\infty^1$	1-wymiarowy <i>Hausdorff content</i> , zob. [A3, Definicja 2.5] (heurystycznie może być traktowany jako jednowymiarowa miara typu Hausdorffa)