

AUTOREFERAT

1. Imię i nazwisko

Bartosz Bieganski

2. Posiadane dyplomy, stopnie naukowe

11.12.2019 **Doktor nauk ścisłych i przyrodniczych w dyscyplinie matematyka**
(z wyróżnieniem), Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Rozprawa doktorska: *Stany podstawowe, związane i półklasyczne nieliniowych zagadnień typu Schrödingera*

Promotor: dr hab. Jarosław Mederski, prof. IMPAN

06.10.2016 **Magister informatyki**, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Praca magisterska: *Kolorowanie on-line grafów*
Promotor: prof. dr hab. Maciej M. Sysło

30.06.2015 **Magister matematyki**, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu
Praca magisterska: *Rozwiązania w stanie podstawowym półliniowych zagadnień Dirichleta i Schrödingera z nieliniowościami zmieniającymi znak o subkrytycznym wzroście*
Promotor: dr hab. Jarosław Mederski, prof. IMPAN

3. Informacja o dotychczasowym zatrudnieniu w jednostkach naukowych

01.10.2022–... **Adiunkt** (*Adiunkt im. S. Eilenberga*), Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

01.10.2023–... **Adiunkt** (urlop bezpłatny od 01.10.2023), Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

01.10.2020–30.09.2022 **Adiunkt**, Instytut Matematyczny, Polska Akademia Nauk,

01.10.2019–30.09.2023 **Asystent** (urlop bezpłatny od 01.10.2020 do 30.09.2023), Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

4. Omówienie osiągnięć naukowych

Osiągnięcia naukowe, o których mowa w art. 219 ust. 1 pkt. 2 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. (Dz. U. z 2024 r., poz. 1571 z późn. zm.) tworzą cykl sześciu powiązanych tematycznie artykułów naukowych zatytułowany

Metody wariacyjne, topologiczne i geometryczne w badaniu rozwiązań zagadnień eliptycznych

w skład którego wchodzi następujące publikacje:

- (H1) F. Bernini, **B. Bieganowski**: *Generalized linking-type theorem with applications to strongly indefinite problems with sign-changing nonlinearities*,
Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. **61**, Article number: 182 (2022),
- (H2) **B. Bieganowski**: *Solutions to a nonlinear Maxwell equation with two competing nonlinearities in $\mathbb{R}^3$* ,
Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **69** (2021), p. 37–60,
- (H3) **B. Bieganowski**, S. Secchi: *Non-local to local transition for ground states of fractional Schrödinger equations on bounded domains*,
Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 57, No. 2 (2021), p. 413–425,
- (H4) **B. Bieganowski**, S. Secchi: *Non-local to local transition for ground states of fractional Schrödinger equations on $\mathbb{R}^N$* ,
J. Fixed Point Theory Appl. **22**, 76 (2020),
- (H5) **B. Bieganowski**, J. Mederski: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*,
J. Funct. Anal., Vol. **280**, Issue 11 (2021), 108989,
- (H6) **B. Bieganowski**, J. Mederski, J. Schino: *Normalized solutions to at least mass critical problems: singular polyharmonic equations and related curl-curl problems*,
J. Geom. Anal., Vol. **34**, Article number: 322 (2024).

4.1. Wprowadzenie

Przedstawiony cykl publikacji dotyczy zagadnienia istnienia rozwiązań nieliniowych zagadnień eliptycznych postaci

$$(1) \quad -\Delta u + V(x)u = g(x, u), \quad x \in \Omega,$$

gdzie $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest zbiorem otwartym, ograniczonym i spójnym lub $\Omega = \mathbb{R}^N$, zaś $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest pewną nieliniową funkcją. Równanie tej postaci można otrzymać rozpatrując nieliniowe, zależne od czasu, równanie Schrödingera

$$(2) \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\Delta \Psi + \tilde{V}(x)\Psi - h(x, |\Psi|)\Psi, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega.$$

Poszukiwanie tzw. fal stojących $\Psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x)$ o ustalonej częstotliwości $\lambda \in \mathbb{R}$, gdzie $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest tzw. *solitonem*, czyli funkcją zanikającą na brzegu Ω (lub w nieskończoności, gdy $\Omega = \mathbb{R}^N$), prowadzi do równania eliptycznego postaci (1) z $g(x, u) = h(x, |u|)u$ oraz $V(x) = \tilde{V}(x) + \lambda$.

Laskin ([20, 21]) wyprowadził ułamkowy odpowiednik równania (2)

$$(3) \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (-\Delta)^s \Psi + \tilde{V}(x)\Psi - h(x, |\Psi|)\Psi, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega,$$

gdzie $s \in (0, 1)$. Wówczas poszukiwanie fal stojących sprowadza się do rozwiązania następującego równania ułamkowego

$$(4) \quad (-\Delta)^s u + V(x)u = g(x, u), \quad x \in \Omega,$$

będącego nielokalnym odpowiednikiem (1).

Drugą motywacją do studiowania rozwiązań równań postaci (1) jest układ równań Maxwella. Niech $\Omega = \mathbb{R}^3$, układ równań Maxwella jest postaci

$$\begin{cases} \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\mathcal{D}) = \rho \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathcal{E} = 0 \\ \operatorname{div}(\mathcal{B}) = 0, \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{E}$ oznacza pole elektryczne, $\mathcal{B}$ pole magnetyczne, $\mathcal{D}$ indukcję elektryczną, zaś $\mathcal{H}$ indukcję magnetyczną. Ponadto $\mathcal{J}$ oznacza natężenie prądu elektrycznego oraz ρ gęstość ładunku elektrycznego. Powyższe wartości są dodatkowo związane ze sobą tzw. związki konstytutywne

$$\begin{cases} \mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} + \mathcal{P} \\ \mathcal{H} = \frac{1}{\mu} \mathcal{B} - \mathcal{M}, \end{cases}$$

gdzie $\mathcal{P}$ oraz $\mathcal{M}$ oznaczają polaryzację i magnetyzację, odpowiednio. Ponadto ε i μ oznaczają przenikalność elektryczną oraz przenikalność magnetyczną materiału. Zakładając, że $\mathcal{M} = 0$, $\rho = 0$, $\mathcal{J} = 0$ oraz $\mu \equiv 1$, z powyższych równań otrzymujemy następujące, elektromagnetyczne równanie falowe ([36])

$$(5) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathcal{E}) + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2}.$$

Będziemy poszukiwać rozwiązań w postaci pól czasowo-harmonicznych $\mathcal{E} = \mathbf{E}(x) \cos(\omega t)$ o okresie $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Polaryzacja $\mathcal{P}$ jest nieliniową funkcją zależną od $\mathcal{E}$. Załóżmy, że jest postaci

$$\mathcal{P} = \chi(\langle |\mathcal{E}|^2 \rangle) \mathcal{E},$$

tzn. *podatność dielektryczna* χ zależy jedynie od średniej czasowej intensywności $\mathcal{E}$ określonej jako

$$\langle |\mathcal{E}|^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T |\mathcal{E}(x, t)|^2 dt = \frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2.$$

W takim przypadku polaryzacja jest postaci

$$\mathcal{P} = \mathbf{P}(\mathbf{U}(x)) \cos(\omega t), \quad \text{gdzie } \mathbf{P}(\mathbf{U}) = \chi\left(\frac{1}{2} |\mathbf{U}|^2\right) \mathbf{U}.$$

Wówczas (5) sprowadza się do równania stacjonarnego

$$(6) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \tilde{V}(x) \mathbf{U} = h(x, \mathbf{U}), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $h(x, \mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U})\omega^2$, $\tilde{V}(x) = -\varepsilon(x)\omega^2$. Wówczas poszukiwanie rozwiązań klasycznych szczególnej postaci

$$(7) \quad \mathbf{U}(x) = \frac{u(r, x_3)}{r} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

proceedzi do równania (1), w którym $V(x) = \tilde{V}(x) + \frac{1}{r^2}$, zaś g oraz h są związane relacją $h(x, \mathbf{U}) = g(x, \alpha)w$, gdzie $\mathbf{U} = \alpha w$ dla pewnych $w \in \mathbb{R}^3$, $|w| = 1$ oraz $\alpha \in \mathbb{R}$ (por. [2]).

Niech teraz $\Omega = \mathbb{R}^N$ i rozpatrzmy teraz wersję równania (2) z autonomiczną nieliniowością, tzn.

$$(8) \quad i \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\Delta \Psi + V(x)\Psi + h(|\Psi|)\Psi, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N.$$

Wówczas, w szczególności, $g(x, u) = g(u)$ w (1). Ważną własnością rozwiązań równania (8) jest zachowywanie normy L^2 w czasie, tzn. wartość

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi(t, x)|^2 dx$$

jest niezależna od t . Ma sens zatem poszukiwanie fal stojących $\Psi(t, x) = e^{i\lambda t}u(x)$ o zadanej normie L^2 , $\rho := \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi(t, x)|^2 dx$, lecz nieznaney częstotliwości $\lambda \in \mathbb{R}$. Prowadzi to do następującego, znormalizowanego wariantu problemu eliptycznego (1),

$$(9) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u + \lambda u = g(u), \\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \rho > 0, \end{cases}$$

gdzie poszukiwana jest para (λ, u) , zaś wartość ρ jest ustalona.

4.2. Istnienie rozwiązań zagadnień pochodzących od równań Maxwella z nieliniowościami zmieniającymi znak

Rozpatrzmy równanie (1) z $\Omega = \mathbb{R}^N$ pochodzące z układu równań Maxwella, tzn.

$$(10) \quad -\Delta u + V(x)u + \frac{a}{r^2}u = \tilde{f}(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie z potencjału wyodrębniliśmy część osobliwą $\frac{a}{|y|^2}$, gdzie $x = (y, z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}$, $N > K \geq 2$. Jest to uogólnienie równania pochodzącego z (6) na ogólny wymiar $N \geq 3$ i $a \in \mathbb{R}$ (oryginalne równanie otrzymujemy z $N = 3$, $K = 2$ oraz $a = 1$).

Założmy na początek, że

(V1) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jest cylindrycznie symetryczny, tj. $V = V(|y|, z)$, $\mathbb{Z}^{N-K}$ -okresowy względem z oraz

$$\inf \sigma \left(-\Delta + \frac{a}{r^2} + V(r, x_3) \right) > 0.$$

Jak wspomnieliśmy we wstępie, łatwo przeliczyć równoważność rozwiązań równań (6) oraz (1) w przypadku rozwiązań klasycznych. Gdy $V \equiv 0$ równoważność między słabymi rozwiązaniami została wykazana w [15]. Gdy potencjał V jest niezerowy i spełnia (V1) mamy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([H2], Theorem 1.1). *Przypuśćmy, że $N = 3$, $K = 2$, $a = 1$ oraz V spełnia (V1). Niech ponadto $\tilde{f} : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją Carathéodory'ego¹, $O(2) \times \{Id\}$ -niezmienniczą ze względu na $x \in \mathbb{R}^3$ spełniającą nierówność*

$$|\tilde{f}(x, u)| \lesssim |u| + |u|^5 \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R} \text{ oraz p.w. } x \in \mathbb{R}^3.$$

Jeżeli $\mathbf{U} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ postaci (7) jest, dla pewnej cylindrycznie symetrycznej funkcji u , słabym rozwiązaniem równania (6), to $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ oraz u jest słabym rozwiązaniem równania (10). Na odwrót, jeśli $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ jest cylindrycznie symetrycznym, słabym rozwiązaniem równania (10), to $\mathbf{U} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ jest słabym rozwiązaniem równania (6), gdzie $\mathbf{U}$ jest dane wzorem (7). Ponadto $\operatorname{div}(\mathbf{U}) = 0$.

Oznacza to, że jeżeli znajdziemy słabe rozwiązanie zagadnienia eliptycznego, otrzymamy także słabe rozwiązanie równania (6).

Będziemy rozważać (10) z nieliniowościami zmieniającymi znak. Przepiszmy zatem (10) w postaci

$$(11) \quad -\Delta u + V(x)u + \frac{a}{r^2}u = f(x, u) - g(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Rozważamy następujące założenia:

(F1) $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego, $\mathbb{Z}^{N-K}$ -okresową względem z oraz $O(K) \times \{Id\}$ -niezmienniczą, ponadto dla pewnego $p \in (2, 2^*)$ zachodzi nierówność

$$|f(x, u)| \lesssim 1 + |u|^{p-1} \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N;$$

(F2) $f(x, u) = o(|u|)$ przy $u \rightarrow 0$, jednostajnie ze względu na x ;

(F3) $F(x, u)/|u|^q \rightarrow \infty$ przy $|u| \rightarrow \infty$, jednostajnie ze względu na x , dla pewnego $q \in (2, p)$, gdzie $F(x, u) := \int_0^u f(x, s) ds$ oraz $F(x, u) \geq 0$ dla wszystkich $u \in \mathbb{R}$ i p.w. $x \in \mathbb{R}^N$;

(F4) odwzorowanie $u \mapsto f(x, u)/|u|^{q-1}$ jest niemalejące na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$;

(G1) $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego, $\mathbb{Z}^{N-K}$ -okresową względem z oraz $O(K) \times \{Id\}$ -niezmienniczą, ponadto zachodzi nierówność

$$|g(x, u)| \lesssim 1 + |u|^{q-1} \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N;$$

(G2) $g(x, u) = o(|u|)$ przy $u \rightarrow 0$, jednostajnie ze względu na x ;

¹tn. f jest mierzalna ze względu na $x \in \mathbb{R}^3$ oraz ciągła ze względu na $u \in \mathbb{R}$

(G3) odwzorowanie $u \mapsto g(x, u)/|u|^{q-1}$ jest nierosnące na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$, ponadto $g(x, u)u \geq 0$ dla wszystkich $u \in \mathbb{R}$ oraz p.w. $x \in \mathbb{R}^N$.

Poniższe twierdzenie zostało udowodnione w pracy (H2) w przypadku $N = 3$ i $K = 2$, lecz jego uogólnienie na przypadek $N > K \geq 2$ jest trywialne.

Twierdzenie 2 ([H2], Theorem 1.2)]. *Przypuśćmy, że spełnione są założenia (V1), (F1)–(F4), (G1)–(G3). Wówczas istnieje cylindrycznie symetryczne, słabe rozwiązanie $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ równania (11) będące rozwiązaniem o najmniejszej energii wśród wszystkich cylindrycznie symetrycznych rozwiązań spełniających warunek $\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|a|}{|y|^2} u^2 dx < +\infty$.*

Jako natychmiastową konsekwencję Twierdzeń 1 oraz 2 otrzymujemy twierdzenie o istnieniu szczególnego rozwiązania równania (6).

Twierdzenie 3 ([H2], Theorem 1.2)]. *Przypuśćmy, że $N = 3$, $K = 2$, $a = 1$ oraz spełnione są założenia (V1), (F1)–(F4), (G1)–(G3). Wówczas istnieje słabe rozwiązanie $\mathbf{U} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ równania (6) postaci (7) dla pewnej cylindrycznie symetrycznej funkcji $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$. Ponadto jest to rozwiązanie o najmniejszej energii wśród wszystkich rozwiązań postaci (7).*

Twierdzenie 2 udowodnione zostało w (H2) z wykorzystaniem metod wariacyjnych. Z równaniem (11) stwarzamy tzw. funkcjonal energii

$$(12) \quad \mathcal{J}(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{a}{|y|^2} u^2 + V(x) u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) dx + \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx$$

i oczekujemy, że jego punkty krytyczne są słabymi rozwiązaniami (11). Potrzebujemy zatem odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, na której $\mathcal{J}$ jest dobrze określony i klasy $\mathcal{C}^1$. Ponieważ poszukujemy rozwiązań cylindrycznie symetrycznych, naturalną przestrzenią jest

$$X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : u = u(|y|, z) \text{ jest cylindrycznie symetryczna, } \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|a|}{|y|^2} u^2 dx < +\infty \right\}.$$

Jest to przestrzeń Hilberta wyposażona w normę

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{a}{|y|^2} u^2 + V(x) u^2 dx \right)^{1/2}.$$

Wówczas punkty krytyczne $\mathcal{J}$ nazywamy słabymi rozwiązaniami równania (11). W celu znalezienia punktów krytycznych dowodzimy najpierw twierdzenie o istnieniu tzw. ciągów Cerami.

Rozpatrzmy ogólną przestrzeń Hilberta $(X, \|\cdot\|)$ oraz nieliniowy funkcjonal $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$ postaci

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \mathcal{I}(u),$$

gdzie $\mathcal{I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ i $\mathcal{I}(0) = 0$. Wówczas wszystkie punkty krytyczne $\mathcal{J}$ leżą w tzw. *rozmaitości Nehariego*

$$\mathcal{N} := \{u \in X \setminus \{0\} : \mathcal{J}'(u)(u) = 0\}.$$

Otrzymujemy następujące twierdzenie abstrakcyjne.

Twierdzenie 4 ([[\(H2\)](#), Theorem 5.1]). *Przypuśćmy, że*

(J1) *istnieje promień $r > 0$ taki, że $\inf_{\|u\|=r} \mathcal{J}(u) > 0$;*

(J2) $\frac{\mathcal{I}(t_n u_n)}{t_n^2} \rightarrow \infty$, *jeśli $t_n \rightarrow \infty$ oraz $u_n \rightarrow u \neq 0$;*

(J3) *dla wszystkich $t > 0$ oraz $u \in \mathcal{N}$ zachodzi nierówność*

$$\frac{t^2 - 1}{2} \mathcal{I}'(u)(u) - \mathcal{I}(tu) + \mathcal{I}(u) \leq 0.$$

Wówczas $\Gamma \neq \emptyset$, $\mathcal{N} \neq \emptyset$ oraz

$$c := \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J} = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \mathcal{J}(\gamma(t)) = \inf_{u \in X \setminus \{0\}} \sup_{t \geq 0} \mathcal{J}(tu) > 0,$$

gdzie

$$\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1]; X) : \gamma(0) = 0, \|\gamma(1)\| > r, \mathcal{J}(\gamma(1)) < 0\}.$$

Ponadto istnieje ciąg Cerami dla $\mathcal{J}$ na poziomie c , tzn. ciąg $(u_n) \subset X$ taki, że

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c, \quad (1 + \|u_n\|) \mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0.$$

Twierdzenie to można traktować jako uogólnienie [[\(D1\)](#), Theorem 2.1], gdzie m.in. w założeniu ([J3](#)) wymagana była nierówność ostra. Można je także traktować jako wersję twierdzeń abstrakcyjnych z prac [[\(D6\)](#)] lub [[33](#)] w przypadku dodatnio określonego operatora, lecz bez wymagania warunku $\mathcal{I}(u) \geq 0$, który w naszej sytuacji nie jest spełniony.

Następnie, mając ciąg Cerami z powyższego twierdzenia, stosując odpowiedni wariant lematu o koncentracji zwartości ([[\(H2\)](#), Corollary 7.1]) jesteśmy w stanie wykazać, że - z dokładnością do podciągu oraz z dokładnością do pewnych translacji - ciąg (u_n) ma nietrywialną słabą granicę, będącą słabym rozwiązaniem wyjściowego problemu.

Ze względu na niezmienniczość równania ([11](#)) ze względu na działanie translacji $\mathbb{Z}^{N-K}$ względem z automatycznie otrzymujemy istnienie całej orbity rozwiązań. W ([H2](#)) wykazujemy także, że istnieje nieskończenie wiele orbit składających się z rozwiązań. Na potrzeby sformułowania twierdzenia mówimy, że dwa słabe rozwiązania u_1, u_2 są *geometrycznie różne*, o ile ich orbity są rozłączne.

Twierdzenie 5 ([[\(H2\)](#), Theorem 8.1]). *Przypuśćmy, że spełnione są założenia ([V1](#)), ([F1](#))–([F4](#)), ([G1](#))–([G3](#)) oraz f i g są nieparzyste względem u . Wówczas istnieje nieskończenie wiele par cylindrycznie symetrycznych, słabych rozwiązań $\pm u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ równania ([11](#)) takich, że*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|a|}{|y|^2} u^2 < \infty.$$

Założenie ([V1](#)) może wydawać się ograniczające, lecz po wnikliwej analizie dowodu równoważności słabych rozwiązań okazuje się, że zamiast zakładać, że widmo operatora w ([V1](#)) jest dodatnie, wystarczy zakładać, że 0 nie należy do widma, co zaobserwowano w ([H1](#)).

Twierdzenie 6 ([[H1](#)], Theorem 3.1)]. *Twierdzenie 1 pozostaje prawdziwe, jeżeli warunek o widmie w ([V1](#)) zastąpimy przez*

$$0 \notin \sigma \left(-\Delta + \frac{a}{r^2} + V(r, x_3) \right).$$

Można rozważać zatem równanie ([11](#)) w przypadku *silnie nieokreślonym*, tzn. część widma operatora znajduje się poniżej 0. Jednak analiza tego przypadku jest o wiele trudniejsza i musimy wprowadzić kilka dodatkowych uproszczeń. Zakładamy dodatkowo, że funkcje f i g są autonomiczne (nie zależą od x), g jest poprzedzona pewnym małym parametrem λ , zaś f poza pewnym otoczeniem zera zachowuje się niemal dokładnie jak funkcja potęgowa. Małość parametru λ jest niezbędna zarówno do weryfikacji założeń geometrycznych (uzyskanie istnienia ciągu typu Cerami), a także do uzyskania ograniczoności ciągu Cerami. Dokładniej, rozważamy następujące równanie

$$(13) \quad -\Delta u + V(x)u + \frac{a}{|y|^2}u = f(u) - \lambda g(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie potencjał V spełnia warunek

(V2) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jest cylindrycznie symetryczny, tj. $V = V(|y|, z)$, $\mathbb{Z}^{N-K}$ -okresowy względem z oraz

$$0 \notin \sigma \left(-\Delta + \frac{a}{|y|^2} + V(x) \right), \quad \inf \sigma \left(-\Delta + \frac{a}{|y|^2} + V(x) \right) < 0.$$

Przy ([V2](#)) przestrzeń X ma dekompozycję ortogonalną $X = X^+ \oplus X^-$ odpowiadającą dekompozycji widma operatora na część dodatnią i ujemną. Forma kwadratowa

$$u \mapsto \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{a}{|y|^2}u^2 + V(x)u^2 dx$$

jest dodatnio (odp. ujemnie) określona na X^+ (odp. na X^-). Wówczas dla $u^\pm \in X^\pm$ określamy

$$\|u^\pm\|^2 := \pm \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + \frac{a}{|y|^2}u^2 + V(x)u^2 dx$$

i na X norma jest zadana przez $\|u\|^2 := \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2$, gdzie $u = u^+ + u^-$ z $u^\pm \in X^\pm$. Rozważamy założenia ([F1](#))–([F4](#)), ([G1](#))–([G3](#)) w wersji autonomicznej (tj. f i g nie zależą od x) oraz wprowadzamy dodatkowe założenie

(F5) istnieje liczba $\rho > 0$ taka, że $|u|^{p-1} \lesssim |f(u)| \lesssim |u|^{p-1}$ dla $|u| \geq \rho$.

Funkcjonał wariacyjny ([12](#)) jest wówczas klasy $\mathcal{C}^1$ i ma wówczas ogólną postać

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \mathcal{I}(u),$$

gdzie $\mathcal{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx$, $G(u) := \int_0^u g(s) ds$. W pracy ([H1](#)) dowodzimy następujących twierdzeń o istnieniu rozwiązań.

Twierdzenie 7 ([[H1](#)], Theorem 1.2]). *Założmy, że spełnione są warunki ([V2](#)), ([F1](#))–([F5](#)), ([G1](#))–([G3](#)) oraz f i g są nieparzyste. Jeżeli $\lambda > 0$ (w równaniu ([13](#))) oraz $\rho > 0$ (w założeniu ([F5](#))) są dostatecznie małe, to istnieje nietrywialne rozwiązanie równania ([13](#)).*

Jako Twierdzenia [7](#) oraz Twierdzenia [6](#) otrzymujemy natychmiastowo istnienie rozwiązania dla ([6](#)).

Twierdzenie 8 ([[H1](#)], Theorem 1.3]). *Niech $N = 3$, $K = 2$ i $a = 1$. Przy założeniach Twierdzenia [7](#) istnieje nietrywialne rozwiązanie równania ([6](#)) postaci ([7](#)).*

Ponadto jesteśmy w stanie wykazać dodatkową własność znalezionej rozwiązania (zauważmy, że znając $\mathbf{U}$ jesteśmy w stanie rozwiązać cały układ równań Maxwella i obliczyć $\mathcal{D}(t)$, $\mathcal{B}(t)$, $\mathcal{H}(t)$).

Propozycja 9 ([[H1](#)], Proposition 6.3]). *Całkowita energia elektromagnetyczna $\mathcal{L}(t)$ rozwiązania znalezionej w Twierdzeniu [8](#) jest skończona i nie zależy od czasu t , gdzie*

$$\mathcal{L}(t) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \mathcal{E}(t) \mathcal{D}(t) + \mathcal{B}(t) \mathcal{H}(t) dx.$$

W celu wykazania Twierdzenia [7](#), musimy dobrze zrozumieć geometrię funkcjonału $\mathcal{J}$ i znaleźć ciąg minimalizujący, którego granica będzie nietrywialna i okaże się rozwiązaniem. W tym celu wprowadzamy istotną modyfikację twierdzenia o geometrii zapętli (por. [[18](#)]).

W tym celu przypomnimy pojęcie τ -topologii wprowadzone w [[18](#)]. Rozpatrzmy rzeczywistą, ośrodkową przestrzeń Hilberta $(X, \|\cdot\|)$ i założmy, że ma ona rozkład ortogonalny $X = X^+ \oplus X^-$. Wówczas każdy element $u \in X$ można zapisać jednoznacznie jako $u = u^+ + u^-$, gdzie $u^\pm \in X^\pm$. Niech $(e_k)_{k=0}^\infty$ będzie zupełnym układem ortonormalnym w przestrzeni X^- . Wówczas na X określamy nową normę jako

$$\|u\| := \max \left\{ \|u^+\|, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} |\langle u^-, e_k \rangle| \right\},$$

zaś topologię generowaną przez $\|\cdot\|$ będziemy oznaczać przez τ . Wówczas zachodzą następujące nierówności

$$\|u^+\| \leq \|u\| \leq \|u\|,$$

zaś dla ciągów ograniczonych $(u_n) \subset X$ mamy następującą równoważność (por. [[18](#), Remark 2.1(iii)])

$$u_n \xrightarrow{\tau} u \iff u_n^+ \rightarrow u^+ \text{ oraz } u_n^- \rightarrow u^-.$$

Niech $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie nieliniowym funkcjonałem. Dla $u \in X \setminus X^-$ oraz $R > r > 0$ wprowadzamy zbiory

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_r^+ &:= \{u^+ \in X^+ : \|u^+\| = r\} \\ M(u) &:= \{tu + v^- : v^- \in X^-, t \geq 0, \|tu + v^-\| \leq R\}. \end{aligned}$$

Wówczas $M(u) \subset \mathbb{R}_+ u^+ \oplus X^-$ oraz

$$\partial M(u) = \{v^- \in X^- : \|v^-\| \leq R\} \cup \{tu + v^- : v^- \in X^-, t > 0, \|tu + v^-\| = R\}.$$

Zakładamy, że

(A1) $\mathcal{J}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\mathcal{J}(0) = 0$,

(A2) $\mathcal{J}'$ jest ciągowo słabo-słabo* ciągła (tzn. jeśli $u_n \rightharpoonup u$, to $\mathcal{J}'(u_n) \rightarrow \mathcal{J}'(u)$).

Niech $\mathcal{P} \subset X \setminus X^-$ będzie zbiorem niepustym. Zakładamy dodatkowo, że

(A3) istnieją $\delta > 0$ oraz $r > 0$ takie, że dla każdego $u \in \mathcal{P}$ istnieje promień $R = R(u) > r$, dla których

$$\inf_{\mathcal{S}_r^+} \mathcal{J} > \max \left\{ \sup_{\partial M(u)} \mathcal{J}, \sup_{\|v\| \leq \delta} \mathcal{J}(v) \right\}.$$

Niech $I := [0, 1]$, $A \subset X$ oraz $h : A \times I \rightarrow X$. Rozważamy następujące założenia

(h1) h jest τ -ciągła, tzn. $h(v_n, t_n) \xrightarrow{\tau} h(v, t)$, o ile $v_n \xrightarrow{\tau} v$ oraz $t_n \rightarrow t$;

(h2) $h(u, 0) = u$ dla $u \in A$;

(h3) $\mathcal{J}(u) \geq \mathcal{J}(h(u, t))$ dla $(u, t) \in A \times I$;

(h4) dla dowolnego $(u, t) \in A \times I$ istnieje otwarte (w przestrzeni produktowej $(X, \tau) \times (I, |\cdot|)$) otoczenie $W \subset X \times I$ punktu (u, t) takie, że $\{v - h(v, s) : (v, s) \in W \cap (A \times I)\}$ jest zawarty w podprzestrzeni X skończonego wymiaru.

Mamy wówczas następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10 ([H1], Theorem 2.1)]. *Przypuśćmy, że $\mathcal{J}$ spełnia (A1)–(A3). Wówczas istnieje ciąg $(u_n) \subset X$ taki, że*

$$\sup_n \mathcal{J}(u_n) \leq c, \quad (1 + \|u_n\|)\mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0 \text{ w } X^*, \quad \inf_n \|u_n\| \geq \frac{\delta}{2},$$

gdzie

$$c := \inf_{u \in \mathcal{P}} \inf_{h \in \Gamma(u)} \sup_{u' \in M(u)} \mathcal{J}(h(u', 1)) \geq \inf_{\mathcal{S}_r^+} \mathcal{J} > 0$$

oraz

$$\Gamma(u) := \{h \in \mathcal{C}(M(u) \times I) : h \text{ spełnia (h1)–(h4)}\} \neq \emptyset.$$

Zauważmy, że znajdujemy ciąg Cerami o dodatkowej własności $\inf_n \|u_n\| \geq \frac{\delta}{2}$, która pozwoli potem (po zastosowaniu odpowiedniej translacji) znaleźć nietrywialną słabą granicę.

Wprowadźmy dodatkowo rozmaitość Nehariego-Pankova

$$(14) \quad \mathcal{N} := \{u \in X \setminus X^- : \mathcal{J}'(u)(u) = 0, \mathcal{J}'(u)(v) = 0 \text{ for all } v \in X^-\}$$

oraz jej podzbiór $\mathcal{N}_{\mathcal{P}} := \mathcal{N} \cap \mathcal{P}$. Aby porównać moc porównać poziom c otrzymany w Twierdzeniu 10 wprowadzamy dodatkowe założenie

(A4) dla dowolnego $u \in \mathcal{N}_{\mathcal{P}}$, $v \in X^-$ oraz $t \geq 0$ zachodzi $\mathcal{J}(u) \geq \mathcal{J}(tu + v)$.

Wówczas, jeżeli dodatkowo (A4) jest spełnione, to zachodzi nierówność $c \leq \inf_{\mathcal{N}_{\mathcal{P}}} \mathcal{J}$ (por. [(H1), Theorem 2.1]). W przypadku, gdy $g \not\equiv 0$, nie jest jasne, czy założenie (A4) jest spełnione. Jednak, gdyby $g \equiv 0$ w (11), to można sprawdzić, że (A4) zachodzi z $\mathcal{P} = X^+ \setminus \{0\}$ i możemy uzyskać rozwiązanie na poziomie $\inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J}$, czyli tzw. *rozwiązanie w stanie podstawowym* oraz uzyskać wyniki znane wcześniej w literaturze.

Jeżeli (F1)–(F4), (G1)–(G3), to funkcjonal wariacyjny spełnia również warunki (A1)–(A3), o ile $\lambda > 0$ jest dostatecznie mała. Aby uzyskać ograniczonność ciągów Cerami musimy dodatkowo założyć (F5) oraz, że $\rho > 0$ w (F5) jest dostatecznie małe (por. [(H1), Lemma 5.1]). Następnie wykorzystując odpowiedni wariant lematu o koncentracji zwartości (por. [30, Corollary 3.2, Remark 3.3], [(H1), Proposition 6.2]) znajdujemy nietrywialną słabą granicę.

Część ta ma swoją naturalną kontynuację w pracach (P10) (zastosowanie w przypadku wektorowym, do układów hamiltonowskich), (P13) (wielokrotność rozwiązań).

4.3. Zagadnienia znormalizowane

Rozpatrzmy teraz problem (9) z $V \equiv 0$. Oznaczmy

$$\mathcal{S} := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \rho \right\},$$

zaś przestrzeń $H^1(\mathbb{R}^N)$ jest wyposażona w standardową normę $\|u\| = (|\nabla u|_2^2 + |u|_2^2)^{1/2}$. Rozwiązania (9) są wówczas punktami krytycznymi funkcjonau $J : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$ danego wzorem

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx$$

na zbiorze ograniczeń $\mathcal{S} \cap H^1(\mathbb{R}^N)$, gdzie $G(u) := \int_0^u g(s) ds$. Wówczas λ w (9) jest mnożnikiem Lagrange’a odpowiadającym ograniczeniu $\mathcal{S}$.

Wprowadzamy wykładnik $2_* := 2 + \frac{4}{N} < 2^*$, który jest znany w literaturze jako wykładnik L^2 -krytyczny. W przypadku nieliniowości potęgowej $G(u) = \frac{1}{p}|u|^p$, jeżeli $2 < p < 2_*$, to funkcjonal jest ograniczony z dołu na $\mathcal{S} \cap H^1(\mathbb{R}^N)$. Nie jest to prawdą, gdy $p > 2_*$, więc potrzebujemy dodatkowego zbioru ograniczeń, na którym funkcjonal J będzie ograniczony z dołu.

Przy odpowiednich założeniach, wszystkie rozwiązania (9) należą do $W_{loc}^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ dla $q < \infty$ oraz spełniają tożsamość Phożaev’a

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u) - \frac{\lambda}{2} u^2 dx.$$

Oczywiście spełniają one także tożsamość Nehariego

$$J'(u)(u) + \lambda \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = 0.$$

Biorąc kombinację liniową obu tożsamości (w taki sposób, aby wyrugować λ) otrzymujemy

$$M(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx = 0,$$

gdzie $H(u) := g(u)u - 2G(u)$. Zatem wszystkie nietrywialne rozwiązania leżą w zbiorze

$$\mathcal{M} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : M(u) = 0\}.$$

Wprowadźmy dodatkowo oznaczenie

$$\mathcal{D} := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx \leq \rho \right\}.$$

Niech $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Będziemy pisać $f_1 \preceq f_2$, o ile $f_1(\xi) \leq f_2(\xi)$ dla wszystkich $\xi \in \mathbb{R}$ oraz dla dowolnej liczby $\delta > 0$ istnieją punkty ξ_1, ξ_2 takie, że $|\xi_i| < \delta$, $\xi_1 \xi_2 < 0$ i $f_1(\xi_i) < f_2(\xi_i)$. Nierówność $f_1 \preceq f_2$ charakteryzuje następujący lemat.

Lemat 11 ([H5], Lemma 2.1). *Niech $f_1, f_2 \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ będą takie, że $f_1(s) \leq f_2(s)$ oraz $|f_1(s)| + |f_2(s)| \lesssim s^2 + |s|^{2^*}$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$. Wówczas $f_1 \preceq f_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_1(u) - f_2(u) dx < 0$$

dla wszystkich $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$.

Możemy teraz wprowadzić założenia, przy których pracujemy.

(A1) g oraz $h := H'$ są ciągłe oraz

$$|h(s)| \lesssim |s| + |s|^{2^*-1} \quad \text{dla wszystkich } s \in \mathbb{R}.$$

(A2) $\eta := \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)}{|s|^{2^*}} < \infty$.

(A3) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{G(s)}{|s|^{2^*}} = \infty$.

(A4) $\lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{G(s)}{|s|^{2^*}} = 0$.

(A5) $2_* H(s) \leq h(s)s$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$.

(A6) $\frac{4}{N} G(s) \leq H(s) \leq (2^* - 2)G(s)$ dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$.

Głównym wynikiem pracy (H5) jest następujące twierdzenie, w którym $C_{N,p}$ oznacza najlepszą stałą w nierówności Gagliardo-Nirenberga

$$(15) \quad |u|_p \leq C_{N,p} |\nabla u|_2^\delta |u|_2^{1-\delta}, \quad \delta = N \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right).$$

Twierdzenie 12 ([H5], Theorem 1.1)]. *Przypuśćmy, że spełnione są założenia (A1)–(A6) oraz*

$$(16) \quad 2^* \eta C_{N,2^*}^2 \rho^{2/N} < 1.$$

Wówczas istnieje $u \in \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ taka, że

$$J(u) = \inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} J > 0.$$

Jeśli dodatkowo g jest nieparzysta, to u jest radialnie symetryczna. Przypuśćmy dodatkowo, że (A6, $\preceq$) jest spełnione.

- (a) *Jeśli $g'(s) = o(1)$ przy $s \rightarrow 0$, to $\inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} J = \inf_{\mathcal{S} \cap \mathcal{M}} J$ oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ jest znormalizowanym rozwiązaniem w stanie podstawowym równania (9). Ponadto, u jest radialnie symetryczna względem pewnej jednowymiarowej podprzestrzeni afinicznej V w $\mathbb{R}^N$.*
- (b) *Jeśli g jest nieparzysta, to $\inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} J = \inf_{\mathcal{S} \cap \mathcal{M}} J$ oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ jest dodatnim, radialnym rozwiązaniem w stanie podstawowym równania (9). Jeżeli $N \in \{3, 4\}$, wystarczy, aby zachodziła jedynie nierówność nieostra $H(s) \leq (2^* - 2)G(s)$ w (A6, $\preceq$).*

Warto zaznaczyć, że wcześniej nie było wiadomo, czy rozwiązania w stanie podstawowym są radialne. Ponadto nierówność (16) jest istotna tylko wtedy, gdy $\eta > 0$ w (A2), zaś gdy $\eta = 0$, jest ona automatycznie spełniona.

Do udowodnienia Twierdzenia 12 wprowadziliśmy zupełnie nową technikę minimalizacji na dysku. Jest ona ogólna i już stosowana w różnych kontekstach, m.in. w (H6), (P9), (P12), [9, 22, 26, 31, 32, 38]. Poniżej przedstawimy główne kroki nowego podejścia.

Krok 1. Pokazujemy, że $\inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} J > 0$. W tym kroku główną rolę odgrywa nierówność Gagliardo-Nirenberga (15) oraz nierówność (16).

Krok 2. J jest koercytywny na $\mathcal{D} \cap \mathcal{M}$. Wykorzystujemy tutaj głównie warunek (A5) oraz pokazujemy monotoniczność odwzorowania $u \mapsto H(u)/|u|^{2^*}$. Czerpiemy tutaj pewne pomysły z prac [16], [41], jednak nie wymagamy, aby istniało ciągłe rzutowanie z $H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ na $\mathcal{M}$ zachowujące normę L^2 .

Krok 3. Jeżeli $(u_n) \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ jest ciągiem minimalizującym, to z wykorzystaniem tzw. *profile decomposition* ([H5], Theorem 2.6], por. [30, Theorem 1.4]) znajdujemy ciąg translacji $(y_n) \subset \mathbb{R}^N$ taki, że $u_n(\cdot + y_n)$ zbiega słabo i prawie wszędzie do u będącego minimizerem J na $\mathcal{D} \cap \mathcal{M}$. Tutaj, standardowe, jednokrokowe podejście z wykorzystaniem lematu Lions'a o koncentracji zwartości wydaje się być niewystarczające, bowiem znaleziona granica może nie leżeć w zbiorze $\mathcal{M}$. Musimy tutaj znaleźć pełną (być może nieskończoną) dekompozycję (u_n) , aby znaleźć punkt graniczny znajdujący się w $\mathcal{M}$ (z dokładnością do translacji). Jeżeli g jest nieparzysta, to pracując na dysku $\mathcal{D}$ możemy łatwo użyć symetryzacji Schwartza oraz znaleźć nieujemny, radialny minimizer.

Krok 4. Następnie pokazujemy, że dla $v \in (\mathcal{D} \setminus \mathcal{S}) \cap \mathcal{M}$ zachodzi następująca, *kluczowa* nierówność

$$\inf_{\mathcal{S} \cap \mathcal{M}} J < J(v),$$

a zatem minimizer u dla J znaleziony na $\mathcal{D} \cap \mathcal{M}$ tak naprawdę znajduje się w zbiorze $\mathcal{S} \cap \mathcal{M}$.

Krok 5. Analiza mnożników Lagrange'a λ i μ , odpowiadających $\mathcal{S}$ i $\mathcal{M}$ odpowiednio, pozwala wykazać, że $\mu = 0$ i w konsekwencji u jest znormalizowanym rozwiązaniem w stanie podstawowym dla (9).

Dodatkowo, jako wniosek z naszego podejścia (z Kroku 4) wynika, że odwzorowanie $\rho \mapsto \inf_{\mathcal{M} \cap \mathcal{D}} J = \inf_{\mathcal{M} \cap \mathcal{S}} J$ jest ściśle malejące. Możemy sprawdzić także dodatkowe własności tego odwzorowania.

Propozycja 13 ([H5], Proposition 2.9). *Przypuśćmy, że spełnione są założenia Twierdzenia 12. Wówczas odwzorowanie $\rho \mapsto \inf_{\mathcal{M} \cap \mathcal{D}} J$ jest ciągłe, ściśle malejące oraz $\inf_{\mathcal{M} \cap \mathcal{D}} J \rightarrow \infty$ przy $\rho \rightarrow 0^+$. Jeśli ponadto $\eta = 0$ oraz*

$$\lim_{u \rightarrow 0} G(u)/|u|^{2^*} = \infty,$$

$$\text{to } \lim_{\rho \rightarrow \infty} \inf_{\mathcal{M} \cap \mathcal{D}} J = 0.$$

Rozpatrzmy teraz następujące uogólnienie (9)

$$(17) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u + \lambda u = g(u), & x = (y, z) \in \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K}, \\ \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx = \rho > 0, \end{cases}$$

gdzie $N \geq K \geq 2m$, $\mu \in \mathbb{R}$. Równanie (9) otrzymujemy, gdy $m = 1$ oraz $V(x) = \frac{\mu}{|y|^{2m}}$ jest osobliwym potencjałem.

W przypadku, gdy $\mu = 0$ i $N > 2m$ - przy odpowiednich założeniach na g - znajdujemy znormalizowane rozwiązanie w stanie podstawowym równania (17) (por. Twierdzenie 16 poniżej), tzn. u jest rozwiązaniem takim, że $J_0(u) = \inf_{\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{S}} J_0$, gdzie

$$\begin{aligned} J_0(u) &:= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx, \\ \mathcal{M}_0 &:= \left\{ u \in H^m(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 dx = \frac{N}{2m} \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \right\}, \\ \nabla^m u &:= \begin{cases} \Delta^{m/2} u & \text{gdy } m \text{ jest parzyste,} \\ \nabla \Delta^{(m-1)/2} u & \text{gdy } m \text{ jest nieparzyste.} \end{cases} \end{aligned}$$

Jeżeli dodatkowo $m = 1$, jest ono dodatnie i radialne.

W przypadku, gdy $\mu > 0$ sytuacja jest inna - nie istnieją znormalizowane rozwiązania w stanie podstawowym (tj. minimizery na zbiorze $\mathcal{M}_\mu \cap \mathcal{S}$ lub na $\mathcal{M}_\mu \cap \mathcal{D}$, gdzie $\mathcal{M}_\mu$ jest naturalnym rozszerzeniem zbioru $\mathcal{M}_0$ dla przypadku $\mu > 0$). Aby rozwiązać równanie (17) z $\mu \neq 0$ użyjemy skalowania operatora poliharmonicznego. Rozpatrzmy grupę $\mathcal{G}(K) := \mathcal{O}(K) \times \text{id}_{N-K}$ i następujący zbiór ograniczeń

$$\mathcal{M} := \left\{ u \in H_{\mathcal{G}(K)}^m(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u^2 dx = \frac{N}{2m} \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx \right\},$$

gdzie $H_{\mathcal{G}(K)}^m(\mathbb{R}^N)$ oznacza podprzestrzeń funkcji $\mathcal{G}(K)$ -niezmienniczych w $H^m(\mathbb{R}^N)$. Pojawia się jednak naturalne pytanie - czy rozwiązania problemu (17), które są $\mathcal{G}(K)$ -niezmiennicze, leżą w zbiorze $\mathcal{M}$? Tutaj także odgrywa rolę symetria grupy $\mathcal{G}(K)$ - w przypadku rozwiązań $\mathcal{G}(K)$ jesteśmy w stanie pokazać, że rozwiązania spełniają tożsamość Pohożaev'a, a w konsekwencji leżą w $\mathcal{M}$.

Określimy

$$X^m := \left\{ u \in H^m(\mathbb{R}^N) : |\mu| \int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|y|^{2m}} dx < +\infty \right\}$$

oraz $X_{\mathcal{G}(K)}^m := X^m \cap H_{\mathcal{G}(K)}^m(\mathbb{R}^N)$.

Pierwszy, istotny wynik pracy (H6) jest następujący.

Propozycja 14 ([H6], Proposition 2.5)]. *Niech $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą*

$$\begin{aligned} |\tilde{g}(u)| &\lesssim |s| + |s|^{2^*-1}, & \text{gdzie } N > 2m, \\ \text{dla dowolnych } q \geq 2 \text{ i } \alpha > \frac{N(2\pi)^N}{\omega_{N-1}} &\text{ zachodzi } |\tilde{g}(u)| \lesssim |s| + |s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), & \text{gdzie } N = 2m. \end{aligned}$$

Niech $u \in X_{\mathcal{G}(K)}^m$ będzie słabym rozwiązaniem równania

$$(-\Delta)^m u + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u = \tilde{g}(u).$$

Wówczas

$$\int_{\mathbb{R}^N} (N - 2m) \left(|\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u^2 \right) - 2N \tilde{G}(u) dx = 0,$$

$$\text{gdzie } \tilde{G}(u) := \int_0^u \tilde{g}(s) ds.$$

Wiedząc, że zachodzi powyższa tożsamość Pohożaev'a, możemy wykazać, że każde rozwiązanie $u \in X_{\mathcal{G}(K)}^m$ równania (17) należy do $\mathcal{M}$.

Znana jest następująca nierówność Hardy'ego - jeśli $K > 2m$, to

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{u^2}{|y|^{2m}} dx \leq \left(\frac{\Gamma\left(\frac{K-2m}{4}\right)}{2^m \Gamma\left(\frac{K+2m}{4}\right)} \right)^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 dx,$$

która sugeruje, aby wprowadzić następujące założenie na parametr μ

$$(18) \quad \mu > - \left(\frac{2^m \Gamma\left(\frac{K+2m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{K-2m}{4}\right)} \right)^2 \text{ jeśli } K > 2m \quad \text{lub} \quad \mu \geq 0 \text{ jeśli } K = 2m.$$

Zauważmy, że zachodzi wówczas nierówność

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u^2 dx \right)^{1/2} \geq \tau^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 dx \right)^{1/2},$$

gdzie τ jest określone jako

$$\tau := \begin{cases} 1 + \left(\frac{2^m \Gamma\left(\frac{K+2m}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{K-2m}{4}\right)} \right)^2 \mu, & \text{jeśli } \mu < 0, \\ 1, & \text{jeśli } \mu \geq 0. \end{cases}$$

Rozpatrzmy następujące założenia, gdzie przeddefiniowaliśmy $2_* := 2 + \frac{4m}{N}$ oraz $2^* := \frac{2N}{N-2m}$ z konwencją $2^* = +\infty$, gdy $N = 2m$.

(A1') g oraz $h := H'$ są ciągłe oraz

$$\begin{aligned} |g(s)| + |h(s)| &\lesssim |s| + |s|^{2^*-1}, & \text{gdy } N > 2m \\ \text{dla dowolnych } q \geq 2 \text{ i } \alpha &> \frac{N(2\pi)^N}{\omega_{N-1}} \\ \text{zachodzi } |g(s)| + |h(s)| &\lesssim |s| + |s|^{q-1}(e^{\alpha s^2} - 1), & \text{gdy } N = 2m \end{aligned}$$

dla wszystkich $s \in \mathbb{R}$.

$$(A2') \quad \eta := \limsup_{s \rightarrow 0} \frac{H(s)}{|s|^{2_*}} < \infty.$$

$$(A3') \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{G(s)}{|s|^{2_*}} = \infty.$$

$$(A4') \quad \begin{aligned} \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{|s|^{2^*-1}} &= 0, & \text{gdy } N > 2m, \\ \lim_{|s| \rightarrow \infty} \frac{g(s)}{e^{\alpha s^2}} &= 0 \text{ dla dowolnej } \alpha > 0, & \text{gdy } N = 2m. \end{aligned}$$

$$(A5') \quad 2_* H(s) \preceq h(s)s \text{ dla wszystkich } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$(A6') \quad 0 \preceq \frac{4}{N} G(s) \preceq H(s) \preceq (2^* - 2)G(s) \text{ dla wszystkich } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ przy czym ostatnią nierówność zakładamy tylko, gdy } N > 2m.$$

Ponadto w przypadku poliharmonicznym mamy także następującą nierówność Gagliardo-Nirenberga

$$(19) \quad |u|_p \leq C_{N,p} |\nabla^m u|_2^\delta |u|_2^{1-\delta}, \quad \delta := \frac{N}{m} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right).$$

Podążając opisaną wcześniej metodą - dowodząc nowej wersji twierdzenia o dekompozycji ciągów ograniczonych (w wersji poliharmonicznej z potencjałem osobliwym), por. [(H6), Theorem 4.7] - uzyskujemy następujące twierdzenie o istnieniu rozwiązań.

Twierdzenie 15 ([(H6), Theorem 3.2]). *Przypuśćmy, że spełnione są warunki (18), (A1')–(A6') oraz*

$$(20) \quad \frac{N}{2m} \eta C_{N,2_*}^{2_*} \rho^{\frac{2m}{N}} \tau^{-1} < 1.$$

Wówczas istnieją $\lambda > 0$ oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ takie, że

$$J(u) = \inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} J = \inf_{\mathcal{S} \cap \mathcal{M}} J > 0$$

oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ jest rozwiązaniem (17) w $X_{\mathcal{G}(K)}^m$. Jeśli dodatkowo g jest nieparzysta oraz $m = 1$, to u jest nieujemne.

Gdy $\mu = 0$, nie musimy rozważać symetrii grupy $\mathcal{G}(K)$ i możemy wówczas znaleźć znormalizowane rozwiązanie w stanie podstawowym przy założeniach Twierdzenia 15. Dokładniej, otrzymujemy następujące uogólnienie Twierdzenia 12.

Twierdzenie 16 ([H6], Theorem 3.2)]. *Przypuśćmy, że spełnione są warunki (A1')–(A6') oraz*

$$\frac{N}{2m} \eta C_{N,2*}^{2*} \rho^{\frac{2m}{N}} < 1.$$

Wówczas istnieją $\lambda > 0$ oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}_0$ takie, że

$$J_0(u) = \inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}_0} J_0 = \inf_{\mathcal{S} \cap \mathcal{M}_0} J_0 > 0$$

oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}_0$ jest rozwiązaniem w stanie podstawowym równania (17) z $\mu = 0$ w $H^m(\mathbb{R}^N)$. Jeśli dodatkowo g jest nieparzysta oraz $m = 1$, to u jest dodatnie i radialne.

Poniższe twierdzenie dodatkowo uzasadnia istotność symetrii $\mathcal{G}(K)$.

Twierdzenie 17 ([H6], Theorem 3.2)]. *Niech $N \geq K > 2m$, $\mu > 0$; przypuśćmy, że spełnione są warunki (18), (A1')–(A6') oraz*

$$\frac{N}{2m} \eta C_{N,2*}^{2*} \rho^{\frac{2m}{N}} \tau^{-1} < 1.$$

Wówczas nie istnieją minimizery następujących zagadnień

$$\begin{aligned} & \inf \left\{ J(u) : u \in H^m(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u^2 dx = \frac{N}{2m} \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx, u \in \mathcal{D} \right\}, \\ & \inf \left\{ J(u) : u \in H^m(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}, \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|y|^{2m}} u^2 dx = \frac{N}{2m} \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx, u \in \mathcal{S} \right\}. \end{aligned}$$

W szczególności (17) nie posiada znormalizowanych rozwiązań w stanie podstawowym w $H^m(\mathbb{R}^N)$.

Zauważmy, że gdy $N = 3$, $K = 2$, $\mu = 1$, $m = 1$, to równanie (17) ma ścisły związek z (6). Dokładniej, wykorzystując Twierdzenie 6 o równoważności słabych rozwiązań otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 18 ([H6], Theorem 3.2)]. *Niech f będzie dane przez $f(\alpha w) = g(\alpha)w$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $w \in \mathbb{R}^3$, $|w| = 1$, gdzie g spełnia (A1')–(A6') oraz (20). Wówczas istnieją $\lambda > 0$ oraz $\mathbf{U} \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{S}$ takie, że $(\lambda, \mathbf{U})$ jest słabym rozwiązaniem*

$$\begin{cases} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + \lambda \mathbf{U} = f(\mathbf{U}), & x \in \mathbb{R}^3, \\ \int_{\mathbb{R}^N} |\mathbf{U}|^2 dx = \rho \end{cases}$$

takim, że $E(\mathbf{U}) = \inf_{\mathcal{Q} \cap \mathcal{D}} E = \inf_{\mathcal{Q} \cap \mathcal{S}} E > 0$, gdzie

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &:= \{\mathbf{U} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : \mathbf{U} \text{ jest postaci (7)}\}, \\ H_{\mathcal{F}} &:= H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3) \cap \mathcal{F}, \\ E(\mathbf{U}) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{U}|^2 - F(\mathbf{U}) \, dx, \quad \mathbf{U} \in H_{\mathcal{F}}.\end{aligned}$$

Ponadto

$$\mathcal{Q} := \left\{ \mathbf{U} \in H_{\mathcal{F}} \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \times \mathbf{U}|^2 \, dx = \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{H}(\mathbf{U}) \, dx \right\},$$

gdzie $\overline{H}(\mathbf{U}) := f(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} - 2F(\mathbf{U})$ oraz $F(\mathbf{U}) := \int_0^1 f(t\mathbf{U}) \cdot \mathbf{U} \, dt$.

Część ta ma swoją kontynuację w pracach (P9), (P12).

4.4. Przejście graniczne w równaniach ułamkowych przy $s \rightarrow 1^-$

Rozpatrzmy następujące nielokalne zagadnienie typu Dirichleta

$$(21) \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$$

oraz jego lokalny odpowiednik

$$(22) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x, u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Powyżej $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ jest ograniczoną dziedziną (tj. zbiorem otwartym i spójnym) w $\mathbb{R}^N$ o ciągłym brzegu $\partial\Omega$, $N \geq 3$ oraz $1/2 < s < 1$ (gdzie $1/2$ jest wybrana dla ustalenia uwagi, gdyż będziemy zainteresowani $s \rightarrow 1^-$). Ponadto, potencjał V spełnia

$$V \in L^\infty(\Omega), \quad \inf_{\Omega} V > 0.$$

Zakładamy, że f spełnia następujące warunki.

(F1') $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego oraz istnieje liczba $p \in \left(2, \frac{2N}{N-1}\right)$ taka, że

$$|f(x, u)| \lesssim 1 + |u|^{p-1} \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R} \text{ oraz p.w. } x \in \Omega.$$

(F2') $f(x, u) = o(u)$ przy $u \rightarrow 0$, jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$.

(F3') $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{F(x, u)}{u^2} = +\infty$ jednostajnie ze względu na $x \in \Omega$, gdzie $F(x, u) := \int_0^u f(x, t) \, dt$.

(F4') Odwzorowanie $u \mapsto f(x, u)/u$ jest ściśle rosnące na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$ dla p.w. $x \in \Omega$.

Wiadomo, że przy (F1')–(F4') istnieje rozwiązanie w stanie podstawowym $u_s \in H_0^s(\Omega)$ dla problemu (21) oraz rozwiązanie w stanie podstawowym $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ dla problemu (22) (por. [(H3), Proposition 3.2]). Poprzez rozwiązanie w stanie podstawowym rozumiemy rozwiązanie będące minimizerem odpowiedniego funkcjonału energii na odpowiadającej rozmaitości Nehariego.

Twierdzenie 19 ([(H3), Theorem 1.2]). *Istnieje ciąg $(s_n) \subset (1/2, 1)$ taki, że $s_n \rightarrow 1$ przy $n \rightarrow \infty$ oraz u_{s_n} zbiega w $L^2(\Omega)$ do $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ będącego rozwiązaniem w stanie podstawowym dla problemu (22).*

Uwaga 20. *Można pokazać, że zbieżność u_{s_n} do u_0 mamy w $L^\nu(\Omega)$ dla $2 \leq \nu < \frac{2N}{N-1}$.*

Powyższy wynik udało się uzyskać poprzez dokładną analizę zachowywania się stałych m.in. w ułamkowych nierównościach Sobolewa, przy $s \rightarrow 1^-$. Rozważając ciąg (u_{s_n}) , ważna jest jego *jednostajna ograniczoność*, tj. ograniczoność ciągu norm $\|u_{s_n}\|_{s_n}$, gdzie $\|\cdot\|_{s_n}$ jest normą w ułamkowej przestrzeni Sobolewa. Pozwala to wówczas na zastosowanie wyniku Bourgain-Brezisa-Mironescu [7, Corollary 7] i uzyskanie granicy będącej w przestrzeni $H_0^1(\Omega)$.

Przejdźmy zatem do problemu trudniejszego, czyli rozważanego na całej przestrzeni $\mathbb{R}^N$. Dokładniej, rozpatrujemy problem

$$(23) \quad \begin{cases} (-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^s(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

oraz

$$(24) \quad \begin{cases} -\Delta u + V(x)u = f(x, u), & x \in \mathbb{R}^N, \\ u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Analogicznie jak poprzednio rozpatrujemy $N \geq 3$, $1/2 < s < 1$ oraz potencjał V spełniający

$$V \in L^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \inf_{\mathbb{R}^N} V > 0, \quad V \text{ jest } \mathbb{Z}^N\text{-okresowy.}$$

Nieliniowość f spełnia warunki analogiczne do (F1')–(F4'), tj.

(F1'') $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego, $\mathbb{Z}^N$ -okresową ze względu na $x \in \mathbb{R}^N$ oraz istnieje liczba $p \in \left(2, \frac{2N}{N-1}\right)$ taka, że

$$|f(x, u)| \lesssim 1 + |u|^{p-1} \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R} \text{ oraz p.w. } x \in \Omega.$$

(F2'') $f(x, u) = o(u)$ przy $u \rightarrow 0$, jednostajnie ze względu na $x \in \mathbb{R}^N$.

(F3'') $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{F(x, u)}{u^2} = +\infty$ jednostajnie ze względu na $x \in \mathbb{R}^N$, gdzie $F(x, u) := \int_0^u f(x, t) dt$.

(F4'') Odwzorowanie $u \mapsto f(x, u)/u$ jest ściśle rosnące na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$.

Przy powyższych założeniach uzyskujemy następujący wynik.

Twierdzenie 21 ([H4], Theorem 1.2)]. Niech $u_s \in H^s(\mathbb{R}^N)$ będzie rozwiązaniem w stanie podstawowym problemu (23). Istnieje ciąg $(s_n) \subset (1/2, 1)$ taki, że $s_n \rightarrow 1$ przy $n \rightarrow \infty$ oraz ciąg translacji $(z_n) \subset \mathbb{Z}^N$ takie, że $u_{s_n}(\cdot - z_n)$ zbiega w $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ do $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^N)$ będącego rozwiązaniem w stanie podstawowym dla problemu (24).

Przy warunkach (F1'')–(F4'') wiadomo, że istnieją rozwiązania w stanie podstawowym zarówno dla zagadnienia lokalnego (D1), [41], jak i nielokalnego (D2), [39]. Tutaj jednak sama analiza stałych i ich zależności od s nie jest wystarczająca, bowiem nie dysponujemy wynikiem typu [7, Corollary 7]. Niech $\|\cdot\|_s$ oznacza klasyczną normę w przestrzeni $H^s(\mathbb{R}^N)$. Najpierw dowodzimy jednostajnej wersji lematu o koncentracji zwartości Lions'a.

Twierdzenie 22 ([H4], Theorem 3.1)]. Niech $r > 0$, $2 \leq q < \frac{2N}{N-1}$ oraz $N \geq 3$. Niech ponadto $(s_n) \subset (1/2, 1)$ oraz $u_{s_n} \in H^{s_n}(\mathbb{R}^N)$ spełniają

$$\|u_{s_n}\|_{s_n} \leq M,$$

gdzie M nie zależy od s_n . Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in \mathbb{R}^N} \int_{B(y,r)} |u_n|^q dx = 0,$$

to $u_n \rightarrow 0$ w $L^p(\mathbb{R}^N)$ dla wszystkich $p \in \left(2, \frac{2N}{N-1}\right)$.

Drugim ważnym wynikiem jest *lokalna jednostajna zwartość* włożeń Sobolewa. Sama analiza stałych oraz zastosowanie [7, Corollary 7] dałoby rezultat z granicą w przestrzeni $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Co istotne, jesteśmy w stanie pokazać, że granica, którą otrzymujemy, jest w przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Twierdzenie 23 ([H4], Theorem 3.2)]. Niech $(s_n) \subset (1/2, 1)$ będzie taki, że $s_n \rightarrow 1^-$ oraz $u_{s_n} \in H^{s_n}(\mathbb{R}^N)$ spełnia

$$\|u_{s_n}\|_{s_n} \leq M,$$

gdzie M nie zależy od s_n . Wówczas ciąg (u_{s_n}) zbiega, z dokładnością do podciągu, do pewnej $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ w przestrzeni $L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ dla każdego $q \in [2, 2N/(N-1))$ oraz punktowo prawie wszędzie.

4.5. Opis indywidualnego wkładu w poszczególne publikacje

(H1) F. Bernini, **B. Bieganowski**: *Generalized linking-type theorem with applications to strongly indefinite problems with sign-changing nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations, Vol. **61**, Article number: 182 (2022).

Jestem głównym pomysłodawcą pracy (H1), która powstała w trakcie stażu doktoranckiego F. Berniniego na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu. Główną częścią pracy jest udowodnione, w znacznej mierze, przeze mnie twierdzenie abstrakcyjne o istnieniu ciągu Cerami. Sprawdziłem także, że w zaproponowanym settingu, całkowita

energia elektromagnetyczna $\mathcal{L}(t)$ jest stała i niezależna od czasu t . Wspólnie z F. Berninim zaproponowaliśmy założenia na f i g oraz sprawdziliśmy, że spełnione są założenia twierdzenia abstrakcyjnego, zaproponowaliśmy przykłady nieliniowości f i g spełniających te założenia. Sprawdziliśmy, że ciągi Cerami są ograniczone i wykazaliśmy istnienie nietrywialnego rozwiązania. Jestem autorem korespondencyjnym wspomnianej pracy.

- (H2) **B. Bieganowski**: *Solutions to a nonlinear Maxwell equation with two competing nonlinearities in $\mathbb{R}^3$* ,
Bull. Pol. Acad. Sci. Math. **69** (2021), p. 37–60.

Jestem jedynym autorem pracy (H2).

- (H3) **B. Bieganowski**, S. Secchi: *Non-local to local transition for ground states of fractional Schrödinger equations on bounded domains*,
Topol. Methods Nonlinear Anal., Vol. 57, No. 2 (2021), p. 413–425.

Jestem głównym pomysłodawcą pracy (H3). Bezpośrednio po ukończeniu doktoratu, w którym zajmowałem się także zagadnieniem istnienia stanów podstawowych dla równań nieliniowych z ułamkowym laplasjanem, pomyślałem o sprawdzeniu, co się dzieje z rozwiązaniami równania nieliniowego gdy ułamek laplasjanu zbiega do 1. Pomysł ten przedstawiłem swojemu współpracownikowi - S. Secchi, który wykazał zainteresowanie współpracą nad tym zagadnieniem. Zaproponowałem, aby w pierwszej kolejności pracować w przypadku ograniczonej dziedziny. Wówczas z wykorzystaniem wyniku z pracy [7] oraz po przeanalizowaniu zachowaniu stałych występujących m.in. w definicji ułamkowego laplasjanu względem s wykazaliśmy, że rozwiązania w stanie podstawowym zbiegają w L^2 , z dokładnością do translacji, do rozwiązania problemu lokalnego.

- (H4) **B. Bieganowski**, S. Secchi: *Non-local to local transition for ground states of fractional Schrödinger equations on $\mathbb{R}^N$* ,
J. Fixed Point Theory Appl. **22**, 76 (2020).

Praca (H4) jest naturalną kontynuacją pracy (H3). Do ważnych elementów pracy należą wykazane przez S. Secchi - jednostajna wersja lematu Lionsa oraz, wykazane przeze mnie - twierdzenie o jednostajnych włożeniach Sobolewa. Część dotyczącą zbieżności rozwiązań w L^2_{loc} , z dokładnością do translacji, zweryfikowaliśmy wówczas wspólnie z S. Secchi analogicznie do wyniku z (H3).

- (H5) **B. Bieganowski**, J. Mederski: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*,
J. Funct. Anal., Vol. **280**, Issue 11 (2021), 108989.

Do współpracy nad zagadnieniem znormalizowanym zostałem zaproszony przez J. Mederskiego, który poszukiwał nowego podejścia wariacyjnego po znalezieniu błędu w pracy [5] (por. corrigendum: [6]). J. Mederski zaproponował minimalizację na dysku w L^2 (zamiast na sferze) i zweryfikował swój pomysł w przypadku nieliniowości potęgowej, ponadkrytycznej. Po dołączeniu do projektu, wspólnie wypracowaliśmy założenia na ogólną nieliniowość, a także rozszerzyliśmy podejście również na przypadek nieliniowości o wzroście krytycznym w zerze przy założeniu, że zadana norma L^2 rozwiązania jest

dostatecznie mała. Zweryfikowałem także własności tzw. *ground state energy map* na dysku, tj. odwzorowania $\rho \mapsto \inf_{\mathcal{M} \cap \mathcal{D}_\rho} J$.

- (H6) **B. Bieganowski**, J. Mederski, J. Schino: *Normalized solutions to at least mass critical problems: singular polyharmonic equations and related curl-curl problems*, J. Geom. Anal., Vol. **34**, Article number: 322 (2024).

Po sukcesie osiągniętym w pracy (H5) zaproponowałem, aby nowe podejście minimalizacji na dysku rozszerzyć do szerszej klasy operatorów. J. Mederski oraz J. Schino (w swojej rozprawie doktorskiej [37]) zauważyli, że taką symetrię jak laplasjan ma także potencjał singularny typu Hardy’ego. Zaproponowałem, aby w (H5) zbadać równania z ogólniejszym operatorem - operatorem poliharmonicznym $(-\Delta)^m$ z potencjałem postaci $\frac{\mu}{|y|^{2m}}$.

Szczególny przypadek operatora $-\Delta + \frac{1}{|(x_1, x_2)|^2}$ pojawia się przy poszukiwaniu rozwiązań cylindrycznie symetrycznych dla równań z operatorem curl-curl ([37]). Wspólnie z J. Schino (którego w tym miejscu wkład jest większy, gdyż znalazł odpowiednie wzory na całkowanie przez części oraz znalazł pierwszy, nie w pełni poprawny, dowód zbieżności do zera całki powierzchniowej pochodzącej od wyrazu osobliwego) wykazaliśmy tożsamość Pohožaeva przy założeniu, że poszukujemy rozwiązań $\mathcal{G}(K)$ -niezmienniczych. Zaproponowałem także, aby zweryfikować, czy wspomniana symetria jest niezbędna. J. Mederski zweryfikował, że jest to prawda, gdyż w przypadku braku symetrii problemy minimalizacji na sferze oraz na dysku nie mają rozwiązań. Ponadto wraz z J. Schino zaadoptowaliśmy technikę z (H5) do przypadku $N = 2m$ oraz sprawdziliśmy, jakie wyniki o istnieniu jesteśmy w stanie uzyskać w przypadku równań z operatorem curl-curl uzyskując uogólnienie wyniku o istnieniu z [37]. Jestem autorem korespondencyjnym wspomnianej pracy.

4.6. Pozostałe osiągnięcia naukowo-badawcze

Prace niewchodzące w skład rozprawy doktorskiej

- (P1) **B. Bieganowski**, T. Cieślak, K. Fujie, T. Senba: *Boundedness of solutions to the critical fully parabolic quasilinear one-dimensional Keller-Segel system*, Math. Nachr., Vol. **292**, Issue 4 (2019), p. 724–732,
- (P2) **B. Bieganowski**: *Systems of coupled Schrödinger equations with sign-changing nonlinearities via classical Nehari manifold approach*, Complex Var. Elliptic Equ., Vol. **64**, Issue 7 (2019), p. 1237–1256,
- (P3) F. Bernini, **B. Bieganowski**, S. Secchi: *Semirelativistic Choquard equations with singular potentials and general nonlinearities arising from Hartree-Fock theory*, Nonlinear Anal., Vol. **217** (2022), 112738,
- (P4) **B. Bieganowski**: *On-line interval graphs coloring - modification of the First-Fit algorithm and its performance ratio*, Discrete Math. Algorithms Appl., Vol. **14**, No. 08, 2250042 (2022),

- (P5) **B. Bieganowski**, T. Cieślak, J. Siemianowski: *Magnetostatic levitation and two related linear PDEs in unbounded domains*,
Rep. Math. Phys., Vol. **92**, Issue 2 (2023), p. 135–144,
- (P6) **B. Bieganowski**, A. Konysz: *Elliptic problems with mixed nonlinearities and potentials singular at the origin and at the boundary of the domain*,
J. Fixed Point Theory Appl. **25**, 83 (2023),
- (P7) **B. Bieganowski**, T. Cieślak, J. Siemianowski: *Time-zero limits of Kaden's spirals and 2D Euler*,
zaakceptowana w Lecture Notes in Nonlinear Analysis, arXiv:2305.15356,
- (P8) **B. Bieganowski**, A. Konysz, J. Mederski: *Semiclassical states for the curl-curl problem*,
Nonlinear Analysis, Vol. **255** (2025), 113756,
- (P9) **B. Bieganowski**, P. d'Avenia, J. Schino: *Existence and dynamics of normalized solutions to Schrödinger equations with generic double-behaviour nonlinearities*,
wysłana, arXiv:2405.05194,
- (P10) F. Bernini, **B. Bieganowski**, D. Strzelecki: *Note on homoclinic solutions to nonautonomous Hamiltonian systems with sign-changing nonlinear part*,
zaakceptowana w Topol. Methods Nonlinear Anal., arXiv:2405.20908,
- (P11) L. Baldelli, **B. Bieganowski**, J. Mederski: *Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations*,
wysłana, arXiv:2406.03910,
- (P12) **B. Bieganowski**, O.H. Miyagaki, J. Schino: *Normalized solutions to polyharmonic equations with Hardy-type potentials and exponential critical nonlinearities*,
wysłana, arXiv:2410.05885,
- (P13) F. Bernini, **B. Bieganowski**, D. Strzelecki: *Multiplicity of critical orbits to nonlinear, strongly indefinite functionals with sign-changing nonlinear part*,
wysłana, arXiv:2410.13315.

Prace wchodzące w skład rozprawy doktorskiej

- (D1) **B. Bieganowski**, J. Mederski: *Nonlinear Schrödinger equations with sum of periodic and vanishing potentials and sign-changing nonlinearities*,
Commun. Pure Appl. Anal., Vol. **17**, Issue 1 (2018), p. 143–161,
- (D2) **B. Bieganowski**: *Solutions of the fractional Schrödinger equation with a sign-changing nonlinearity*,
J. Math. Anal. Appl., Vol. **450**, Issue 1 (2017), p. 461–479,
- (D3) **B. Bieganowski**: *The fractional Schrödinger equation with Hardy-type potentials and sign-changing nonlinearities*,
Nonlinear Anal., Vol. **176** (2018), p. 117–140,

- (D4) **B. Bieganowski**, S. Secchi: *The semirelativistic Choquard equation with a local nonlinear term*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Vol. **37**, no 7 (2019), p. 4279–4302,
- (D5) **B. Bieganowski**, J. Mederski: *Note on semiclassical states for the Schrödinger equation with nonautonomous nonlinearities*, Appl. Math. Lett., Vol. **88** (2019), p. 149–155,
- (D6) **B. Bieganowski**, J. Mederski: *Bound states for the Schrödinger equation with mixed-type nonlinearities*, Indiana Univ. Math. J. **71** No. 1 (2022), p. 65–92.

4.7. Omówienie pozostałych prac

4.7.1. Problemy wariacyjne z nieliniowościami zmieniającymi znak

Rozpatrzmy funkcjonal $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$ określony na przestrzeni Hilberta $(X, \|\cdot\|)$. W pracach (D1), (D2), (D3), (D4) rozpatrywaliśmy problemy wariacyjne o podobnej strukturze funkcjonału. Dokładniej, niech funkcjonal wariacyjny będzie postaci

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \mathcal{I}(u),$$

gdzie $\mathcal{I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ oraz $\mathcal{I}(0) = 0$. Wprowadzamy wówczas rozmaitość Neharięgo jako

$$\mathcal{N} := \{u \in X \setminus \{0\} : \mathcal{J}'(u)(u) = 0\}.$$

W pracy (D1) wykazaliśmy następujące twierdzenie, stosowane potem m.in. w (D2), (D3), (D4).

Twierdzenie 24 ([D1], Theorem 2.1). *Przypuśćmy, że*

(J1) *istnieje promień $r > 0$ taki, że $\inf_{\|u\|=r} \mathcal{J}(u) > 0$;*

(J2) $\frac{\mathcal{I}(t_n u_n)}{t_n^2} \rightarrow \infty$, *jeśli $t_n \rightarrow \infty$ oraz $u_n \rightarrow u \neq 0$;*

(J3) *dla wszystkich $t \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ oraz $u \in \mathcal{N}$ zachodzi nierówność*

$$\frac{t^2 - 1}{2} \mathcal{I}'(u)(u) - \mathcal{I}(tu) + \mathcal{I}(u) < 0;$$

(J4) $\mathcal{J}$ *jest koercytywny na $\mathcal{N}$.*

Wówczas $c := \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J} > 0$ oraz istnieje ciąg Palais-Smale’a dla $\mathcal{J}$ na poziomie c w $\mathcal{N}$, tzn. ciąg $(u_n) \subset \mathcal{N}$ taki, że

$$\mathcal{J}(u_n) \rightarrow c, \quad \mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0.$$

Jest to twierdzenie pozwalające na badanie problemów dodatnio określonych z nieliniowościami zmieniającymi znak, gdyż założenia nie wymagają, aby $\mathcal{I}(u) \geq 0$. W szczególności, jeśli $X = H^1(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, możemy rozpatrywać na przykład

$$\mathcal{I}(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{p} |u|^p - \frac{1}{q} |u|^q dx,$$

gdzie $2 < q < p < 2^*$.

W (D1) badaliśmy istnienie rozwiązań dla zagadnienia postaci

$$(25) \quad -\Delta u + V(x)u = f(x, u) - \Gamma(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

gdzie $N \geq 3$, $q \in [2, 2^*)$, zaś V spełnia założenia

$$(V.1.1) \quad V = V_{per} + V_{loc}, \text{ gdzie } V_{per} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ jest } \mathbb{Z}^N\text{-okresowy, zaś } V_{loc} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/2}(\mathbb{R}^N) \\ \text{spełnia } \lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{loc}(x) = 0,$$

$$(V.1.2) \quad \inf \sigma(-\Delta + V(x)) > 0.$$

Jeżeli $V_{loc} \equiv 0$, to wiadomo, że widmo $\sigma(-\Delta + V(x))$ składa się tylko z części ciągłej i jest sumą odcinków domkniętych. W przypadku, gdy $V_{loc} \not\equiv 0$, w $\sigma(-\Delta + V(x))$ mogą pojawić się wartości własne.

Zakładamy, że Γ spełnia

$$(\Gamma) \quad \Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ jest } \mathbb{Z}^N\text{-okresowa oraz } \text{ess inf}_{\mathbb{R}^N} \Gamma > 0.$$

Ponadto rozważamy następujące założenia na f .

$$(F.1.1) \quad f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ jest funkcją Carathéodory'ego, } \mathbb{Z}^N\text{-okresową ze względu na } x \in \mathbb{R}^N \\ \text{oraz istnieje } p \in (q, 2^*) \text{ taka, że}$$

$$|f(x, u)| \lesssim 1 + |u|^{p-1} \quad \text{dla } u \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N.$$

$$(F.1.2) \quad f(x, u) = o(u) \text{ przy } u \rightarrow 0, \text{ jednostajnie ze względu na } x \in \mathbb{R}^N.$$

$$(F.1.3) \quad F(x, u)/|u|^q \rightarrow \infty \text{ przy } |u| \rightarrow \infty, \text{ jednostajnie ze względu na } x \in \mathbb{R}^N, \text{ gdzie } F(x, u) = \\ \int_0^u f(x, s) ds.$$

$$(F.1.4) \quad u \mapsto f(x, u)/|u|^{q-1} \text{ jest ściśle rosnąca na } (-\infty, 0) \cup (0, \infty).$$

Przy powyższych warunkach funkcjonal $\mathcal{J} : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) - \frac{1}{q} \Gamma(x)|u|^q dx$$

spełnia warunki (J1)–(J4). Po dokonaniu skończonej dekompozycji znalezionej ciągu Palais-Smale'a ([D1], Theorem 4.1)] jesteśmy w stanie wykazać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 25 ([D1], Theorem 1.1)]. *Przypuśćmy, że spełnione są warunki (V.1.1), (V.1.2), (Γ), (F.1.1)–(F.1.4). Jeżeli $V_{loc}(x) < 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ lub $V_{loc} \equiv 0$, to (25) posiada rozwiązanie $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ w stanie podstawowym, tj. $\mathcal{J}(u) = \inf_N \mathcal{J}$. Ponadto u jest ciągła oraz istnieje stała $\alpha > 0$ taka, że*

$$|u(x)| \lesssim \exp(-\alpha|x|) \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}^N.$$

Założenie o znaku V_{loc} jest prawie optymalne, bowiem możemy wykazać następujący fakt o nieistnieniu rozwiązań.

Twierdzenie 26 ([[\(D1\)](#), Theorem 1.2]). *Przypuśćmy, że [\(V.1.1\)](#), $\inf \sigma(-\Delta + V_{per}) > 0$, [\(T\)](#), [\(F.1.1\)](#)–[\(F.1.4\)](#). Jeżeli $V_{loc}(x) > 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$, to [\(25\)](#) nie posiada rozwiązań w stanie podstawowym, tj. takich, że $\mathcal{J}(u) = \inf_N \mathcal{J}$.*

Rozpatrzmy ułamkowy odpowiednik równania [\(25\)](#)

$$(26) \quad (-\Delta)^s u + V(x)u = f(x, u) - \Gamma(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

z analogicznym zestawem założeń na część nieliniową, przy czym w [\(F.1.1\)](#) wykładnik 2^* zastępujemy przez jego nielokalny odpowiednik $2_s^* := \frac{2N}{N-2s}$ i rozpatrujemy wymiary $N > 2s$.

Będziemy rozpatrywać następujące założenia na potencjał V .

$$(V.1.3) \quad V = V_{per} + V_{loc}, \text{ gdzie } V_{per} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ jest } \mathbb{Z}^N\text{-okresowy, zaś } V_{loc} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^{N/(2s)}(\mathbb{R}^N) \\ \text{spełnia } \lim_{|x| \rightarrow \infty} V_{loc}(x) = 0.$$

$$(V.1.4) \quad \text{ess inf}_{\mathbb{R}^N} V > 0.$$

$$(V.1.5) \quad V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \text{ spełnia } \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty \text{ oraz } \inf_{\mathbb{R}^N} V > 0.$$

Wówczas pracujemy w przestrzeni Hilberta

$$E^s := \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

która przy założeniu [\(V.1.3\)](#) pokrywa się z $H^s(\mathbb{R}^N)$, natomiast w przypadku założenia [\(V.1.5\)](#) stanowi istotną podprzestrzeń w $H^s(\mathbb{R}^N)$. Funkcjonał energii jest dany wówczas wzorem

$$\mathcal{J}(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^{2s} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u) - \frac{1}{q} \Gamma(x)|u|^q dx.$$

W zasadzie powtarzając dowód Twierdzenia [25](#), dość automatycznie uzyskujemy twierdzenie o istnieniu rozwiązań w stanie podstawowym w przypadku nielokalnym.

Twierdzenie 27 ([[\(D2\)](#), Theorem 1.1]). *Przypuśćmy, że $s \in (0, 1)$ oraz spełnione są warunki [\(V.1.3\)](#), [\(V.1.4\)](#), [\(T\)](#), [\(F.1.1\)](#)–[\(F.1.4\)](#). Jeżeli $V_{loc}(x) < 0$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$ lub $V_{loc} \equiv 0$, to [\(26\)](#) posiada rozwiązanie $u \in H^s(\mathbb{R}^N)$ w stanie podstawowym, tj. $\mathcal{J}(u) = \inf_N \mathcal{J}$.*

W przypadku, gdy $V_{loc} \equiv 0$, uzyskujemy również twierdzenie o wielokrotności rozwiązań, które wówczas było nowe także w przypadku lokalnym $s = 1$.

Twierdzenie 28 ([[\(D2\)](#), Theorem 1.2]). *Przypuśćmy, że $s \in (0, 1]$ oraz spełnione są warunki [\(T\)](#), [\(F.1.1\)](#)–[\(F.1.4\)](#). Ponadto, jeśli $s = 1$, to zakładamy [\(V.1.1\)](#), [\(V.1.2\)](#), zaś jeśli $s < 1$, to [\(V.1.3\)](#), [\(V.1.4\)](#). Niech także $V_{loc} \equiv 0$. Wówczas [\(26\)](#) posiada nieskończenie wiele par $\pm u$ geometrycznie różnych rozwiązań.*

W tym miejscu przypomnijmy, że jeśli $V_{loc} \equiv 0$ i u jest rozwiązaniem (26), to $u(\cdot - z)$ jest także rozwiązaniem dla dowolnego $z \in \mathbb{Z}^N$. Mówimy zatem, że dwa rozwiązania są geometrycznie różne, o ile ich orbity względem działania grupy $\mathbb{Z}^N$ na $H^s(\mathbb{R}^N)$ są rozłączne.

Ponadto dowodzimy także istnienia rozwiązania w przypadku koercytywnych potencjałów.

Twierdzenie 29 ([D2], Theorem 1.3). *Przypuśćmy, że $s \in (0, 1]$ oraz spełnione są warunki (V.1.5), (Γ), (F.1.1)–(F.1.4). Wówczas (26) posiada rozwiązanie $u \in E^s(\mathbb{R}^N)$ w stanie podstawowym, tj. $\mathcal{J}(u) = \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J}$.*

Prace (D3) oraz (D4) zawierają kolejne uogólnienia wspomnianych wyników, odpowiednio na zagadnienia nielokalne z ułamkowym laplasjanem i osobliwym potencjałem

$$(-\Delta)^s u + \left(V(x) - \frac{\mu}{|x|^{2s}} \right) u = f(x, u) - \Gamma(x)|u|^q,$$

gdzie niezbędne było zastosowanie odpowiedniej nierówności typu Hardy’ego ([14]), oraz na zagadnienia nielokalne typu Choquarda

$$\sqrt{-\Delta + m^2}u - mu + V(x)u = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(y)|^p}{|x - y|^{N-\alpha}} dy \right) |u|^{p-2}u - \Gamma(x)|u|^{q-2}u,$$

gdzie wykorzystaliśmy rozszerzenie typu Caffarelli’ego-Silvestre ([8]), aby zamienić zagadnienie nielokalne na problem lokalny w półprzestrzeni z warunkiem brzegowym typu Neumanna. Dodatkowo, w pracy (P3) rozwijamy to podejście na potencjały osobliwe typu Hardy’ego (pochodzące z teorii Hartree-Fock’a, [11]), zaś w pracy (P2) badamy przypadek wektorowy - przypadek dwóch (lokalnych lub nielokalnych) równań sparowanych liniowo.

W przypadku silnie nieokreślonym, opisanym w pierwszej części autoreferatu (praca (H1) potrafimy wykazać także abstrakcyjne twierdzenie o wielokrotności orbit krytycznych (P13). Do opisanie wyniku potrzebujemy wprowadzić pojęcie przestrzeni z dyslokacjami.

Niech $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie ośrodkową, rzeczywistą przestrzenią Hilberta oraz niech $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie nieliniowym funkcjonałem klasy $\mathcal{C}^1$. Przypuśćmy, że X ma rozkład ortogonalny $X = X^+ \oplus X^-$ oraz dla $u^\pm \in X^\pm$ i $u = u^+ + u^-$ mamy

$$\|u\|^2 = \|u^+\|^2 + \|u^-\|^2,$$

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą indukowaną przez iloczyn skalarny na X . Załóżmy ponadto, że $\mathcal{J}$ jest postaci

$$(27) \quad \mathcal{J}(u) = \frac{1}{2}\|u^+\|^2 - \frac{1}{2}\|u^-\|^2 - \mathcal{I}(u),$$

gdzie $\mathcal{I}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$. Załóżmy, że dane jest unitarne działanie grupy G na X oraz podprzestrzenie $X^\pm$ są G -niezmiennicze. Mówimy, że para (X, G) jest przestrzenią z dyslokacjami ([42]), o ile dla dowolnych ciągów $(u_n) \subset X$, $(g_n) \subset G$ zachodzi

$$g_n \not\rightarrow 0, u_n \rightharpoonup 0 \Rightarrow g_n u_n \rightharpoonup 0 \text{ z dokładnością do podciągu,}$$

gdzie napis $g_n \rightarrow 0$ oznacza, że $g_n u \rightarrow 0$ dla dowolnego $u \in X$. Wprowadzamy także następującą własność

(GWC) jeżeli $(v_n), (\varphi_n) \subset X$ są ograniczone oraz $\varphi_n \xrightarrow{G} 0$, to $\mathcal{I}'(v_n)(\varphi_n) \rightarrow 0$,

gdzie $\varphi_n \xrightarrow{G} 0$ oznacza, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{g \in G} \langle u_n, g\varphi \rangle = 0$$

dla dowolnego $\varphi \in X$. Dla $\ell \in \mathbb{N}$ oraz skończonego zbioru $\mathcal{A} \subset X$ definiujemy

$$[\mathcal{A}, \ell] := \left\{ \sum_{i=1}^j g_i u_i : 1 \leq j \leq \ell, g_i \in G, u_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Mówimy wtedy, że przestrzeń z dyslokacjami (X, G) ma własność dyskretności, o ile dla dowolnego zbioru skończonego $\mathcal{A} \subset X$ i dowolnej $\ell \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\inf \{ \|u - u'\| : u, u' \in [\mathcal{A}, \ell], u \neq u' \} > 0.$$

Można sprawdzić, że $H^s(\mathbb{R}^N)$, $s \in (0, 1]$ z działaniem $\mathbb{Z}^N$ danym przez translacje jest przestrzenią z dyslokacjami z własnością dyskretności, patrz także [(P13), Example 2.13, Example 2.14, Example 2.15]. Możemy teraz sformułować wszystkie założenia.

(A.1.1) (X, G) jest przestrzenią z dyslokacjami z własnością dyskretności oraz $X = X^+ \oplus X^-$, gdzie $X^\pm$ są ortogonalne i G -niezmiennicze.

(A.1.2) $\mathcal{J} : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest postaci (27), gdzie $\mathcal{I} : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{I}'$ jest ciągowo słabo-słabo* ciągła i spełnia (GWC), $\mathcal{I}(0) = 0$.

(A.1.3) $\mathcal{J}$ jest parzysty i G -niezmienniczy.

(A.1.4) $\text{crit}(\mathcal{J}) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.

(A.1.5) Istnieją promienie $r, r_0 > 0$ takie, że

$$\inf_{\|u^+\|=r} \mathcal{J} > \sup \{ \mathcal{J}(u) : u \in X, \|u^+\| < r_0 \}.$$

(A.1.6) Jeżeli $\|u_n^-\| \rightarrow \infty$ oraz $\|u_n^+\|$ jest ograniczony, to $\mathcal{J}(u_n) \rightarrow -\infty$.

(A.1.7) $\mathcal{J}$ jest ograniczony z góry na zbiorach ograniczonych.

(A.1.8) $\frac{\mathcal{I}(u_n^+)}{\|u_n^+\|^2} \rightarrow \infty$, o ile $\|u_n^+\| \rightarrow \infty$ i (u_n^+) jest zawarty w podprzestrzeni skończonego wymiaru.

(A.1.9) Każdy ciąg Palais-Smale'a dla $\mathcal{J}$ jest ograniczony.

Wówczas otrzymujemy następujące twierdzenie

Twierdzenie 30 ([P13], Theorem 3.2)]. *Załóżmy, że spełnione są warunki (A.1.1)–(A.1.9). Wówczas $\mathcal{J}$ posiada nieskończenie wiele orbit krytycznych.*

Założenie (A.1.4) wymaga wiedzy o istnieniu przynajmniej jednego nietrywialnego punktu krytycznego. Warunek ten jest spełniony w wielu praktycznych zastosowaniach, lecz łącząc powyższe twierdzenie z wynikami z (H1) możemy uzyskać twierdzenia, w których nie zakładamy z góry istnienia punktów krytycznych. Wystarczy zastąpić (A.1.4) przez (A3) i zamiast (A.1.9) wymagać nieco bardziej ogólnego warunku:

(A.1.10) dowolny ciąg $(u_n) \subset X$ spełniający

$$\mathcal{J}(u_n) \text{ jest ograniczony z góry, } (1 + \|u_n\|)\mathcal{J}'(u_n) \rightarrow 0$$

jest ograniczony.

Wówczas dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 31 ([P13], Theorem A.1]. *Założmy, że spełnione są warunki (A.1.1)–(A.1.3), (A3), (A.1.1)–(A.1.8), (A.1.10). Wówczas $\mathcal{J}$ posiada nieskończenie wiele orbit krytycznych.*

W przestrzeniach z dyslokacjami możemy także sformułować abstrakcyjne twierdzenie o istnieniu nietrywialnego punktu krytycznego.

Twierdzenie 32 ([P13], Theorem A.2]. *Niech (X, G) będzie przestrzenią z dyslokacjami, gdzie G działa unitarnie na X . Założmy, że $\mathcal{J}$ jest postaci (27), gdzie $X = X^+ \oplus X^-$ i $X^\pm$ są G -niezmiennicze. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest G -niezmienniczy, klasy $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{I}(0) = 0$, $\mathcal{I}'$ jest ciągowo słabo-słabo* ciągła i spełnia (GWC) oraz spełnione są warunki (A3), (A.1.10), to $\mathcal{J}$ posiada nietrywialny punkt krytyczny.*

W (P13) powyższe fakty są zastosowane do (25) oraz do (13) w sytuacji silnie nieokreślonej.

4.7.2. Problemy wariacyjne z nieliniowościami mieszanego typu

Rozpatrzmy teraz problem

$$(28) \quad -\Delta u + V(x)u = g(x, u),$$

gdzie V jest potencjałem spełniającym

(V.2.1) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jest $\mathbb{Z}^N$ -okresowy oraz 0 znajduje się w przerwie spektralnej $\sigma(-\Delta + V(x))$.

W przypadku materiałów typu Kerra nieliniowość jest postaci

$$g(x, u) = \Gamma(x)|u|^2u,$$

zaś w przypadku materiałów z efektem saturacji, g jest asymptotycznie liniowa i jest postaci

$$g(x, u) = \Gamma(x) \frac{|u|^2}{1 + |u|^2} u.$$

Celem tego podrozdziału rozważenie równania (28) z nieliniowościami mogącymi opisywać kryształy fotoniczne składające się z różnych materiałów o różnych nieliniowych polaryzacjach. W szczególności, chcemy rozważać nieliniowości typu

$$g(x, u) = \begin{cases} \Gamma(x)|u|^2 u & x \in K, \\ \chi_{|u| < 1} \frac{|u|^2}{1 + |u|^2} + \chi_{|u| \geq 1} \frac{1}{2} u & x \in \mathbb{R}^N \setminus K. \end{cases}$$

Dokładniej, zakładamy, że $g : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcją Carathéodory'ego, $\mathbb{Z}^N$ -okresową ze względu na $x \in \mathbb{R}^N$, spełniającą następujące warunki.

(G.2.1) $g(x, u) = o(u)$ przy $u \rightarrow 0$, jednostajnie ze względu na $x \in \mathbb{R}^N$.

(G.2.2) Istnieje $p \in (2, 2^*)$ taka, że

$$|g(x, u)| \lesssim 1 + |u|^{p-1} \quad \text{dla wszystkich } u \in \mathbb{R} \text{ i p.w. } x \in \mathbb{R}^N.$$

(G.2.3) Istnieje domknięty, $\mathbb{Z}^N$ -okresowy podzbiór $K \subset \mathbb{R}^N$ taki, że $|K| > 0$ oraz

$$\frac{G(x, u)}{u^2} \rightarrow \infty \quad \text{przy } |u| \rightarrow \infty \text{ jednostajnie ze względu na } x \in K,$$

$$\text{gdzie } G(x, u) := \int_0^u g(x, s) ds.$$

(G.2.4) Odwzorowanie $\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni u \mapsto g(x, u)/|u| \in \mathbb{R}$ jest niemalejące na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$ dla p.w. $x \in \mathbb{R}^N$.

(G.2.5) Istnieje funkcja $\Theta \in L^\infty(\mathbb{R}^N \setminus K)$ oraz stała $a > 0$ takie, że

$$\frac{g(x, u)}{u} = \Theta(x) \quad \text{dla } |u| \geq a > 0 \text{ oraz p.w. } x \in \mathbb{R}^N \setminus K$$

oraz Θ jest $\mathbb{Z}^N$ -okresowa.

(G.2.6) 0 nie jest wartością własną operatora $-\Delta + V(x) - \Theta(x)$ na $L^2(\mathbb{R}^N \setminus K)$ z warunkami brzegowymi Dirichleta.

Zauważmy, że warunek (G.2.3) wymusza ponadkwadratowy wzrost G w zbiorze K , zaś warunek (G.2.5) zapewnia wzrost kwadratowy G poza zbiorem K . W przypadku $K = \mathbb{R}^N$ mamy do czynienia ze wzrostem ponadkwadratowym na całej dziedzinie i taki przypadek był już analizowany m.in. w [12, 24, 29], a także przy silniejszym warunku monotoniczności niż (G.2.4) w [41]. Z kolei problemy asymptotycznie liniowe były badane m.in. w [17, 23, 25, 27, 40].

Zauważmy, że założenie (G.2.6) jest spełnione, gdy $K = \mathbb{R}^N$. Przypuśćmy, że $\mathbb{R}^N \setminus K$ jest okresowo perforowaną przestrzenią, tzn. $K = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^N} (\bar{Q} + z)$, gdzie Q jest gładką, ściągającą i ograniczoną dziedziną taką, że $(\bar{Q} + z) \cap \bar{Q} = \emptyset$ dla $z \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}$. Wówczas, z [19, Theorem 7] wiemy, że widmo $\sigma(-\Delta + V(x) + \Theta(x))$ na $\mathbb{R}^N \setminus K$ z warunkami Dirichleta jest absolutnie ciągłe, a więc $-\Delta + V(x) + \Theta(x)$ nie zawiera wartości własnych i (G.2.6) jest także spełnione.

Wprowadzamy funkcjonal wariacyjny $\mathcal{J} : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(29) \quad \mathcal{J}(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 + V(x)u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(x, u) dx.$$

Twierdzenie 33 ([[\(D6\)](#), Theorem 1.1]). *Założmy, że spełnione są warunki [\(V.2.1\)](#), [\(G.2.1\)](#)–[\(G.2.6\)](#). Wówczas [\(28\)](#) posiada nietrywialne rozwiązanie $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ takie, że $0 < \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J} \leq \mathcal{J}(u) \leq c$, gdzie $\mathcal{N}$ oznacza rozmaitość Nehariego-Pankova (por. [\(14\)](#)), zaś $c > 0$ jest pewnym poziomem mini-maksowym.*

W przypadku $K = \mathbb{R}^N$ możemy dodatkowo pokazać, że $\mathcal{J}(u) = \inf_{\mathcal{N}} \mathcal{J}$ i w konsekwencji znalezione rozwiązanie jest rozwiązaniem w stanie podstawowym, uzyskujemy w ten sposób rezultaty z [\[24, 29\]](#).

Drugie twierdzenie dotyczy wielokrotności rozwiązań.

Twierdzenie 34 ([[\(D6\)](#), Theorem 1.2]). *Założmy, że spełnione są warunki [\(V.2.1\)](#), [\(G.2.1\)](#)–[\(G.2.6\)](#) oraz g jest nieparzysta ze względu na u . Wówczas [\(28\)](#) posiada nieskończenie wiele par $\pm u$ różnych geometrycznie rozwiązań.*

Twierdzenie [33](#) jest udowodnione w [\(D6\)](#) na dwa sposoby. Pierwszy sposób to modyfikacja abstrakcyjnego podejścia z prac [\[3, 4\]](#) i wykazanie nowego, abstrakcyjnego twierdzenia teorii punktów krytycznych dla funkcjonałów, które mają ponadkwadratowy wzrost jedynie na pewnej podprzestrzeni domkniętej $\mathcal{Q} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ nieskończonego wymiaru. Drugi sposób, to zastosowanie jednej z wersji twierdzenia o uogólnionej geometrii zapętleń [\[29\]](#).

Na potrzeby dowodu wielokrotności ([Twierdzenie 34](#)) wykazujemy nowe abstrakcyjne twierdzenie o wielokrotności rozwiązań, bazując na [\[33\]](#).

Podobny problem na ograniczonej dziedzinie był badany także w [\(P6\)](#) w obecności potencjału osobliwego zarówno we wnętrzu, jak i na brzegu dziedziny. W [\(P6\)](#) znaleziono także rozwiązania dla zagadnienia znormalizowanego w przypadku L^2 -podkrytycznym.

4.7.3. Zagadnienie granicy półklasycznej

Rozpatrzmy teraz nieliniowe równanie Schrödingera

$$(30) \quad -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = \Gamma(x)f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

W pracy [\(D5\)](#) byliśmy zainteresowani zagadnieniem tzw. granicy półklasycznej, czyli zagadnieniem istnienia i zachowywania się rozwiązań, gdy $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Zauważmy, że w powyższym równaniu prawa strona równania jest nieautonomiczna. Założmy, że

$$(V.3.1) \quad V, \Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ są ciągłe oraz } \inf_{\mathbb{R}^N} V > 0, \inf_{\mathbb{R}^N} \Gamma > 0.$$

Ponadto, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ i spełnia następujące założenia

$$(F.3.1) \quad f(u) = o(u) \text{ przy } u \rightarrow 0^+,$$

$$(F.3.2) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u^{p-1}} = 0 \text{ dla pewnej } p \in (2, 2^*), \text{ gdzie } 2^* := \begin{cases} \frac{2N}{N-2}, & N \geq 3 \\ +\infty, & N \in \{1, 2\}, \end{cases}$$

(F.3.3) istnieje $\theta \in (2, p]$ taka, że $0 < \theta F(u) \leq f(u)u$ dla $u > 0$, gdzie $F(u) := \int_0^u f(s) ds$,

(F.3.4) odwzorowanie $u \mapsto \frac{f(u)}{u}$ jest niemalejące.

Następnie potrzebujemy następującego, geometrycznego związku pomiędzy V i Γ .

(Λ) Istnieje ograniczony, niepusty, otwarty i spójny zbiór $\Lambda \subset \mathbb{R}^N$ taki, że

(Λ_1) Γ jest $\mathbb{Z}^N$ -okresowa oraz istnieje $x_{\min} \in \Lambda$ taki, że $V(x_{\min}) = \inf_{\Lambda} V < \inf_{\partial\Lambda} V$ oraz $\Gamma(x_{\min}) = \sup_{\mathbb{R}^N} \Gamma$

lub

(Λ_2) V jest $\mathbb{Z}^N$ -okresowa oraz istnieje $x_{\max} \in \Lambda$ taki, że $\Gamma(x_{\max}) = \sup_{\Lambda} \Gamma > \max_{\partial\Lambda} \Gamma$ oraz $V(x_{\max}) = \inf_{\mathbb{R}^N} V$.

Uzyskujemy wówczas następujące twierdzenie, wykorzystując podejście [13].

Twierdzenie 35 ([D5], Theorem 1.2). *Założmy, że spełnione są warunki (V.3.1), (F.3.1)–(F.3.4), (Λ). Istnieje $\varepsilon_0 > 0$ taka, że dla dowolnej $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ równanie (30) ma dodatnie rozwiązanie $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$ oraz istnieją stałe $C, \alpha > 0$ takie, że $u(x) \leq C \exp(-\alpha|x|)$.*

Naturalnym wydaje się także zbadanie istnienia stanów półklasycznych dla równań z operatorem $\nabla \times \nabla \times$. Jest to celem pracy (P8). Rozpatrzmy zatem zagadnienie

$$\varepsilon^2 \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + V(x)\mathbf{U} = g(\mathbf{U}),$$

gdzie $\varepsilon > 0$ jest dostatecznie mały. Stosując zamianę zmiennych $x \mapsto \varepsilon x$ oraz zastępując $\mathbf{U}(\varepsilon \cdot)$ przez $\mathbf{U}$ otrzymujemy równanie

$$(31) \quad \nabla \times (\nabla \times \mathbf{U}) + V_\varepsilon(x)\mathbf{U} = g(\mathbf{U}),$$

gdzie $V_\varepsilon(x) = V(\varepsilon x)$. Szukając rozwiązań postaci (7) problem sprowadza się do równania

$$(32) \quad -\Delta u + \frac{u}{|y|^2} + V_\varepsilon(x)u = f(u), \quad x = (y, z) \in \mathbb{R}^N = \mathbb{R}^K \times \mathbb{R}^{N-K},$$

gdzie $N = 3$, $K = 2$ oraz $f(\alpha)w = g(\alpha w)$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $w \in \mathbb{R}^3$ takich, że $|w| = 1$. Będziemy jednak rozważali równanie (32) w większej ogólności (w dowolnym wymiarze $N \geq 3$). Założmy, że

$$(V.3.2) \quad 0 < V_0 := \inf_{\mathbb{R}^N} V \leq V(0) < V_\infty \leq \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x) \text{ dla pewnej liczby } V_\infty \in \mathbb{R}.$$

Ponadto, rozpatrujemy następujące założenia.

(F.3.1') $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ oraz istnieje $p \in (2, 2^*)$ taka, że

$$|f(u)| \lesssim 1 + |u|^{p-1}.$$

(F.3.2') $f(u) = o(u)$ przy $u \rightarrow 0$.

(F.3.3') $\frac{F(u)}{u^2} \rightarrow \infty$ przy $|u| \rightarrow \infty$, gdzie $F(u) := \int_0^u f(s) ds$.

(F.3.4') $\frac{f(u)}{|u|}$ jest rosnąca na $(-\infty, 0)$ oraz na $(0, \infty)$.

Niech $\mathcal{G}(K) := \mathcal{O}(K) \times I_{N-K} \subset \mathcal{O}(N)$ oraz niech $\mathcal{C}^{\mathcal{G}(K)}(\mathbb{R}^N)$ oznacza przestrzeń odwzorowań ciągłych, $\mathcal{G}(K)$ -niezmienniczych. Wykorzystując technikę z pracy [35] oraz wyniki regularnościowe z [1] uzyskujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 36 ([P8], Theorem 1.1). *Założmy, że $N > K \geq 3$, $V \in \mathcal{C}^{\mathcal{G}(K)}(\mathbb{R}^N)$ spełnia (V.3.2) oraz zachodzą (F.3.1')–(F.3.4'). Istnieje $\varepsilon_0 > 0$ taka, że dla dowolnej $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ równanie (32) ma nietrywialne słabe rozwiązanie u_ε , które jest $\mathcal{G}(K)$ -niezmiennicze. Ponadto, jeśli f jest nieparzysta, to $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ jest niewjemna oraz*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\nu u_\varepsilon(x) = 0$$

dla dowolnej $\nu < \frac{N-2+\sqrt{(N-2)^2+4}}{2}$.

Do zbadania asymptotycznego zachowania rozwiązań przy $\varepsilon \rightarrow 0^+$ potrzebujemy dodatkowych założeń.

(V.3.3) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = V_\infty < \infty$.

(V.3.4) V jest Hölderowsko ciągła w 0 z pewnym wykładnikiem $\alpha > 0$.

W szczególności, ciągłość V oraz (V.3.3) implikują, że $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Twierdzenie 37 ([P8], Theorem 1.2). *Założmy, że $N > K \geq 3$, $V \in \mathcal{C}^{\mathcal{G}(K)}(\mathbb{R}^N)$ spełnia (V.3.2)–(V.3.4), zachodzą (F.3.1')–(F.3.4') oraz f jest nieparzysta. Wówczas istnieje ciąg $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ taki, że zachodzi jedna z dwóch możliwości. Albo*

(a) *istnieje nietrywialne słabe rozwiązanie U równania (32) z $V_\varepsilon \equiv V_\infty$ takie, że*

$$u_{\varepsilon_n} - U(\cdot - (0, z_n)) \rightarrow 0 \quad \text{w } H^1(\mathbb{R}^N)$$

dla pewnych translacji $(z_n) \subset \mathbb{R}^{N-K}$ spełniających $\varepsilon_n |z_n| \rightarrow \infty$;

albo

- (b) istnieją $\ell \geq 1$, $(z_n^j) \subset \mathbb{R}^{N-K}$ oraz nietrywialne słabe rozwiązania U_j równania (32) z $V_\varepsilon \equiv V(0, z^j)$ dla pewnych $z^j \in \mathbb{R}^{N-K}$ takie, że

$$u_{\varepsilon_n} - \sum_{j=1}^{\ell} U_j(\cdot - (0, z_n^j)) \rightarrow 0 \quad \text{w } H^1(\mathbb{R}^N),$$

$$\text{ponadto } z^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n z_n^j.$$

Jako wniosek z dwóch poprzednich twierdzeń oraz równoważności słabych rozwiązań (Twierdzenie 1) otrzymujemy następujący wynik dotyczący równania z operatorem $\nabla \times \nabla \times$.

Twierdzenie 38 ([P8], Theorem 1.2). Załóżmy, że $N = 3$, $K = 2$, $V \in \mathcal{C}^{G(2)}(\mathbb{R}^3)$ spełnia (V.3.2)–(V.3.4), zachodzą (F.3.1')–(F.3.4') oraz $g(\alpha w) = f(\alpha)w$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$, $w = \mathbb{R}^3$ spełniających $|w| = 1$ (w szczególności, f jest nieparzysta). Wówczas dla dostatecznie małej $\varepsilon > 0$ istnieje słabe rozwiązanie $\mathbf{U}_\varepsilon$ równania (31) postaci (7); $\mathbf{U}_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$ oraz

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\nu |\mathbf{U}_\varepsilon(x)| = 0$$

dla dowolnej $\nu < \frac{N-2 + \sqrt{(N-2)^2 + 4}}{2}$. Ponadto istnieje ciąg $\varepsilon_n \rightarrow 0^+$ taki, że zachodzi jedna z dwóch możliwości. Albo

- (a) istnieje nietrywialne słabe rozwiązanie $\mathbf{U}$ równania (31) z $V_\varepsilon \equiv V_\infty$ takie, że

$$\mathbf{U}_{\varepsilon_n} - \mathbf{U}(\cdot - (0, z_n)) \rightarrow 0 \quad \text{w } H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$$

dla pewnych translacji $(z_n) \subset \mathbb{R}$ spełniających $\varepsilon_n |z_n| \rightarrow \infty$;

albo

- (b) istnieją $\ell \geq 1$, $(z_n^j) \subset \mathbb{R}$ oraz nietrywialne słabe rozwiązania $\mathbf{U}_j$ równania (31) z $V_\varepsilon \equiv V(0, z^j)$ dla pewnych $z^j \in \mathbb{R}$ takie, że

$$\mathbf{U}_{\varepsilon_n} - \sum_{j=1}^{\ell} \mathbf{U}_j(\cdot - (0, z_n^j)) \rightarrow 0 \quad \text{w } H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3),$$

$$\text{ponadto } z^j = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n z_n^j.$$

4.7.4. Zagadnienia znormalizowane

W pracach wchodzących w skład osiągnięcia habilitacyjnego (H5), (H6) badaliśmy problemy L^2 -ponadkrytyczne. W pracy (P9) zainteresowani byliśmy zagadnieniem (9) z $V \equiv 0$

$$(33) \quad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(u), \\ \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx = \rho^2, \end{cases}$$

z prawą stroną f będącą L^2 -podkrytyczną w 0 i L^2 -ponadkrytyczną w nieskończoności. Ponieważ nie zawsze zakładamy tutaj, że f jest nieparzysta, to pracujemy w $H^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Jednak, gdy f jest ciągła i nieparzysta, możemy ją rozszerzyć do funkcji określonej na płaszczyźnie zespolonej

$$f(z) = \begin{cases} f(|z|)z/|z| & \text{dla } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{dla } z = 0 \end{cases}$$

i wówczas pracujemy w przestrzeni $H^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C})$. Rozpatrzmy następujące założenia.

$$(F.4.1) \quad f \text{ jest ciągła oraz } |f(s)| \lesssim |s| + |s|^{2^*-1} \text{ dla wszystkich } s \in \mathbb{R}.$$

$$(F.4.2) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{s^2} = 0, \text{ gdzie } F(s) = \int_0^s f(t) dt.$$

$$(F.4.3) \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{F(s)}{|s|^{2^*}} = \infty.$$

$$(F.4.4) \quad \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{F(t)}{|t|^{2^*}} = 0.$$

$$(F.4.5) \quad f(s)s \leq 2^*F(s) \text{ dla wszystkich } s \in \mathbb{R}.$$

Wówczas $F(\zeta) > 0$ dla pewnego $\zeta \neq 0$ i liczba

$$C_0 := \sup_{0 \neq s \in \mathbb{R}} \frac{F(s)}{s^2 + |s|^{2^*}} > 0$$

jest dobrze określona. Funkcjonał energii jest określony wzorem $J : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx,$$

zaś na $H^1(\mathbb{R}^N)$ rozważamy klasyczną normę. Dla $\alpha > 0$ wprowadzamy oznaczenia

$$\mathcal{D}_\alpha := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : |u|_2 \leq \alpha\}, \quad \mathcal{S}_\alpha := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : |u|_2 = \alpha\}.$$

Ponadto dla $\alpha, R > 0$,

$$\mathcal{U}_R(\alpha) := \{u \in \mathcal{D}_\alpha : |\nabla u|_2 < R\}, \quad m_R(\alpha) := \inf_{\mathcal{U}_R(\alpha)} J.$$

Niech ponadto $S > 0$ będzie optymalną stałą w nierówności Gagliardo-Nirenberga-Sobolewa

$$S|u|_{2^*}^2 \leq |\nabla u|_2^2.$$

Pierwszy wynik pracy (P9) jest następujący.

Twierdzenie 39 ([P9], Theorem 1.2). *Załóżmy (F.4.1)–(F.4.3) oraz*

$$(34) \quad \rho^2 < \frac{2}{N-2} \left(\frac{S}{2^* C_0} \right)^{N/2}.$$

Jeśli $\rho_n \rightarrow \rho$, $R_n \rightarrow R_0$ (gdzie $R_0 > 0$ jest pewną stałą określoną w [(P9), (g₂)]) oraz $u_n \in \mathcal{U}_{R_n}(\rho_n)$ są takie, że $J(u_n) \rightarrow m_{R_0}(\rho)$. Wówczas istnieją $\bar{u} \in \mathcal{S}_\rho \cap \mathcal{U}_{R_0}(\rho)$ oraz $\lambda_{\bar{u}} > 0$ takie, że $u_n \rightarrow \bar{u}$ z dokładnością do translacji i wyboru podciągu, $J(\bar{u}) = m_{R_0}(\rho) < 0$, $\bar{u}$ ma stały znak, nie jest nigdzie zerowe oraz $(\bar{u}, \lambda_{\bar{u}})$ jest rozwiązaniem (33).

Dodatkowo, standardowe argumenty pokazują, że $\bar{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ dla każdej $\alpha \in (0, 1)$ oraz $u(x) \rightarrow 0$ przy $|x| \rightarrow \infty$. Ponadto, można zakładać, że $\bar{u}$ jest radialne i radialnie monotoniczne (ponieważ funkcja $\bar{u}$ ma stały znak, można ją zastąpić symetryzacją Schwartzą).

Naturalnym wydaje się pytanie, czy znalezione w ten sposób rozwiązanie jest rozwiązaniem w stanie podstawowym. W tym celu wprowadzimy dwa dodatkowe abstrakcyjne założenia. Dla $s > 0$ i $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ określamy $s * u := s^{N/2}u(s \cdot)$.

(J1) Dla każdego $u \in \mathcal{D}_\rho \setminus \{0\}$, odwzorowanie $(0, \infty) \ni s \mapsto J(s * u) \in \mathbb{R}$ ma dokładnie jedno maksimum lokalne t_u .

(J2) Zachodzi (J1) oraz dla dowolnego $u \in \mathcal{D}_\rho \setminus \{0\}$, odwzorowanie $(t_u, \infty) \ni s \mapsto J(s * u) \in \mathbb{R}$ jest wklęsłe.

Dostajemy następujący fakt.

Propozycja 40 ([P9], Proposition 1.4). *Założmy (F.4.1)–(F.4.3), (J2) oraz (34). Wówczas*

$$m_{R_0}(\rho) = \min \left\{ J(u) : u \in \mathcal{D}_\rho \text{ oraz } J|'_{\mathcal{D}_\rho}(u) = 0 \right\}.$$

Ponadto jesteśmy w stanie wykazać, że zbiór minimizerów jest orbitalnie stabilny.

Propozycja 41 ([P9], Proposition 1.7). *Założmy (F.4.1)–(F.4.3), (34) zachodzą, f jest nieparzysta (a więc określona na $\mathbb{C}$) oraz istnieje $q \in (2, 2^*)$ taka, że zachodzi jeden z warunków*

$$(F.4.6) \quad |f(t) - f(s)| \lesssim (1 + |t| + |s|)^{q-2} |t - s| \text{ dla } t, s \in \mathbb{R},$$

$$(F.4.7) \quad f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \text{ oraz } |f'(t)| \lesssim |t|^{q-2} + |t|^{2^*-2} \text{ dla wszystkich } t \in \mathbb{R}.$$

Wówczas rozwiązania równania

$$(35) \quad \begin{cases} i\partial_t \Psi + \Delta \Psi = f(\Psi) \\ \Psi(\cdot, 0) = \psi_0 \in H^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{C}) \end{cases}$$

są globalne oraz zbiór

$$\mathcal{G} := \{u \in \mathcal{U}_{R_0}(\rho) : J(u) = m_{R_0}(\rho)\}$$

jest orbitalnie stabilny.

Aby znaleźć drugie rozwiązanie wprowadzamy dodatkowe założenia. Niech $H(t) = f(t)t - 2F(t)$. Zakładamy, że $H = H_1 + H_2$, gdzie H_j spełniają następujące dwa założenia.

(H.4.1) $H_1, H_2 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ oraz istnieją $a \in (2, 2_*)$, $b \in (2_*, 2^*)$ takie, że

$$H_1(t) \lesssim |t|^2 + |t|^a, \quad H_2(t) \lesssim |t|^b + |t|^{2^*}$$

dla $t \in \mathbb{R}$.

(H.4.2) Zachodzą nierówności

$$2H_1(t) \leq h_1(t)t \leq aH_1(t), \quad bH_2(t) \leq h_2(t)t \leq 2^*H_2(t)$$

dla $t \in \mathbb{R}$, gdzie $h_j := H'_j$ dla $j \in \{1, 2\}$.

Jeżeli f jest nieparzysta, to zakładamy dodatkowo, że H_j są parzyste i rozszerzamy je na płaszczyznę zespoloną jako $H_j(z) := H_j(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Analogicznie jak wcześniej określamy

$$M(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{N}{2} \int_{\mathbb{R}^N} H(u) dx$$

i wprowadzamy zbiór ograniczeń $\mathcal{M} := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\} : M(u) = 0\}$. Ponadto $\mathcal{M}^{\text{rad}} := \mathcal{M} \cap H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N)$. Zbiór $\mathcal{M}$ ma następujące rozbitcie

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0 &= \left\{ u \in \mathcal{M} : \frac{d^2}{ds^2} J(s * u)|_{s=1} = 0 \right\}, \\ \mathcal{M}_- &= \left\{ u \in \mathcal{M} : \frac{d^2}{ds^2} J(s * u)|_{s=1} < 0 \right\}, \\ \mathcal{M}_+ &= \left\{ u \in \mathcal{M} : \frac{d^2}{ds^2} J(s * u)|_{s=1} > 0 \right\}. \end{aligned}$$

Otrzymujemy wówczas następujące twierdzenie.

Twierdzenie 42 ([P9], Theorem 1.9). *Założmy, że zachodzą (F.4.1)–(F.4.4), (H.4.1), (H.4.2), (J1) oraz $\rho > 0$ jest dostatecznie małe. Wówczas istnieją $\tilde{u} \in \mathcal{S}_\rho$ oraz $\lambda_{\tilde{u}} > 0$ takie, że $J(\tilde{u}) = \min_{\mathcal{M}_- \cap H_{\text{rad}}^1(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{D}_\rho} J > 0$ oraz $(\tilde{u}, \lambda_{\tilde{u}})$ jest rozwiązaniem (33). Ponadto, jeśli f jest nieparzysta lub $f|_{(-\infty, 0)} \equiv 0$, to $J(\tilde{u}) = \min_{\mathcal{M}_- \cap \mathcal{D}_\rho} J$ oraz $\tilde{u}$ jest dodatnia i radialnie nierosnąca.*

Ponadto jesteśmy w stanie sprawdzić, że znalezione rozwiązanie nie jest stabilne.

Propozycja 43 ([P9], Theorem 1.11). *Założmy, że zachodzą założenia Twierdzenia 42, (J2), (F.4.6) oraz f jest nieparzysta. Wówczas $\tilde{u}$ jest silnie niestabilne.*

Następnie w (P12) badaliśmy zagadnienie podobne do zagadnienia z (H6). Dokładniej, rozważamy następujący problem

$$(36) \quad \begin{cases} (-\Delta)^m u + \frac{\mu}{|x|^{2m}} u + \lambda u = \eta u^3 + g(u), & x \in \mathbb{R}^{2m}, \\ \int_{\mathbb{R}^{2m}} u^2 dx = \rho > 0, \end{cases}$$

gdzie g jest nieliniowością o krytycznym, wykładniczym wzroście. Prawa strona jest L^2 -krytyczna, gdy $\eta > 0$ lub L^2 -ponadkrytyczna, gdy $\eta = 0$. Ponadto $\mu \geq 0$.

Wprowadzamy przestrzeń

$$X^m := \left\{ u \in H^m(\mathbb{R}^{2m}) : \mu \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{u^2}{|x|^{2m}} dx < \infty \right\}$$

oraz jej podprzestrzeń $X_{\text{rad}}^m := X^m \cap H_{\text{rad}}^m(\mathbb{R}^{2m})$. W szczególności, gdy $\mu = 0$, to $X^m = H^m(\mathbb{R}^{2m})$. Funkcjonał energii $J : X^m \rightarrow \mathbb{R}$ stowarzyszony z (36) jest dany wzorem

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2m}} |\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|x|^{2m}} u^2 dx - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{\eta}{4} u^4 + G(u) dx,$$

gdzie $G(s) = \int_0^s g(t) dt$. Analogicznie do wcześniejszych rozważań, wprowadzamy rozmaitość $\mathcal{M}$ jako

$$\mathcal{M} := \left\{ u \in X_{\text{rad}}^m(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\} : \int_{\mathbb{R}^{2m}} |\nabla^m u|^2 + \frac{\mu}{|x|^{2m}} u^2 dx = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{\eta}{2} u^4 + H(u) dx \right\},$$

gdzie $H(s) = g(s)s - 2G(s)$. Wprowadźmy oznaczenie $\alpha_m := \frac{2m(2\pi)^{2m}}{\omega_{2m-1}}$. Rozpatrujemy następujące założenia

(F.4.8) g i $h := H'$ są ciągłe, $|g(s)| + |h(s)| = O(|s|)$ przy $s \rightarrow 0$ oraz

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} (|g(s)| + |h(s)|) e^{\alpha s^2} = 0 \text{ dla wszystkich } \alpha > \alpha_m.$$

(F.4.9) $\lim_{s \rightarrow 0} H(s)/s^4 = 0$.

(F.4.10) Istnieją $\beta > 0$ oraz $p > 4$ takie, że $G(s) \geq \beta|s|^p$ dla $s \in \mathbb{R}$.

(F.4.11) $4H(s) \preceq h(s)s$ dla $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(F.4.12) Istnieje $\theta > 4$ taka, że $0 \leq \theta G(s) \leq sg(s)$ dla $s \in \mathbb{R}$.

Otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 44 ([P12], Theorem 1.1)]. Załóżmy, że zachodzą (F.4.8)–(F.4.12),

$$\eta C_4^4 \rho < 2$$

oraz

$$\beta > \left(\frac{(\theta - 2)(p - 4)}{(\theta - 4)(p - 2)} \right)^{\frac{p-4}{2}} \left(1 - \frac{\eta}{2} C_4^4 \rho \right) \frac{1}{(p - 2) C_p^p},$$

gdzie $C_4 := C_{2m,4}$, $C_p := C_{2m,p} > 0$ są określone w (19). Wówczas istnieją $\lambda > 0$ oraz $u \in \mathcal{S} \cap \mathcal{M}$ takie, że

$$J(u) = \inf_{\mathcal{D} \cap \mathcal{M}} J = \inf_{\mathcal{S} \cap \mathcal{M}} J > 0$$

oraz u jest rozwiązaniem (44). Jeśli ponadto $m = 1$ oraz g jest nieparzysta, to $u \geq 0$.

4.7.5. Fale bieżące w równaniu Schrödingera

W pracy (P11) jesteśmy zainteresowani istnieniem fal bieżących w równaniu Schrödingera

$$i\partial_t \Phi = \Delta \Phi + F(|\Phi|^2) \Phi, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}.$$

Poszukiwanie fal bieżących postaci $\Phi(x, t) = u(x_1 - ct, y)$, $u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $x = (x_1, y) \in \mathbb{R}^N$ prowadzi do następującego równania

$$(37) \quad -ic\partial_{x_1}u + \Delta u + (1+u)F(|1+u|^2) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N$$

z warunkiem $u(x) \rightarrow 1$ przy $|x| \rightarrow \infty$. Wykorzystując podejście wariacyjne (będące wariantem podejścia z [34]) uzyskujemy rezultat o istnieniu słabych rozwiązań równania (37) w wymiarach $N \geq 4$, przy delikatnie słabszych założeniach, niż w [28]. Dokładniej, rozważamy następujące założenia.

(F.5.1) $F \in \mathcal{C}[0, \infty)$ jest klasy $\mathcal{C}^1$ w otoczeniu 1, $F(1) = 0$ oraz $F'(1) = -1$.

(F.5.2) $\limsup_{s \rightarrow \infty} |F(s)|/s^{2^*-2} = 0$.

W odróżnieniu od [28], nie potrzebujemy pełnej analizy koncentracji zwartości, a jedynie uogólnionej wersji lematu typu Lions'a [(P11), Lemma 1.2].

4.7.6. Niewariacyjne metody w równaniach różniczkowych

W pracy (P1) zajmowaliśmy się paraboliczno-parabolicznym układem równań Kellera-Segela w wymiarze 1, tzn.

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x (a(u)\partial_x u - u\partial_x v), & \text{w } (0, \infty) \times (0, 1), \\ \partial_t v = \partial_x^2 v - v + u, & \text{w } (0, \infty) \times (0, 1), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad v(0, x) = v_0(x), & \text{dla } x \in (0, 1) \end{cases}$$

z warunkiem brzegowym

$$\partial_x u = \partial_x v = 0 \quad \text{on } (0, \infty) \times \{0, 1\}.$$

Powyżej, $a \in \mathcal{C}[0, \infty) \cap \mathcal{C}^2(0, \infty)$ jest dodatnią nieliniowością taką, że $sa(s) \lesssim 1$ dla $s \geq 0$ oraz $a \notin L^1(1, \infty)$. W szczególności możemy rozważać zagadnienie z tzw. krytyczną dyfuzją, czyli w przypadku $a(u) = (1+u)^{-1}$. Pokazujemy wówczas, że - w przeciwieństwie do wyższych wymiarów - rozwiązanie powyższego układu jest ograniczone. Dokładniej, otrzymujemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 45 ([P1], Theorem 1.2)]. *Przypuśćmy, że a jest jak powyżej oraz $(u_0, v_0) \in (W^{1,\infty}(0, 1))^2$ jest parą nieujemnych warunków początkowych. Wówczas rozwiązanie (u, v) układu jest ograniczone.*

Rozpatrujemy także układ paraboliczno-eliptyczny

$$\begin{cases} \partial_t u = \partial_x (a(u)\partial_x u - u\partial_x v), & \text{w } (0, \infty) \times (0, 1), \\ 0 = \partial_x^2 v - v + u, & \text{w } (0, \infty) \times (0, 1), \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{dla } x \in (0, 1) \end{cases}$$

z warunkiem brzegowym

$$\partial_x u = \partial_x v = 0 \quad \text{on } (0, \infty) \times \{0, 1\}.$$

i uzyskujemy analogiczny wynik o ograniczoności rozwiązań.

Twierdzenie 46 ([P1], Theorem 5.1)]. *Przypuśćmy, że a jest jak powyżej oraz $u_0 \in W^{1,\infty}(0,1)$ jest funkcją nieujemną. Wówczas rozwiązanie (u, v) układu jest ograniczone.*

W pracy (P5) rozważamy równanie eliptyczne postaci

$$\Delta u - k \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u = 0$$

w zbiorze $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, które pochodzi z równań Maxwella (przy opisie zjawiska magnetycznej lewitacji). W pracach fizycznych można znaleźć rozwiązania tego typu równań wypisane z wykorzystaniem funkcji elementarnych. W pracy jesteśmy zatem zainteresowani zagadnieniem jednoznaczności rozwiązań takich równań. Dowodzimy najpierw odpowiednią zasadę Pharrmén'a-Lindelöfa.

Twierdzenie 47 ([P5], Theorem 2.1)]. *Niech $\Omega = \mathbb{R} \times (0, \pi)$, $k \in \mathbb{R}$ oraz $\lambda \geq 0$. Przypuśćmy, że $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ spełnia*

$$\Delta u - k \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u = 0 \quad \text{w } \Omega$$

oraz $\liminf_{(x',y') \rightarrow (x,y)} u(x', y') \geq 0$ dla wszystkich $(x, y) \in \partial\Omega$. Niech $\mu_R := \min_{x^2+y^2=R^2, (x,y) \in \Omega} u(x, y)$. Jeżeli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_{R_n}}{R_n} = 0 \quad \text{dla pewnych } R_n \rightarrow \infty,$$

to $u \geq 0$ w Ω .

Z powyższego szybko wnioskujemy twierdzenie o jednoznaczności.

Twierdzenie 48 ([P5], Theorem 2.2)]. *Niech $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będą ciągłe, $k \in \mathbb{R}$. Jeśli $\lambda \geq 0$, to zagadnienie*

$$\begin{cases} \Delta u - k \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u = f(x, u) & \text{in } \Omega, \\ u(x, 0) = g(x), \quad u(x, \pi) = h(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

posiada co najwyżej jedno rozwiązanie w klasie $\left\{ u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : \lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} \frac{u(x, y)}{|(x, y)|} = 0 \right\}$.

W szczególności, istnieje co najwyżej jedno rozwiązanie w klasie $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}_b(\overline{\Omega})$.

Wykorzystując odpowiednią zamianę zmiennych, z powyższych twierdzeń możemy wywnioskować następujące twierdzenie o jednoznaczności rozwiązań dla zagadnienia na nakłutej półprzestrzeni (z usuniętym punktem $(0, 0)$ na brzegu).

Twierdzenie 49 ([P5], Theorem 3.1)]. *Niech $k > 0$. Przypuśćmy, że $\tilde{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+^2) \cap \mathcal{C}_b(\overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus \{(0, 0)\})$ jest rozwiązaniem równania*

$$\begin{cases} \operatorname{div} (|(x, y)|^{-k} \nabla_{(x,y)} \tilde{u}) = 0 & (x, y) \in \mathbb{R}_+^2, \\ \tilde{u}(x, 0) = 0 & x \neq 0. \end{cases}$$

Wówczas $\tilde{u} \equiv 0$.

Praca (P7) skupia się na polach prędkości skojarzonych ze spiralami Kadena. Spirale Kadena są szczególnymi przypadkami spiralnych, samopodobnych warstw wirowych (ang. vortex sheets). Spirala Kadena jest opisana równaniem

$$Z(\Gamma, t) = R(\Gamma, t)e^{i\Theta(\Gamma, t)},$$

gdzie Z jest pozycją na płaszczyźnie zespolonej, zaś R i Θ są dane jako

$$R(\Gamma, t) = \Gamma^{\frac{\mu}{2\mu-1}}, \quad \Theta(\Gamma, t) = \frac{t}{2\pi} \Gamma^{\frac{1}{1-2\mu}},$$

gdzie $\mu \in (1/2, 1)$ jest dana. Wówczas gęstość miary wirowości ω_t na spirali jest dana wzorem $g_t(s) = (2 - 1/\mu)s^{1-1/\mu}$. Gdy $t \rightarrow 0^+$, bezdywergentne pole prędkości odpowiadające ω_t zbiega w L^2_{loc} do bezdywergentnego pola prędkości v o wirowości danej jako

$$d\omega_0(x_1 + ix_2) = \alpha x_1^{\alpha-1} \chi_{(0,\infty)}(x_1) \delta_0(x_2) dx_1 dx_2, \quad \alpha = 2 - 1/\mu.$$

Wtedy v jest dane przez wzór Biot'a-Savarta [10, Theorem 2.1, Proposition 1.4]

$$v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} d\omega_0(y).$$

Pojawia się wówczas naturalne pytanie, czy v rozwiązuje równanie typu Eulera.

Twierdzenie 50 ([P7], Theorem 1.1]. *Niech $\mu = 2/3$. Wówczas v spełnia (w sensie dystrybucji)*

$$(v \cdot \nabla)v + \nabla p = Y \delta_{(0,0)},$$

gdzie $\delta_{(0,0)}$ jest miarą Diraca w $(0,0)$, zaś $Y = \int_{\partial B(0,1)} \frac{1}{2} |v(x)|^2 x - (v(x) \cdot x)v(x) dS(x)$.

Z kolei dla $\mu \in (2/3, 1)$ nieco inne równanie jest spełnione.

Twierdzenie 51 ([P7], Theorem 1.2]. *Niech $\mu \in (2/3, 1)$. Wówczas v spełnia (w sensie dystrybucji)*

$$(v \cdot \nabla)v + \nabla p = (-v_2, 0) \gamma \delta_\Sigma,$$

gdzie $\gamma(x_1, x_2) = \alpha x_1^{\alpha-1} \chi_{(0,\infty)}(x_1) \delta_0(x_2)$, zaś $\Sigma = \{(x_1, 0) : x_1 \geq 0\}$.

4.7.7. Informatyka - teoria grafów

W pracy (P4) analizie poddany był algorytm on-line First-Fit kolorowania grafów na grafach przedziałowych. Praca ta zawiera obserwacje poczynione w pracy magisterskiej.

5. Informacja o aktywności naukowej realizowanej w więcej niż jednej uczelni, w szczególności zagranicznej

Studia doktoranckie ukończyłem na **Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu** w 2019 roku, gdzie - od października 2019 roku byłem zatrudniony na stanowisku asystenta, a następnie (od października 2023 roku) na stanowisku adiunkta; w tej jednostce przebywam nieprzerwanie od października 2020 roku na urlopie

bezpłatnym. Od października 2020 roku do końca września 2022 roku pracowałem na stanowisku adiunkta w **Instytucie Matematycznym Polskiej Akademii Nauk**, zaś od października 2022 roku jestem zatrudniony na stanowisku adiunkta na **Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego**. We wszystkich wspomnianych jednostkach prowadziłem aktywną działalność naukową.

Ponadto, w 2019 roku odbyłem dwutygodniowy staż doktorancki NAWA w **University of Milan-Bicocca** pod opieką prof. Simone Secchi. Ponadto odbyłem krótkie wizyty studyjne (tygodniowe): jedną w **Karlsruhe Institute of Technology** (w 2020 r.) oraz trzy w **Polytechnic University of Bari** (w 2023 r., w 2024 r. oraz w 2025 r.).

6. Informacja o osiągnięciach dydaktycznych, organizacyjnych oraz popularyzujących naukę

6.1. Publikacje dydaktyczne i popularyzatorskie

- (Dyd1) **B. Bieganowski**: *Narzędzia informatyczne w nauczaniu przedmiotów przyrodniczych*, w: A.B. Kwiatkowska, M.M. Sysło [red.]: *Informatyka w edukacji. Myśl komputacyjnie!*, Toruń 2018, ISBN: 978-83-231-4049-8
- (Dyd2) **B. Bieganowski**, A. Dymek, D. Strzelecki: *Średnie w zawodach studenckich*, Delta **12** (547), 2019, p. 18-19
- (Dyd3) M. Bieganowska, **B. Bieganowski**: *Bezpieczeństwo kont w Internecie*, w: A.B. Kwiatkowska, M.M. Sysło [red.]: *Informatyka w edukacji. Uczniowie i nauczyciele w szkole przyszłości*, Toruń 2022, ISBN: 978-83-8180-645-9
- (Dyd4) **B. Bieganowski**: *Metoda haszowania w podstawie programowej. Hashcat jako narzędzie łamania haszy haseł - zastosowania na lekcjach informatyki*, w: A.B. Kwiatkowska, M.M. Sysło [red.]: *Informatyka w edukacji. Edukacja informatyczna - wyzwania współczesnego świata*, Toruń 2023, ISBN: 978-83-8180-810-1
- (Dyd5) R. Skiba, P. Miziula, D. Strzelecki, **B. Bieganowski**: *Zbiór zadań z analizy i algebry*, edycja rozszerzona, Toruń 2024, ISBN: 978-83-6683-846-8

W pracy (Dyd1) omówione są wybrane narzędzia informatyczne, które mogą być stosowane w szkołach do realizacji podstawy programowej przedmiotów przyrodniczych (np. fizyka). Praca (Dyd2) służy pokazaniu zastosowania twierdzeń o wartości średniej w zadaniach olimpijskich. Celem pracy (Dyd3) jest uświadomienie zagrożeń internetowych, których celem może być konto użytkownika, zaś praca (Dyd4) polemizuje z treścią podstawy programowej nauczania informatyki w kwestii sposobu wprowadzenia pojęcia metody haszowania. Z kolei książka (Dyd5) jest opracowaniem kilkuset zadań typu olimpijskiego wraz ze szczegółowymi rozwiązaniami przeznaczonym dla studentów matematyki.

6.2. Osiągnięcia organizacyjne

1. Współorganizacja seminarium *Variational methods and PDEs* w IMPAN (od października 2020 roku)

2. Praca w Komitecie organizacyjnym *Juliusz Schauder Medal Awarding Ceremony*, 5.06.2021 r., Toruń
3. Praca w Komitecie organizacyjnym warsztatów *Schauder Winter School: Geometric and Topological Methods in Dynamics of PDEs*, 13-15.02.2023 r., Toruń
4. Praca w Komitecie organizacyjnym i naukowym *Summer School on Calculus of Variations: variational and geometrical methods*, 10-14.06.2024 r., Warszawa
5. Praca w Komitecie organizacyjnym konferencji *Symposium on Nonlinear Analysis*, 17-21.06.2024 r., Toruń
6. Współorganizacja sesji *Variational and topological methods in PDEs* w ramach *9th European Congress of Mathematics*, 15-19.07.2024 r., Sewilla, Hiszpania
7. Praca w Komitecie organizacyjnym konferencji *Patterns in solutions to the incompressible Euler equation*, 4-9.08.2024 r., Będlewo
8. Praca w Komitecie organizacyjnym i naukowym konferencji *Variational methods in applications to PDEs*, 26-30.08.2024 r., Będlewo
9. Praca w Komitecie organizacyjnym i naukowym *Workshop for young researchers in PDEs*, 27-31.01.2025 r., Warszawa

6.3. Pozostałe

1. Członek Komitetu Organizacyjnego Konkursu Informatycznego Bóbr (od 2011 r.)
2. Członek Komitetu Okręgowego (toruńskiego) Olimpiady Matematycznej (od 2016 r.)

7. Inne informacje dotyczące kariery zawodowej

7.1. Zaproszone referaty na konferencjach (i w ramach minisympozjów)

- 02.2025: Conference on Mathematics of Wave Phenomena (Karlsruhe); zaproszony referat (w ramach minisympozjum): *Semiclassical states for the curl-curl problem*
- 12.2024: 14th AIMS Conference (Abu Dhabi); dwa zaproszone referaty (w ramach minisympozjów): *Travelling waves for nonlinear Schrödinger equations*, *Multiplicity of solutions to strongly indefinite problems with sign-changing nonlinearities*
- 09.2024: Warsaw Meeting in Analysis and PDEs (Warszawa); zaproszony referat: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation: new minimization technique*
- 06.2024: XIII Forum of Partial Differential Equations (Będlewo); zaproszony referat: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation: new minimization technique*

- 06.2024: Symposium on Nonlinear Analysis (Toruń); zaproszony wykład plenarny: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*
- 05.2024: International Conference on Elliptic and Parabolic Problems (Gaeta); zaproszony referat (w ramach minisymposium): *Semiclassical states for the curl-curl problem*
- 09.2022: Nonuniformly elliptic problems (Warszawa); zaproszony referat: *Strongly indefinite variational problems with sign-changing nonlinearities*
- 07.2022: Topics in variational problems arising from models in physics (Będlewo); zaproszony referat: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*
- 07.2022: Equadiff 2022 (Brno); zaproszony referat (w ramach minisymposium): *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*
- 05.2022: School on nonlinear PDEs (Warszawa); zaproszony referat: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*
- 05.2022: Recent trends in nonlinear and dispersive equations: equilibria, stability, dynamics (Będlewo); zaproszony referat: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*
- 09.2021: 12th Forum of Partial Differential Equations (Będlewo); zaproszony referat: *Normalized ground states of the nonlinear Schrödinger equation with at least mass critical growth*
- 09.2019: Jubileuszowy Zjazd Matematyków Polskich w stulecie PTM (Kraków); zaproszony referat (w ramach minisymposium): *Bound states for the Schrödinger equation with mixed-type nonlinearities*
- 09.2018: UMI-SIMAI-PTM Joint Meeting (Wrocław); zaproszony referat (w ramach minisymposium): *Fractional Schrödinger equations with singular potentials and sign-changing nonlinearities*
- 07.2018: Young PDEers at work (Warszawa); zaproszony referat: *The semirelativistic Choquard equation with a local nonlinear term*
- 05.2017: International Conference on Elliptic and Parabolic Problems (Gaeta); zaproszony referat (w ramach minisymposium): *Ground-state solutions for the (non-local) Schrödinger equation with sign-changing nonlinearities*

7.2. Granty, nagrody, wyróżnienia

Kierowanie grantami

- Kierownik grantu Preludium, Narodowe Centrum Nauki (30.01.2018-29.01.2022; 2017/25/N/ST1/00531)

- Kierownik grantu Nowe Idee 3A, IDUB, Uniwersytet Warszawski (01.01.2023-31.12.2023; 01/IDUB/2019/94)
- Kierownik grantu Sonata, Narodowe Centrum Nauki (27.06.2023-26.06.2026; 2022/47/D/ST1/00487)
- Członek Komitetu Organizacyjnego Tematycznego Programu Badawczego, IDUB, Uniwersytet Warszawski (01.03.2024-28.02.2025)

Nagrody, stypendia i wyróżnienia

- Stypendium Ministra Edukacji i Nauki dla wybitnych młodych naukowców (2023-2026)
- Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla najlepszych doktorantów (2018-2019)
- Stypendium Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego dla najlepszych studentów (2014-2015)
- Nagroda im. J. P. Schaudera dla młodych matematyków (2023-2024)
- Złoty medal i nagroda pierwszego stopnia w międzynarodowych zawodach Nicolai Copernici International Students Contest (2017)
- Nagroda drugiego stopnia w LIX Konkursie im. Józefa Marcinkiewicza na najlepszą studencką pracę z matematyki (2015)
- Nagroda drugiego stopnia w międzynarodowych zawodach North Countries Universities Mathematical Competition (2015)
- Nagroda trzeciego stopnia w międzynarodowych zawodach The Mirror of William Lowell Putnam Mathematical Competition (dwukrotnie: 2014 i 2013)
- Nagroda trzeciego stopnia w międzynarodowych zawodach International Mathematics Competition for University Students (2014)

7.3. Recenzje dla czasopism

Recenzent artykułów w czasopismach, m.in.: Advances in Mathematical Physics, Analysis and Mathematical Physics, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, Journal of Fixed Point Theory and Applications, Journal of Geometric Analysis, Journal of Mathematical Physics, Mathematical Methods in Applied Sciences, Monatshefte für Mathematik, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Studia Mathematica, Topological Methods in Nonlinear Analysis, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik.

7.4. Opieka naukowa

Promotor pomocniczny doktoranta mgr. Adama Konysza od października 2024 r. na Uniwersytecie Mikołaja Kopernika w Toruniu. Promotor jego pracy magisterskiej w latach 2022-2024. Dwie wspólne prace z mgr. Konyszem zostały już opublikowane (P6), (P8).

Literatura

- [1] M. Badiale, V. Benci, S. Rolando: *A nonlinear elliptic equation with singular potential and applications to nonlinear field equations*, J. Eur. Math. Soc. **9** (2007), no. 3, 355–381.
- [2] T. Bartsch, T. Dohnal, M. Plum, W. Reichel: *Ground states of a nonlinear curl-curl problem in cylindrically symmetric media*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **23** (2016), no. 5, Art. 52, 34 pp.
- [3] T. Bartsch, J. Mederski: *Ground and bound state solutions of semilinear time-harmonic Maxwell equations in a bounded domain*, Arch. Ration. Mech. Anal. **215** (2015), no. 1, 283–306.
- [4] T. Bartsch, J. Mederski, *Nonlinear time-harmonic Maxwell equations in an anisotropic bounded medium*, J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 10, 4304–4333.
- [5] T. Bartsch, N. Soave: *A natural constraint approach to normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems*, J. Funct. Anal. **272**, no. 12, 4998–5037 (2017).
- [6] T. Bartsch, N. Soave: *Correction to: "A natural constraint approach to normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems"*[J. Funct. Anal. 272 (12) (2017) 4998–5037], J. Funct. Anal. **275**, no. 2, 516–521 (2018).
- [7] J. Bourgain, H. R. Brezis, P. Mironescu: *Another look at Sobolev spaces*, w *Optimal control and partial differential equations*, IOS, Amsterdam, 439–455 (2001).
- [8] L. Á. Caffarelli, L. E. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260.
- [9] X. Chang, M. Liu, D. Yan: *Normalized ground state solutions of nonlinear Schrödinger equations involving exponential critical growth*, J. Geom. Anal. **33** (2023), no. 3, Paper No. 83
- [10] T. Cieślak, K. Oleszkiewicz, M. Preisner, M. Szumańska, *Kinetic energy represented in terms of moments of vorticity and applications*, J. Math. Fluid Mech. **21** (2019), paper no. 53, 19 pp.
- [11] A. Dall’Acqua, T. Østergaard Sørensen, E. Stockmeyer: *Hartree-Fock theory for pseudo-relativistic atoms*, Ann. Henri Poincaré **9** (2008), no. 4, 711–742.
- [12] F.O. de Paiva, W. Kryszewski, A. Szulkin: *Generalized Nehari manifold and semilinear Schrödinger equation with weak monotonicity condition on the nonlinear term*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 11, 4783–4794.
- [13] M. A. del Pino, P. L. Felmer: *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), no. 2, 121–137.
- [14] R. L. Frank, R. Seiringer: *Non-linear ground state representations and sharp Hardy inequalities*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 12, 3407–3430.

- [15] M. Gaczkowski, J. Mederski, J. Schino: *Multiple solutions to cylindrically symmetric curl-curl problems and related Schrödinger equations with singular potentials*, SIAM J. Math. Anal. **55** (2023), no. 5, 4425–4444.
- [16] L. Jeanjean, S.-S. Lu: *A mass supercritical problem revisited*, Calc. Var. Partial Differential Equations **59** (2020), no. 5, Paper No. 174, 43 pp.
- [17] L. Jeanjean, K. Tanaka, *A positive solution for an asymptotically linear elliptic problem on $\mathbb{R}^N$ autonomous at infinity*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **7** (2002), 597–614.
- [18] W. Kryszewski, A. Szulkin: *Generalized linking theorem with an application to a semilinear Schrödinger equation*, Adv. Differential Equations **3** (1998), no. 3, 441–472.
- [19] P.A. Kuchment, J. Taskinen: *Dispersion relations and spectra of periodically perforated structures*, Pure Appl. Funct. Anal. **7** (2022), no. 2, 721–731.
- [20] N. Laskin: *Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals*, Phys. Lett. A **268**, 298–305 (2000).
- [21] N. Laskin: *Fractional Schrödinger equation*, Phys. Rev. E **66**, 056108 (2002).
- [22] Q. Li, V.D. Rădulescu, W. Zhang: *Normalized ground states for the Sobolev critical Schrödinger equation with at least mass critical growth*, Nonlinearity **37** (2024), no. 2, Paper No. 025018
- [23] G. Li, A. Szulkin, *An asymptotically periodic Schrödinger equation with indefinite linear part*, Commun. Contemp. Math. **4** (2002), no. 4, 763–776.
- [24] S. Liu: *On superlinear Schrödinger equations with periodic potential*, Calc. Var. Partial Differential Equations **45** (2012), no. 1–2.
- [25] Z. Liu, J. Su, T. Weth: *Compactness results for Schrödinger equations with asymptotically linear terms*, J. Differential Equations **231** (2006), no. 2, 501–512.
- [26] Y. Liu, L. Zhao: *Normalized solutions for Schrödinger equations with potentials and general nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **63** (2024), no. 4, Paper No. 99
- [27] L.A. Maia, J.C. Oliveira Junior, R. Ruviano, *A non-periodic and asymptotically linear indefinite variational problem in $\mathbb{R}^N$* , Indiana Univ. Math. J. **66** (2017), no. 1, 31–54.
- [28] M. Mariş: *Traveling waves for nonlinear Schrödinger equations with nonzero conditions at infinity*, Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 1, 107–182.
- [29] J. Mederski: *Ground states of a system of nonlinear Schrödinger equations with periodic potentials*, Comm. Partial Differential Equations **41** (2016), no. 9, 1426–1440.
- [30] J. Mederski: *Nonradial solutions of nonlinear scalar field equations*, Nonlinearity **33** (2020), 6349–6380.
- [31] J. Mederski, J. Schino: *Least energy solutions to a cooperative system of Schrödinger equations with prescribed L^2 - bounds: at least L^2 -critical growth*, Calc. Var. Partial Differential Equations **61** (2022), no. 1, Paper No. 10
- [32] J. Mederski, J. Schino: *Normalized solutions to Schrödinger equations in the strongly sublinear regime*, Calc. Var. Partial Differential Equations **63** (2024), no. 5, Paper No. 137

- [33] J. Mederski, J. Schino, A. Szulkin: *Multiple solutions to a nonlinear curl-curl problem in $\mathbb{R}^3$* , Arch. Ration. Mech. Anal. **236** (2020), no. 1, 253–288.
- [34] J. Mederski, J. Siemianowski: *Biharmonic nonlinear scalar field equations*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2023**, no. 23, 19963–19995.
- [35] P. H. Rabinowitz: *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270–291.
- [36] B.E.A. Saleh, M.C. Teich: *Fundamentals of Photonics*, 2nd Edition, Wiley 2007.
- [37] J. Schino: *Ground state, bound state, and normalized solutions to semilinear Maxwell and Schrödinger equations*, Rozprawa doktorska (obroniona w 2021), arXiv:2207.07461.
- [38] J. Schino: *Normalized ground states to a cooperative system of Schrödinger equations with generic L^2 -subcritical or L^2 -critical nonlinearity*, Adv. Differential Equations **27** (2022), no. 7-8, 467–496
- [39] S. Secchi, *Ground state solutions for nonlinear fractional Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$* , Journal of Mathematical Physics **54**, 031501 (2013).
- [40] C.A. Stuart, H.-S. Zhou: *Applying the mountain pass theorem to an asymptotically linear elliptic equation on $\mathbf{R}^N$* , Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 9-10, 1731–1758.
- [41] A. Szulkin, T. Weth: *Ground state solutions for some indefinite variational problems*, J. Funct. Anal. **257** (2009), no. 12, 3802–3822.
- [42] K. Tintarev: *Concentration compactness—functional-analytic theory of concentration phenomena*, De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications, 33, De Gruyter, Berlin, [2020] ©2020.



Dokument podpisany
przez Bartosz
Bieganski
Data: 2025.03.17
08:29:34 CET