Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Tomasz Tkaliński

Wybrane aspekty wyceny i zabezpieczenia wypłat w modelach rynku z czasem dyskretnym

Rozprawa doktorska

Promotor
prof. dr hab. Jacek Jakubowski

Instytut Matematyki
Uniwersytet Warszawski

Styczeń 2012

Author's declaration:
aware of legal responsibility I hereby declare that I have written this dissertation myself and all the contents of the dissertation have been obtained by legal means.

Styczeń 11, 2012 . . . .

date *Tomasz Tkaliński*

Supervisor's declaration:
the dissertation is ready to be reviewed

Styczeń 11, 2012 . . . .

date *prof. dr hab. Jacek Jakubowski*

Wybrane aspekty wyceny i zabezpieczenia wypłat w modelach rynku z czasem dyskretnym

Streszczenie

W rozprawie rozważane są zagadnienia wyceny i zabezpieczenia wypłat w ogólnym modelu rynku z czasem dyskretnym. W pierwszej części proponujemy formalny opis stosowanej w praktyce metody wyceny przez analizę scenariuszy. Zaproponowane sformułowanie jest na tyle ogólne, że pozwala zaimplementować wycenę dowolnej wypłaty przez analizę scenariuszy w każdym wolnym od arbitrażu modelu rynku z czasem dyskretnym. Dowodzimy, że wycena wypłaty przez analizę scenariuszy prowadzi zawsze do wyznaczenia pewnego procesu ceny arbitrażowej tej wypłaty. Jeżeli rynek jest niezupełny, to środki uzyskane ze sprzedaży wypłaty po cenie arbitrażowej mogą nie wystarczyć do pełnego zabezpieczenia tej wypłaty. W takiej sytuacji można wyznaczyć efektywne zabezpieczenie wypłaty przez znalezienie minimalizującej ryzyko straty strategii, której wartość początkowa nie przekracza zadanego ograniczenia budżetowego. W drugiej części rozprawy podajemy aproksymacyjne rozwiązanie ogólnego zagadnienia z optymalizacji wypukłej, którego szczególnym przypadkiem jest problem efektywnego zabezpieczenia. Stosując podejście aproksymacyjne, rozwiązujemy zarówno problemy efektywnego zabezpieczenia nieujemnych wypłat dla których istnieje pełne zabezpieczenie, jak i zagadnienie efektywnego zabezpieczenia nieujemnych wypłat, dla których nie istnieje pełne zabezpieczenie. Problem efektywnego zabezpieczenia tych ostatnich wypłat nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze i nie można go rozwiązać stosowanymi dotąd technikami.

Słowa kluczowe:

model rynku z czasem dyskretnym, rynek niezupełny, wycena, wypłata, zabezpieczenie, efektywne zabezpieczenie, wypukłe zabezpieczenie, miara martyngałowa, podejście Neymana-Pearsona, wypukłe miary ryzyka, dualność Fenchela

AMS Mathematical Subject Classification 2000

46N10, 49K35, 60G42, 91B24, 91B28, 91B30, 91B70

Some aspects of pricing and hedging of contingent claims in discrete time financial market models

Abstract

We consider a problem of pricing and hedging of contingent claims in a general discrete time financial market model. Motivated by scenario analysis approaches to pricing used in practice we propose a formal description of a pricing method we call scenario analysis pricing. Generality of our formulation allows implementation of scenario analysis pricing in any arbitrage-free market model. We show that scenario analysis pricing of a contingent claim always yields some arbitrage price process of this claim. In the case of an incomplete market model money obtained from selling contingent claim at arbitrage price may not be sufficient to construct a superreplicating strategy. In this case one may construct efficient hedging by finding risk minimizing strategy whose initial value satisfies given budget constraint. In the second part of the dissertation we provide an approximative solution to some convex optimization problem, the particular case of which is efficient hedging problem. Using approximation approach, we provide solution to problem of efficient hedging of superreplicable contingent claims as well as efficient hedging of nonnegative contingent claims for which perfect hedging is not possible. Efficient hedging of such contingent claims has not been considered in the literature and it cannot be solved by techniques known so far.

Key words:

discrete time financial market model, incomplete market, pricing, contingent claim, hedging, efficient hedging, convex hedging, martingale measure, Neyman-Pearson approach, convex measures of risk, Fenchel duality

AMS Mathematical Subject Classification 2010

46N10, 49K35, 60G42, 91B24, 91B28, 91B30, 91B70

Spis treści

Throughout most of the history of stock markets - about 200 years in the United States and even longer in some European countries - it never occurred to anyone to define risk with a number. Stocks were risky and some were riskier than others, and people let it go at that. Risk was in the gut, not in the numbers. For aggressive investors, the goal was simply to maximize return; the faint-hearted were content with savings accounts and high-grade long-term bonds.

P.L. Bernstein, Against the Gods: the remarkable story of risk (New York, 1996), p. 247.

In one respect, the result of such an ambitious undertaking (Basel II) was probably predictable. The process has generated a product of vast complexity - putting to shame the US Internal Revenue Code, long the World's record holder for complexity. Thousands of pages of task force and working group papers, years in the making, have given rise to hundreds of pages of rules, guidelines, and standards saturated with arcane mathematical formulae. They're not written by or for bankers - or for that matter, by or for conventional bank examiners. They're written for mathematicians and economists - 'quants'.

John D. Hawke, Jr. (March 3, 2003) Comptroller of the Currency

Wprowadzenie

W niniejszej pracy rozważamy zagadnienia wyceny i zabezpieczenia wypłat w wolnych od arbitrażu modelach rynku z czasem dyskretnym $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$, $T \in \mathbb{N}$. Problemy te zostały w pełni rozwiązane w zupełnych modelach rynku, w których przypadku dla dowolnej wypłaty istnieje strategia replikująca, zaś proces ceny jest jednoznacznie wyznaczony. Zupełne modele rynku stanowią szczególną klasę obejmującą pewne modele, które można zrealizować na skończonej przestrzeni probabilistycznej (patrz tw. 1.1.28). Rozwój rynków finansowych motywuje konstruowanie bardziej złożonych modeli, które na ogół nie będą zupełne. W modelach rynku skonstruowanych na bezatomowej przestrzeni probabilistycznej, a nawet w wielu skończonych modelach (przykład w podrozdziale 2.1) można wskazać wypłaty nieosiągalne, tzn. takie, których nie można zabezpieczyć. Z fundamentalnego twierdzenia matematyki finansowej (tw. 1.1.11) wynika, że dowolny proces ceny arbitrażowej wypłaty X jest $\mathbb{P}^*$-martyngałem względem pewnej miary martyngałowej $\mathbb{P}^*$ takiej, że $X \in L^1(\mathbb{P}^*)$. W związku z tym w niektórych pracach zagadnienie wyceny wypłaty X formułuje się jako problem wyboru tzw. miary wyceniającej, tzn. pewnej miary martyngałowej, względem której wypłata X jest całkowalna. W pracy [10] konstruuje się tzw. minimalną miarę martyngałową. Otrzymany w oparciu o tę miarę proces ceny arbitrażowej wypłaty jest procesem wartości uogólnionej strategii, która lokalnie minimalizuje ryzyko (patrz. przykład 2.4.11). Frittelli [25] argumentuje, że dobrym kandydatem na miarą wyceniającą jest miara martyngałowa o minimalnej entropii względem $\mathbb{P}$. W innej pracy [51], Schäl konstruuje gęstość miary wyceniającej względem $\mathbb{P}$ przy pomocy procesu wartości strategii maksymalizującej oczekiwaną użyteczność.
Zagadnienie wyceny jest ściśle powiązane z problemem zabezpieczenia. W związku z tym, że dla wypłat nieosiągalnych nie jest możliwe pełne zabezpieczenie, czyli replikacja, rozważa się inne formy zabezpieczania. Klasycznym zagadnieniem jest *superhedging* wypłat, którego istotą jest znalezienie strategii inwestycyjnej, której wartość końcowa jest zmienną losową nie mniejszą od wypłaty $\mathbb{P}$-p.n. Jeden z najogólniejszych wyników pochodzi od Stettnera [54], który scharakteryzował *superhedging* wypłat, których część ujemna jest całkowalna względem wszystkich miar martyngałowych. Z praktycznego punktu widzenia *superhedging* wypłat posiada dwie słabości:

- koszt superreplikacji pewnych wypłat jest zbyt wysoki [26],
- dla pewnych kontraktów nie istnieje *superhedging* (przykład 3.5.13).

Wynika stąd naturalna motywacja, by rozważać problem zabezpieczenia wypłat za pomocą strategii, które można skonstruować w oparciu o środki uzyskane ze sprzedaży wypłaty po pewnej cenie arbitrażowej. W literaturze rozpatrywano różne sformułowania tego zagadnienia. Do najważniejszych należą podejścia symetryczne: *quadratic hedging* [10], *mean-variance hedging* [41] oraz asymetryczne: zabezpieczenie kwantylowe [20] i efektywne [21], [44], [45], [49], [50]. Szczegółowy przegląd literatury wraz z opisem najważniejszych uzyskanych wyników zamieszczamy we wprowadzeniu do rozdziału 3.

Niniejsza praca składa się z dwóch części. W pierwszej części formułujemy matematyczny opis metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy. Analiza scenariuszy należy do ważnych technik używanych w finansach do oceny wartości obarczonych niepewnością pozycji. Metody używane do analizowania scenariuszy pozwalają na dużą elastyczność w wyborze rozpatrywanych przyszłych zmian czynników ryzyka wpływających na wartość kontraktów. Są również przydatne w wycenie egzotycznych instrumentów pochodnych, dla których nie ma jawnych wzorów na cenę oraz znajdują naturalne zastosowanie w inżynierii biznesowej (ang. *business engineering*) [37], [38], [40]. Dokładniejszą charakterystykę metod analizy scenariuszy podajemy we wprowadzeniu do rozdziału 2. W drugiej części pracy prezentujemy nowe wyniki dotyczące problemu efektywnego zabezpieczenia. Wprowadzamy technikę aproksymacyjną, za pomocą której dowodzimy twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania problemu zabezpieczenia nieujemnej, całkowalnej wypłaty względem wypukłej półciągłej z dołu miary ryzyka, która jest ciągła i skończona w co najmniej jednym punkcie. Dodatkowo, bazując na rozwiniętym podejściu aproksymacyjnym dowiedziemy twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania zagadnienia wypukłego zabezpieczenia względem miar ryzyka z osłabionym warunkiem ciągłości.

Przedstawimy teraz najważniejsze rezultaty tej pracy.

1. Charakteryzacja Z-warunkowych wartości oczekiwanych dowolnych zmiennych losowych.

Najważniejszym rezultatem jest twierdzenie 2.2.20 poświęcone istnieniu, jednoznaczności i postaci Z-warunkowej wartości oczekiwanej dowolnej dobrze określonej zmiennej losowej. Pojecie Z-warunkowej wartości oczekiwanej odgrywa kluczową rolę w sformułowaniu metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy.

2. Matematyczny opis metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy.

Wprowadzamy pojęcia: ciągu reprezentującego subiektywne prognozy i schematu wyceny oraz określamy co oznacza, że schemat wycenia wypłatę przez analizę scenariuszy. Dowodzimy, że dowolny schemat wyceny $\mathbf{Z}$ wyznacza pewną miarę martyngałową $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ (tw. 2.4.9). W twierdzeniu 2.4.10 podajemy warunek konieczny i wystarczający na to, by ciąg reprezentujący subiektywne prognozy był schematem wyceny. Następnie rozważamy problem: dla dowolnej ustalonej wypłaty X wskazać schematy dopuszczalne dla wyceny X tzn. takie, które pozwalają wycenić X przez analizę scenariuszy. Jeżeli schemat wyceny $\mathbf{Z}$ wycenia X, to otrzymany proces ceny nazywamy procesem ceny X zgodnym z $\mathbf{Z}$. W stwierdzeniu 2.4.17 podajemy warunek wystarczający na to, by ciąg reprezentujący subiektywne prognozy był schematem dopuszczalnym dla wyceny X i przy tym warunku wyznaczamy wzór na proces ceny

X zgodny z tym ciągiem. Głównym wynikiem jest tw. 2.4.20, w którym dowodzimy, że proces ceny X zgodny z $\mathbf{Z}$ jest $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$-martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{Z}$ jest schematem dopuszczalnym dla wyceny X oraz X i $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ mają tower property względem $\mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{F}_t$ dla $t = 1, \ldots, T$ (patrz def. 2.4.18).

3. Nowy opis procesów ceny arbitrażowej dowolnej wypłaty.

Dowodzimy, że dowolny proces ceny arbitrażowej dowolnej wypłaty można otrzymać metodą wyceny przez analizę scenariuszy (tw. 2.4.21). Wycenę wypłaty przez analizę scenariuszy można nazwać „podejściem lokalnym": wybieramy zdarzenia i dla nich określamy reguły wyceny w taki sposób, by w oparciu o te reguły otrzymać proces ceny arbitrażowej wypłaty. Jest to procedura alternatywna dla bezpośredniego wyboru miary wyceniającej, który można określić mianem „globalnego podejścia" do wyceny.

4. Nowe wyniki w optymalizacji wypukłej.

W podrozdziale 3.3 formułujemy zagadnienie optymalizacyjne, którego szczególnym przypadkiem jest problem statyczny rozważany podczas rozwiązywania zagadnienia efektywnego zabezpieczenia. Zaprezentowana metoda rozwiązania uogólnia podejście [49].

5. Nowe podejście do rozwiązania zagadnień efektywnego zabezpieczenia.

W dowodzie twierdzenia 3.4.8 zastosowano aproksymacyjną technikę, która pozwala rozwiązywać problemy efektywnego zabezpieczenia przy założeniach słabszych niż te, które przyjmowano dotychczas w literaturze. W podrozdziałach 3.2 oraz 3.5.3 podajemy przykłady zagadnień, których nie można rozwiązać za pomocą istniejących metod i jednocześnie demonstrujemy, jak rozwiązać te problemy, stosując podejście aproksymacyjne.

6. Nowe wyniki dotyczące problemu efektywnego zabezpieczenia.

Metoda zastosowana w dowodzie twierdzenia 3.4.8 pozwala wskazać postać efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging (tw. 3.5.12). Problem efektywnego zabezpieczenia tych ostatnich wypłat nie był dotychczas rozpatrywany w literaturze i nie można go rozwiązać stosowanymi dotąd technikami. Należy podkreślić, że za rozpatrywaniem problemu efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging stoi naturalna i bardzo silną motywacja ekonomiczną: wobec braku superreplikacji, sprzedający wskazuje strategię inwestycyjną, która minimalizuje ryzyko straty mierzone za pomocą wypukłej miary ryzyka ρ. Wypukłe miary ryzyka stanowią szeroką klasę obejmującą m.in. koherentne miary ryzyka, których pożądane z perspektywy oceny ryzyka własności wskazano m.in. w pionierskich pracach [2], [3]. Z drugiej strony należy zwrócić uwagę na znaczenie wyniku dla modelowania rynków finansowych. Dotychczas rozpatrując problem wyceny w zaawansowanych modelach rynku budowanych na bezatomowych przestrzeniach probabilistycznych, zakładano, że kres górny wartości oczekiwanych wypłaty względem wszystkich miar martyngałowych jest skończony, co istotnie zawęża klasę wypłat, dla których można było rozwiązać problem efektywnego zabezpieczenia. Ponadto wyniki dotyczące efektywnego zabezpieczenia [49] uzyskano przy założeniu, że miara ryzyka jest ciągła i skończona w co najmniej jednym punkcie. Założenie to może wydawać się naturalne, ale jest istotnie ograniczające. W podrozdziale 3.2 podamy elementarną konstrukcję wypukłej, półciągłej z dołu miary ryzyka na L^1, dla której to założenie nie jest spełnione. Rozwinięte w pracy podejście aproksymacyjne pozwala osłabić warunek ciągłości i tym samym rozszerzyć klasę miar ryzyka, dla których można rozwiązać problem efektywnego zabezpieczenia (tw. 3.5.14).

Podziękowania

Dziękuję Bogu za Jego prowadzenie, za Tego, który jest posłany, aby towarzyszyć i za kilka skromnych przebłysków światła, które w kluczowych momentach tworzenia tej rozprawy, spłynęły na moją małą głowę.

Dziękuję Panu profesorowi Jackowi Jakubowskiemu za to, że odważył się zostawić mi wolność w tworzeniu i nietworzeniu tej rozprawy, za wiele kluczowych pytań, które zmieniły oblicze tej pracy i przede wszystkim za to, że w każdej chwili tej kilkuletniej podróży mogłem czuć, że on wierzy w to, że dopłynę do celu.

Dziękuję wszystkim moim nauczycielom i wychowawcom, których zaangażowanie zrodziło we mnie fascynację nauką.

Dziękuję mamie, babci i dziadkowi za to wszystko czego nauczyli małego chłopca, w małym miasteczku bardzo dawno temu.

Dziękuję mojej ukochanej żonie Ewie za ostatnie 3229 dni... i proszę o kolejne.

Rozdział 1

Pojęcia wstępne. Model rynku. Miary ryzyka

1.1 Opis modelu rynku

W tym rozdziale podamy definicję modelu rynku, wprowadzimy podstawowe pojęcia i wyniki opisujące własności rynków z czasem dyskretnym. Zaczniemy od konwencji i oznaczeń, które będą używane w tej rozprawie.

1.1.1 Konwencje i oznaczenia

Zakładamy, że 0 nie należy do zbioru liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Będziemy rozpatrywać rynki ze skończonym horyzontem czasowym $T \in \mathbb{N}$ zbudowane na pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Przez $\mathcal{P}$ (odp. $\mathcal{P}_e$) oznaczać będziemy zbiór miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem (odp. równoważnych) $\mathbb{P}$. Ponadto przez $\mathcal{P}_b$ oznaczać będziemy zbiór miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem $\mathbb{P}$ o gęstościach ograniczonych. Procesy stochastyczne będą indeksowane zbiorem $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$. Ponadto dla $i \in \mathcal{T}$ przez $\mathcal{T}_i$ oznaczać będziemy zbiór $\mathcal{T} \setminus \{i\}$. Dla $X = (X^0, \dots, X^m)$, $Y = (Y^0, \dots, Y^m)$ będących dowolnymi procesami o wartościach w $\mathbb{R}^{m+1}$ przez XY będziemy oznaczać proces taki, że $XY_t = \sum_{j=0}^{k} X_t^j Y_t^j$ dla $t \in \mathcal{T}$. Nierówności między zmiennymi losowymi są rozumiane $\mathbb{P}$-p.n., o ile nie napisano inaczej. Przyjmujemy standardowo, że $\inf \varnothing = \infty$ oraz $\sup \varnothing = -\infty$.

1.1.2 Model rynku z czasem dyskretnym

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ogólną przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$, gdzie $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ dla pewnego $T \in \mathbb{N}$. Niech $k \in \mathbb{N}$ będzie dowolne oraz niech $S = (S_t)_{t \in \mathcal{T}}$ będzie adaptowanym procesem stochastycznym takim, że

$$S = (S^0, S^1, \dots, S^k),$$

przy czym $S^0 \equiv 1$.
Proces S interpretujemy jako zdyskontowany proces cen instrumentów podstawowych rynku, np. akcji. Przy takiej interpretacji moglibyśmy w definicji żądać, by

S był nieujemny, co jest założeniem często przyjmowanym w literaturze (np. [22], [28], [43]). W wielu innych pracach [29], [30], [54], [55], [58] rozpatruje się rynki z procesami cen, które mogą przyjmować wartości ujemne. My również nie będziemy zakładać nieujemności procesów cen, gdyż w dalszej części pracy będziemy rozpatrywać zagadnienie wyceny wypłat i rynki z procesem S rozszerzonym o procesy cen wypłat. Jeżeli wypłata nie będzie nieujemna, to proces jej ceny również nie będzie nieujemny. Więc, aby w takiej sytuacji mieć możliwość używania pojęcia modelu rynku musimy dopuścić, by ceny instrumentów podstawowych mogły przyjmować wartości ujemne.
Proces S^0 traktujemy jako *numeráire* - instrument finansowy, w którego jednostkach wyrażane są ceny pozostałych aktywów.

Definicja 1.1.1. *Powiemy, że $\mathbb{F}$-prognozowalny proces ξ o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$ jest strategią samofinansującą, jeżeli $\xi_{t+1}S_t = \xi_t S_t$ dla $t = 0, 1, \ldots, T-1$. Zbiór strategii samofinansujących będziemy oznaczać przez Φ.*

Dla $\xi = (\xi_t)_{t\in\mathcal{T}} \in \Phi$, gdzie $\xi_t = (\xi_t^0, \ldots, \xi_t^k)$, zmienna losowa ξ_t^j oznacza liczbę jednostek j-tego instrumentu podstawowego, które inwestor posiada w okresie inwestycyjnym od chwili $t-1$ do t.

Definicja 1.1.2. *Modelem rynku $\mathcal{M}$ będziemy nazywać parę $(S, \Phi) = \mathcal{M}$.*

Przyjęta przez nas definicja modelu rynku jest bardzo ogólna i obejmuje wiele modeli rynku rozpatrywanych w literaturze. Oto kilka przykładów.

Przykład 1.1.3. Dla ustalonego $T \in \mathbb{N}$ oraz $\sigma > 0$ niech $(U_t)_{t=1}^T$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mu_{U_t}(\{e^\sigma\}) = 1 - \mu_{U_t}(\{e^{-\sigma}\}) \in (0,1)$. Definiujemy proces $S = (S^0, S^1)$ w sposób następujący: $S^0 \equiv 1$ oraz $S_t^1 = s_0 > 0$ i $S_t^1 = S_{t-1}^1 U_t$ dla $t = 1, \ldots, T$. Niech $\mathbb{F}$ będzie filtracją generowaną przez proces S oraz niech Φ oznacza zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Wówczas $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ jest modelem CRR (patrz, np. [29], rozdział 2.3). □

Przykład 1.1.4. Dla ustalonego $T \in \mathbb{N}$ niech $(W_t)_{t=1}^T$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Ustalmy ponadto liczby $s_0 > 0$ oraz $\sigma > 0$. Definiujemy proces $S = (S^0, S^1)$ w sposób następujący: $S^0 \equiv 1$ oraz

$$S_t^1 = \begin{cases} s_0, & \text{gdy } t = 0, \\ S_{t-1}^1 \exp(\sigma W_t), & \text{gdy } 0 < t \le T. \end{cases}$$

Niech $\mathbb{F}$ będzie filtracją generowaną przez proces S oraz niech Φ oznacza zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Wówczas $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ jest modelem rynku, który jest dyskretnym odpowiednikiem modelu Blacka-Scholesa. □

Przykład 1.1.5. Dla ustalonego $T \in \mathbb{N}$ niech $(W_t)_{t=1}^T$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$ oraz niech $(X_t)_{t=1}^T$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0,\nu^2)$ dla pewnego $\nu > 0$. Załóżmy, że dla dowolnych $s, t \in \mathcal{T}$ zmienne losowe W_s i X_t są niezależne. Ustalmy liczby $s_0 > 0$, $\bar{\sigma}_0 > 0$ oraz $\psi \in (-1,1)$ i $\gamma \in \mathbb{R}$. Definiujemy proces $\sigma = (\sigma_t)_{t=0}^T$ w sposób następujący

$$\sigma_t = \begin{cases} \bar{\sigma}_0 & \text{gdy } t = 0, \\ \sigma_{t-1}^\psi \exp(\gamma + \frac{1}{2} X_t) & \text{gdy } 0 < t \le T \end{cases}$$

oraz proces $S = (S^0, S^1)$ w sposób następujący: $S^0 \equiv 1$ oraz

$$S_t^1 = \begin{cases} s_0 & \text{gdy } t = 0, \\ S_{t-1}^1 \exp(\sigma_t W_t) & \text{gdy } 0 < t \leq T, \end{cases}$$

Niech $\mathbb{F}$ będzie filtracją generowaną przez proces S oraz niech Φ oznacza zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Wówczas $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ jest modelem rynku typu *auto regressive stochastic volatility (ARSV)* [9]. □

Przykład 1.1.6. Dla ustalonego $T \in \mathbb{N}$ niech $(R_t)_{t\in\mathcal{T}_0}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Załóżmy, że $R_1 \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz $R_1 > -1$ $\mathbb{P}$-p.n. Ustalmy liczbę $s_0 > 0$. Definiujemy proces $S = (S^0, S^1)$ w sposób następujący: $S^0 \equiv 1$ oraz $S_0^1 = s_0$, $S_t^1 := S_0 \prod_{j=1}^t (1 + R_j)$ dla $t \in \mathcal{T}_0$. Niech $\mathbb{F}$ będzie filtracją generowaną przez proces S oraz niech Φ oznacza zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Wówczas $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ jest modelem rynku, dla którego rozważa się zagadnienie lokalnej minimalizacji ryzyka ([22], rozdział 10.1).

Definicja 1.1.7. *Wartością strategii $\xi \in \Phi$ w chwili t nazwiemy zmienną losową $V_t(\xi) := \xi_t S_t = \sum_{i=0}^k \xi_t^i S_t^i$. Proces $V(\xi) = (V_t(\xi))_{t\in\mathcal{T}}$ będziemy nazwać procesem wartości (bogactwa) strategii ξ.*

Warunek samofinansowania zapewnia, że proces wartości strategii ulega zmianie jedynie na skutek zmian cen aktywów handlowanych na rynku. W szczególności, jeżeli $\xi \in \Phi$, to dla każdej chwili $t \in \mathcal{T}_T$ inwestor zmienia swoją pozycję ξ_t na ξ_{t-1} bez konsumpcji i dopływu kapitału z zewnątrz. (o strategiach konsumpcyjno-inwestycyjnych można poczytać np. w rozdziale 6 w [46]). Okazuje się, że strategia samofinansująca jest wyznaczona przez dowolny prognozowalny proces o wartościach w $\mathbb{R}^k$ i liczbę x interpretowaną jako bogactwo początkowe.

Stwierdzenie 1.1.8 ([22], uw. 5.8). *Dla dowolnego prognozowalnego procesu $(\xi^1, \dots, \xi^k)$ oraz dowolnego rzeczywistego x istnieje jednoznacznie wyznaczony prognozowalny proces ξ^0 taki, że proces $\xi = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^k)$ jest strategią samofinansującą o bogactwie początkowym x.*

Podstawowym żądaniem, jakie stawia się wobec modelu rynku finansowego jest własność braku arbitrażu, która gwarantuje, że na rynku nie istnieje możliwość uzyskania zysku bez ryzyka.

Definicja 1.1.9. *Strategię $\xi \in \Phi$ nazywamy arbitrażem (możliwością arbitrażu, strategią arbitrażową), jeżeli $V_0(\xi) = 0$, $V_T(\xi) \geq 0$ oraz $\mathbb{P}(V_T(\xi) > 0) > 0$.*

Przyjmiemy poniższe założenie.

$$\text{Model rynku } \mathcal{M} \text{ jest wolny od arbitrażu.} \tag{\textbf{NA}}$$

Z własnością braku arbitrażu związane jest ważne pojęcie.

Definicja 1.1.10. *Miarą martyngałową nazwiemy dowolną miarę probabilistyczną równoważną $\mathbb{P}$, względem której proces S jest martyngałem. Zbiór miar martyngałowych w modelu rynku $\mathcal{M}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.*

W 1990 roku Dalang, Morton, Willinger [14] udowodnili tzw. pierwsze fundamentalne twierdzenie matematyki finansowej, które formułujemy poniżej.

Twierdzenie 1.1.11. (**NA**) $\Leftrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$.
Ponadto, jeżeli zachodzi jeden z powyższych równoważnych warunków, to istnieje miara martyngałowa $\mathbb{P}^*$ *taka, że* $\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}} \in L^\infty$.

Podamy jeszcze jedną wersję pierwszego fundamentalnego twierdzenia matematyki finansowej pochodzącą oryginalnie od Rogersa, w sformułowaniu wynikającym z pracy [58].

Twierdzenie 1.1.12 ([58], tw. 1.2). *Następujące warunki są równoważne:*
1) *(**NA**).*
2) $\mathcal{P}(\mathcal{M}) \neq \varnothing$.
3) *Dla dowolnej wypłaty* X *istnieje miara martyngałowa* $\mathbb{Q}$ *taka, że* $\max\{1, |X|\}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^\infty$.

Szczególnie ważna będzie dla nas implikacja 1) $\Rightarrow$ 3), z której wynika, że w wolnym od arbitrażu modelu rynku dla dowolnej wypłaty X istnieje miara martyngałowa o gęstości ograniczonej, względem której X jest całkowalna.

Jednym z podstawowych zagadnień matematyki finansowej są problemy wyceny i zabezpieczenia wypłat.

Definicja 1.1.13. *Wypłatą (europejską) nazwiemy dowolną* $\mathcal{F}$*-mierzalną zmienną losową rzeczywistą.*

Ponieważ w tej pracy będziemy rozważać wyłącznie wypłaty europejskie, będziemy nazywać je po prostu wypłatami. Wycena wypłaty X polega na przyporządkowaniu jej dowolnego procesu adaptowanego H takiego, że nie istnieje arbitraż na rynku rozszerzonym o proces H.

Definicja 1.1.14. *Niech* X *będzie dowolną wypłatą. Proces adaptowany* H *nazwiemy procesem ceny arbitrażowej* X*, jeżeli* $H_T = X$ *oraz nie istnieje arbitraż na rynku rozszerzonym o proces* H*, zdefiniowanym jako* $\mathcal{M}' = (S', \Phi')$*, gdzie* $S' = (S, H)$*, a* Φ' *jest zbiorem strategii samofinansujących o wartościach w* $\mathbb{R}^{k+2}$*. Zbiór procesów ceny arbitrażowej wypłaty* X *będziemy oznaczać przez* $\Xi(X)$*.*

Definicja 1.1.15. *Niech* X *będzie dowolną wypłatą. Liczbę* x *nazwiemy ceną arbitrażową* X*, jeżeli istnieje proces* $H \in \Xi(X)$ *taki, że* $H_0 = x$*. Zbiór cen arbitrażowych wypłaty* X *będziemy oznaczać przez* $\Xi_0(X)$*.*

Z implikacji 1) $\Rightarrow$ 3) w twierdzeniu 1.1.12 wynika, że zbiór cen arbitrażowych dowolnej wypłaty jest niepusty.

Twierdzenie 1.1.16. *Niech* X *będzie dowolną wypłatą. Wówczas* $\Xi_0(X) \neq \varnothing$*.*

Bez dowodu podamy charakteryzację zbioru cen arbitrażowych dowolnej wypłaty.

Twierdzenie 1.1.17. *Niech X będzie dowolną wypłatą. Wówczas*

$$\Xi_0(X) = \{E_{\mathbb{P}^*}X : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ i } X \in L^1(\mathbb{P}^*)\}. \tag{1.1}$$

Dowód powyższego twierdzenia pomijamy, gdyż przebiega on analogicznie do dowodu tw. 5.30 z monografii [22].
W sposób naturalny uogólnimy pojęcie ceny arbitrażowej.

Definicja 1.1.18. *Niech X będzie dowolną wypłatą. $\mathcal{F}_t$-mierzalną zmienną losową Y nazwiemy ceną arbitrażową X w chwili t, jeżeli istnieje proces $H \in \Xi(X)$ taki, że $H_t = Y$. Zbiór cen arbitrażowych wypłaty X w chwili t będziemy oznaczać przez $\Xi_t(X)$.*

Uwaga 1.1.19. *Niech X będzie dowolną wypłatą.*
1. *Cena arbitrażowa X w chwili 0 jest ceną arbitrażową X.*
2. *Nie jest prawdą następująca implikacja: jeżeli dla każdego $t \in \mathcal{T}$ zmienna losowa Y_t jest ceną arbitrażową X w chwili t, to proces $Y = (Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ jest procesem ceny arbitrażowej X.*

Dowód
1. Oczywiste.
2. Patrz przykład w podrozdziale 2.1. □

Twierdzenie 1.1.20.

$$\Xi(X) = \{M = (M_t)_{t\in\mathcal{T}} \ : \ M_t = E_{\mathbb{P}^*}(X|\mathcal{F}_t) : \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ i } X \in L^1(\mathbb{P}^*)\}.$$

Dowód pomijamy, gdyż przebiega on analogicznie do dowodu tw. 5.30 z monografii [22]. Ważną rodzinę wypłat stanowią wypłaty osiągalne.

Definicja 1.1.21. *Wypłatę X nazwiemy osiągalną, jeżeli istnieje strategia $\xi \in \Phi$ taka, że $V_T(\xi) = X$. Dowolną strategię o tej własności nazwiemy strategią replikującą X.*

Korzystając z założenia o braku arbitrażu można łatwo pokazać poniższy fakt.

Stwierdzenie 1.1.22. *Jeżeli X jest wypłatą osiągalną, to proces ceny arbitrażowej X jest jednoznacznie wyznaczony i równy procesowi wartości dowolnej strategii replikującej X. Wówczas proces ten będziemy oznaczać przez $\Pi(X)$.*

Z powyższego stwierdzenia oraz z twierdzenia 1.1.20 dostajemy

Wniosek 1.1.23. *Niech X będzie wypłatą osiągalną oraz niech $\mathbb{P}^*$ będzie dowolną miarą martyngałową taką, że $X \in L^1(\mathbb{P}^*)$. Wówczas proces $M = (M)_{t\in\mathcal{T}}$ zdefiniowany wzorem*

$$M_t = E_{\mathbb{P}^*}(X|\mathcal{F}_t) \quad \text{dla } t \in \mathcal{T}$$

jest procesem ceny arbitrażowej X.

W modelach rynku z czasem dyskretnym zachodzi ważna charakteryzacja wypłat osiągalnych.

Twierdzenie 1.1.24 ([58], tw. 1.1). *Dla dowolnej wypłaty X równoważne są warunki:*
1) $X = V_T(\xi)$ *dla pewnego* $\xi \in \Phi$ *takiego, że* $V_0(\xi) = x_0$.
2) $E_{\mathbb{P}^*}X = x_0$ *dla każdego* $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ *takiego, że* $X \in L^1(\mathbb{P}^*)$.

Jeżeli wypłata jest osiągalna, to sprzedający tę wypłatę po cenie arbitrażowej może zabezpieczyć swoją pozycję konstruując strategię replikującą. Zabezpieczenie wypłat, które nie są osiągalne stanowi jeden z podstawowych problemów matematyki finansowej. W literaturze rozpatruje się m.in. superhedging, *quadratic hedging* oraz zabezpieczenie kwantylowe i efektywne.

Definicja 1.1.25. *Powiemy, że dla wypłaty X istnieje superhedging, jeżeli istnieje strategia* $\xi \in \Phi$ *taka, że* $V_T(\xi) \geq X \quad \mathbb{P} - p.n.$ *Dowolną strategię o tej własności nazwiemy strategią superreplikującą X.*

Zachodzi ważne

Twierdzenie 1.1.26 ([30], tw. 3.2). *Załóżmy, że dla wypłaty X spełniony jest warunek*

$$E_{\mathbb{P}^*}X^- < \infty \text{ dla każdej miary } \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M}).$$

Wówczas dla wypłaty X istnieje superhedging wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}X < \infty.$$

W rozdziale 3 przedstawimy nowe wyniki dotyczące efektywnego zabezpieczenia. W dowodach skorzystamy z powyższego twierdzenia.
Na koniec wprowadzimy pojęcie rynku zupełnego.

Definicja 1.1.27. *Model rynku $\mathcal{M}$ nazwiemy zupełnym, jeżeli dowolna wypłata jest osiągalna. Model rynku, który nie jest zupełny będziemy nazywać niezupełnym.*

Podamy teraz charakteryzację modeli zupełnych

Twierdzenie 1.1.28.

1.*Jeżeli model rynku jest zupełny, to liczba atomów przestrzeni* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *nie przekracza* $(k+1)^T$.
2. *W szczególności na to, by rynek był zupełny wystarcza, że każda ograniczona wypłata jest osiągalna.*

Föllmer i Schied dowodzą powyższego twierdzenia ([22], tw. 5.38), definiując wcześniej wypłaty, jako nieujemne zmienne losowe. Z dowodu wynika, że powyższa charakteryzacja rynków zupełnych jest prawdziwa również w sytuacji, gdy wypłatami są dowolne zmienne losowe.

1.2 Miary ryzyka

Ustalmy dowolne $p \in [1, \infty]$.

Definicja 1.2.1.

a) Powiemy, że funkcja $\rho : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *jest wypukłą miarą ryzyka, jeżeli:*
1. $\rho(X) \leq \rho(Y)$ *dla dowolnych* $X, Y \in L^p$ *t. że* $X \geq Y$,
2. $\rho(X + c) = \rho(X) - c$ *dla dowolnego* $X \in L^p$ *oraz* $c \in \mathbb{R}$,
3. $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$ *dla dowolnych* $X, Y \in L^p$ *oraz* $\lambda \in [0, 1]$.
b) Powiemy, że funkcja $\rho : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *jest koherentną miarą ryzyka, jeżeli* ρ *spełnia warunki* 1 *i* 2 *oraz*
3′. $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ *dla dowolnych* $X, Y \in L^p$,
4′. $\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$ *dla dowolnego* $X \in L^p$, $\lambda \geq 0$.

Uwaga 1.2.2. *Koherentna miara ryzyka jest wypukłą miarą ryzyka, ponieważ koniunkcja warunków* 3′ *i* 4′ *implikuje warunek* 3.

Dla miar ryzyka definiuje się tzw. zbiory dopuszczalne.

Definicja 1.2.3. *Zbiorem dopuszczalnym wypukłej miary ryzyka* $\rho : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *nazwiemy zbiór* $\mathcal{A}_\rho = \{X \in L^p \mid \rho(X) \leq 0\}$.

Jeden z najważniejszych wyników w teorii miar ryzyka dotyczy dualnej reprezentacji miar ryzyka wynikającej z twierdzenia Fenchela-Moreau. Przed sformułowaniem twierdzenia o reprezentacji wprowadzimy oznaczenie.

Oznaczenie 1.2.4. $\mathcal{Q}_q := \{\mathbb{Q} \in \mathcal{P} \mid \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \in L^r\}$ dla $q \in [1, \infty)$, *gdzie* r *jest wykładnikiem sprzężonym do* q. *Ponadto przez* $\mathcal{Q}_\infty$ *będziemy oznaczać zbiór absolutnie ciągłych względem* $\mathbb{P}$, *skończenie addytywnych miar unormowanych.*

Dla wypukłych, właściwych, półciągłych z dołu miar ryzyka zachodzi twierdzenie o reprezentacji

Twierdzenie 1.2.5 ([32], tw. 2.4). *Niech* $\rho : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *będzie wypukłą, właściwą, półciągłą z dołu miarą ryzyka. Wówczas*

$$\rho(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_p} \left[E_{\mathbb{Q}}(-X) - \rho^*(\mathbb{Q}) \right],$$

gdzie $\rho^*(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} E_{\mathbb{Q}}(-X)$.

Rozdział 2

Wycena wypłat przez analizę scenariuszy

Celem tego rozdziału jest sformułowanie matematycznego opisu metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy. Analiza scenariuszy jest jednym z elementów *stress testingu*, który jest bardzo ważnym procesem wchodzącym w skład procedur zarządzania ryzykiem. Celem przeprowadzenia *stress testu* jest zbadanie, jak może zachować się wartość pozycji finansowej pod wpływem zmian czynników ryzyka. *Stress testing* obejmuje tzw. analizę wrażliwości oraz analizę scenariuszy. Analiza wrażliwości obejmuje metody szacowania zmiany wartości pozycji w odpowiedzi na „małe" zmiany czynników ryzyka, np.: stóp procentowych czy cen instrumentów bazowych. Do analizy wrażliwości zalicza się między innymi kalkulacja greckich parametrów portfeli czy instrumentów pochodnych. Analiza scenariuszy pozwala oszacować zachowanie pozycji w przypadku zajścia wytypowanych przyszłych zdarzeń obejmujących w szczególności zdarzenia „ekstremalne" o niskim prawdopodobieństwie wystąpienia, których konsekwencje mogą być bardzo poważne.

W literaturze można znaleźć bardzo wiele publikacji, w których przedstawiono matematyczny opis metod analizy wrażliwości, np.: w klasycznej książce [34] znajdziemy przede wszystkim tradycyjne deterministyczne metody stosowane na rynkach instrumentów dłużnych, których uogólnienia i rozszerzenia można znaleźć m.in. w monografii [60]. Nie będziemy zajmować się szczegółowym przedstawieniem literatury dotyczącej analizy wrażliwości, gdyż celem tego rozdziału jest przedstawienie algorytmu wyceny wypłat, który wpisuje się w schemat postępowania charakterystyczny dla analizy scenariuszy.

Wycena wypłat

Komitet Bazylejski wymaga, by instytucjonalni uczestnicy rynku dokonywali wyceny swoich portfeli na bieżąco metodą *mark-to-market*, która polega na oszacowaniu wartości pozycji w oparciu o dostępne ceny instrumentów z rynku regulowanego. Wycena pozycji w tych ostatnich instrumentach nie nastręcza trudności. Problemy z wyceną pojawiają, jeżeli instytucja posiada produkty OTC, których ceny nie są kwotowane na rynku. Aby spełnić wymagania Komitetu Bazylejskiego uczestnicy rynku wyliczają modelową wartość portfela, stosując kontrowersyjną technikę *mark-to-model*. Kryzys finansowy kilku ostatnich lat urzeczywistnił niebezpieczeństwa związane z

lekkomyślnym używaniem modeli. Obecnie podkreśla się, że ocena pozycji musi być dokonywana przede wszystkim w oparciu o ceny instrumentów dostępnych na rynku, a stosowane modele muszą być poddawane częstej kalibracji, aby odzwierciedlały zachowanie rynku tak wiarygodnie, jak to tylko możliwe. Ponieważ modele stanowią jedynie przybliżenie rzeczywistości, opieranie się wyłącznie na wycenie w modelu może prowadzić do podjęcia niewłaściwych decyzji. Aby zmniejszyć niebezpieczeństwo „wyceny odbiegającej od realiów rynku"w zaawansowanych modelach wyceny (np.: model Blacka-Littermana [6]) uwzględnia się dwie składowe wejściowe:
1. parametry modelu wyznaczone z danych (np.: historycznych),
2. przesłanki wynikające z tendencji rynkowych i bieżącej sytuacji, np. poglądy odnośnie rozwoju koniunktury, czy oczekiwania odnośnie kształtowania się czynników ryzyka (tzw. *views*).
W podrozdziale 2.4 zaproponujemy sposób wykorzystania tych dwóch składowych w algorytmie wyceny bazującym na analizie scenariuszy. Najpierw podamy krótką charakterystykę metod analizowania scenariuszy.
Analiza scenariuszy
W ogólnym schemacie analizy scenariuszy wyróżnia się trzy etapy:
1. Określenie zbioru scenariuszy czy przyszłych zdarzeń, których możliwość zajścia chcemy uwzględnić.
2. Określenie sytuacji lub reguł decyzyjnych w każdym ze zdarzeń wytypowanych w poprzednim kroku.
3. Interpretacja otrzymanego wyniku.
Oto przykłady form wyniku:
- liczba oznaczająca ekonomiczną wartość (ang. *economic value*) wypłaty/pozycji[1]
- tabela przedstawiająca sumaryczne przepływy z pozycji (np. portfela instrumentów pochodnych) zależne od poszczególnych scenariuszy.

Zastosowanie analizy scenariuszy posiada wiele zalet. Do najważniejszych z nich należy elastyczność w wyborze rozpatrywanych przyszłych zmian czynników ryzyka dużo większa niż w przypadku wielu klasycznych metod. Dla przykładu zastosowanie *duration* pozwala ocenić zmianę wartości portfela w wyniku równoległego przesunięcia krzywej stóp procentowych, podczas gdy analiza scenariuszy pozwala rozpatrywać dowolne zmiany struktury terminowej stóp procentowych. Analiza scenariuszy znajduje również ważne zastosowanie w zagadnieniach wyceny instrumentów pochodnych, a w szczególności instrumentów egzotycznych, dla których nie istnieją wzory analityczne na cenę. Wyceny takich wypłat dokonuje się przez analizę i odpowiednie uśrednianie potencjalnych przyszłych przepływów.
Analiza scenariuszy stanowi również najbardziej naturalne podejście do wyceny real options ([37], [38]). Real option oznacza prawo do podjęcia pewnej decyzji biznesowej, np.: realizacji pewnego projektu. Jeżeli jest to projekt, który może przynieść znaczące zyski, lecz jest również obarczony wysokim ryzykiem, zarząd korporacji może zdecydować, by sfinansować kilkuletni program pilotażowy, przy zakończeniu którego zostanie podjęta decyzja o realizacji projektu (co odpowiada wykonaniu

[1] często termin *economic value* używany jest w odniesieniu do ceny wypłaty wyznaczonej metodą *mark-to-model*.

opcji) lub rezygnacji z niego (co odpowiada sytuacji, gdy opcja wygasa i nie jest wykonywana). Ceną wykonania jest kapitał potrzebny do sfinansowania całego projektu, w sytuacji gdy podjęta zostanie decyzja o jego realizacji, zaś instrumentem podstawowym jest przychód z tytułu realizacji projektu. Projekt będzie realizowany, jeżeli przychód prognozowany na końcu okresu pilotażowego przekroczy koszty realizacji. Datę zapadalności tej opcji stanowi koniec okresu pilotażowego. Dla zarządu korporacji interesująca jest cena opcji, która oznacza ile należy zainwestować w projekt pilotażowy. Do oceny wartości instrumentu podstawowego, tzn. wartości projektu, stosuje się analizę scenariuszy. Metoda ta pozwala w elastyczny sposób uwzględnić rozmiary produkcji i poziom rozwoju technologii, określić skutki zdarzeń ekstremalnych, a w przypadku scenariuszy wielookresowych, rozpatrzyć wpływ rozwoju sytuacji rynkowej na strategiczne decyzje kierowników projektu [40]. Autorzy cytowanej pracy podkreślają również, że w oszacowaniu wartości projektu biznesowego zwykle uwzględnia się dziesiątki a czasem nawet setki zmiennych np.: koszty stałe, operacyjne, poziom gotowości technologii, popyt, podaż, wpływ konkurencji, etc. Alternatywę dla analizy scenariuszy mogłoby stanowić rozważanie drzew dwumianowych zawierających różne trajektorie ewolucji tych czynników. Jednakże rozpatrywanie drzew z setkami zmiennych oraz szacowanie łącznych rozkładów ich wartości nastręcza trudności obliczeniowe i nie znajduje wsparcia w dokumentach przygotowywanych w ramach planowania biznesowego.

Omówimy teraz strukturę tego rozdziału. W podrozdziale 2.1 rozważamy zagadnienie wyceny portfela europejskich opcji barierowych na akcje. Określamy cenę w oparciu o „lokalne reguły wyceny" i indukcję wsteczną. Podejście to stanowi przykład metody wyceny przez analizę scenariuszy, której opisaniu poświęcona jest dalsza część tego rozdziału. Celem podrozdziału 2.2 jest uzyskanie wyników, które umożliwiających przeprowadzenie jednego kroku indukcji w przypadku wyceny dowolnej wypłaty w ogólnym modelu rynku z czasem dyskretnym. Rozważamy ogólną przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, ustalamy dowolne σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, dowolny niepusty zbiór $\mathcal{U} \in \mathcal{G}$ oraz funkcję $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$. Umotywowani ideą wyceny zaproponowaną w poprzednim podrozdziale definiujemy Z-warunkową wartość oczekiwaną oraz podajemy warunek konieczny i wystarczający na to, by istniała Z-warunkowa wartość oczekiwana dowolnej ograniczonej zmiennej losowej (twierdzenie 2.2.11). Najważniejsze z perspektywy zastosowania w następnym podrozdziale jest twierdzenie 2.2.20 poświęcone istnieniu, jednoznaczności i postaci Z-warunkowej wartości oczekiwanej dowolnej zmiennej losowej X pod warunkiem $\mathcal{G}$. W podrozdziale 2.3 na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ wprowadzamy filtrację $\mathbb{F}$ i badamy własności procesów $\mathbf{Z}$-uśrednienia dowolnych zmiennych losowych. W twierdzeniu 2.3.10 pokazujemy, jak z faktu istnienia procesu $\mathbf{Z}$-uśrednienia wywnioskować jego postać, zaś w twierdzeniu 2.3.15 dowodzimy, że dla ograniczonej z dołu zmiennej losowej X proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia istnieje i jest martyngałem względem pewnej miary $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$. W podrozdziale 2.4 rozważamy ogólny model rynku z czasem dyskretnym. Wprowadzamy pojęcia: ciągu reprezentującego subiektywne prognozy i schematu wyceny oraz określamy co oznacza, że schemat wycenia wypłatę przez analizę scenariuszy. Głównym wynikiem pierwszej części tego podrozdziału jest twierdzenie 2.4.10, w którym podajemy warunek konieczny i wystarczający na to, by ciąg reprezentujący subiektywne prognozy był schematem wyceny. W drugiej części tego podrozdziału rozważamy następujący problem: dla dowolnej ustalonej wypłaty X wskazać schematy dopuszczalne dla wyceny X tzn. takie, które pozwalają wycenić X przez analizę scenariuszy. Jeżeli schemat wyceny $\mathbf{Z}$ wycenia X, to otrzymany proces ceny nazywamy procesem ceny X zgodnym z $\mathbf{Z}$. W stwierdzeniu 2.4.17 podajemy warunek wystarczający na to, by ciąg reprezentujący subiektywne prognozy był schematem dopuszczalnym dla wyceny X i przy tym warunku wyznaczamy wzór na proces ceny X zgodny z tym ciągiem. Głównym wynikiem jest tw. 2.4.20, w którym dowodzimy, że proces ceny X zgodny z $\mathbf{Z}$ jest $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$-martyngałem wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{Z}$ jest schematem dopuszczalnym dla wyceny X oraz X i $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ mają tower property względem $\mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{F}_t$ dla $t = 1, \ldots, T$ (patrz def. 2.4.18). Podrozdział kończymy twierdzeniem 2.4.21, w którym dowodzimy, że dowolny proces ceny arbitrażowej dowolnej wypłaty można otrzymać metodą wyceny przez analizę scenariuszy.

2.1 Przykład wyceny przy zastosowaniu analizy scenariuszy

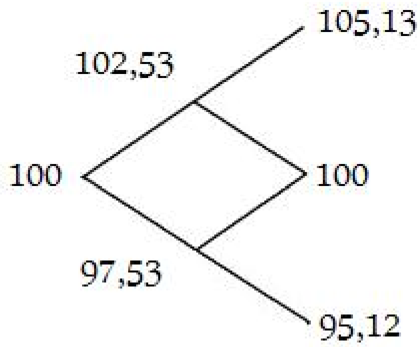
W skończonym modelu rynku rozważymy zagadnienie wyceny portfela europejskich opcji barierowych na akcje. Założymy, że dostępne jest *volatility* cen akcji, w oparciu o które budujemy drzewo dwumianowe procesu cen. Następnie rozszerzamy model wyceny o „ekstremalne” scenariusze. Określimy wyróżnione zbiory zdarzeń obserwowalnych do chwili t, $t \in \{0, 1, 2\}$ i dla każdego z tych zdarzeń określimy „lokalną regułę wyceny” przez przyporządkowanie zdarzeniu miary martyngałowej. Następnie zademonstrujemy, jak stosować indukcję wsteczną, by przy pomocy wybranych miar martyngałowych skonstruować proces ceny arbitrażowej wypłaty z portfela opcji.
Rozważmy sytuację inwestora, który jest zainteresowany nabyciem za pół roku akcji spółki ABC. Pewna instytucja finansowa proponuje klientowi zabezpieczenie przed wzrostem cen akcji spółki ABC, oferując produkt, którego nabycie jest równoważne z zajęciem:
- długiej pozycji w europejskiej opcji kupna na akcje spółki ABC, at-the-money[2], z terminem wykonania za pół roku oraz z barierą up-and-out na poziomie 125[3]
- krótkiej pozycji w 20 binarnych opcjach sprzedaży na akcje spółki ABC, z ceną wykonania 70, z terminem wykonania za pół roku.[4]
Jeżeli inwestor jest zainteresowany nabyciem za pół roku akcji spółki ABC, to obecna w portfelu opcja call daje mu pewne zabezpieczenie przed nadmiernym wzrostem ceny tej akcji, natomiast bariera oraz opcje binarne obniżają koszt tego portfela. Jaka jest uczciwa cena opisanego powyżej produktu? Załóżmy, że z danych rynkowych oszacowano kwartalną zmienność akcji spółki ABC na poziomie $\sigma = 0,025$ oraz, że do wyceny użyto modelu CRR (patrz przykład 1.1.3) z czasem $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}$

[2]określenie to oznacza, że cena wykonania opcji (ang. *strike*) jest równa bieżącej cenie instrumentu podstawowego,

[3]przy tak zdefiniowanej barierze opcja wygasa, jeżeli istnieje moment między chwilą początkową, a datą wykonania opcji, w którym cena akcji będzie równa co najmniej 125,

[4]strona zajmująca krótką pozycja w jednej binarnej opcji sprzedaży z ceną wykonania 70, jest zobowiązana zapłacić 1, jeżeli w chwili wykonania opcji cena akcji nie przekracza 70.

(jednostka czasu oznacza kwartał), procesem rachunku bankowego $B_t \equiv 1$ dla $t \in \mathcal{T}$ oraz procesem ceny akcji spółki ABC zadanym wzorami: $S_0 = 100 > 0$, $S_{t+1} = S_t U_{t+1}$, $t = 0, 1$, gdzie U_t są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie $\mu_{U_t}(\{e^{\sigma}\}) = 1 - \mu_{U_t}(\{e^{-\sigma}\}) \in (0,1)$, gdzie $\sigma = 0,025$ oznacza kwartalną zmienność ceny akcji. Wprowadźmy oznaczenia: $u = e^{\sigma}$, $d = e^{-\sigma}$ oraz $p = \frac{1-d}{u-d}$. Liczba u (odp. d) oznacza wielkość względnego wzrostu (odp. spadku) ceny akcji w jednym okresie czasu, zaś p jest prawdopodobieństwem wzrostu przy mierze martyngałowej w modelu CRR.
Proces cen akcji przestawiono na drzewku:

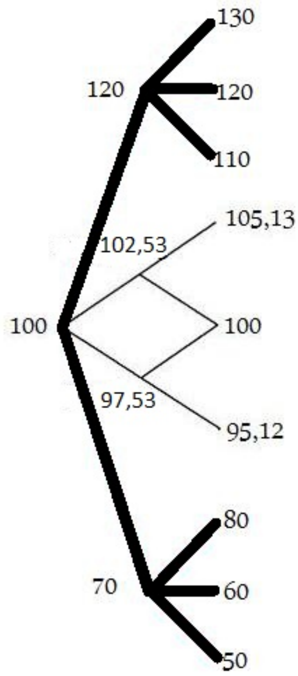


Opisany powyżej instrument możemy w tym modelu utożsamić z wypłatą daną wzorem:

$$X = (S_2 - 100)^+ \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{u \in \mathcal{T}} S_u < 125\}} - 20 \cdot \mathbf{1}_{\{S_T < 70\}}. \tag{2.1}$$

Ponieważ model CRR jest zupełny, cena arbitrażowa X jest jednoznacznie wyznaczona i wynosi $\Pi_0(X) = 100(u^2 - 1)p^2 \approx 1,2499$. Oznaczmy tę liczbę przez $\Pi_0^{CRR}(X)$.

Ze względu na „niską"wartość zmienności proces ceny akcji w modelu nigdy nie osiąga bariery, ani nie schodzi do poziomu 70, poniżej którego nabywca opcji byłby zobowiązany dokonać wypłaty z 20 opcji binarnych na rzecz sprzedającego. A zatem w rozważanym powyżej modelu CRR cena kontraktu X jest identyczna z ceną europejskiej waniliowej opcji kupna, at-the-money, z terminem wykonania za pół roku. W szczególności wyceniając w tym modelu, nie uwzględniamy wpływu, jaki na cenę powinny mieć opcje binarne i bariera.
Aby „skorygować" model w taki sposób, by uwzględnione było ryzyko „dużych" zmian cen akcji, których nie otrzymuje się z modelu CRR przy danym σ, możemy rozszerzyć model o dodatkowe scenariusze związane z ekstremalnym wzrostem oraz ekstremalnym spadkiem ceny akcji. Będziemy teraz postępować zgodnie z ogólnym schematem analizy scenariuszy, który opisaliśmy nieco wcześniej w tym rozdziale.
Określamy scenariusze, których możliwość zajścia chcemy uwzględnić. W naszej sytuacji będą to wszystkie ścieżki z rozważanego powyżej modelu CRR oraz nowe ścieżki, które na poniższym drzewku zaznaczono pogrubionymi liniami.



Wprowadzając te dodatkowe scenariusze, otrzymujemy niezupełny model rynku z czasem dyskretnym $\mathcal{T} = \{0, 1, 2\}$, który możemy zrealizować na skończonej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, gdzie $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{10}\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, dla $i = 1, \ldots, 10$, przy czym $(p_1, \ldots, p_{10})$ jest dowolnym ustalonym wektorem liczb dodatnich o sumie równej 1. Z teorii wyceny arbitrażowej wynika, że z punktu widzenia wyceny istotne jest jedynie to, że $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$ dla każdego i natomiast nie ma znaczenia, ile wynoszą prawdopodobieństwa poszczególnych zdarzeń. Miary probabilistyczne będziemy utożsamiać z wektorami z $\mathbb{R}^{10}$ o nieujemnych współczynnikach, które sumują się do 1. Wypłaty w chwili 2 również utożsamiamy z $\mathbb{R}^{10}$.
Niech $S = (S^0, S^1)$ będzie procesem stochastycznym takim, że $S^0 \equiv 1$ oraz

$$S_0^1 = 100, \;\; S_1^1(\omega_i) = \begin{cases} 120 & \text{dla } i = 1,2,3 \\ 100u & \text{dla } i = 4,5, \\ 100d & \text{dla } i = 6,7, \\ 70 & \text{dla } i = 8,9,10 \end{cases}$$

i $S_2^1(\omega_1) = 130$, $S_2^1(\omega_2) = 120$, $S_2^1(\omega_3) = 110$, $S_2^1(\omega_4) = 100u^2$, $S_2^1(\omega_5) = S_2^1(\omega_6) = 100$, $S_2^1(\omega_7) = 100d^2$, $S_2^1(\omega_8) = 80$, $S_2^1(\omega_9) = 60$, $S_2^1(\omega_{10}) = 50$. Określmy filtrację $\{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$ w sposób następujący: $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{S_1^0, S_1^1\})$, $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. Przez Φ oznaczmy zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^2$.
W ten sposób skonstruowaliśmy model rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$.
Jako wynik analizy scenariuszy, chcemy otrzymać proces ceny arbitrażowej wypłaty X. Dlaczego interesuje nas proces ceny, a nie tylko cena w chwili początkowej? Cena początkowa instrumentu finansowego jest traktowana jako tzw. *book value* - wartość księgowa danego aktywa. Od momentu zakupienia do chwili rozliczenia danego kontraktu jego wartość rynkowa może się zmieniać, podczas gdy wartość księgowa na

ogół pozostaje stała. Z punktu widzenia zarządzania ryzykiem dużo ważniejsza jest informacja, jaka jest w danej chwili wartość rynkowa danego instrumentu[5], która może znacznie odbiegać od wartości księgowej. Aby unikać takich rozbieżności Komitet Bazylejski wymaga, aby wartość pozycji instytucji finansowej była na bieżąco szacowana, przy czym zalecana jest metodologia *mark-to-market*. W przypadku instrumentów OTC trzeba stosować inne metody, np.: wycenę w modelu czy analizę scenariuszy. Właśnie dlatego dokonując wyceny przez analizę scenariuszy będziemy zmierzali do otrzymania całego procesu ceny, aby wyznaczyć, jak może kształtować się wartość instrumentu X w przyszłości, w zależności od rozwoju sytuacji na rynku i założeń modelowych.
Przed określaniem „reguł wyceny”, które doprowadzą nas do konstrukcji procesu ceny arbitrażowej musimy najpierw sprawdzić, czy otrzymany model rynku jest wolny od arbitrażu. W tym celu wystarczy uzasadnić, że zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ jest niepusty. Wykonując elementarne rachunki otrzymujemy jeden z wielu możliwych równoważnych opisów zbioru miar martyngałowych:

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \left\{ (p_1, \dots, p_{10}) : \begin{array}{l} p_1 = \frac{3}{2}aq, \\ p_2 = \frac{3}{2}(1-2a)q, \\ p_3 = \frac{3}{2}aq, \\ p_4 = \left(1 - \frac{5}{2}q\right)p^2, \\ p_5 = \left(1 - \frac{5}{2}q\right)p(1-p), \\ p_6 = \left(1 - \frac{5}{2}q\right)p(1-p), \\ p_7 = \left(1 - \frac{5}{2}q\right)(1-p)^2, \\ p_8 = qb, \\ p_9 = q(2-3b), \\ p_{10} = q(2b-1) : \\ 0 < a < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < b < \frac{2}{3},\ 0 < q < \frac{2}{5}, \\ p = \frac{1-d}{u-d},\ d^{-1} = u = e^{\sigma},\ \sigma = 0,0025 \end{array} \right\}. \tag{2.2}$$

Drugim etapem analizy scenariuszy jest określenie „reguł wyceny”, które dla dowolnej chwili $t \in \mathcal{T}$ powinny opierać się na wiedzy dostępnej do chwili t, modelu przyszłego zachowania rynku skorygowanym o subiektywne prognozy[6] inwestora oraz na jego nastawieniu do ryzyka. Zauważmy, że w chwili $t = 2$ cena wypłaty jest zdeterminowana przez stan rynku i nie zależy ani od subiektywnych prognoz inwestora „na przyszłość” ani od jego nastawienia do ryzyka. Wynika stąd, że reguły wyceny należy określić dla $t \in \{0, 1\}$. Określmy zbiory:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_0 &= \{\Omega\} \\ \mathcal{U}_1 &= \{\{S_1^1 = 120\}, \{S_1^1 = 100u\}, \{S_1^1 = 100d\}, \{S_1^1 = 70\}\} \end{aligned}$$

Elementy zbioru $\mathcal{U}_t$ interpretujemy jako zbiory scenariuszy modelowych z historią zaobserwowaną do chwili t, dla których chcemy określić reguły wyceny. Precyzyjniej, dla każdej chwili t chcemy określić zmienną losową, która będzie stała na każdym

[5]przez wartość rynkową instrumentu rozumie się na ogół cenę, po której można sprzedać dany instrument

[6]w terminologii praktyków funkcjonuje pojęcie *view*

zdarzeniu z $\mathcal{U}_t$. Tę zmienną losową będziemy interpretować, jako cenę wypłaty w chwili t wynikającą z modelowego przyszłego zachowania rynku skorygowanego o subiektywne prognozy inwestora oraz jego nastawienie do ryzyka uzależnione m.in. od zaobserwowanej historii.
Wyznaczmy najpierw przedziały cen arbitrażowych wypłaty X dla poszczególnych zdarzeń ze zbiorów $\mathcal{U}_t$ dla $t \in \mathcal{T}$.
Wypłata X dana wzorem (2.1) jest w modelu $\mathcal{M}$ utożsamiana z wektorem $(0, 20, 10, 100(u^2 - 1), 0, 0, 0, 0, -20, -20)$. Dla dowolnej miary martyngałowej $\mathbb{P}^*$ zadanej przez liczby a, b, q według opisu podanego w (2.2) zachodzą równości

$$E_{\mathbb{P}^*}X = \Pi_0^{CRR}(X) + q\big[10 - 250(u^2 - 1)p^2 - 45a + 20b\big]. \tag{2.3}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*}(X|A) = \begin{cases} 20 - 30a & \text{dla } A = \{S_1^1 = 120\}, \\ 100(u^2 - 1)p & \text{dla } A = \{S_1^1 = 100u\}, \\ 0 & \text{dla } A = \{S_1^1 = 100d\}, \\ -20(1 - b) & \text{dla } A = \{S_1^1 = 70\}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Z (2.3) i z twierdzenia 1.1.24 wynika, że X nie jest wypłatą osiągalną. Z twierdzenia 1.1.17 otrzymujemy zbiór cen arbitrażowych X w chwili 0:

$$\Xi_0(X) = (-1, \Pi_0^s(X)),$$

przy czym $\Pi_0^s(X) \approx 6,67$.
Jeden z naturalnych pomysłów na regułę wyceny może być następujący: dla każdego $t \in \{0, 1\}$ i dla każdego zdarzenia $A \in \mathcal{U}_t$ wskazać miarę martyngałową $\mathbb{P}_A^*$ i w ten sposób określić cenę wypłaty X w chwili t, jeżeli zajdzie zdarzenie A wzorem $E_{\mathbb{P}_A^*}(X|A)$. Ponadto cena arbitrażowa wypłaty X w chwili 2 jest jednoznacznie wyznaczona i wynosi $X(\omega)$. Wybór miary martyngałowej dla zdarzenia powinien być uzależniony od subiektywnych prognoz inwestora odnośnie rozwoju sytuacji na rynku i od jego nastawienia do ryzyka. W ten sposób przy określaniu procesu ceny uwzględniane są obie składowe, tzn.:
1. parametry modelu wyznaczone z danych (np. historycznych), 2. przesłanki wynikające z tendencji rynkowych i bieżącej sytuacji, np. poglądy odnośnie rozwoju koniunktury, czy oczekiwania odnośnie kształtowania się czynników ryzyka.
Określenie w jaki sposób wybrać miarę martyngałową zależnie od subiektywnych prognoz i nastawienia do ryzyka inwestora wykracza poza ramy tej pracy. Ta część reguł decyzyjnych podejmowanych przy wycenie jest pozostawiona dla specjalistów, którzy dysponują głęboką wiedzą ekonomiczną, doświadczeniem w zarządzaniu ryzykiem oraz rozumieniem rynkowej specyfiki wycenianych instrumentów.

Rozważmy przypadek pewnego inwestora, dla którego wpływ nastawienia do ryzyka i subiektywnych prognoz na wycenę jest modelowany przez funkcje $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$ określone wzorem:

$$Z^t(A) = \mathbb{P}^t \text{ dla } A \in \mathcal{U}_{t-1},\ t = 1, 2, \tag{2.5}$$

gdzie miara $\mathbb{P}_1$ (odp. $\mathbb{P}_2$) dana jest wzorem (2.2) dla

$$a = \frac{50,4 + 5\Pi_0^{CRR}(X)(\Pi_0^{CRR}(X) - 0,7)}{108},\ b = \frac{11}{20},\ q = \frac{2,4}{5\Pi_0^{CRR}(X)}, \tag{2.6}$$

$$\left(\text{odp. } a = \frac{1}{30},\ b = \frac{13}{20},\ q = \frac{1}{5}\right). \tag{2.7}$$

Zgodnie z pomysłem opisanym powyżej definiujemy kandydata na proces ceny arbitrażowej wzorami: $C_{t-1} := E_{\mathbb{P}^t}(X|\mathcal{F}_{t-1})$ dla $t = 1,2$ oraz $C_2 = X$. Pokażemy, że istnieje arbitraż na rynku rozszerzonym o proces $C = (C_t)_{t\in\mathcal{T}}$, tzn. rynku $\mathcal{M}' = (S', \Phi')$, gdzie $S' = (S^0, S^1, C)$, a Φ jest zbiorem strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^3$.
Określmy ciąg wektorów prognozowalnych:

$$\xi_1 = (0,0,0), \quad \xi_1 = \left(40 + \frac{1}{2}, -\frac{2}{5}, 1\right), \quad \xi_2 = (V_1(\xi), 0, 0).$$

Sprawdzimy, że ξ jest strategią samofinansującą. Istotnie,
$\xi_1 S_0' = 40 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot 100 - \frac{1}{2} = 0 = \xi_0 S_0'$ oraz $\xi_2 S_1' = V_1(\xi) = \xi_1 S_1'$. Teraz uzasadnimy, że ξ jest strategią arbitrażową. Oczywiście $V_0(\xi) = 0$. Ponadto

$$V_1(\xi) = \xi_1 S_1' = \begin{cases} 40 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot 120 + 19 & = 11,5 \quad \text{gdy } \{S_1^1 = 120\}, \\ 40 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot S_0 u + S_0(u^2 - 1)p & \approx 2,0189 \quad \text{gdy } \{S_1^1 = 100u\}, \\ 40 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot S_0 d + 0 & \approx 1,4876 \quad \text{gdy } \{S_1^1 = 100d\}, \\ 40 + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} \cdot 70 - 7 & = 5,5 \quad \text{gdy } \{S_1^1 = 70\}. \end{cases}$$

Wynika stąd, że $\mathbb{P}(V_2(\xi) > 0) = 1$, co dowodzi, że ξ jest strategią arbitrażową. A zatem realizacja opisanego powyżej pomysłu nie jest właściwą drogą do połączenia nastawienia do ryzyka z wyborem procesu ceny arbitrażowej wypłaty.

Zaproponujemy inne podejście, które pozwoli skonstruować proces ceny arbitrażowej wypłaty X, który będzie w pewnym sensie zgodny z nastawieniem do ryzyka i subiektywnymi prognozami inwestora opisanymi przez funkcje $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to \mathcal{P}(\mathcal{M})$, $t \in \mathcal{T}_0$ określone w (2.5).
W chwili $t = 2$ definiujemy zmienną losową $V_2 = X$. W chwili $t = 1$ używamy do wyceny miary martyngałowej $\mathbb{P}^2$, wyliczając cenę wypłaty X równą $V_1 = E_{\mathbb{P}^2}(X|\mathcal{F}_1)$. Zmienna losowa V_1 jest „uczciwą" ceną wypłaty X w chwili 1, odpowiadającą nastawieniu do ryzyka opisanemu funkcją Z^2. W chwili $t = 0$ wyliczamy średnią zmiennej V_1 względem miary $\mathbb{P}^1$, definiując $V_0 = E_{\mathbb{P}^1}(V_1|\mathcal{F}_0)$. W ten sposób otrzymujemy proces $V = (V_0, V_1, V_2)$. Proces V można uznać za proces ceny odzwierciedlający nastawienie do ryzyka charakteryzowane ciągiem funkcji (Z^1, Z^2), o ile na rynku rozszerzonym o instrument o cenie V nie istnieje arbitraż. Przedstawimy szkic rozumowania, z którego wynika, że V jest rzeczywiście procesem ceny arbitrażowej wypłaty X.
1. Dla miar $\mathbb{P}^1$, $\mathbb{P}^2$ określonych w (2.6) i (2.7) zdefiniujmy zmienną losową

$$D := E\left(\frac{d\mathbb{P}^1}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_1\right)\frac{\frac{d\mathbb{P}^2}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_1)}.$$

2. Okazuje się, że D jest gęstością pewnej miary martyngałowej $\mathbb{P}^*$.
3. Korzystając z abstrakcyjnego wzoru Bayesa sprawdza się, że $V_t = E_{\mathbb{P}^*}(X|\mathcal{F}_t)$ dla $t = 0, 1, 2$.
W dalszej części tego rozdziału otrzymamy wyniki, z których fakt ten wyniknie jako prosty wniosek.

Celem rozważenia powyższego przykładu było zaprezentowanie idei wyceny przez analizę scenariuszy. Dalsze podrozdziały poświęcimy przeniesieniu tej idei na przypadek ogólny, tzn.:
1. rozważymy model rynku na ogólnej przestrzeni probabilistycznej z filtracją $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$,
2. dopuścimy dowolne zbiory scenariuszy z historią do chwili $t-1$, które będziemy oznaczać przez $\mathcal{U}_{t-1}$, $t \in \mathcal{T}_0$,
3. dopuścimy dowolne funkcje $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to \mathcal{P}_e$.
W sytuacji ogólnej napotkamy trudności techniczne związane z kwestiami całkowalności i istnienia warunkowych wartości oczekiwanych zmiennych losowych względem miar przyporządkowywanych zdarzeniom. Ponadto zbiory $\mathcal{U}_{t-1}$, $t \in \mathcal{T}_0$ mogą w ogólności zawierać zdarzenia, które nie są parami rozłączne. Wyjaśnimy teraz pokrótce dlaczego warto rozważać takie zbiory zdarzeń w kontekście wyceny przez analizę scenariuszy. Załóżmy, że dana jest wypłata zależna od procesów cen dwóch akcji, które w modelu rynku oznaczamy przez S^1, S^2. Wówczas w zbiorze $\mathcal{U}_{t-1}$ mogą znaleźć się zdarzenia $\{S^1 > M\}$ oraz $\{S^2 < m\}$, które nie są rozłączne. Spodziewamy się, że aby otrzymać proces ceny wypłaty, przyporządkowanie miar martyngałowych zdarzeniom powinno być zgodne, np. w takim sensie, że jeżeli pewne dwa zbiory mają niepuste przecięcie, to przyporządkowane im miary martyngałowe powinny mieć gęstości, które pokrywają się na przecięciu.

2.2 Z- warunkowa wartość oczekiwana

W poprzednim podrozdziale zaprezentowaliśmy na przykładzie algorytm wyceny, którego danymi wejściowymi były:
-wypłata,
-ciąg zbiorów scenariuszy z historią do chwili t, $t < T$, gdzie T jest horyzontem rynku,
-funkcje przyporządkowujące miary martyngałowe zdarzeniom,
zaś konstrukcja procesu ceny arbitrażowej opierała się na indukcji wstecznej.
Celem tego podrozdziału jest uzyskanie wyników, które umożliwią przeprowadzenie jednego kroku indukcji w przypadku wyceny przez analizę scenariuszy dowolnej wypłaty w ogólnym modelu rynku z czasem dyskretnym.

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ogólną przestrzenią probabilistyczną. Do końca tego podrozdziału ustalmy dowolne σ-ciała $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ oraz dowolny niepusty zbiór $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$. σ-ciało $\mathcal{G}$ (odp. $\mathcal{H}$) pełni rolę zbioru zdarzeń obserwowalnych na rynku do chwili $t-1$ (odp. t). Elementy zbioru $\mathcal{U}$ można traktować, jako zbiory scenariuszy z historią do chwili $t-1$, które zostały wybrane do analizy scenariuszy.

Definicja 2.2.1. *Dowolny ciąg zdarzeń* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *taki, że* $A_i \in \mathcal{U}$ *dla każdego* i *oraz* $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$ *nazwiemy ciągiem reprezentującym zbiór* $\mathcal{U}$ *(w skrócie: ciągiem re-*

prezentującym $\mathcal{U}$).

Ciągi reprezentujące odegrają istotną rolę w konstrukcji Z-warunkowej wartości oczekiwanej, która jest jednym z najważniejszych pojęć tego podrozdziału.

Założenie 2.2.2. *Istnieje co najmniej jeden ciąg reprezentujący zbiór $\mathcal{U}$.*

Bez powyższego założenia również można wprowadzić pojęcie Z-warunkowej wartości oczekiwanej i uzyskać wyniki analogiczne do sformułowanych poniżej. Jednakże stosowanie tych wyników do wyceny przez analizę scenariuszy prowadzi do sytuacji, w której cena wypłaty nie jest wyznaczona jednoznacznie na zbiorze o dodatnim prawdopodobieństwie. Aby uniknąć tej niejednoznaczności, od tej pory przyjmujemy założenie 2.2.2.

Niech $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$ będzie ustaloną funkcją. Wprowadzimy następującą konwencję oznaczeń: miarę probabilistyczną będącą wartością przekształcenia Z na zbiorze $A \in \mathcal{U}$ będziemy oznaczać przez $\mathbb{P}_{Z(A)}$. Zgodnie z interpretacją zasugerowaną powyżej, miarę $\mathbb{P}_{Z(A)}$ należy traktować jako miarę używaną do wyceny przez uśrednienie przyszłych wartości, jeżeli zaszło zdarzenie A.
Zmienne losowe rozpatrywane w dalszej części tego rozdziału będą $\mathcal{F}$-mierzalnymi funkcjami o wartościach w zbiorze $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \cup \{\kappa\}$, gdzie κ oznacza wartość nieokreśloną. Definicję i własności warunkowych wartości oczekiwanych takich zmiennych losowych zamieściliśmy w Dodatku B. Zaczniemy od kluczowej definicji.

Definicja 2.2.3. *Niech dobrze określona zmienna losowa X będzie taka, że $E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ istnieje dla każdego $A \in \mathcal{U}$. Powiemy, że zmienna losowa $X_{Z,\mathcal{G}}$ jest Z-warunkową wartością oczekiwaną zmiennej X pod warunkiem $\mathcal{G}$, jeżeli $X_{Z,\mathcal{G}}$ jest $\mathcal{G}$-mierzalna oraz dla każdego $A \in \mathcal{U}$ zachodzi równość*

$$\mathbf{1}_A X_{Z,\mathcal{G}} = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G}). \tag{2.8}$$

Uwaga 2.2.4. *Zauważmy, że Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$ zależy również od zbioru $\mathcal{U}$ za pośrednictwem funkcji Z. Aby zaznaczyć tę zależność moglibyśmy wprowadzić oznaczenie $X_{\mathcal{U},Z,\mathcal{G}}$, lecz dla uproszczenia notacji będziemy pomijać $\mathcal{U}$.*

Uwaga 2.2.5. *Jeżeli $X \in L^\infty$ lub X jest ograniczona z dołu lub z góry to prawa strona (2.8) jest dobrze określona, lecz Z-warunkowa wartość oczekiwana pod warunkiem $\mathcal{G}$ nie musi istnieć, co wyniknie z przykładu 2.2.8. W dalszej części tego podrozdziału sformułujemy założenia o Z odpowiednie z perspektywy zastosowań do wyceny i przy tych założeniach zbadamy kwestię istnienia Z-warunkowej wartości oczekiwanej zmiennych losowych, dla których dobrze określona będzie prawa strona (2.8).*

Uwaga 2.2.6. *Po prawej stronie równości definiującej Z-warunkową wartość oczekiwaną pojawia się warunkowa wartość oczekiwana, względem miary, która zależy od* *zbioru $A \in \mathcal{U}$. Wykonując obliczenia, w których występują warunkowe wartości oczekiwane względem różnych miar, będziemy bardzo często posługiwać się abstrakcyjnym wzorem Bayesa:*

$$E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}X|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})},$$

który przy najsłabszych rozpatrywanych w tej pracy założeniach dowodzimy w lemacie B.1.16.

STWIERDZENIE 2.2.7. *Jeżeli $X_{Z,\mathcal{G}}$ istnieje, to jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbiorów $\mathbb{P}$-miary zero.*

DOWÓD
Bez straty ogólności, załóżmy przeciwnie, że $X^1_{Z,\mathcal{G}}$, $X^2_{Z,\mathcal{G}}$ są Z-warunkowymi wartościami X pod warunkiem $\mathcal{G}$ takimi, że $\mathbb{P}(\{X^1_{Z,\mathcal{G}} > X^2_{Z,\mathcal{G}}\}) > 0$. Wówczas

$$\mathbb{P}(A \cap \{X^1_{Z,\mathcal{G}} > X^2_{Z,\mathcal{G}}\}) > 0 \tag{2.9}$$

dla pewnego $A \in \mathcal{U}$. Jednocześnie z definicji Z-warunkowej wartości oczekiwanej dostajemy $\mathbf{1}_A X^1_{Z,\mathcal{G}} = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_A X^2_{Z,\mathcal{G}} \quad \mathbb{P}-$p.n., co przeczy (2.9). □

Istnienie Z-warunkowej wartości oczekiwanej jest uzależnione nie tylko od kwestii całkowalności, co wyniknie z poniższego przykładu.

PRZYKŁAD 2.2.8. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, dla której istnieje rodzina zbiorów $\{A_1, \ldots, A_6\}$ będąca $\mathcal{F}$-rozbiciem Ω. Niech $p_i := \mathbb{P}(A_i)$ dla $i = 1, \ldots, 6$. Zdefiniujmy σ-ciała

$$\mathcal{H} = \sigma(\{A_1, \ldots, A_6\}) \text{ oraz } \mathcal{G} = \sigma(\{A_1 \cup A_2, A_3 \cup A_4, A_5 \cup A_6\}).$$

Niech ponadto $\mathcal{U} = \{B_1, B_2\}$, gdzie $B_1 = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ oraz $B_2 = A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6$. Niech $\mathbb{P}_1$ oraz $\mathbb{P}_2$ będą miarami probabilistycznymi o gęstościach danych wzorami

$$\frac{d\mathbb{P}_1}{d\mathbb{P}} = \mathbf{1}_{A_1 \cup A_2} + \frac{p_3 + p_4}{4p_3}\mathbf{1}_{A_3} + \frac{3(p_3 + p_4)}{4p_4}\mathbf{1}_{A_4} + \mathbf{1}_{A_5 \cup A_6}$$

oraz

$$\frac{d\mathbb{P}_2}{d\mathbb{P}} = \mathbf{1}_{A_1 \cup A_2} + \frac{3(p_3 + p_4)}{4p_3}\mathbf{1}_{A_3} + \frac{p_3 + p_4}{4p_4}\mathbf{1}_{A_4} + \mathbf{1}_{A_5 \cup A_6}.$$

Definiujemy funkcję $Z^1 : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$ (odp. $Z^2 : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$) wzorem $Z^1(B_i) = \mathbb{P}_i$, $i = 1, 2$ (odp. $Z^2(B_i) = \mathbb{P}_1$, $i = 1, 2$).
Ustalmy $\mathcal{H}$-mierzalne zmienne losowe $X_1 := \mathbf{1}_{A_1}$ oraz $X_2 := \mathbf{1}_{A_3} - \mathbf{1}_{A_4}$.
Pokażemy, że:
1. Istnieje Z^1-warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej X_1 pod warunkiem $\mathcal{G}$.
2. Nie istnieje Z^1-warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej X_2 pod warunkiem $\mathcal{G}$.
3. Istnieje Z^2-warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej X_2 pod warunkiem $\mathcal{G}$.

1. Korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej pod warunkiem σ-ciała skończenie generowanego (np. [31], rozdział 6.3, przykład 2), łatwo wyliczamy, że $E_{\mathbb{P}_1}(X_1|\mathcal{G})(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}_1(A_1 \cup A_2)} \int_{A_1 \cup A_2} \mathbf{1}_{A_1} d\mathbb{P}_1 \overset{(*)}{=} \frac{p_1}{p_1+p_2}$ dla $\omega \in A_1 \cup A_2$, przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy m.in. z tego, że $\mathbb{P}_1(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = p_1 + p_2$. Wykonując analogiczne rachunki, otrzymujemy $E_{\mathbb{P}_1}(X_1|\mathcal{G})(\omega) = 0$ dla $\omega \in (A_1 \cup A_2)^c$. Podobnie sprawdza się, że $E_{\mathbb{P}_2}(X_1|\mathcal{G}) = \frac{p_1}{p_1+p_2}\mathbf{1}_{A_1 \cup A_2}$. Wynika stąd, że $\mathcal{G}$-mierzalna zmienna losowa $\frac{p_1}{p_1+p_2}\mathbf{1}_{A_1 \cup A_2}$ jest Z^1-warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej X_1 pod warunkiem $\mathcal{G}$.

2. Załóżmy, że istnieje zmienna losowa Y będąca Z^1-warunkową wartością oczekiwaną X_2 pod warunkiem $\mathcal{G}$. Wprost z definicji

$$\mathbf{1}_{B_i} Y = \mathbf{1}_{B_i} E_{\mathbb{P}_i}(X_2|\mathcal{G}) \quad \text{dla } i = 1, 2,$$

skąd

$$\mathbf{1}_{B_1 \cap B_2} E_{\mathbb{P}_1}(X_2|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_{B_1 \cap B_2} E_{\mathbb{P}_2}(X_2|\mathcal{G}). \tag{2.10}$$

Zauważmy, że $B_1 \cap B_2 = A_3 \cup A_4$. Z równości (2.10) otrzymamy sprzeczność. Zaczniemy od wyliczenia $E_{\mathbb{P}_i}(X_2|\mathcal{G})(\omega)$ dla $i = 1, 2$ oraz $\omega \in A_3 \cup A_4 \in \mathcal{G}$.
Zauważmy najpierw, że $\mathbb{P}_1(A_3 \cup A_4) = \mathbb{P}_2(A_3 \cup A_4) = \mathbb{P}(A_3 \cup A_4) = p_3 + p_4$. Stąd

$$E_{\mathbb{P}_1}(X_2|\mathcal{G})(\omega) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_3 \cup A_4)} \int_{A_3 \cup A_4} \left(\mathbf{1}_{A_3} - \mathbf{1}_{A_4}\right) d\mathbb{P}_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$$

dla $\omega \in A_3 \cup A_4$. Wykonując analogiczne rachunki, otrzymujemy $E_{\mathbb{P}_2}(X_2|\mathcal{G})(\omega) = \frac{1}{2}$ dla $\omega \in A_3 \cup A_4$. Zatem

$$\frac{1}{2}\mathbf{1}_{A_3 \cup A_4}(\omega) = \mathbf{1}_{A_3 \cup A_4}(\omega) E_{\mathbb{P}_2}(X_2|\mathcal{G})(\omega) \overset{(2.10)}{=} \mathbf{1}_{A_3 \cup A_4}(\omega) E_{\mathbb{P}_1}(X_2|\mathcal{G})(\omega) = -\frac{1}{2}\mathbf{1}_{A_3 \cup A_4}(\omega).$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że założenie o istnieniu Z^1-warunkowej wartości oczekiwanej X_2 pod warunkiem $\mathcal{G}$ jest fałszywe.

3. Z definicji funkcji Z^2 wynika natychmiast, że dla zmiennej losowej $E_{\mathbb{P}_1}(X_2|\mathcal{G})$ spełnione są równości

$$\mathbf{1}_{B_i} E_{\mathbb{P}_1}(X_2|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_{B_i} E_{\mathbb{P}_{Z^2(B_i)}}(X_2|\mathcal{G}) \quad \text{dla } i = 1, 2,$$

co oznacza, że zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_1}(X_2|\mathcal{G})$ jest Z^2-warunkową wartością oczekiwaną X_2 pod warunkiem $\mathcal{G}$. □

Z powyższego przykładu wynika, że Z-warunkowa wartość oczekiwana może nie istnieć nawet dla ograniczonych zmiennych losowych. Jeżeli dla funkcji Z dobierzemy ograniczoną zmienną losową X taką, że nie istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$, to taką funkcję Z będziemy uznawać za nieodpowiednią z punktu widzenia zastosowań do wyceny. W związku z tym przed przystąpieniem do zbadania kwestii istnienia Z-warunkowej wartości oczekiwanej dowolnej zmiennej

losowej, zdefiniujemy i scharakteryzujemy pewną klasę funkcji Z, które w następnym podrozdziale okażą się odpowiednie dla zastosowań do wyceny.
Przypomnijmy, że ustalone są σ-ciała $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ takie, że $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$, $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ jest zbiorem, dla którego istnieje ciąg reprezentujący.

DEFINICJA 2.2.9. *Powiemy, że funkcja Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$, jeżeli dla dowolnej ograniczonej $\mathcal{H}$-mierzalnej zmiennej losowej X istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$.*

Charakteryzację funkcji reprezentujących zgodny wybór poprzedzimy lematem.

LEMAT 2.2.10. *Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{U}$ zachodzi równość*

$$\mathbf{1}_{A\cap B}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_{A\cap B}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P}-p.n. \tag{2.11}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje miara probabilistyczna $\mathbb{P}_Z$ taka, że dla dowolnego $A \in \mathcal{U}$ zachodzi równość

$$\mathbf{1}_{A}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_{A}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P}-p.n. \tag{2.12}$$

DOWÓD
Zaczniemy od dowodu implikacji $(\Rightarrow)$.
Ponieważ $\mathcal{U}$ spełnia założenie 2.2.2, istnieje ciąg $(A_l)_{l\in\mathbb{N}}$ reprezentujący $\mathcal{U}$. Definiujemy $\mathcal{G}$-rozbicie Ω (def. B.1.8) w sposób następujący:

$$B_1 := A_1 \text{ oraz } B_k := A_k \setminus \bigcup_{l=1}^{k-1} A_l \text{ dla } k > 1. \tag{2.13}$$

Definiujemy zmienną losową

$$D := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}.$$

Jest jasne, że D jest gęstością pewnej miary probabilistycznej względem $\mathbb{P}$, którą oznaczymy przez $\mathbb{P}_Z$. Sprawdzimy, że jest to miara, dla której zachodzi warunek (2.12).
Ustalmy dowolne $A \in \mathcal{U}$. Wówczas

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} &= \mathbf{1}_{A}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{B_k}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A\cap B_k}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{B_k}\mathbf{1}_{A\cap A_k}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \overset{(2.11)}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{B_k}\mathbf{1}_{A\cap A_k}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{A\cap B_k}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_{A}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{1}_{B_k}\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_k)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \\
&= \mathbf{1}_{A}E\left(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right),
\end{aligned}$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z równości $\mathbf{1}_{B_k \cap A_k} = \mathbf{1}_{B_k}$. Stąd oraz z faktu, że $E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G}) = 1$ wynika (2.12).
Przechodzimy do dowodu implikacji $(\Leftarrow)$.
Stosując (2.12) do dowolnych zdarzeń $A, B \in \mathcal{U}$, otrzymujemy $\mathbb{P}$-p.n. równości

$$\mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \text{ oraz } \mathbf{1}_B \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_B \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}.$$

Mnożąc pierwszą (odp. drugą) z nich stronami przez $\mathbf{1}_B$ (odp. $\mathbf{1}_A$), dostajemy (2.11).□

Zachodzi następująca charakteryzacja funkcji reprezentujących zgodny wybór.

TWIERDZENIE 2.2.11. *Funkcja Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych $A, B \in \mathcal{U}$ zachodzi równość (2.11).*

DOWÓD
Zaczniemy od implikacji $(\Rightarrow)$, którą dowiedziemy nie wprost.
Załóżmy, że Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ oraz dla pewnych zdarzeń $A, B \in \mathcal{U}$ nie zachodzi (2.11). Określmy zdarzenie

$$C := \left\{ \mathbf{1}_{A\cap B} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} > \mathbf{1}_{A\cap B} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \right\}$$

i bez straty ogólności załóżmy, że $\mathbb{P}(C) > 0$.
Ponieważ Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$, to istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana ograniczonej $\mathcal{H}$-mierzalnej zmiennej losowej $\mathbf{1}_C$ pod warunkiem $\mathcal{G}$, którą oznaczmy przez Y. A zatem

$$\mathbf{1}_A Y = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(\mathbf{1}_C|\mathcal{G}) \qquad \mathbb{P}-\text{p.n.}$$

oraz

$$\mathbf{1}_B Y = \mathbf{1}_B E_{\mathbb{P}_{Z(B)}}(\mathbf{1}_C|\mathcal{G}) \qquad \mathbb{P}-\text{p.n.}$$

Mnożąc pierwszą (odp. drugą) równość przez $\mathbf{1}_B$ (odp. $\mathbf{1}_A$), otrzymujemy

$$\mathbf{1}_{A\cap B} E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(\mathbf{1}_C|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_{A\cap B} Y = \mathbf{1}_{A\cap B} E_{\mathbb{P}_{Z(B)}}(\mathbf{1}_C|\mathcal{G}),$$

skąd $\mathbb{P}$-p.n. otrzymujemy równość

$$0 = E\left[\mathbf{1}_C\left(\mathbf{1}_{A\cap B} \frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} - \mathbf{1}_{A\cap B} \frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\right)\middle|\mathcal{G}\right].$$

Stąd oraz z lematu B.1.11 wynika, że

$$0 = E\left[\mathbf{1}_C\left(\mathbf{1}_{A\cap B} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} - \mathbf{1}_{A\cap B} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(B)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\right)\right].$$

Ponieważ na zbiorze C zmienna losowa występująca po prawej strony równości jest ściśle dodatnia, otrzymujemy $\mathbb{P}(C) = 0$. Sprzeczność.
Przejdziemy teraz do dowodu implikacji ($\Leftarrow$).
Przez $\mathbb{P}_Z$ oznaczmy miarę spełniającą warunek (2.12), której istnienie wynika z lematu 2.2.10. Ustalmy dowolną $\mathcal{H}$-mierzalną, ograniczoną zmienną losową X. Sprawdzimy, że zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$ jest Z-warunkową wartością oczekiwaną X pod warunkiem $\mathcal{G}$. Dla dowolnego zdarzenia $A \in \mathcal{U}$, korzystając z abstrakcyjnego wzoru Bayesa i z (2.12), dostajemy

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G}) &= E\left[\mathbf{1}_A \frac{\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} X \middle| \mathcal{G}\right] = E\left[E\left(\mathbf{1}_A \frac{\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} X \middle| \mathcal{H}\right) \middle| \mathcal{G}\right] = \\
&\overset{(*)}{=} E\left[\mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} X \middle| \mathcal{G}\right] = E\left[\mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} X \middle| \mathcal{G}\right] \\
&= \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G}),
\end{aligned}$$

przy czym w ($*$) skorzystaliśmy z lematu B.1.11. □
Ważną rolę w dowodzie powyższego twierdzenia odegrała miara $\mathbb{P}_Z$ spełniająca warunek (2.12). Wprowadzimy następującą definicję.

Definicja 2.2.12. *Powiemy, że miara $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ jest miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$, jeżeli:*

1.
$$\mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P} - p.n.,$$

2. $\mathbb{Q} = \mathbb{P}$ *na* $\mathcal{G}$.

Zbadamy kwestię istnienia i jednoznaczności miary zgodnego wyboru. Kandydatem na miarę zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ jest oczywiście skonstruowana w lemacie 2.2.10 miara $\mathbb{P}_Z$, dla której spełniony jest warunek 1. w powyższej definicji. Pozostaje sprawdzić, że $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}$ na $\mathcal{G}$. Niech $(\mathcal{P}_e)_\mathcal{G}$ oznacza zbiór miar probabilistycznych równoważnych $\mathbb{P}$ takich, które są identyczne z $\mathbb{P}$ na $\mathcal{G}$. Z lematu B.2.5 otrzymujemy

Stwierdzenie 2.2.13. $(\mathcal{P}_e)_\mathcal{G} = \left\{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e \ : \ E\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{G}\right) = 1\right\}$.

Z powyższego stwierdzenia oraz z dowodu lematu 2.2.10 dostajemy

Wniosek 2.2.14. *Niech $(A_l)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ będzie dowolnym ustalonym ciągiem reprezentującym $\mathcal{U}$, dla którego $(B_l)_{l=1}^{\infty}$ jest $\mathcal{G}$-rozbiciem Ω zdefiniowanym w (2.13). Zmienna losowa*

$$D := \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_l} \frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_l)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A_l)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \tag{2.14}$$

jest gęstością miary zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Przejdziemy teraz do kwestii jednoznaczności miary zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$.

Stwierdzenie 2.2.15. *Niech $\mathbb{Q}_Z^1$ będzie miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Wówczas $\mathbb{Q}_Z^2$ jest miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{Q}_Z^1 = \mathbb{Q}_Z^2$ na $\mathcal{H}$.*

Dowód
Niech $\mathbb{Q}_Z^1$ i $\mathbb{Q}_Z^2$ będą miarami zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Wówczas dla dowolnego $A \in \mathcal{U}$ dostajemy

$$\mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \tag{2.15}$$

Niech $(A_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}$ będzie dowolnym ustalonym ciągiem reprezentującym $\mathcal{U}$, dla którego $(B_l)_{l=1}^{\infty}$ jest $\mathcal{G}$-rozbiciem Ω zdefiniowanym w (2.13). Stosując (2.15) dla $A = A_l$, $l \in \mathbb{N}$, otrzymujemy

$$E\left(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right) = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_l}\mathbf{1}_{A_l} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}$$
$$\sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_l}\mathbf{1}_{A_l} \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = E\left(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right).$$

Zatem z lematu B.2.5 wynika, że $\mathbb{Q}_Z^1 = \mathbb{Q}_Z^2$ na $\mathcal{H}$.
Przechodzimy do dowodu implikacji przeciwnej. Załóżmy, że $\mathbb{Q}_Z^1$ jest miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ oraz, że $\mathbb{Q}_Z^1 = \mathbb{Q}_Z^2$ na $\mathcal{H}$. Wówczas oczywiście $\mathbb{Q}_Z^1 = \mathbb{Q}_Z^2$ na $\mathcal{G}$. Stąd i z lematu B.2.5 wynika, że

$$\frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})},$$

skąd

$$\mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^1}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{Q}_Z^2}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})},$$

co dowodzi, że $\mathbb{Q}_Z^2$ jest miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. □
Okazuje się, że miara zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ nie musi być jednoznacznie wyznaczona na $\mathcal{F}$.

Stwierdzenie 2.2.16. *Załóżmy, że istnieje miara $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}_e$ taka, że $\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}$ nie jest $\mathcal{H}$-mierzalną zmienną losową oraz załóżmy, że $\mathbb{Q}_1$ jest miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Wówczas zmienna losowa*

$$\frac{\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})} E\left(\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right) \tag{2.16}$$

jest gęstością miary zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Ponadto miary $\mathbb{Q}_1$ i $\mathbb{Q}_2$ nie są równe na $\mathcal{F}$.

Dowód
Jest jasne, że zmienna losowa dana wzorem (2.16) jest gęstością pewnej miary probabilistycznej, którą oznaczymy przez $\mathbb{Q}_2$. Zauważmy, że

$$\mathbb{P}\left(\left\{\frac{\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})} = 1\right\}\right) < 1,$$

ponieważ gęstość miary $\tilde{\mathbb{Q}}$ nie jest $\mathcal{H}$-mierzalna. Zatem miara $\mathbb{Q}_2$ nie jest równa $\mathbb{Q}_1$ na $\mathcal{F}$.
Zauważmy, że

$$E\left(\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right) = E\left(\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right).$$

Stąd i z lematu B.2.5 wiemy, że miara $\mathbb{Q}_2$ jest identyczna z $\mathbb{Q}_1$ na $\mathcal{H}$. Zatem ze stwierdzenia 2.2.15 wynika, że $\mathbb{Q}_2$ jest również miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G},\mathcal{H})$. □

Miara zgodnego wyboru odegra kluczową rolę w konstrukcji Z-warunkowej wartości oczekiwanej.
Do końca tego podrozdziału obowiązuje

Założenie 2.2.17. *Funkcja Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$.*

Ustalmy dowolną miarę zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G},\mathcal{H})$ i oznaczmy ją przez $\mathbb{P}_Z$. Ustalmy ponadto dowolną $\mathcal{H}$-mierzalną zmienną losową X. Dowiedziemy teraz stwierdzenia, z którego wyniknie warunek konieczny i wystarczający na to, by istniała warunkowa wartość oczekiwana występująca po prawej stronie równości (2.8).

Stwierdzenie 2.2.18. *Dla dowolnego $A \in \mathcal{U}$ zachodzą równości:*
(*i*) $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_Z}(X^+|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^+|\mathcal{G})$ $\mathbb{P}-p.n.$
(*ii*) $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_Z}(X^-|\mathcal{G}) = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^-|\mathcal{G})$ $\mathbb{P}-p.n.$

Dowód
Pokażemy (i)
Stosując najpierw lemat B.1.16, a następnie stwierdzenie B.1.12, otrzymujemy

$$E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(\mathbf{1}_A X^+|\mathcal{G}) = E\left(X^+\mathbf{1}_A\frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\middle|\mathcal{G}\right) = E\left(X^+\mathbf{1}_A\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{H})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\middle|\mathcal{G}\right) = E_{\mathbb{P}_Z}(\mathbf{1}_A X^+|\mathcal{G}),$$

gdyż Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ i korzystamy z lematów 2.2.10, B.1.16 i stwierdzenia B.1.12, skąd wynika (i)
Dowód (ii) pominiemy, gdyż przebiega on analogicznie. □

Stwierdzenie 2.2.19.

(*i*) *$E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy zmienna losowa $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ jest dobrze określona dla każdego $A \in \mathcal{U}$.*
(*ii*) *$E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$ jest skończoną zmienną losową wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ jest skończoną zmienną losową dla każdego $A \in \mathcal{U}$.*

Dowód

Pokażemy (i).

Zaczniemy od dowodu implikacji $(\Rightarrow)$.

Ustalmy dowolne $A \in \mathcal{U}$. Z założenia wynika, że dla prawie każdego $\omega \in \Omega$ co najwyżej jedna z wartości $E_{\mathbb{P}_Z}(X^+|\mathcal{G})(\omega)$ oraz $E_{\mathbb{P}_Z}(X^-|\mathcal{G})(\omega)$ przyjmuje wartość ∞. Stąd i ze stwierdzenia 2.2.18 wynika, że dla prawie każdego $\omega \in A$ co najwyżej jedna z wartości $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^+|\mathcal{G})(\omega)$ oraz $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^-|\mathcal{G})(\omega)$ jest równa ∞, co oznacza, że zmienna losowa $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ jest dobrze określona.

Przechodzimy do dowodu implikacji $(\Leftarrow)$.

Niech $(A_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{U}$ będzie ciągiem reprezentującym $\mathcal{U}$ wybranym do konstrukcji miary o gęstości D danej w (2.14) oraz niech $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ będzie $\mathcal{G}$-rozbiciem Ω zdefiniowanym w oparciu o ciąg $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ tak, jak w (2.13). Wówczas

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}_Z}(X^+|\mathcal{G}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} E_{\mathbb{P}_Z}(X^+|\mathcal{G}) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \mathbf{1}_{A_k} E_{\mathbb{P}_Z}(X^+|\mathcal{G}) \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \mathbf{1}_{A_k} E_{\mathbb{P}_{Z(A_k)}}(X^+|\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} E_{\mathbb{P}_{Z(A_k)}}(X^+|\mathcal{G}), \end{aligned}$$

przy czym w $(*)$ korzystaliśmy z tego, że $B_k \subseteq A_k$ dla $k \in \mathbb{N}$, a w $(**)$ z (i) w stwierdzeniu 2.2.18. Przeprowadzając analogiczne rachunki dla X^-, dostajemy

$$E_{\mathbb{P}_Z}(X^-|\mathcal{G}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} E_{\mathbb{P}_{Z(A_k)}}(X^-|\mathcal{G}).$$

Niech $C_k := \{\mathbf{1}_{B_k} E_{\mathbb{P}_{Z(A_k)}}(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \cap \{\mathbf{1}_{B_k} E_{\mathbb{P}_{Z(A_k)}}(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}$, $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ $B_k \subseteq A_k$, z założenia wynika, że $\mathbb{P}(C_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Stąd

$$\mathbb{P}\Big(\{E_{\mathbb{P}_Z}(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \cap \{E_{\mathbb{P}_Z}(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\Big) = 0,$$

co implikuje istnienie $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$.

Dowód (ii) pomijamy, gdyż przebiega on analogicznie. □

Sformułujemy teraz główny wynik dotyczący istnienia, jednoznaczności i postaci Z-warunkowej wartości oczekiwanej.

Twierdzenie 2.2.20. *Niech $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{G}$ będzie funkcją reprezentującą zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ oraz niech $\mathbb{P}_Z$ będzie dowolną miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Niech ponadto X będzie dowolną $\mathcal{H}$-mierzalną zmienną losową. Następujące warunki są równoważne:*

(i) Istnieje zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$

(ii) Istnieje Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$.

Ponadto, jeżeli spełnione są powyższe warunki, to Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$ jest $\mathbb{P}$-p.n. równa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$.

Dowód

Zaczniemy od dowodu implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.

Ze stwierdzenia 2.2.19 wiemy, że zmienna losowa $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ jest dobrze określona dla dowolnego $A \in \mathcal{U}$. Stąd oraz ze stwierdzenia 2.2.18 wynika, że dla zmiennej losowej $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$ zachodzi (2.8), co dowodzi, że $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$ jest Z-warunkową wartością X-pod warunkiem $\mathcal{G}$.
Przechodzimy do dowodu implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$.
Istnienie Z-warunkowej wartości oczekiwanej implikuje, że zmienna losowa $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ jest dobrze określona dla dowolnego $A \in \mathcal{U}$. Stąd i ze stwierdzenia 2.2.19 wynika istnienie zmiennej losowej $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$.
Ponadto z dowodu implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ oraz ze stwierdzenia 2.2.7 wynika, że Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$ jest $\mathbb{P}$-p.n. równa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$.
□

UWAGA 2.2.21. *Powyższe twierdzenie okaże się bardzo przydatne w następnym podrozdziale, gdzie napotkamy sytuacje, w których będziemy potrzebowali istnienia Z-warunkowych wartości oczekiwanych zmiennych losowych, dla których możliwe będzie pokazanie, że istnieje zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_Z}(X|\mathcal{G})$, natomiast nie będziemy w stanie zapewnić, że zachodzi mocniejszy warunek, np. całkowalność względem miary zgodnego wyboru, z którego również wynikałoby istnienie Z-warunkowej wartości oczekiwanej.*

Z twierdzenia 2.2.20, otrzymujemy natychmiast

WNIOSEK 2.2.22. *Niech $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$ będzie funkcją reprezentującą zgodny wybór względem $\mathcal{H}$, niech $\mathbb{Q}$ będzie dowolną miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ oraz niech X będzie $\mathcal{H}$-mierzalną zmienną losową całkowalną względem miary $\mathbb{Q}$. Wówczas Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$ istnieje i jest $\mathbb{P}$-p.n. równa zmiennej losowej $E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G})$.*

DOWÓD
Całkowalność X względem miary $\mathbb{Q}$ implikuje istnienie zmiennej losowej $E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G})$.
Teraz teza wynika natychmiast z implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$ w twierdzeniu 2.2.20. □

Podamy teraz kilka rezultatów, dzięki którym uprościmy wiele rachunków, w których wykorzystywany będzie abstrakcyjny wzór Bayesa. Z wyników tych będziemy korzystać w następnym podrozdziale.

LEMAT 2.2.23. *Niech $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e$ oraz niech $\tilde{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$ będzie miarą o gęstości danej wzorem*

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = \frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}.$$

Jeśli dla dobrze określonej zmiennej losowej Y istnieje $E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G})$, to istnieje $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(Y|\mathcal{G})$ i zachodzi równość $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(Y|\mathcal{G}) = E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G})$.

DOWÓD

$$E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G}) \overset{(a)}{=} E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} Y \middle| \mathcal{G} \right) = E\left(\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} Y \middle| \mathcal{G} \right) \overset{(b)}{=} E\left(\frac{\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} Y}{E(\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \middle| \mathcal{G} \right) =: I,$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy z lematu B.1.16, zaś w (b) z tego, że $\tilde{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$. Również z lematu B.1.16 wiemy, że z istnienia zmiennej losowej I wynika istnienie $E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(Y|\mathcal{G})$ oraz zachodzi równość $I = E_{\tilde{\mathbb{Q}}}(Y|\mathcal{G})$, skąd dostajemy tezę. □

STWIERDZENIE 2.2.24. *Niech funkcja $Z : \mathcal{U} \to \mathcal{P}_e$ reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ oraz niech $\mathbb{P}_Z$ będzie miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. Wówczas istnieje funkcja $\tilde{Z} : \mathcal{U} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$ taka, że:*
1. *Dla dowolnej dobrze określonej zmiennej losowej X następujące warunki są równoważne:*
(i) $E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G})$ istnieje dla każdego $A \in \mathcal{U}$,
(ii) $E_{\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}(X|\mathcal{G})$ istnieje dla każdego $A \in \mathcal{U}$.
Ponadto, gdy spełnione są powyższe warunki, to dla każdego $A \in \mathcal{U}$ zachodzi równość

$$E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X|\mathcal{G}) = E_{\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}(X|\mathcal{G}) \quad \mathbb{P}-\text{ p.n.} \tag{2.17}$$

2. *Miara $\mathbb{P}_Z$ jest miarą zgodnego wyboru $\tilde{Z}$ względem $(\mathcal{G}, \mathcal{H})$. W szczególności funkcja $\tilde{Z}$ reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$.*

DOWÓD
Dowodzimy punkt 1. Definiujemy $\tilde{Z} : \mathcal{U} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$ wzorem

$$\tilde{Z}(A) = \frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} =: \frac{d\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}{d\mathbb{P}}. \tag{2.18}$$

Definicja jest poprawna, tzn. obraz $\tilde{Z}$ jest zawarty w $(\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$, ponieważ obraz Z jest zawarty w $\mathcal{P}_e$. Stosując lemat 2.2.23 do miar $\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}$, $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_{Z(A)}$ i zmiennej losowej X^+ (odp. X^-) otrzymujemy równość

$$E_{\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}(X^+|\mathcal{G}) = E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^+|\mathcal{G}) \left(\text{ odp. } E_{\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}(X^-|\mathcal{G}) = E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^-|\mathcal{G}) \right). \tag{2.19}$$

Dla $A \in \mathcal{U}$ zdefiniujmy zbiory

$$C_A := \{E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \cap \{E_{\mathbb{P}_{Z(A)}}(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}$$

oraz

$$\tilde{C}_A := \{E_{\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \cap \{E_{\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}.$$

Niech X będzie dowolną dobrze określoną zmienną losową.
Jeżeli zachodzi (i) (odp. (ii)), to $\mathbb{P}(C_A) = 0$ (odp. $\mathbb{P}(\tilde{C}_A) = 0$). Stąd i z (2.19) wynika, że spełniony jest warunek (ii) (odp. (i)) oraz zachodzi wzór (2.17).
Dowodzimy punkt 2. Dla dowolnego $A \in \mathcal{U}$, otrzymujemy

$$\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_Z}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right) \overset{(a)}{=} \mathbf{1}_A E\left(\frac{\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\middle|\mathcal{H}\right) \overset{(b)}{=} \mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{\tilde{Z}(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right), \tag{2.20}$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy z definicji miary zgodnego wyboru, a w (b) z definicji funkcji $\tilde{Z}$. Wynika stąd, że $\mathbb{P}_Z$ jest miarą zgodnego wyboru $\tilde{Z}$ względem $\mathcal{H}$, więc na mocy lematu 2.2.10, funkcja $\tilde{Z}$ reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$. □

Z powyższego stwierdzenia wynika, że zamiast badać istnienie Z-warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej X pod warunkiem $\mathcal{G}$, można zdefiniować $\tilde{Z}$ wzorem (2.18) i zbadać istnienie $\tilde{Z}$-warunkowej wartości oczekiwanej dla, gdyż dla każdego $A \in \mathcal{U}$ prawa strona (2.8) jest identyczna dla funkcji Z i $\tilde{Z}$. Ponadto wiemy, że jeżeli funkcja Z reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$, to funkcja $\tilde{Z}$ również reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ oraz istnieje miara, która jest miarą zgodnego wyboru dla obu tych funkcji. Korzyścią płynącą z takiego zastąpienia jest uproszczenie rachunków opartych o abstrakcyjny wzór Bayesa.

W przypadku, gdy obraz funkcji Z jest zawarty w $(\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$, warunek definiujący miarę zgodnego wyboru przyjmuje dla prostszą postać.

Wniosek 2.2.25. *Niech $Z : \mathcal{U} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}}$ będzie funkcją reprezentującą zgodny wybór względem $\mathcal{H}$ i załóżmy, że $\mathbb{Q}$ jest miarą zgodnego wyboru Z względem $(\mathcal{G},\mathcal{H})$. Wówczas dla każdego $A \in \mathcal{U}$ zachodzi równość*

$$\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right) = \mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{H}\right) \qquad \mathbb{P}-p.n.$$

2.3 Procesy Z-uśrednienia zmiennych losowych i ich własności

W tym podrozdziale definiujemy i badamy własności procesów Z-uśrednienia zmiennych losowych. Uzyskane wyniki zostaną zastosowane w następnym podrozdziale do sformułowania metody wyceny wypłat przez analizę scenariuszy.
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ogólną przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, gdzie $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ dla pewnego $T \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy, że $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ oraz $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

Oznaczenie 2.3.1. *Dla zbioru $\mathcal{Q}$ będącego dowolnym podzbiorem $\mathcal{P}_e$ przez $\mathcal{Q}_{\mathcal{G}}$ oznaczać będziemy zbiór miar probabilistycznych*

$$\left\{\tilde{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{G}} \;:\; \exists \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \text{ t. że } \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = \frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\right\}.$$

Wprowadzimy teraz kilka pojęć, z których będziemy korzystać przy konstrukcji procesów **Z**-uśrednienia.

Definicja 2.3.2. *Powiemy, że zbiór $\mathcal{U}_t \subseteq \mathcal{F}_t$ dla pewnego $t \in \mathcal{T}_T = \{0, 1, \ldots, T-1\}$ reprezentuje wybór scenariuszy z historią zaobserwowaną do chwili t, jeżeli istnieje ciąg reprezentujący $\mathcal{U}_t$.*

Od tej pory zakładamy, że dany jest pewien ciąg $\mathbf{U} = (\mathcal{U}_t)_{t\in\mathcal{T}_T}$, gdzie $\mathcal{U}_t$ reprezentuje wybór scenariuszy z historią zaobserwowaną do chwili t, $t \in \mathcal{T}_T$.

Definicja 2.3.3. *Dowolny ciąg funkcji* $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0}$ *takich, że* $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_{t-1}}$ *dla* $t \in \mathcal{T}_0$ *nazwiemy ciągiem reprezentującym subiektywne prognozy. Zbiór ciągów reprezentujących subiektywne prognozy będziemy oznaczać przez* $\mathcal{Z}(\mathbf{U})$.

Dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$ funkcja Z^t przyporządkowuje miary probabilistyczne równoważne $\mathbb{P}$ zdarzeniom z $\mathcal{U}_{t-1}$, co można zinterpretować w sposób następujący: nie ignorujemy przyszłych zdarzeń, których zajście ma dodatnie prawdopodobieństwo w mierze fizycznej $\mathbb{P}$. W związku z tym, że miary z obrazu funkcji Z^t będą używane do konstrukcji ceny w chwili $t-1$, jako Z^t-warunkowej wartości oczekiwanej pod warunkiem $\mathcal{F}_{t-1}$, to zgodnie ze stwierdzeniami 2.2.13 i 2.2.24 wystarczy rozważać funkcje Z^t, które przyporządkowują zdarzeniom miary pokrywające się z $\mathbb{P}$ na $\mathcal{F}_{t-1}$. Istotnie, ze stwierdzenia 2.2.24 wynika

Wniosek 2.3.4. *Dla każdego ciągu funkcji* $\hat{Z}^t : \mathcal{U}_{t-1} \to \mathcal{P}_e$, $t \in \mathcal{T}_0$ *istnieje element* $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{Z}^t)_{t\in\mathcal{T}_0} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *taki, że dla dowolnego* $t \in \mathcal{T}_0$, *dla dowolnej* $\mathcal{F}_t$*-mierzalnej zmiennej losowej* X, *dla której istnieje* $X_{\hat{Z}^t,\mathcal{F}_{t-1}}$, *istnieje również* $X_{\bar{Z}^t,\mathcal{F}_{t-1}}$ *oraz zachodzi równość*

$$X_{\hat{Z}^t,\mathcal{F}_{t-1}} = X_{\bar{Z}^t,\mathcal{F}_{t-1}} \quad \mathbb{P}-\text{p.n.}$$

Wprowadzimy teraz kluczowe pojęcie tego podrozdziału.

Definicja 2.3.5. *Niech* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *oraz niech* X *będzie dowolną zmienną losową. Powiemy, że adaptowany proces* Y *jest procesem* $\mathbf{Z}$*-uśrednienia* X, *jeżeli*
1. $Y_T = X$,
2. $\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z^t(A)}}(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{1}_A Y_{t-1}$ *dla każdego* $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ *i każdego* $t \in \mathcal{T}_0$.

W powyższej definicji zawarty jest opis konstrukcji procesu Y, który jest ciągiem Z-warunkowych wartości oczekiwanych określonym za pomocą indukcji wstecznej w oparciu o zmienną losową X i ciąg funkcji $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0}$. W następnym podrozdziale procesy $\mathbf{Z}$-uśrednienia X będą kandydatami na procesy ceny arbitrażowej X otrzymane przez analizę scenariuszy. Zaczniemy od oczywistej charakteryzacji procesów $\mathbf{Z}$-uśrednienia.

Stwierdzenie 2.3.6. *Niech* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *oraz niech* X *będzie dowolną zmienną losową. Wówczas* Y *jest procesem* $\mathbf{Z}$*-uśrednienia* X *wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są warunki*
1. $Y_T = X$,
2. $Y_{t-1} = (Y_t)_{Z^t,\mathcal{F}_{t-1}}$, *dla każdego* $t \in \mathcal{T}_0$.

Definicja 2.3.7. *Powiemy, że ciąg* $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0}$ *reprezentuje zgodny wybór względem* $\mathbb{F}$, *jeżeli* Z^t *reprezentuje zgodny wybór względem* $\mathcal{F}_t$ *dla* $t \in \mathcal{T}_0$. *Zbiór ciągów* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *reprezentujących zgodny wybór względem* $\mathbb{F}$ *będziemy oznaczać przez* $\mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$.

Zaczniemy od stwierdzenia, w którym dowiedziemy, że jeżeli istnieje proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia X, to jest wyznaczony jednoznacznie.

Stwierdzenie 2.3.8. *Załóżmy, że* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *oraz, że dla pewnej zmiennej losowej* X *istnieje proces* $\mathbf{Z}$*-uśrednienia* X. *Wówczas jest on wyznaczony jednoznacznie w sensie nieodróżnialności.*

Dowód
Niech X będzie dowolną wypłatą i niech $\tilde{Y}, \hat{Y}$ będą dowolnymi procesami **Z**-uśrednienia X. Aby dowieść nieodróżnialności procesów $\tilde{Y}$ i $\hat{Y}$, sprawdzimy przez indukcję wsteczną, że $\tilde{Y}_t = \hat{Y}_t$ dla $t \in \mathcal{T}$.
Dla $t = T$ mamy $\tilde{Y}_T = X = \hat{Y}_T$. Załóżmy, że $\tilde{Y}_t = \hat{Y}_t$ dla pewnego $t \in \mathcal{T}_0$. Pokażemy, że $\tilde{Y}_{t-1} = \hat{Y}_{t-1}$.
Z warunku 2. w definicji 2.3.5 i założenia indukcyjnego wynika, że

$$\tilde{Y}_{t-1} = (\tilde{Y}_t)_{Z^t,\mathcal{F}_{t-1}} = (\hat{Y}_t)_{Z^t,\mathcal{F}_{t-1}} = \hat{Y}_{t-1}. \ \square$$

Dla $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ oraz dowolnej dobrze określonej zmiennej losowej X przez $Y^{X,\mathbf{Z}}$ oznaczać będziemy (o ile istnieje) proces zdefiniowany wzorem

$$Y_t^{X,\mathbf{Z}} = \begin{cases} X & \text{gdy } t = T, \\ E_{\mathbb{P}_{Z^{t+1}}}(Y_{t+1}^{X,\mathbf{Z}}|\mathcal{F}_t) & \text{gdy } t < T, \end{cases} \tag{2.21}$$

przy czym $\mathbb{P}_{Z^t}$ jest dowolną miarą zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$, $t \in \mathcal{T}_0$. Sprawdzimy, że jeżeli dla zmiennej losowej X i ciągu $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$, to jest on procesem **Z**-uśrednienia X. Ponadto wykażemy poprawność powyższej definicji, tzn. sprawdzimy, że dla ustalonej zmiennej losowej X i ciągu $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ procesy (o ile istnieją) określone wzorem (2.21) dla różnych ciągów naturalnych miar zgodnego wyboru są nieodróżnialne.

Stwierdzenie 2.3.9. *Niech $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ oraz niech X będzie dowolną zmienna losową, dla której istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ określony wzorem (2.21) dla $\mathbb{P}_{Z^t}$ będących miarami zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$, $t \in \mathcal{T}_0$.*
(i) *Wówczas $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem **Z**-uśrednienia X.*
(ii) *Niech ponadto $(\hat{\mathbb{P}}_{Z^t})_{t\in\mathcal{T}_0}$ będzie dowolnym ciągiem miar zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$, $t \in \mathcal{T}_0$, dla którego $\hat{Y}$ jest procesem określonym wzorem (2.21) z $\mathbb{P}_{Z^t} = \hat{\mathbb{P}}_{Z^t}$, $t \in \mathcal{T}_0$. Wówczas procesy $Y^{X,\mathbf{Z}}$ oraz $\hat{Y}$ są nieodróżnialne.*

Dowód
Zaczniemy od dowodu (i). Zauważmy, że proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ spełnia warunki 1 i 2 ze stwierdzenia 2.3.6.
1. $Y_T^{X,\mathbf{Z}} = X$,
2. $Y_{t-1}^{X,\mathbf{Z}} = (Y_t^{X,\mathbf{Z}})_{Z^t,\mathcal{F}_{t-1}}$, dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$.
Zatem $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem **Z**-uśrednienia X na mocy stwierdzenia 2.3.6.
Przechodzimy do dowodu (ii). Powtarzając rozumowanie z kroku (i) dla procesu $\hat{Y}$, wnioskujemy, że jest on również procesem **Z**-uśrednienia X. Zatem na mocy stwierdzenia 2.3.8 procesy $Y^{X,\mathbf{Z}}$ oraz $\hat{Y}$ są nieodróżnialne. $\square$
Okazuje się, że istnienie **Z**-uśrednienia X implikuje istnienie procesu $Y^{X,\mathbf{Z}}$.

Twierdzenie 2.3.10. *Niech $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ oraz niech X będzie dowolną zmienną losową, dla której istnieje proces **Z**-uśrednienia. Wówczas istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ określony wzorem (2.21) dla $\mathbb{P}_{Z^t}$ będących miarami zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$, $t \in \mathcal{T}_0$.*

Dowód
Niech Y będzie procesem $\mathbf{Z}$-uśrednienia X, którego istnienie wynika z założenia. Z definicji $\mathbf{Z}$-uśrednienia wynika, że zmienna losowa X jest dobrze określona oraz dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$, istnieje $(Y_t)_{Z^t,\mathcal{F}_{t-1}}$. Przez indukcję wsteczną dowiedziemy, że istnieje proces V spełniający warunki definiujące proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ dany wzorem (2.21). Definiujemy zmienną losową $V_T := X$. Wówczas $V_T = Y_T$. Załóżmy, że zdefiniowaliśmy ciąg zmiennych losowych V_s dla $s = t, \dots, T$ dla pewnego $t \in \mathcal{T}_0$ taki, że $V_T = X$ i jeżeli $t < T$, to $V_{s-1} = (V_s)_{Z^s,\mathcal{F}_{s-1}}$, dla $s = t+1, \dots, T$ oraz $V_s = Y_s$ dla $s = t, \dots, T$. Z implikacji $(ii) \Rightarrow (i)$ w twierdzeniu 2.2.20 wynika, że istnieje zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$, gdzie $\mathbb{P}_{Z^t}$ jest dowolną miarą zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$ oraz zachodzi równość $Y_{t-1} = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Stąd oraz na mocy założenia indukcyjnego, otrzymujemy równość

$$Y_{t-1} = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(V_t|\mathcal{F}_{t-1}),$$

co pozwala zdefiniować zmienną losową $V_{t-1} := E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(V_t|\mathcal{F}_{t-1})$. Wówczas oczywiście również $V_{t-1} = Y_{t-1}$. Zakończyliśmy dowód indukcyjny, z którego wynika istnienie procesu V spełniającego warunki:
1. $V_T = X$,
2. $V_{t-1} = (V_t)_{Z^t,\mathcal{F}_{t-1}}$, dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$.
Stosując implikację $(ii) \Rightarrow (i)$ w twierdzeniu 2.2.20 dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$, wnioskujemy, że proces V spełnia warunki definiujące proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$. Zatem istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ i ponadto $Y_t^{X,\mathbf{Z}} = V_t = Y_t$ dla $t \in \mathcal{T}$. □

Kluczową rolę w badaniu własności procesów $\mathbf{Z}$-uśrednienia zmiennych losowych dla ciągów $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ odegra przekształcenie $W : \mathcal{Z}_c(\mathbf{U}) \to L^0$ określone wzorem

$$W(\mathbf{Z}) = \prod_{t=1}^{T} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right), \tag{2.22}$$

gdzie $\mathbf{Z} = (Z^1, \dots, Z^T) \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ oraz $\mathbb{P}_{Z^t}$ jest dowolną miarą zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$ dla $t \in \mathcal{T}_0$. Poprawność definicji przekształcenia W wynika z tego, że miary zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$ są identyczne na $\mathcal{F}_t$ (stwierdzenie 2.2.15 zastosowane do $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{H} = \mathcal{F}_t$), więc ich warunkowe wartości oczekiwane pod warunkiem $\mathcal{F}_t$ są równe (lemat B.2.5). Sformułujemy i udowodnimy teraz kilka technicznych wyników dotyczących przekształcenia W.

Stwierdzenie 2.3.11. *Dla dowolnego $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ zmienna losowa $W(\mathbf{Z})$ jest gęstością pewnej miary probabilistycznej.*

Dowód
Jest jasne, że $W(\mathbf{Z}) \geq 0$. Wystarczy pokazać, że $EW(\mathbf{Z}) = 1$. Sprawdzimy przez indukcję, że

$$E\left[\prod_{t=1}^{s} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)\right] = 1 \tag{2.23}$$

dla $s = 1, \dots, T$. Teza zachodzi dla $s = 1$, bo $\mathbb{P}_{Z^1}$ jest miarą probabilistyczną. W przypadku, gdy $T = 1$ dowód został zakończony. Rozważmy teraz przypadek, gdy

$T > 1$.
Załóżmy, że (2.23) zachodzi dla pewnego $s < T$ i pokażemy tę równość dla $s+1$. Najpierw sprawdzimy całkowalność zmiennej losowej

$$\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right).$$

Z warunkowej wersji twierdzenia o zbieżności monotonicznej wynika, że

$$\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \lim_{n\to\infty}\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_t\right) \quad \mathbb{P}-\text{p.n.}$$

Stąd i z lematu Fatou

$$\begin{aligned}
E\left[\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)\right] &\le \liminf_{n\to\infty} E\left[\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_t\right)\right]\\
&= \liminf_{n\to\infty} E\left[E\left(\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_t\right)\middle|\mathcal{F}_s\right)\right]\\
&= \liminf_{n\to\infty} E\left[\prod_{t=1}^{s} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_t\right)E\left(E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^{s+1}}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_{s+1}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right)\right]\\
&\le \liminf_{n\to\infty} E\left[\prod_{t=1}^{s} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_t\right)E\left(E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^{s+1}}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_{s+1}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right)\right]\\
&=: \liminf_{n\to\infty} I_n.
\end{aligned}$$

Znajdziemy teraz wspólne ograniczenie górne dla ciągu $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej i faktu, że $\mathbb{P}_{Z^{s+1}} \in (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_s}$, stwierdzamy, że

$$E\left(E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^{s+1}}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_{s+1}\right)\middle|\mathcal{F}_s\right) = 1.$$

Stąd

$$I_n = E\left[\prod_{t=1}^{s} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\wedge n\middle|\mathcal{F}_t\right)\right] \le E\left[\prod_{t=1}^{s} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)\right] = 1$$

na mocy założenia indukcyjnego. Pokazaliśmy, że zmienna losowa

$$\prod_{t=1}^{s+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

jest całkowalna. Podobnie sprawdza się, że dla $s+1$ zachodzi (2.23).
Teza wynika z (2.23) dla $s = T$. □

Oznaczenie 2.3.12. *Dla* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *miarę o gęstości* $W(\mathbf{Z})$ *będziemy oznaczać przez* $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$.

Sformułujemy i udowodnimy teraz serię lematów poświęconych wyliczaniu warunkowych wartości oczekiwanych względem miary $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$.

LEMAT 2.3.13. *Dla dowolnego* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *oraz dowolnego* $t \in \mathcal{T}$ *zachodzi równość*

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \prod_{s=1}^{t} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right).$$

DOWÓD
Indukcja wsteczna. Dla $t = T$ równość wynika z definicji $W(\mathbf{Z})$. W przypadku, gdy $T = 1$ dowód jest zakończony. Rozważmy przypadek $T > 1$. Załóżmy, że dla pewnego $t \in \{0, \dots, T-1\}$ zachodzi równość

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_{t+1}\right) = \prod_{s=1}^{t+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right).$$

Sprawdzimy, że

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \prod_{s=1}^{t} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right).$$

Wyliczamy lewą stronę:

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = E\left[E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_{t+1}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right] = E\left[\prod_{s=1}^{t+1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

przy czym ostatnia równość wynika z założenia indukcyjnego. Korzystając z tego, że zmienna losowa

$$\prod_{s=1}^{t} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)$$

jest $\mathcal{F}_t$-mierzalna oraz stosując stwierdzenie 2.2.13 do σ-ciała $\mathcal{G} = \mathcal{F}_t$ i miary $\mathbb{P}_{Z^{t+1}} \in (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_t} = \mathcal{P}_{\mathcal{G}}$, dostajemy tezę. □

W oparciu o lemat 2.3.13 otrzymujemy kolejny przydatny w dalszych rozważaniach wynik.

LEMAT 2.3.14. *Niech* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *oraz ustalmy* $t \in \mathcal{T}$. *Niech* Y *będzie dobrze określoną,* $\mathcal{F}_t$*-mierzalną zmienną losową taką, że pewnego* $u \in \mathcal{T}$ *istnieje warunkowa wartość oczekiwana*

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}Y\middle|\mathcal{F}_u\right).$$

Wówczas

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}Y\middle|\mathcal{F}_r\right) \tag{2.24}$$

istnieje dla każdego $r \geq u$ *oraz zachodzi równość*

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}Y\middle|\mathcal{F}_r\right) = \prod_{s=1}^{r} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right) E\left[\prod_{s=r+1}^{t} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right) Y\middle|\mathcal{F}_r\right], \tag{2.25}$$

przy czym przyjmujemy, że iloczyn, dla którego zbiór indeksów jest pusty wynosi 1.

Dowód
Istnienie warunkowych wartości oczekiwanych danych wzorem (2.24) dla $r \geq u$ wynika ze stwierdzenia B.1.12. Ustalmy teraz dowolne $r \geq u$ i sprawdzimy, że zachodzi wzór (2.25). Zauważmy, że jeżeli $t \leq r$, to

$$E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}Y\middle|\mathcal{F}_r\right) = YE\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_r\right)$$

na mocy lematu B.1.11 i teza wynika natychmiast z lematu 2.3.13.
Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy $t > r$. Wówczas

$$\begin{aligned}
E\left(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}Y\middle|\mathcal{F}_r\right) &\overset{\text{stw. B.1.12}}{=} E\left[E\left[\prod_{s=1}^{T}E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)Y\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_r\right]\\
&\overset{\text{lem. B.1.11}}{=} E\left[YE\left[\prod_{s=1}^{T}E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]\middle|\mathcal{F}_r\right]\\
&\overset{\text{lem. 2.3.13}}{=} E\left[Y\prod_{s=1}^{t}E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)\middle|\mathcal{F}_r\right]\\
&\overset{\text{lem. B.1.11}}{=} \prod_{s=1}^{r}E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)E\left[Y\prod_{s=r+1}^{t}E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)\middle|\mathcal{F}_r\right],
\end{aligned}$$

przy czym w przedostatniej równości skorzystaliśmy z lematu 2.3.13. □

Ukoronowaniem tego podrozdziału jest

Twierdzenie 2.3.15. *Niech* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *oraz niech* X *będzie zmienną losową, dla której istnieje* $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}X$. *Wówczas istnieje proces* $Y^{X,\mathbf{Z}}$ *oraz zachodzą równości*

$$Y_t^{X,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \tag{2.26}$$

dla $t \in \mathcal{T}$.

Dowód twierdzenia poprzedzimy lematem.

Lemat 2.3.16. *Niech* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *oraz niech* X *będzie dowolną dobrze określoną zmienną losową. Załóżmy, że* $Y_t^{X^+,\mathbf{Z}} - Y_t^{X^-,\mathbf{Z}}$ *jest dla każdego* $t \in \mathcal{T}$ *dobrze określoną zmienną losową. Wówczas istnieje proces* $Y^{X,\mathbf{Z}}$ *oraz*

$$Y_t^{X,\mathbf{Z}} = Y_t^{X^+,\mathbf{Z}} - Y_t^{X^-,\mathbf{Z}} \text{ dla kazdego } t \in \mathcal{T}. \tag{2.27}$$

Dowód
Przeprowadzając indukcję wsteczną, skonstruujemy ciąg zmiennych losowych $(V_t)_{t\in\mathcal{T}}$, który spełnia warunki definiujące proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ oraz taki, że $V_t = Y_t^{X^+,\mathbf{Z}} - Y_t^{X^-,\mathbf{Z}}$ dla $t \in \mathcal{T}$.
Definiujemy $V_T := X$. Wówczas

$$V_T = X = X^+ - X^- = Y_T^{X^+,\mathbf{Z}} - Y_T^{X^-,\mathbf{Z}}.$$

Załóżmy, że zdefiniowaliśmy ciąg zmiennych losowych V_s dla $s = t, \dots, T$ dla pewnego $t \in \mathcal{T}_0$ taki, że $V_T = X$ i jeżeli $t < T$, to $V_{s-1} = (V_s)_{Z^s, \mathcal{F}_{s-1}}$, dla $s = t+1, \dots, T$ oraz

$$V_s = Y_s^{X^+, \mathbf{Z}} - Y_s^{X^-, \mathbf{Z}} \text{ dla } s = t, \dots, T.$$

Niech $\mathbb{P}_{Z^t}$ będzie dowolną miarą zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$. Wówczas

$$\begin{aligned} Y_{t-1}^{X^+, \mathbf{Z}} - Y_{t-1}^{X^-, \mathbf{Z}} &\overset{(a)}{=} E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t^{X^+, \mathbf{Z}} | \mathcal{F}_{t-1}) - E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t^{X^-, \mathbf{Z}} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &\overset{(b)}{=} E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t^{X^+, \mathbf{Z}} - Y_t^{X^-, \mathbf{Z}} | \mathcal{F}_{t-1}) \overset{(c)}{=} E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(V_t | \mathcal{F}_{t-1}), \end{aligned}$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy z (2.21), w (b) ze stwierdzenia B.1.5, zaś w (c) z założenia indukcyjnego. Z założenia wiemy, że $Y_{t-1}^{X^+, \mathbf{Z}} - Y_{t-1}^{X^-, \mathbf{Z}}$ jest dobrze określoną zmienną losową, zatem również $E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(V_t | \mathcal{F}_{t-1})$ jest dobrze określoną zmienną losową. Zdefiniujmy zmienną losową

$$V_{t-1} := E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(V_t | \mathcal{F}_{t-1}).$$

Wówczas oczywiście $V_{t-1} = (V_t)_{Z^t, \mathcal{F}_{t-1}}$ oraz $V_{t-1} = Y_{t-1}^{X^+, \mathbf{Z}} - Y_{t-1}^{X^-, \mathbf{Z}}$, co kończy indukcyjną konstrukcję procesu V.
Z konstrukcji wynika, że proces V spełnia warunki:

1. $V_T = X$,
2. $V_{t-1} = (V_t)_{Z^t, \mathcal{F}_{t-1}}$, dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$,
3. $V_t = Y_t^{X^+, \mathbf{Z}} - Y_t^{X^-, \mathbf{Z}}$ dla każdego $t \in \mathcal{T}$.

Z punktów 1. i 2. wynika, że istnieje proces spełniający warunki (2.21). Możemy przyjąć $Y^{X, \mathbf{Z}} = V$. Stąd oraz z punktu 3. otrzymujemy (2.27). □

Dowód (twierdzenia 2.3.15)
Krok 1. Załóżmy najpierw, że $X \geq 0$. Wówczas istnieje proces $Y^{X, \mathbf{Z}}$. Dowodzimy wzór (2.26) przez indukcję wsteczną.
Dla $t = T$ mamy

$$Y_T^{X, \mathbf{Z}} = X = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X | \mathcal{F}_T).$$

Załóżmy, że wzór (2.26) zachodzi dla pewnego $t \in \mathcal{T}_0$. Wówczas

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X | \mathcal{F}_{t-1}) &\overset{(a)}{=} E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X | \mathcal{F}_t) | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &\overset{(b)}{=} E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(Y_t^{X, \mathbf{Z}} | \mathcal{F}_{t-1}) \\ &\overset{(c)}{=} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}} Y_t^{X, \mathbf{Z}} | \mathcal{F}_{t-1})}{E(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}} | \mathcal{F}_{t-1})}, \end{aligned}$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy ze stwierdzenia B.1.12, w (b) z założenia indukcyjnego, a w (c) z lematu B.1.16. Stosując lemat 2.3.14 (odp. lemat 2.3.13) do licznika (odp. mianownika) ostatniego wyrażenia, otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_{t-1}) &= \frac{\prod_{s=1}^{t-1} E(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s) E[E(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t) Y_t^{X,\mathbf{Z}}|\mathcal{F}_{t-1}]}{\prod_{s=1}^{t-1} E(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s)} = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t^{X,\mathbf{Z}}|\mathcal{F}_{t-1}) \\
&= Y_{t-1}^{X,\mathbf{Z}},
\end{aligned}
$$

co kończy dowód indukcyjny wzoru (2.26) w przypadku $X \geq 0$.
Krok 2. Niech X będzie dowolną dobrze określoną zmienną losową, dla której istnieje $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}} X$. Stosujemy krok 1. do nieujemnych zmiennych losowych X^+ oraz X^-, skąd otrzymujemy równości

$$
Y_t^{X^+,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X^+|\mathcal{F}_t) \text{ oraz } Y_t^{X^-,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X^-|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T}. \tag{2.28}
$$

Ze stwierdzenia B.1.12 wynika, że istnienie $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}} X$ implikuje istnieje $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in \mathcal{T}$, skąd

$$
E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X^+|\mathcal{F}_t) - E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X^-|\mathcal{F}_t)
$$

jest dobrze określoną zmienną losową dla każdego $t \in \mathcal{T}$. Stąd oraz z (2.28) wynika, że

$$
Y_t^{X^+,\mathbf{Z}} - Y_t^{X^-,\mathbf{Z}}
$$

jest dla każdego $t \in \mathcal{T}$ dobrze określoną zmienną losową, zatem na mocy lematu 2.3.16 istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ oraz dla każdego $t \in \mathcal{T}$ zachodzi równość (2.26). □

2.4 Wycena wypłat przez analizę scenariuszy w ogólnym modelu rynku z czasem dyskretnym

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ogólną przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, gdzie $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ dla pewnego $T \in \mathbb{N}$. Przyjmujemy, że $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ oraz $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Załóżmy ponadto, że dany jest pewien wolny od arbitrażu model rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S jest nieujemnym procesem adaptowanym o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$, dla pewnego $k \in \mathbb{N}$. Zakładamy ponadto, że dany jest pewien ciąg $\mathbf{U} = (\mathcal{U}_t)_{t\in\mathcal{T}_T}$, gdzie $\mathcal{U}_t$ reprezentuje wybór scenariuszy z historią zaobserwowaną do chwili t, $t \in \mathcal{T}_T$ (patrz definicja 2.3.2). Zmierzamy do tego, by określić reguły wyceny dla elementów zbiorów $\mathcal{U}_t$, $t \in \mathcal{T}_T$. Nasz cel można precyzyjniej wyrazić w sposób następujący: dla każdego ze zdarzeń z $\mathcal{U}_t$ określić formułę na cenę dowolnej wypłaty, która wynika z modelowego przyszłego zachowania rynku i uwzględnia subiektywne prognozy inwestora oraz jego nastawienie do ryzyka uzależnione być może od historii zaobserwowanej do chwili t. Zaczniemy od wprowadzenia matematycznego opisu subiektywnych prognoz inwestora oraz jego nastawienia do ryzyka.

Oznaczenie 2.4.1. *Dla zbioru $\mathcal{Q}$ będącego dowolnym podzbiorem $\mathcal{P}_e$ przez $\mathcal{Q}_\mathcal{G}$ oznaczać będziemy zbiór miar probabilistycznych:*

$$
\mathcal{Q}_\mathcal{G} = \left\{ \tilde{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{P}_e)_\mathcal{G} \ : \ \exists \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \text{ t. że } \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = \frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \right\}.
$$

Przypomnijmy, że w poprzednim podrozdziale wprowadziliśmy pojęcie ciągu reprezentującego subiektywne prognozy, z którego skorzystamy, formułując metodę wyceny wypłat przez analizę scenariuszy. Zbiór ciągów reprezentujących subiektywne prognozy oznaczyliśmy przez $\mathcal{Z}(\mathbf{U})$.

DEFINICJA 2.4.2. *Powiemy, że* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *jest schematem wyceny, jeżeli dla dowolnej ograniczonej z dołu wypłaty* X*:*
1. *istnieje proces* Y *będący procesem* $\mathbf{Z}$*-uśrednienia* X*,*
2. *jeżeli proces* Y *przyjmuje wartości rzeczywiste, to* $Y \in \Xi(X)$*.*
Wówczas powiemy, że $\mathbf{Z}$ *wycenia* X *przez analizę scenariuszy. Ponadto proces* Y *nazywać będziemy procesem ceny* X *zgodnym z* $\mathbf{Z}$ *i będziemy go oznaczać przez* $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$*.*

Intuicja stojąca za powyższą definicją jest następująca: schemat wyceny ma mieć na tyle „dobre własności”, by istniał proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia dla wszystkich wypłat, być może za wyjątkiem tych, z których straty mogą być nieograniczone z dołu. Formułowanie zagadnień dla wypłat czy procesów o bogactwie ograniczonym z dołu jest popularne w pracach z matematyki finansowej i ma naturalną interpretację ekonomiczną: nie dopuszczamy nieograniczonych strat. Proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia X jest „kandydatem na proces ceny”wypłaty X. Zatem warunek 1. określa związek pomiędzy tym „kandydatem”, a ciągiem $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ reprezentującym subiektywne prognozy inwestora. Związek ten można opisać słowami w sposób następujący: jeżeli w chwili $t-1$ zaszło zdarzenie $A \in \mathcal{U}_{t-1}$, to cena jest równa wartości oczekiwanej cen z chwili t przy mierze przyporządkowanej zdarzeniu A przez funkcję Z^t. W podrozdziale 2.1 pokazaliśmy, że stosując indukcję wsteczną można otrzymać proces ceny arbitrażowej. To motywuje, by zdefiniować „kandydata na proces ceny”właśnie w ten sposób. W punkcie 2. żądamy, by ten proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia był procesem ceny arbitrażowej, jeżeli tylko jest to proces o wartościach rzeczywistych.
Poczyńmy następującą obserwację, która wynika wprost z powyższej definicji.

UWAGA 2.4.3. *Jeżeli* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *jest schematem wyceny, to* $\mathbf{Z}$ *wycenia przez analizę scenariuszy dowolną wypłatę ograniczoną.*

Z definicji schematu wyceny i z wyników uzyskanych w poprzednim podrozdziale, wywnioskujemy postać procesu ceny wypłaty zgodnego z ciągiem $\mathbf{Z}$ reprezentującym subiektywne prognozy.

STWIERDZENIE 2.4.4. *Załóżmy, że* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *wycenia wypłatę* X *przez analizę scenariuszy. Wówczas procesy* $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ *i* $Y^{X,\mathbf{Z}}$ *są nieodróżnialne. W szczególności wszystkie procesy ceny* X *zgodne z* $\mathbf{Z}$ *są nieodróżnialne.*

DOWÓD
Z definicji schematu wyceny wynika, że istnieje rzeczywisty proces $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ będący procesem $\mathbf{Z}$-uśrednienia X. Zatem z twierdzenia 2.3.10 wynika, że istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ dany wzorem (2.21), który na mocy (i) w stwierdzeniu 2.3.9 jest również procesem $\mathbf{Z}$-uśrednienia X. A zatem na mocy stwierdzenia 2.3.8 procesy $Y^{X,\mathbf{Z}}$ i $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ są nieodróżnialne. □

W pierwszej części tego podrozdziału scharakteryzujemy własności schematów wyceny. W dalszej części tego rozdziału będziemy rozważać zagadnienie opisania dla dowolnej ustalonej wypłaty zbioru schematów wyceny, które wyceniają tę wypłatę przez analizę scenariuszy.
Okazuje się, że jeżeli ciąg $\mathbf{Z}$ reprezentujący subiektywne prognozy jest schematem wyceny, to $\mathbf{Z}$ reprezentuje zgodny wybór względem $\mathbb{F}$, czyli $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$.

Stwierdzenie 2.4.5. *Jeżeli* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *jest schematem wyceny, to* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$.

Dowód
Załóżmy, że ciąg $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ jest schematem wyceny.
Ustalmy dowolne $t \in \mathcal{T}_0$. Uzasadnimy, że Z^t reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{F}_t$. Z uwagi 2.4.3 wiemy, że $\mathbf{Z}$ wycenia przez analizę scenariuszy dowolną wypłatę ograniczoną. Zauważmy, że dla dowolnej ograniczonej $\mathcal{F}_t$-mierzalnej zmiennej losowej X zachodzą równości $Y_s = X$ dla $s \geq t$, gdzie Y jest dowolnym procesem ceny X zgodnym z $\mathbf{Z}$. Stąd i z warunku 1. w definicji 2.4.2 wynika, że istnieje Z^t-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{F}_{t-1}$ dla dowolnej ograniczonej $\mathcal{F}_t$-mierzalnej zmiennej losowej X. Zatem Z^t reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{F}_t$ dla $t \in \mathcal{T}_0$, co oznacza, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$. □
W poprzednim podrozdziale zdefiniowaliśmy zbiór ciągów funkcji reprezentujących zgodny wybór względem $\mathbb{F}$, który oznaczyliśmy przez $\mathcal{Z}_c(\mathbf{U}) \subseteq \mathcal{Z}(\mathbf{U})$. Obecnie określimy jeszcze jeden podzbiór zbioru ciągów reprezentujących subiektywne prognozy, którym posłużymy się w sformułowaniu charakteryzacji schematów wyceny. Niech

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U}) = \left\{ \mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U}) : \begin{array}{c} \forall t \in \mathcal{T}_0 \ \forall A \in \mathcal{U}_{t-1} \ \exists \tilde{\mathbb{P}}^t_A \in \mathcal{P}(\mathcal{M})_{\mathcal{F}_{t-1}} \\ \text{t. że} \\ \mathbf{1}_A E\big(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\big|\mathcal{F}_t\big) = \mathbf{1}_A E\big(\frac{d\tilde{\mathbb{P}}^t_A}{d\mathbb{P}}\big|\mathcal{F}_t\big) \end{array} \right\}.$$

Intuicja stojąca za definicją zbioru $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ jest następująca: ciąg $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ reprezentujący subiektywne prognozy jest elementem $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, jeżeli dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$ i $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ miara $\mathbb{P}_{Z^t(A)}$ przyporządkowana zdarzeniu A uśrednia wartości z chwili t na chwilę $t-1$ jeżeli zaszło zdarzenie A w taki sam sposób, jak pewna miara martyngałowa $\mathbb{P}^t_A$ taka, że

$$\frac{\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}}{E\big(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1}\big)} = \frac{d\tilde{\mathbb{P}}^t_A}{d\mathbb{P}} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})_{\mathcal{F}_{t-1}}. \tag{2.29}$$

Uzasadnienie tej intuicji podajemy w poniższym stwierdzeniu.

Stwierdzenie 2.4.6. *Niech* $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0}$ *będzie elementem* $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$. *Wówczas dla każdego* $t \in \mathcal{T}_0$ *i dowolnego* $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ *istnieje miara martyngałowa* $\mathbb{P}^t_A$ *taka, że dla dowolnej ograniczonej z dołu,* $\mathcal{F}_t$*-mierzalnej zmiennej losowej* X *zachodzi równość*

$$\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z^t(A)}}(X|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}^t_A}(X|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{2.30}$$

Uwaga 2.4.7. *Zauważmy, że jeżeli zmienną losową* X *potraktujemy jako wypłatę, to dla* $\omega \in A$ *lewa strona (2.30) pokrywa się z wartością procesu ceny* X *zgodnego z* $\mathbf{Z}$ *w chwili* $t-1$. *Zatem elementy zbioru* $Z_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ *mają następującą własność: dla każdego* $t \in \mathcal{T}_0$*, dla każdego* $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ *miara przyporządkowana zdarzeniu* A *przez funkcję* Z^t *„uśrednia na* A *tak samo, jak pewna miary martyngałowa”.*

Dowód (stwierdzenia 2.4.6)
Korzystając najpierw z lematu B.1.16, a następnie ze stwierdzenia B.1.12 i lematu B.1.11, otrzymujemy

$$\mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}_{Z^t(A)}}(X|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{1}_A E\left(X\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathbf{1}_A E\left[X\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right].$$

Ponieważ $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ ostatnie wyrażenie jest równe

$$\mathbf{1}_A E\left[X\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\tilde{\mathbb{P}}^t_A}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] \overset{(*)}{=} \mathbf{1}_A E\left[X\mathbf{1}_A E\left(\frac{\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] =: I,$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z tego, że jeżeli $\tilde{\mathbb{P}}^t_A \in \mathcal{P}(\mathcal{M})_{\mathcal{F}_{t-1}}$, to istnieje miara martyngałowa $\mathbb{P}^t_A$ taka, że dla $\tilde{\mathbb{P}}^t_A$ i $\mathbb{P}^t_A$ zachodzi (2.29). Ponieważ zmienna losowa X jest ograniczona z dołu, uprawnione jest stosowanie kolejno lematu B.1.11, stwierdzenia B.1.12 i lematu B.1.16, skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} I &= \mathbf{1}_A E\left[\mathbf{1}_A E\left(X\frac{\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] \\ &= \mathbf{1}_A E\left(\mathbf{1}_A X\frac{\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right) \\ &= \mathbf{1}_A E_{\mathbb{P}^t_A}(X|\mathcal{F}_{t-1}). \square \end{aligned} \tag{2.31}$$

Wprost z definicji zbiorów $\mathcal{P}(\mathcal{M})_{\mathcal{F}_{t-1}}$, $t \in \mathcal{T}_0$ otrzymujemy

Wniosek 2.4.8. $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ *i dla każdego* $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ *istnieje miara martyngałowa* $\mathbb{P}^t_A$ *taka, że*

$$\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbf{1}_A\frac{E(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_A}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}.$$

W poprzednim podrozdziale zdefiniowaliśmy przekształcenie $W : \mathcal{Z}_c(\mathbf{U}) \to L^0$, za pomocą którego z każdym elementem $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$ związaliśmy miarę probabilistyczną $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$. Okazuje się, że jeżeli ciąg $\mathbf{Z}$ reprezentujący subiektywne prognozy jest elementem $\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, to $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ jest miarą martyngałową.

Twierdzenie 2.4.9. *Jeżeli* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, *to* $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.

Wynik ten można zinterpretować w sposób następujący: przyporządkowanie miar martyngałowych zdarzeniom z $\mathcal{U}_{t-1}$, $t \in \mathcal{T}_0$ wybranym do analizy scenariuszy prowadzi do wskazania jednej miary martyngałowej $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$. Wycenę pewnej wypłaty X przez analizę scenariuszy można nazwać „podejściem lokalnym”: wybieramy zdarzenia i dla nich określamy reguły wyceny, żądając, by w oparciu o te reguły otrzymać proces ceny arbitrażowej wypłaty. W odróżnieniu od tej procedury „podejściem globalnym”do wyceny można nazwać wybranie jednej miary martyngałowej (zwanej miarą wyceniającą) $\mathbb{P}^*$, względem której wypłata X jest całkowalna i określenie procesu ceny wzorem

$$E_{\mathbb{P}^*}(X|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T}. \tag{2.32}$$

Z twierdzenia 1.1.20 wynika, że każdy proces ceny arbitrażowej wypłaty X jest postaci (2.32) dla pewnej miary martyngałowej $\mathbb{P}^*$. Zatem, aby „podejście lokalne" prowadziło do otrzymania procesu ceny arbitrażowej, musi istnieć miara martyngałowa, przy której proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ można przedstawić w postaci (2.32). Z twierdzenia 2.3.15 i twierdzenia 2.4.9 wynika, że miarą tą jest miara $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$, o ile $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ i $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem o wartościach w $\mathbb{R}$.

Dowód (twierdzenia 2.4.9)

Wystarczy pokazać, że dla dowolnego $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, $t \in \mathcal{T}_0$ oraz $i \in \{1, \dots, k+1\}$ zmienna losowa S_t^i jest całkowalna względem $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ oraz zachodzi równość

$$E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_t^i|\mathcal{F}_{t-1}) = S_{t-1}^i.$$

Do końca tego dowodu ustalamy $i \in \{1, \dots, k+1\}$ oraz dla uproszczenia oznaczeń będziemy pisać S_t zamiast S_t^i dla $t \in \mathcal{T}$.

Najpierw przez indukcję sprawdzimy, że $S_t \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$ dla $t \in \mathcal{T}$.

Dla $t = 0$ jest to oczywiste. Załóżmy, że $S_{t-1} \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$ dla pewnego $t \in \mathcal{T}_+$.

Sprawdzamy całkowalność S_t.

Z lematu Fatou

$$E_{\mathbb{P}_{W(Z)}} S_t \le \liminf_{n\to\infty} E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_t \wedge n) =: \liminf_{n\to\infty} I_n. \tag{2.33}$$

Stosując lemat 2.3.14 do $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, $u = 0$, $\mathcal{F}_t$-mierzalnej zmiennej losowej $Y := S_t \wedge n$, otrzymujemy

$$\begin{aligned} I_n = E_{\mathbb{P}_{W(Z)}}(S_t \wedge n) &= E\left[(S_t \wedge n) \prod_{s=1}^{t} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right)\right] \\ &= E\left\{\prod_{s=1}^{t-1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right) E\left[(S_t \wedge n) E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right]\right\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Ponieważ $Z \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, to z wniosku 2.4.8 wynika, że dla każdego $A \in \mathcal{U}_{t-1}$ istnieje miara martyngałowa $\mathbb{P}_A^t$ taka, że

$$\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_A^t}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}_A^t}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}. \tag{2.35}$$

Niech $(A_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{U}_{t-1}$ będzie dowolnym ciągiem reprezentującym $\mathcal{U}_{t-1}$, dla którego $(B_k)_{k=1}^{\infty}$ jest $\mathcal{F}_{t-1}$-rozbiciem Ω zdefiniowanym w (2.13). Stąd

$$\begin{aligned} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \mathbf{1}_{A_k} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A_k)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) \\ &\overset{(**)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \mathbf{1}_{A_k} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{A_k}^t}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}_{A_k}^t}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}, \end{aligned} \tag{2.36}$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z tego, że $B_k \subseteq A_k$ oraz wniosku 2.2.25 zastosowanego do σ-ciała $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{t-1}$, miary $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{Z^t}$ oraz zbioru $A = A_k$, zaś w $(**)$ z równości (2.35) zastosowanej do $A = A_k$. Niech

$$M_t = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{B_k} \mathbf{1}_{A_k} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}.$$

Zauważmy, że $M_t < \infty$ $\mathbb{P}$-p.n., ponieważ zbiory B_k, $k \in \mathbb{N}$ są parami rozłączne. Z (2.34) i (2.36) dostajemy

$$I_n = E\left[\prod_{s=1}^{t-1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right) E(M_t(S_t \wedge n)|\mathcal{F}_{t-1})\right]. \tag{2.37}$$

Uzasadnimy, że

$$E(M_t(S_t \wedge n)|\mathcal{F}_{t-1}) \le S_{t-1}. \tag{2.38}$$

Najpierw, stosując abstrakcyjny wzór Bayesa, otrzymujemy

$$\mathbf{1}_{B_k} E\left[\frac{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}(S_t \wedge n)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] \le \mathbf{1}_{B_k} E_{\mathbb{P}^t_{A_k}}(S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{1}_{B_k} S_{t-1} \tag{2.39}$$

dla $k \in \mathbb{N}$. Ponadto, ponieważ

$$M_t^l := \sum_{k=1}^{l} \mathbf{1}_{B_k} \mathbf{1}_{A_k} \frac{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})} \nearrow M_t \text{ przy } l \to \infty,$$

oraz $M_t^l \ge 0$ dla $l \in \mathbb{N}$, to z warunkowej wersji twierdzenia o zbieżności monotonicznej (tw. B.1.7 (ii)) otrzymujemy

$$E(M_t(S_t \wedge n)|\mathcal{F}_{t-1}) = \lim_{l\to\infty} E(M^l(S_t \wedge n)|\mathcal{F}_{t-1}) =$$
$$\lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} \mathbf{1}_{B_k} E\left[\frac{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}^t_{A_k}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}(S_t \wedge n)\middle|\mathcal{F}_{t-1}\right] \overset{(*)}{\le} \lim_{l\to\infty} \sum_{k=1}^{l} \mathbf{1}_{B_k} S_{t-1} = S_{t-1},$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z (2.39). Stąd oraz z (2.37) wynika, że

$$I_n \le E\left[\prod_{s=1}^{t-1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right) S_{t-1}\right].$$

Uzasadnienie, że ciąg (I_n) jest wspólnie ograniczony z góry przebiega następująco. Założenie indukcyjne gwarantuje, że $S_{t-1} \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$. Stąd oraz z lematu 2.3.14 zastosowanego do $u = 0$, $\mathcal{F}_{t-1}$-mierzalnej zmiennej losowej S_{t-1} oraz $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ otrzymujemy

$$\infty > E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}} S_{t-1} = E\left[\prod_{s=1}^{t-1} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_s\right) S_{t-1}\right],$$

co dowodzi, że $I_n \leq E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}} S_{t-1} < \infty$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd i z (2.33) wynika całkowalność S_t względem miary $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$.
Wykonując rachunki analogiczne do powyższych, sprawdza się, że

$$E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = S_{t-1}. \square$$

Podamy teraz charakteryzację schematów wyceny.

TWIERDZENIE 2.4.10. *Ciąg* $(Z^t)_{t\in\mathcal{T}_0} = \mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ *jest schematem wyceny wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$.

Intuicja stojąca za powyższym twierdzeniem jest następująca. Jeżeli element $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ jest schematem wyceny, to w szczególności wycenia przez analizę scenariuszy dowolną wypłatę ograniczoną. W związku z tym należy się spodziewać, że przyporządkowanie miar zdarzeniom powinno być „zgodne". Ponadto, jeżeli proces $\mathbf{Z}$-uśrednienia wypłaty ma być procesem ceny arbitrażowej (o ile jest procesem rzeczywistym), to dla $t \in \mathcal{T}_0$ funkcje Z^t powinny przyporządkowywać zdarzeniom miary związane w jakiś sposób z miarami martyngałowymi. Na odwrót, jeżeli element $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$ reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{F}$ i przyporządkowują zdarzeniom miary pochodzące od miar martyngałowych, to $\mathbf{Z}$ jest schematem wyceny.

DOWÓD (TWIERDZENIA 2.4.10)
Zaczniemy od dowodu implikacji ($\Leftarrow$).
Załóżmy, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ oraz ustalmy dowolną ograniczoną z dołu wypłatę X. Dla takiej wypłaty istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ określony wzorem (2.21). Ze stwierdzenia 2.3.9 wiemy, że $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem $\mathbf{Z}$-uśrednienia X, co dowodzi, że spełniony jest punkt 1 definicji 2.4.2. Uzasadnimy, że spełniony jest również punkt 2 tej definicji. W tym celu załóżmy, że proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ przyjmuje wartości rzeczywiste. Dowiedziemy, że $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem ceny arbitrażowej X.
Ze stwierdzenia 2.3.8 wiemy, że procesy $\mathbf{Z}$-uśrednienia X są nieodróżnialne, więc $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem rzeczywistym. Z twierdzenia 2.3.15 wynika, że $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$-martyngałem, zaś z twierdzenia 2.4.9 wiemy, że $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ jest miarą martyngałową. Zatem $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem ceny arbitrażowej X.
Przechodzimy do dowodu implikacji ($\Rightarrow$).
Ze stwierdzenia 2.4.5 wiemy, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$. Z wniosku 2.2.25 zastosowanego do σ-ciał $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{t-1}$, $\mathcal{H} = \mathcal{F}_t$ i funkcji $Z = Z^t$, a następnie z lematu 2.3.13 zastosowanego dwukrotnie do $u = t$ oraz $u = t-1$, otrzymujemy

$$\mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t(A)}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbf{1}_A E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \mathbf{1}_A \frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{W(Z)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}_{W(Z)}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}.$$

Jeżeli dowiedziemy, że

$$\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}), \tag{2.40}$$

to z implikacji ($\Leftarrow$) we wniosku 2.4.8 zastosowanej do miar $\mathbb{P}^t_A = \mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ dla $A \in \mathcal{U}_{t-1}$, $t \in \mathcal{T}_0$ wyniknie, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$.
Przechodzimy do dowodu (2.40).

Ze stwierdzenia 2.3.11 wiemy, że $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ jest miarą probabilistyczną.
Wystarczy sprawdzić, że dla dowolnego $t \in \mathcal{T}$ oraz $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ zmienna losowa S_t^i jest całkowalna względem $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ oraz zachodzi równość

$$E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_T^i | \mathcal{F}_t) = S_t^i.$$

Do końca tego dowodu ustalamy $i \in \{1, \ldots, k+1\}$ oraz dla uproszczenia oznaczeń będziemy pisać S_t zamiast S_t^i dla $t \in \mathcal{T}$.
Sprawdzimy najpierw, że $S_t \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$ dla $t \in \mathcal{T}$. Ustalmy dowolne $t \in \mathcal{T}$. Z lematu Fatou

$$E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}} S_t \leq \liminf_{n\to\infty} E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_t \wedge n) =: \liminf_{n\to\infty} I_n. \tag{2.41}$$

Znajdziemy wspólne ograniczenie dla ciągu (I_n).
Ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ $\mathbf{Z}$ jest schematem wyceny, to dla ograniczonej wypłaty $X^n := S_t \wedge n$ istnieje proces ceny arbitrażowej $\Pi^{\mathbf{Z}}(X^n)$, który na mocy wniosku 2.4.4 jest nieodróżnialny od procesu $Y^{X^n,\mathbf{Z}}$. W szczególności na mocy twierdzenia 1.1.20 istnieje miara martyngałowa $\mathbb{P}_n^*$ taka, że

$$E_{\mathbb{P}_n^*}(X^n|\mathcal{F}_u) = \Pi_u^{\mathbf{Z}}(X^n) = Y_u^{X^n,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X^n|\mathcal{F}_u) \text{ dla } u \in \mathcal{T},$$

przy czym ostatnia równość wynika z twierdzenia 2.3.15. Stąd dla $u = 0$, korzystając z nierówności Jensena dla funkcji wklęsłej $\phi(x) := x \wedge n$, otrzymujemy

$$I_n = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}} X^n = E_{\mathbb{P}_n^*}\phi(S_t) \leq \phi(E_{\mathbb{P}_n^*} S_t) = \phi(S_0) = S_0 \wedge n \leq S_0.$$

Stąd i z (2.41) wynika, że $S_t \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$ dla $t \in \mathcal{T}$. Ponieważ wypłata S_T jest ograniczona z dołu i $\mathbf{Z}$ jest schematem wyceny, to istnieje $Y^{S_T,\mathbf{Z}}$ będący procesem $\mathbf{Z}$-uśrednienia S_T. Uzasadnimy, że $Y^{S_T,\mathbf{Z}}$ jest procesem o wartościach rzeczywistych. Z twierdzenia 2.3.15 zastosowanego do $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$-całkowalnej wypłaty S_T wynika, że

$$Y_t^{S_T,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_T|\mathcal{F}_t) < \infty \text{ dla } t \in \mathcal{T}. \tag{2.42}$$

Na mocy definicji schematu wyceny proces $Y^{S_T,\mathbf{Z}}$ jest procesem ceny arbitrażowej S_T. Stąd i z (2.42) otrzymujemy

$$S_t = Y_t^{S_T,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(S_T|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T},$$

co dowodzi (2.40). □

Przykład 2.4.11. Niech $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ będzie modelem rynku opisanym w przykładzie 1.1.6. Przyjmijmy techniczne założenie

$$R_t < \frac{ER_1^2}{ER_1} \quad \mathbb{P}-\text{p.n. dla } t \in \mathcal{T}_0. \tag{2.43}$$

Dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$ definiujemy zmienną losową

$$D_t := 1 - \frac{ER_1}{Var(R_1)}(R_t - ER_t),$$

Założenie (2.43) jest równoważne warunkowi $ER_1(R_t - ER_1) < ER_1^2 - (ER_1)^2 = Var(R_1)$, skąd wynika, że $D_t > 0$ $\mathbb{P}$-p.n. Ponadto $ED_t = 1$. Zatem D_t jest gęstością pewnej miary probabilistycznej, którą oznaczymy przez $\mathbb{Q}^t$. Ponadto $\mathbb{Q}^t \in (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_{t-1}}$ dla $t \in \mathcal{T}_0$, co wynika z faktu, że zmienna losowa R_t jest niezależna od $\mathcal{F}_{t-1}$. Niech $\mathcal{U}_t = \{\Omega\}$ dla $t \in \mathcal{T}_T$ oraz niech $\mathbf{U} = (\mathcal{U}_t)_{t\in\mathcal{T}_T}$. Definiujemy $\mathbf{Z} = (Z^1, \dots, Z^T) \in \mathcal{Z}(\mathbf{U})$, gdzie $Z^t(\{\Omega\}) = \mathbb{Q}^t$. Wówczas

$$\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}} = \prod_{t=1}^{T} \frac{d\mathbb{Q}^t}{d\mathbb{P}} \tag{2.44}$$

jest tzw. minimalną miarą martyngałową ([22], def. 10.21), co wynika wprost z poniższego twierdzenia

TWIERDZENIE 2.4.12 ([22], tw. 10.30). *Niech $\mathcal{M} = (S, \Phi)$ będzie modelem rynku opisanym w przykładzie 1.1.6. Załóżmy, że spełnione jest założenie (2.43) oraz warunek* ***bounded mean-variance trade-off****, tzn. istnieje stała K taka, że*

$$[E(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})]^2 \leq K\,Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) \quad \text{dla } t \in \mathcal{T}_0.$$

Wówczas istnieje jedyna minimalna miara martyngałowa $\hat{\mathbb{P}}$ o gęstości względem $\mathbb{P}$ danej wzorem

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \prod_{t=1}^{T} \left(1 - \frac{E(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})}{Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})}\right) \Delta M_t,$$

gdzie M jest martyngałem występującym w rozkładzie Dooba (Dodatek, stw. B.2.6) procesu S względem $\mathbb{P}$.

Ponieważ $E[\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}ER_1$ oraz $Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = S_{t-1}^2 Var(R_1)$ dla $t \in \mathcal{T}_0$, to spełniony jest warunek *bounded mean-variance trade-off*. Ponadto

$$M_0 = S_0, \;\; M_t = S_t - \sum_{s=1}^{t} E(\Delta S_s|\mathcal{F}_{s-1}) \;\; \text{dla } t \in \mathcal{T}_0,$$

skąd

$$1 - \left(\frac{E(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})}{Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})}\right) \Delta M_t = 1 - \frac{ER_1}{Var(R_1)}(R_t - ER_t) \quad \text{dla } t \in \mathcal{T}_0.$$

Wynika stąd, że miara o gęstości danej wzorem (2.44) jest minimalną miarą martyngałową.

Uzasadnimy, że proces $\Pi^{\mathbf{Z}}(H)$ jest procesem ceny H równym procesowi wartości *uogólnionej strategii*, która lokalnie minimalizuje ryzyko przy zabezpieczaniu wypłaty H ([22], rozdział 10.1). *Uogólnioną strategią* inwestycyjną nazwiemy dowolną parę (ξ, C), gdzie $\xi \in \Phi$, C - proces adaptowany. Proces wartości strategii (ξ, C) definiujemy wzorem $V^g(\xi, C) = V_t(\xi) + C_t = \xi_t S_t + C_t$ dla $t \in \mathcal{T}$. Jeżeli $C_t - C_{t-1} > 0$ (odp. $C_t - C_{t-1} < 0$), to w okresie od $t-1$ do t inwestor „dopłaca z zewnątrz" (odp. inwestor wypłaca (konsumuje) część środków). Powiemy, że uogólniona strategia $(\tilde{\xi}, \tilde{C})$ lokalnie minimalizuje ryzyko przy zabezpieczaniu wypłaty H, jeżeli spełnione są warunki:

1. $V_T^g(\tilde{\xi}, \tilde{C}) = H$.

2. $V_t^g(\tilde{\xi},\tilde{C}) \in L^2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ dla $t \in \mathcal{T}$.
3. $E[(\tilde{C}_{t-1}-\tilde{C}_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}] \le E[(C_{t-1}-C_t)^2|\mathcal{F}_{t-1}]$ dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$, dla dowolnej uogólnionej strategii inwestycyjnej (ξ, C) takiej, że $V_t^g(\xi,C) = V_t^g(\tilde{\xi},\tilde{C})$ dla $t \in \mathcal{T}$.
Warunek 1 mówi o tym, że strategia $(\tilde{\xi},\tilde{C})$ zabezpiecza wypłatę H, warunek 2 ma charakter techniczny, zaś warunek 3 można zinterpretować w sposób następujący: strategia $(\tilde{\xi},\tilde{C})$ jest optymalna, jeżeli nie istnieje strategia o procesie wartości równym $V^g(\tilde{\xi},\tilde{C})$ i mniejszym średnim kwadracie dopłat/konsumpcji w okresie od $t-1$ do t pod warunkiem informacji dostępnych w chwili $t-1$ dla pewnego $t \in \mathcal{T}_0$.
Uzasadnimy, że istnieje jedyna strategia, która lokalnie minimalizuje ryzyko przy zabezpieczaniu wypłaty H. W tym celu zastosujemy

Stwierdzenie 2.4.13 ([22], stw. 10.10). *Niech $\mathcal{M} = (S,\Phi)$ będzie modelem rynku opisanym w przykładzie 1.1.6. Załóżmy, że spełniony jest warunek bounded mean-variance trade-off. Niech $\hat{\xi}$ (odp. $\hat{V}$) będzie procesem prognozowalnym (odp. adaptowanym) zdefiniowanym rekurencyjnie wzorami*

$$\begin{aligned}
\hat{V}_T &:= H,\\
\hat{\xi}_t &:= \frac{cov(\hat{V}_t,\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})}{Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})}\mathbf{1}_{\{Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1})>0\}},\ t\in\mathcal{T}_0,\\
\hat{\xi}_0 &= 0,\\
\hat{V}_{t-1} &:= E(\hat{V}_t|\mathcal{F}_{t-1}) - \hat{\xi}_t E(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}),\ t\in\mathcal{T}_0.
\end{aligned}$$

Niech $\hat{\xi}^0$ będzie jednoznacznie wyznaczonym prognozowalnym procesem, dla którego $\tilde{\xi} = (\hat{\xi}^0,\hat{\xi})$ jest strategią samofinansującą o bogactwie początkowym $\hat{V}_0$ oraz niech $\tilde{C}$ będzie adaptowanym procesem zdefiniowanym wzorem $\tilde{C}_t := \hat{V}_t - V_t(\tilde{\xi})$ dla $t \in \mathcal{T}$. Wówczas uogólniona strategia $(\tilde{\xi},\tilde{C})$ jest strategią lokalnie minimalizującą ryzyko przy zabezpieczaniu wypłaty H i jest jednoznacznie wyznaczona z dokładnością do zbiorów $\{Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = 0\}$, $t \in \mathcal{T}_0$.

Ponieważ $S_t > 0$ dla każdego t oraz $E[\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}] = S_{t-1}ER_1$ i $Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = S_{t-1}^2 Var(R_1)$ dla $t \in \mathcal{T}_0$, to spełniony jest warunek *bounded mean-variance trade-off* oraz $\mathbb{P}(\{Var(\Delta S_t|\mathcal{F}_{t-1}) > 0\}) = 1$, skąd wynika istnienie oraz jednoznaczność strategii lokalnie minimalizującej ryzyko przy zabezpieczaniu wypłaty H.
Teraz równość $\Pi^{\mathbf{Z}}(H) = V^g(\tilde{\xi},\tilde{C})$ wynika natychmiast z twierdzenia

Twierdzenie 2.4.14 ([22], tw. 10.22). *Jeżeli $\hat{\mathbb{P}}$ jest minimalną miarą martyngałową, a $\hat{V}$ procesem wartości strategii lokalnie minimalizującej ryzyko przy zabezpieczaniu wypłaty H, to $\hat{V}_t = E_{\hat{\mathbb{P}}}(H|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in \mathcal{T}$.*

Istotnie, w naszej sytuacji $\hat{V} = V^g(\tilde{\xi},\tilde{C})$, zaś $\Pi_t^{\mathbf{Z}}(H) = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(H|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in \mathcal{T}$, przy czym uzasadniliśmy wcześniej, że dla $\mathbf{Z}$ określonego powyżej miara $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ jest minimalną miarą martyngałową. □

Przejdziemy teraz do wyników dotyczących wyceny dowolnych wypłat przez analizę scenariuszy.
Z udowodnionych wcześniej faktów otrzymujemy

Wniosek 2.4.15. *Niech X będzie dowolną wypłatą oraz niech $\mathbf{Z}$ będzie schematem wyceny. Wówczas, jeżeli $\mathbf{Z}$ wycenia wypłatę X przez analizę scenariuszy, to dla $t \in \mathcal{T}_0$ zachodzą równości*

$$\Pi^{\mathbf{Z}}_{t-1}(X) = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(\Pi^{\mathbf{Z}}_t(X)|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{2.45}$$

Dowód

$\mathbf{Z}$ wycenia wypłatę X, więc istnieje proces $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$. Ponadto z wniosku 2.4.4 wiemy, że procesy $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ i $Y^{X,\mathbf{Z}}$ są nieodróżnialne. Stąd i z (2.21) wynika teza. □

Wzór (2.45) ma naturalną interpretację ekonomiczną. Miary $(\mathbb{P}_{Z^t})_{t\in\mathcal{T}_0}$ odzwierciedlają nastawienie do ryzyka inwestora oraz jego subiektywne prognozy, które wynika z wyboru ciągu $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$. Wówczas proces ceny wypłaty otrzymuje się przez indukcję wsteczną, uśredniając cenę w chwili t względem miary $\mathbb{P}_{Z^t}$ pod warunkiem informacji dostępnych w chwili $t-1$ dla $t \in \mathcal{T}_0$.

Jest jasne, że jeżeli wybierzemy dowolną wypłatę, to nie każdy schemat wyceny $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ wyceni tę wypłatę przez analizę scenariuszy. Z twierdzenia 2.4.9 wiemy, że wybór $\mathbf{Z}$ jest wskazuje miarę martyngałową $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$. Wówczas schemat wyceny $\mathbf{Z}$ może nie wycenić wypłaty X przez analizę scenariuszy, jeżeli nie będzie ona $\mathbb{P}_{W(Z)}$-całkowalna. Faktowi, że wypłata nie jest całkowalna względem miary martyngałowej $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ można nadać następującą interpretację finansową: zajęcie pozycji w wypłacie X niesie ze sobą ryzyko nieakceptowalne przez inwestora, którego nastawienie do ryzyka i subiektywne prognozy charakteryzowane są przez schemat wyceny $\mathbf{Z}$. W związku z tym wprowadzimy następujące pojęcie.

Definicja 2.4.16. *Niech X będzie dowolną wypłatą. Powiemy, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ jest schematem dopuszczalnym dla wyceny X, jeżeli $\mathbf{Z}$ wycenia X przez analizę scenariuszy. Zbiór schematów dopuszczalnych dla wyceny wypłaty X będziemy oznaczać przez $\mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$.*

Stwierdzenie 2.4.17. *Niech $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ oraz niech $X \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$. Wówczas $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ i dla $t \in \mathcal{T}$ zachodzą równości*

$$\Pi^{\mathbf{Z}}_t(X) = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \quad \mathbb{P}-\text{p.n.} \tag{2.46}$$

Dowód

Ponieważ $X \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$, to z twierdzenia 2.3.15 wynika, że istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ oraz

$$Y^{X,\mathbf{Z}}_t = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T}.$$

Stąd oraz z faktu, że $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ (twierdzenie 2.4.9) wynika, że $Y^{X,\mathbf{Z}}$ jest procesem ceny arbitrażowej X, zatem $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ i zachodzi (2.46). □

Założenie, że $X \in L^1(\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})})$ w stwierdzeniu 2.4.17 gwarantowało istnienie procesu M zdefiniowanego wzorem

$$M_t := E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T}. \tag{2.47}$$

Naszym celem jest teraz odpowiedź na pytanie: przy jakich założeniach z faktu, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ wynika istnienie procesu M danego wzorem (2.47). Finansowe znaczenie

tego pytania jest następujące: jeżeli wiemy, że istnieje proces ceny X zgodny z $\mathbf{Z}$, to czy jest on $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$-martyngałem zdefiniowanym w (2.47)?
Zaczniemy od definicji

DEFINICJA 2.4.18. *Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$ będą dowolnymi σ-ciałami. Niech ponadto $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e$ oraz niech X będzie dobrze określoną zmienną losową. Powiemy, że X i $\mathbb{Q}$ mają tower property względem $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$, jeżeli zachodzi implikacja:*

$$\begin{aligned}&\text{Jeżeli } E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H}),\ E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] \text{ istnieją, to}\\ &\text{istnieje } E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) \text{ oraz } E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}] = E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}).\end{aligned}$$

UWAGA 2.4.19. *Jeżeli $X \in L^1(\mathbb{Q})$, to X i $\mathbb{Q}$ mają tower property względem dowolnych σ-ciał $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. Jeżeli $E_{\mathbb{Q}}X$ nie istnieje, to może się zdarzyć, że $E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H})$, $E_{\mathbb{Q}}[E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}]$ istnieją, ale $E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G})$ nie istnieje, co wynika z przykładu B.1.15.*

TWIERDZENIE 2.4.20. *Niech X będzie dowolną wypłatą oraz $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$. Następujące warunki są równoważne:*
(i) $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$ oraz X i $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ mają tower property względem $\mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{F}_t$ dla dowolnego $t \in \mathcal{T}_0$.
(ii) Istnieje $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t)$ dla każdego $t \in \mathcal{T}$ i proces

$$M_t := E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t \in \mathcal{T}$$

przyjmuje wartości rzeczywiste.
W sytuacji, gdy zachodzi jeden z powyższych warunków, proces M jest procesem ceny X zgodnym z $\mathbf{Z}$.

DOWÓD
$(ii) \Rightarrow (i)$.
Załóżmy, że istnieje proces M o wartościach w $\mathbb{R}$. Wówczas w szczególności $M_0 = E_{\mathbb{P}_{W(Z)}}X \in \mathbb{R}$. Zatem ze stwierdzenia B.1.12 wynika, że X i $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ mają tower property względem $\mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{F}_t$ dla dowolnego $t \in \mathcal{T}_0$. Ponadto, ponieważ $E_{\mathbb{P}_{W(Z)}}X$ istnieje, to na mocy twierdzenia 2.3.15 istnieje proces $Y^{X,\mathbf{Z}}$ nieodróżnialny od procesu M. Ponadto z twierdzenia 2.4.9 wynika, że $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$, zatem $Y^{X,\mathbf{Z}} = \Pi^{\mathbf{Z}}(X)$, więc $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$.
Przechodzimy do dowodu implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.
Krok 1. Ponieważ $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}^X_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, to istnieje proces $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$, który jest nieodróżnialny od procesu $Y^{X,\mathbf{Z}}$.
Krok 2. Ustalmy dowolne $t \in \mathcal{T}_0$. Dowiedziemy, że

$$Y^{X,\mathbf{Z}}_{t-1} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(Y^{X,\mathbf{Z}}_t|\mathcal{F}_{t-1}). \tag{2.48}$$

Z definicji

$$Y^{X,\mathbf{Z}}_{t-1} = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y^{X,\mathbf{Z}}_t|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y^{X,\mathbf{Z}}_t)^+|\mathcal{F}_{t-1}] - E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y^{X,\mathbf{Z}}_t)^-|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Sprawdzimy najpierw, że

$$E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y^{X,\mathbf{Z}}_t)^+|\mathcal{F}_{t-1}] = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}[(Y^{X,\mathbf{Z}}_t)^+|\mathcal{F}_{t-1}]. \tag{2.49}$$

Zauważmy, że

$$E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+|\mathcal{F}_{t-1}] \overset{(a)}{=} E\bigg[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\bigg|\mathcal{F}_{t-1}\bigg] \overset{(b)}{=} E\bigg[E\bigg((Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\bigg|\mathcal{F}_{t-1}\bigg] \overset{(c)}{=}$$
$$E\bigg[E\bigg(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+\bigg|\mathcal{F}_{t-1}\bigg] = E\bigg[\frac{\prod_{s=1}^{t-1}E(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s)E(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{\prod_{s=1}^{t-1}E(\frac{d\mathbb{P}_{Z^s}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_s)}(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+\bigg|\mathcal{F}_{t-1}\bigg],$$

przy czym w (a) korzystaliśmy z lematu B.1.16 oraz faktu, że $E\big[\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1}\big] = 1$, w (b) ze stwierdzenia B.1.12, zaś w (c) z lematu B.1.11. Stosując lemat 2.3.13 osobno do licznika i mianownika ułamka występującego w ostatnim wyrażeniu dostajemy

$$E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+|\mathcal{F}_{t-1}] = E\bigg[\frac{E(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_t)}{E(\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+\bigg|\mathcal{F}_{t-1}\bigg] = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+|\mathcal{F}_{t-1}].$$

Analogicznie dowodzi się, że

$$E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^-|\mathcal{F}_{t-1}] = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^-|\mathcal{F}_{t-1}]. \tag{2.50}$$

Określmy zbiory

$$B^+ := \{E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^+|\mathcal{F}_{t-1}] = \infty\} \text{ oraz } B^- := \{E_{\mathbb{P}_{Z^t}}[(Y_t^{X,\mathbf{Z}})^-|\mathcal{F}_{t-1}] = \infty\}.$$

Z kroku 1. wiemy, że $\mathbb{P}(B^+\cap B^-) = 0$, gdyż dobrze określona jest zmienna losowa $Y_{t-1}^{X,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{Z^t}}(Y_t^{X,\mathbf{Z}}|\mathcal{F}_{t-1})$. Stąd oraz z równości (2.49) i (2.50) wynika, że istnieje zmienna losowa $E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(Y_t^{X,\mathbf{Z}}|\mathcal{F}_{t-1})$ oraz zachodzi (2.48).
Krok 3. Stosując indukcję wsteczną dowiedziemy, że

$$Y_t^{X,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) \text{ dla } t\in\mathcal{T}. \tag{2.51}$$

Jest jasne, że równość zachodzi dla $t = T$. Załóżmy teraz, że (2.51) zachodzi dla pewnego $t\in\mathcal{T}_0$. Sprawdzimy, że

$$Y_{t-1}^{X,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Korzystając z (2.48), założenia indukcyjnego oraz założenia, że X i $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}$ mają tower property względem $\mathcal{F}_{t-1}$ i $\mathcal{F}_t$ dla dowolnego $t\in\mathcal{T}_0$, otrzymujemy

$$Y_{t-1}^{X,\mathbf{Z}} = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(Y_t^{X,\mathbf{Z}}|\mathcal{F}_{t-1}) = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}[E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_{t-1}] = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Stąd i z kroku 1. otrzymujemy równość $\Pi_t^{\mathbf{Z}}(X) = E_{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}(X|\mathcal{F}_t) = M_t$ dla $t\in\mathcal{T}$, skąd wynika, że M jest procesem o wartościach w $\mathbb{R}$. Ponadto jest jasne, że M jest procesem ceny X zgodnym z $\mathbf{Z}$. □

Rozdział ten zakończymy twierdzeniem, z którego wynika, że dowolny proces ceny arbitrażowej dowolnej wypłaty X jest procesem $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ dla pewnego $\mathbf{Z}\in\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}^X(\mathbf{U})$.

Twierdzenie 2.4.21. *Niech X będzie dowolną wypłatą i niech M będzie procesem jej ceny arbitrażowej. Wówczas istnieje $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}^X(\mathbf{U})$ taki, że $M = \Pi^{\mathbf{Z}}(X)$.*

Najpierw udowodnimy

Lemat 2.4.22.

$$\mathcal{P}(\mathcal{M}) = \{\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})} \ : \ \mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})\}.$$

Dowód

Inkluzja „$\supseteq$"wynika z twierdzenia 2.4.9.
Przejdziemy do dowodu inkluzji „$\subseteq$".
Niech $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$. Zdefiniujemy $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, dla którego $\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})} = \mathbb{P}^*$. Dla $t \in \mathcal{T}_0$ niech $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_{t-1}}$ dane będzie wzorem

$$Z^t(A) = \frac{\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}$$

dla $A \in \mathcal{U}_{t-1}$.
Niech $\mathbf{Z} := (Z^1, \ldots, Z^T)$. Ponieważ dla każdego $t \in \mathcal{T}_0$ miara probabilistyczna o gęstości

$$\frac{d\mathbb{P}^*}{E(\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}$$

jest miarą zgodnego wyboru Z^t względem $(\mathcal{F}_{t-1}, \mathcal{F}_t)$, to z lematu 2.2.10 i twierdzenia 2.2.11 wynika, że Z^t reprezentuje zgodny wybór względem $\mathcal{F}_t$. Zatem $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$. Ponadto jest jasne, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, gdyż $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$.
Twierdzimy, że $W(\mathbf{Z}) = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}$. Istotnie

$$W(\mathbf{Z}) = \prod_{t=1}^{T} E\left(\frac{d\mathbb{P}_{Z^t}}{d\mathbb{P}}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \prod_{t=1}^{T} E\left(\frac{\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}|\mathcal{F}_{t-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right) = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}. \ \square$$

Dowód (twierdzenia 2.4.21)

Niech M będzie procesem ceny arbitrażowej X. Z definicji procesu ceny arbitrażowej wynika, że wolny od arbitrażu jest model rynku $\mathcal{M}' = (S', \Phi')$, gdzie $S' = (S, M)$ oraz Φ' jest zbiorem strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^{k+2}$. Z twierdzenia 1.1.12 wiemy, że istnieje miara $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$, względem której zmienna losowa X jest całkowalna. Ponieważ $M_T = X$ jest wypłatą osiągalną w modelu rynku $\mathcal{M}'$, to na mocy wniosku 1.1.23 wiemy, że

$$M_t = E_{\mathbb{P}^*}(X|\mathcal{F}_t)$$

dla $t \in \mathcal{T}$. Ponieważ $\mathbb{P}^*$ jest również miarą martyngałową w modelu $\mathcal{M}$, z lematu 2.4.22 wiemy, że istnieje $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$, dla którego

$$\frac{d\mathbb{P}_{W(\mathbf{Z})}}{d\mathbb{P}} = W(\mathbf{Z}) = \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}. \tag{2.52}$$

Stąd oraz ze stwierdzenia 2.4.17 i tego, że $X \in L^1(\mathbb{P}^*)$ wynika natychmiast, że $\mathbf{Z} \in \mathcal{Z}_{\mathcal{M}}^X(\mathbf{U})$. Ponadto z postaci procesu M, (2.52) i stwierdzenia 2.4.17 wynika, że procesy $\Pi^{\mathbf{Z}}(X)$ i M są nieodróżnialne. $\square$

Rozdział 3

Efektywne zabezpieczenie

Wprowadzenie

W poprzednim rozdziale opisaliśmy metodę wyceny wypłat przez analizę scenariuszy. Jeżeli wypłata nie jest osiągalna, to cena leży wewnątrz przedziału cen arbitrażowych. Dla sprzedającego wypłatę oznacza to, że środki uzyskane ze sprzedaży nie wystarczą do zrealizowania strategii inwestycyjnej gwarantującej pełne zabezpieczenie wypłaty. W związku z tym pojawia się naturalne pytanie o to, jak minimalizować ryzyko straty, która może zostać poniesiona przy zabezpieczaniu wypłaty. W literaturze rozpatrywano różne sformułowania tego zagadnienia. Jednym z klasycznych podejść jest *quadratic hedging* [52], który polega na wyznaczeniu strategii, której wartość końcowa jest zmienną losową najbliższą wypłacie w sensie normy L^2. Tak postawiony problem optymalizacyjny posiada zarówno wady jak i zalety. Podstawową zaletą jest to, że przy rozwiązywaniu można skorzystać z wyników teorii przestrzeni Hilberta. Słabością takiego podejścia jest traktowanie jako niepożądanych zarówno strat, jak i nadwyżek strategii zabezpieczającej ponad zabezpieczaną wypłatę. W tym rozdziale skupimy się na podejściu asymetrycznym, którego celem jest minimalizacja ryzyka straty, tzn. wziętej ze znakiem „minus” części ujemnej różnicy pomiędzy wartością zabezpieczenia, a wypłatą. W literaturze zagadnienia tego typu znane są pod nazwą problemów efektywnego zabezpieczenia. W pionierskiej pracy z tej tematyki Föllmer i Leukert [20] sformułowali zagadnienie zabezpieczenia kwantylowego, w którym dokonuje się minimalizacji prawdopodobieństwa straty i dowiedli, że istnieje rozwiązanie tego zagadnienia. Rozważono również problem kwantylowego zabezpieczenia na rynku zupełnym w sytuacji, gdy bogactwo początkowe nie wystarcza do zreplikowania zadanej wypłaty. W tym szczególnym przypadku uzyskano również postać rozwiązania. Barski [5] rozszerzył wyniki Föllmera i Leukerta na przypadek rynku z proporcjonalnymi kosztami za transakcje. W problemie kwantylowego zabezpieczenia nie uwzględnia się rozmiarów potencjalnych strat. Dlatego w kolejnej pracy Föllmer i Leukert [21] zaproponowali problem efektywnego zabezpieczenia, w którym minimalizuje się wartość oczekiwaną tzw. funkcji straty. Autorzy dowiedli istnienia rozwiązania problemu z wypukłą niemalejącą funkcją straty w ogólnym wolnym od arbitrażu modelu rynku. Ponadto w przypadku rynku zupełnego wskazano postać rozwiązania zagadnienia z wypukłą, odpowiednio różniczko-

walną funkcją straty oraz problemu z wklęsłą funkcją straty reprezentującą preferencje inwestora skłonnego do podejmowania ryzyka. Metoda rozwiązania zagadnień efektywnego zabezpieczenia polega na stowarzyszeniu wyjściowego problemu z tzw. problemem statycznym, który okazuje się być na ogół pewnym zagadnieniem testowania hipotez statystycznych (patrz np. [59]). Dla podkreślenia tego związku podejście zaproponowane w pracach [20], [21] i ich dalszych uogólnieniach określa się mianem podejścia Neymana-Pearsona. Również w [21] zastosowano metody analizy wypukłej i teorii dualności zaczerpnięte z [12] i [35], co pozwoliło uzyskać postać rozwiązania w problemie efektywnego zabezpieczenia nieujemnej wypłaty w wolnym od arbitrażu modelu rynku i dla ogólnej, odpowiednio gładkiej funkcji straty reprezentowanej przez losową funkcję użyteczności. Podobne wyniki dla rynku Blacka-Scholesa uzyskano w pracy [11] również za pomocą metod teorii dualności. Od tego czasu pojawiło się wiele prac, w których zastosowano teorię dualności do rozwiązania problemów testowania hipotez (m.in. [13], [33], [47], [48]), co pozwoliło zastosować podejście Neymana-Pearsona do znalezienia postaci rozwiązania problemów efektywnego zabezpieczenia dla „bardziej zaawansowanych"miar ryzyka. W 1999 roku ukazała się klasyczna praca [3] stanowiąca fundament aksjomatycznej teorii miar ryzyka. Delbaen et al. zdefiniowali koherentne miary ryzyka, których charakteryzacje podano w szeregu ważnych prac, m.in. [15], [36]. W 2002 roku Föllmer i Schied [23] uogólnili pojęcie koherentnych miar ryzyka, wprowadzając klasę wypukłych miar ryzyka na L^∞, których definicję rozszerzono później (patrz, np. [57], [56]) na przestrzenie L^p dla $p \geq 1$. Rozwój aksjomatycznej teorii miar ryzyka przyczynił się do sformułowania problemów efektywnego zabezpieczenia, w których minimalizuje się ryzyko straty mierzone za pomocą koherentnych i wypukłych miar ryzyka. Stosując metody teorii dualności zaczerpnięte z [11] oraz [13] Nakano [44] dowiódł istnienia i wskazał postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia nieujemnej wypłaty w modelu rynku z czasem dyskretnym w przypadku, gdy ryzyko mierzone jest za pomocą koherentnej miary ryzyka na L^1, natomiast stosując podejście Neymana-Pearsona [45] udowodnił, że istnieje rozwiązanie problemu efektywnego zabezpieczenia w modelu rynku z czasem ciągłym, w którym proces cen akcji jest nieujemnym semimartyngałem. Rudloff [50] wzmocniła wyniki Nakano [45], otrzymując postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia względem koherentnej miary ryzyka. W [47] oraz [48] Rudloff rozwinęła podejście do rozwiązania problemów testowania hipotez oparte na teorii dualności Fenchela. Pozwoliło to dowieść istnienia i wskazać postać rozwiązania zagadnienia efektywnego zabezpieczenia nieujemnych, całkowalnych wypłat w przypadku, gdy ryzyko straty mierzone jest za pomocą dowolnej wypukłej, półciągłej z dołu miary ryzyka na L^1, która jest skończona i ciągła w przynajmniej jednym punkcie [49].
W tej pracy będziemy zajmować się problemem efektywnego zabezpieczenia względem wypukłej, półciągłej z dołu miary ryzyka na L^1. Głównym celem tego rozdziału jest zaprezentowanie techniki aproksymacyjnej, która pozwoli rozwiązać problem efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging. Według naszej wiedzy efektywne zabezpieczenie takich wypłat nie było rozpatrywane w literaturze.

W podejściu Neymana-Pearsona do rozwiązania problemu efektywnego zabez-

pieczenia nieujemnej wypłaty H wyróżnia się dwa główne kroki:
1. Dowodzi się istnienia i wyznacza postać rozwiązania $\tilde{\phi}$ tzw. problemu statycznego, który jest pewnym zagadnieniem testowania hipotez.
2. Z twierdzenia o opcjonalnym rozkładzie nadmartyngału [19] otrzymuje się strategię zabezpieczającą wypłatę $\tilde{\phi}H$, która okazuje się być strategią minimalizującą ryzyko mierzone za pomocą wypukłej półciągłej z dołu miary ryzyka.

Realizacja kroku drugiego przebiega w sposób następujący: najpierw z twierdzenia o opcjonalnym rozkładzie nadmartyngału [19] otrzymuje się strategię $\tilde{\xi}$ zabezpieczającą wypłatę $\tilde{\phi}H$, a następnie dowodzi się, że $\tilde{\xi}$ jest rozwiązaniem problemu efektywnego zabezpieczenia. Krok drugi opiera się na zastosowaniu twierdzenia 3.1.3, które formułujemy poniżej i jest krokiem standardowym. Trudność problemu efektywnego zabezpieczenia leży w rozwiązaniu problemu statycznego. Podanie ogólnego sformułowania i rozwiązanie tego problemu jest głównym celem tego rozdziału, który jest zorganizowany w sposób następujący. W podrozdziale 3.1 sformułujemy problem efektywnego zabezpieczenia i przedstawimy metodę rozwiązania, której zastosowanie wymaga przyjęcia założeń z pracy [49]. W podrozdziale 3.2 podamy przykład zagadnienia, którego nie można rozwiązać w oparciu o znane dotychczas wyniki. Zaprezentujemy nowe podejście - konstrukcję rozwiązania przez aproksymację. W podrozdziale 3.3 przedstawimy abstrakcyjne sformułowanie problemów optymalizacji wypukłej, których rozwiązanie będzie stanowiło uogólnienie podejścia rozwiniętego w pracy [49]. Uzyskane wyniki zostaną wykorzystane do rozwiązania zagadnień aproksymujących ogólny problem statyczny, który sformułujemy w podrozdziale 3.4. Również w tym podrozdziale podamy założenia 3.4.6, przy których dowiedziemy, że istnieje rozwiązanie ogólnego problemu statycznego, które jest $\mathbb{P}$-p.n. i w L^1 granicą iterowaną ciągu kombinacji wypukłych zmiennych losowych znanej postaci (tw. 3.4.8). W podrozdziale 3.5:
-otrzymamy nowe warunki opisujące postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia rozważanego w pracy [49] (tw. 3.5.7),
-dowiedziemy istnienia i wskażemy postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia nieujemnej wypłaty, dla której nie istnieje superhedging (tw. 3.5.12),
-dowiedziemy istnienia i wskażemy postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia przy osłabionym warunku ciągłości miary ryzyka (tw. 3.5.14).

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie bezatomową przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$, gdzie $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ dla pewnego $T \in \mathbb{N}$. Zakładamy, że $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ oraz $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

3.1 Sformułowanie problemu i metoda rozwiązania

Niech dany będzie pewien wolny od arbitrażu model rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S jest nieujemnym, adaptowanym procesem o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$.
Ustalmy wypukłą miarę ryzyka $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, pewną nieujemną, całkowalną wypłatę H, oraz liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Sformułujemy teraz zagadnienie efektywnego zabez-

pieczenia wypłaty H przy ograniczeniu $\tilde{V}_0$ na początkową wartość zabezpieczenia. Niech

$$\Phi^+_{\tilde{V}_0} = \{\xi \in \Phi \ : \ V(\xi) \geq 0, \ V_0(\xi) \leq \tilde{V}_0\}$$

oznacza zbiór strategii, których proces wartości jest nieujemny i w chwili 0 nie przekracza $\tilde{V}_0$. Przy tych oznaczeniach problem efektywnego zabezpieczenia rozważany w pracy Rudloff [49] możemy zapisać, jako

$$\inf_{\xi \in \Phi^+_{\tilde{V}_0}} \rho(-(V_T(\xi) - H)^-). \tag{3.1}$$

Zmienną losową $-(V_T(\xi) - H)^-$ interpretujemy jako stratę ponoszoną przez zabezpieczającego wypłatę H przy pomocy strategii ξ.
Przez rozwiązanie problemu efektywnego zabezpieczenia rozumie się udowodnienie istnienia strategii realizującej minimum (3.1) oraz opisanie postaci strategii realizującej minimum. O jaki opis chodzi, wyjaśnimy, szkicując metodę rozwiązania.
Rudloff [49] rozwiązuje problem (3.1) według planu:
1. Formułuje *problem statyczny*

$$\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} \rho((\phi - 1)H), \tag{3.2}$$

gdzie

$$\tilde{\mathcal{R}} := \{\phi : \Omega \to [0,1] \ : \ \phi - \mathcal{F}_T - \text{mierzalne}, \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H \leq \tilde{V}_0\}.$$

2. Dowodzi istnienia zmiennej losowej $\tilde{\phi} \in \tilde{\mathcal{R}}$ będącej rozwiązaniem problemu statycznego (3.2) ([49], twierdzenie 4.3).
3. Wskazuje postać zmiennej losowej $\tilde{\phi}$ będącej rozwiązaniem problemu statycznego (3.2) ([49], twierdzenie 4.9). Jest to najtrudniejsza część pracy, w której Rudloff stosuje metody nieliniowej optymalizacji w przestrzeniach beczkowych [27], które wymagają by spełnione było

Założenie 3.1.1. *Istnieje $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$ takie, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ i miara ryzyka ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$.*

Ponadto w tej części Rudloff korzysta również z założenia

Założenie 3.1.2.

$$\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H < \infty.$$

4. Strategię realizującą minimum problemu (3.1) otrzymuje z następującego faktu.

Twierdzenie 3.1.3. *[[49], tw. 3.1] Niech $\tilde{\phi}$ będzie rozwiązaniem problemu statycznego (3.2) oraz niech $\tilde{\xi} \in \Phi^+_{\tilde{V}_0}$ będzie strategią superreplikującą wypłatę $\tilde{\phi}H$. Wówczas strategia $\tilde{\xi}$ realizuje minimum problemu (3.1).*

Uwaga 3.1.4. *Problem (3.1) występuje w [49] pod nazwą wypukłego zabezpieczenia. Jeżeli założymy dodatkowo, że ρ jest dodatnio jednorodna, to ρ będzie koherentną miarą ryzyka i (3.1) będzie problemem rozpatrywanym przez Nakano [45]. Jeżeli w (3.1) przyjmiemy $\rho(Y) := E(Y)$ dla $Y \in L^1$, to otrzymamy zagadnienie rozwiązane przez Föllmera i Leukerta w [21]. W związku z tym w odniesieniu do zagadnienia (3.1) będziemy używać określenia: efektywne zabezpieczenie, aby podkreślić, że stanowi ono uogólnienie wielu wcześniejszych wyników.*

Uwaga 3.1.5. *Wszystkie uzyskane do tej pory wyniki dotyczące efektywnego zabezpieczenia otrzymano w modelach rynku z czasem ciągłym. Możemy jednak przyjąć, że są one również znane dla modeli rynku z czasem dyskretnym. Istotnie, jeżeli w sformułowaniach twierdzeń dotyczących problemu efektywnego zabezpieczenia zmienimy czas ciągły na dyskretny, to w dowodach wystarczy zastąpić wersję twierdzenia o opcjonalnym rozkładzie dla nadmartyngałów z czasem ciągłym, wersją tego twierdzenia dla nadmartyngałów z czasem dyskretnym (Föllmer i Kabanov udowodnili obie wersje w [19]).*

3.2 Przykład problemu nie mającego rozwiązania za pomocą istniejących metod

W poprzednim podrozdziale podkreśliliśmy, że trudność rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia leży w rozwiązaniu problemu statycznego (3.2). W pracy [49] stosuje się w tym celu metody wymagające założenia 3.1.1. Założenie to może wydawać się naturalne, ale jest istotnie ograniczające. Podamy teraz elementarną konstrukcję wypukłej, półciągłej z dołu miary ryzyka na L^1, dla której to założenie nie jest spełnione. Następnie rozwiążemy ten problem, stosując podejście aproksymacyjne.
Ustalmy przestrzeń probabilistyczną $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue. Wartość oczekiwaną względem miary $\bar{\mathbb{P}}$ będziemy oznaczać przez $\bar{E}$. Niech $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} & gdy\ x \in (0,1], \\ 0 & gdy\ x = 0. \end{cases}$$

Ponadto dla $n \in \mathbb{N}$ określmy ciąg funkcji $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ następująco:

$$g_n(x) = c_n \mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1},1]}(x) g(x), \qquad x \in [0,1],$$

gdzie $c_n^{-1} := 1 - (\frac{1}{n+1})^{\frac{3}{4}}$ jest stałą normującą. Zaczniemy od sformułowania faktu, którego dowód pominiemy, gdyż sprowadza się do policzenia kilku łatwych całek.

Lemat 3.2.1. *Niech $\mathcal{Q} = \{g_n : n \in \mathbb{N}\}$. Wówczas:*
1. *$\mathcal{Q}$ jest zbiorem gęstości miar probabilistycznych względem λ .*
2. *$\mathcal{Q} \subseteq L^\infty$.*
3. *$\mathcal{Q}$ jest ograniczony w L^2.*

Uwaga 3.2.2. *Od tej pory będziemy nadużywać terminologii i nazywać zbiór $\mathcal{Q}$ zbiorem miar probabilistycznych.*

Za pomocą zbioru $\mathcal{Q}$ definiujemy funkcję $\bar{\rho} : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wzorem

$$\bar{\rho}(Y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}(-g_n Y) = \sup_{g_n \in \mathcal{Q}} \bar{E}(-g_n Y). \tag{3.3}$$

Lemat 3.2.3.

1. *$\bar{\rho}$ jest $\sigma(L^1, L^\infty)$-półciągłą z dołu, koherentną miarą ryzyka na L^1, $\bar{\rho}(0) \in \mathbb{R}$.*
2. *$\bar{\rho}|_{L^2} < \infty$.*

Dowód

Dowodzimy punktu 1. Oczywiście $\bar{\rho}(0) = 0$. Uzasadnimy teraz, że $\bar{\rho}$ jest koherentną miarą ryzyka na L^1. Jest jasne, że wypukła funkcja $\bar{\rho}$ jest monotoniczna, dodatnio jednorodna i podaddytywna. Ponadto $\mathcal{Q} \subseteq L^\infty$ jest zbiorem miar probabilistycznych na mocy punktu 1. z lematu 3.2.1, co implikuje translacyjną niezmienniczość. Uzasadnimy teraz, że $\bar{\rho}$ jest $\sigma(L^1, L^\infty)$-półciągła z dołu. Ponieważ $g_n \in L^\infty$ dla każdego n, to funkcja $Y \to \bar{E}(-g_n Y)$ jest $\sigma(L^1, L^\infty)$-ciągła. Stąd $\bar{\rho}$ jest $\sigma(L^1, L^\infty)$-półciągła z dołu, jako supremum funkcji $\sigma(L^1, L^\infty)$-ciągłych.
Sprawdzimy punkt 2. Dla dowolnej zmiennej losowej $Y \in L^2$ mamy

$$\bar{\rho}(Y) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \bar{E}(-Y \cdot g_n) \le \sup_{n \in \mathbb{N}} \|g_n\|_2 \|Y\|_2.$$

Teza wynika z punktu 3. w tezie lematu 3.2.1. □
Załóżmy, że na przestrzeni $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathbb{P}})$ dana jest filtracja $(\bar{\mathcal{F}})_{t \in \mathcal{T}}$, gdzie $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ dla pewnego $T \in \mathbb{N}$. Niech $\bar{\mathcal{F}}_0 = \{\varnothing, \bar{\Omega}\}$, $\bar{\mathcal{F}}_T = \bar{\mathcal{F}}$. Niech ponadto $\bar{\mathcal{M}}$ będzie pewnym wolnym od arbitrażu modelem. Ustalmy dowolną nieujemną, całkowalną wypłatę H oraz liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Pokażemy, że nie można rozwiązać problemu efektywnego zabezpieczenia w modelu rynku $\bar{\mathcal{M}}$ dla miary ryzyka $\bar{\rho}$ za pomocą metody zaproponowanej w pracy [49]. Z poprzedniego podrozdziału wiemy, że kluczowym krokiem w metodzie z [49] jest rozwiązanie problemu statycznego

$$\inf_{\phi \in \bar{\mathcal{R}}} \bar{\rho}((\phi - 1)H), \tag{3.4}$$

gdzie $\bar{\mathcal{R}} := \{\phi : \bar{\Omega} \to [0,1] \ : \ \phi - \bar{\mathcal{F}}_T - \text{mierzalne}, \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\bar{\mathcal{M}})} \bar{E}_{\mathbb{P}^*} \phi H \le \tilde{V}_0\}$. Od tej pory obowiązuje

Założenie 3.2.4. *Istnieje zmienna losowa $\widehat{\phi} \in \bar{\mathcal{R}}$ taka, że $\bar{\rho}((\widehat{\phi} - 1)H) < \infty$.*

Zauważmy, że gdyby założenie 3.2.4 nie było spełnione, to wartość problemu (3.4) byłaby równa ∞ i w tej sytuacji rozwiązaniem zagadnienia (3.4) byłby dowolny element $\bar{\mathcal{R}}$, o ile $\bar{\mathcal{R}} \neq \varnothing$.
Aby skorzystać z twierdzenia 4.9 z [49] i uzyskać postać rozwiązania $\tilde{\phi}$ zagadnienia (3.4), potrzeba upewnić się, że istnieje zmienna losowa $\phi_0 \in \bar{\mathcal{R}}$ taka, że $\bar{\rho}((\phi_0 - 1)H) < \infty$ oraz $\bar{\rho} : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest ciągła w $(\phi_0 - 1)H$. Pokażemy, że nie istnieje takie ϕ_0.

Stwierdzenie 3.2.5. *Funkcja $\bar{\rho} : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ nie jest ciągła w punkcie $(\phi_0 - 1)H$ dla dowolnego $\phi_0 \in \bar{\mathcal{R}}$, takiego, że $\bar{\rho}((\phi_0 - 1)H) < \infty$.*

Dowód

Krok 1. Pokażemy, że istnieje ciąg $(h_l)_{l\in\mathbb{N}} \subseteq L^1$ taki, że $h_l \overset{L^1}{\to} 0$ oraz $\bar{\rho}(h_l) = \infty$.
Niech $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$h(x) = \begin{cases} x^{-\frac{3}{4}} & gdy\ x \in (0,1], \\ 0 & gdy\ x = 0. \end{cases}$$

Jest jasne, że $h \in L^1$. Ponadto $\sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{E} g_n h = \infty$. Istotnie

$$\bar{E} g_n h = c_n \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{3}{4} x^{-1} dx > \frac{3}{4} \ln n,$$

przy czym ostatnia nierówność wynika z tego, że $c_n > 1$ dla $n \in N$. Ciąg $(h_l)_{l\in\mathbb{N}}$ dany wzorem $h_l := -\frac{h}{l}$ dla $l \in \mathbb{N}$ ma żądane własności.
Krok 2. Załóżmy, że $\bar{\rho}((\phi_0 - 1)H) < \infty$ dla pewnego $\phi_0 \in \bar{\mathcal{R}}$. Uzasadnimy, że $\bar{\rho}$ nie jest ciągła w $(\phi_0 - 1)H$.
Niech $x_l := (\phi_0 - 1)H + h_l$ dla $l \in \mathbb{N}$. Jest jasne, że $x_l \xrightarrow{L^1} (\phi_0 - 1)H$. Ponadto zauważmy, że

$$\bar{\rho}(x_l) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{E}[((1 - \phi_0)H - h_l) g_n] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \bar{E}\left[\left((1 - \phi_0)H + \frac{h}{l}\right) g_n\right] =: I.$$

Ponieważ $(1 - \phi_0)H \geq 0$, to $\bar{E}[g_n((1 - \phi_0)H + \frac{h}{l})] \geq \frac{1}{l}\bar{E}(g_n h)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd

$$I \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{l} \bar{E}(g_n h) = \infty.$$

A zatem $x_l \xrightarrow{L^1} (\phi_0 - 1)H$ i jednocześnie $\infty = \bar{\rho}(x_l) \nrightarrow \bar{\rho}((\phi_0 - 1)H) < \infty$, co dowodzi, że $\bar{\rho}$ nie jest ciągła w punkcie $(\phi_0 - 1)H$. □

Z powyższego stwierdzenia wynika, że problemu statycznego (3.4) nie można rozwiązać przy pomocy dotychczas znanych wyników. Zaprezentujemy teraz nowe aproksymacyjne podejście do rozwiązania zagadnienia (3.4).
Będziemy postępować według następującego planu:
1. Uzasadnimy istnienie rozwiązania $\tilde{\phi}$ problemu statycznego (3.4).
2. Określimy ciąg wypłat $H_n := H \wedge n \in L^\infty \subseteq L^2$.
3. Z punktu 2 tezy lematu 3.2.3 mamy $\bar{\rho}|_{L^2} < \infty$ co implikuje, że $\bar{\rho}$ jest ciągła na L^2.
4. Stosujemy wyniki Rudloff [49], by wskazać istnienie i postać rozwiązania ϕ_n zagadnienia

$$\inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}^{(n)}} \bar{\rho}(H_n(\phi - 1)), \tag{3.5}$$

gdzie

$$\bar{\mathcal{R}}^{(n)} = \{\phi : \bar{\Omega} \to [0,1]\ :\ \phi - \bar{\mathcal{F}}_T - \text{mierzalne}, \sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}(\bar{\mathcal{M}})} \bar{E}_{\mathbb{P}^*}(\phi H_n) \leq \tilde{V}_0\}.$$

5. Przy pomocy ciągu $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skonstruujemy ciąg zmiennych losowych zbieżny $\mathbb{P} - p.n.$ do $H\tilde{\phi}$.
Uzupełnimy teraz szczegóły opisanych powyżej kroków.

Krok 1. Istnienie rozwiązania $\tilde{\phi}$ problemu statycznego (3.4) wynika z tego, że funkcja $\bar{\rho}$ jest półciągła z dołu w topologii $\sigma(L^1, L^\infty)$, a zbiór $\bar{\mathcal{R}}$ jest zwarty w topologii $\sigma(L^\infty, L^1)$ i niepusty na mocy założenia 3.2.4. Korzystając z tych dwóch własności istnienie rozwiązania dowodzi się, postępując jak w dowodzie twierdzenia 4.3 z [49]. Nie będziemy w tym momencie przytaczać całego rozumowania, gdyż zaprezentujemy je dla ogólniejszego zagadnienia rozważanego w następnym podrozdziale.
Krok 2. nie wymaga dodatkowych uzupełnień.
Krok 3. Ponieważ $\bar{\rho}$ jest skończoną wypukłą miarą ryzyka na L^2, z punktu 1. w twierdzeniu A.2.10 wynika, że $\bar{\rho}$ ciągła na L^2.
Krok 4. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ stosujemy twierdzenie 4.9 z [49], otrzymując postać rozwiązania ϕ_n problemu (3.5). W tym miejscu nie podamy postaci rozwiązania, gdyż wyniknie ona z rachunków przeprowadzonych w sytuacji ogólniejszej, którą będziemy rozważać w następnym podrozdziale.
Krok 5. Niech $Y_n := H_n(\phi_n - 1)$, $n \in \mathbb{N}$. Z lematu Delbaena i Schachermayera (Dodatek, lemat B.2.1) wynika, że dla $n \in \mathbb{N}$ istnieją zmienne losowe $\tilde{Y}_n \in \operatorname{conv}(\{Y_n, Y_{n+1}, \ldots\})$ takie, że ciąg $(\tilde{Y}_n)$ jest $\bar{\mathbb{P}}$-p.n. zbieżny do pewnej zmiennej losowej $\tilde{Y}$ o wartościach w $[-\infty, 0]$.
Pokażemy najpierw

Lemat 3.2.6. $\tilde{Y} = H(\tilde{\phi}-1)$ *dla pewnej* $\bar{\mathcal{F}}_T$*-mierzalnej zmiennej losowej* $\tilde{\phi} : \bar{\Omega} \to [0,1]$.

Dowód
Z lemat Delbaena i Schachermayera wynika, że zmienne losowe $\tilde{Y}_n$, $n \in \mathbb{N}$ możemy przedstawić w postaci $\tilde{Y}_n = \sum_{k \geq n} \lambda_k^n Y_k$, gdzie $\lambda^n = (\lambda_n^n, \lambda_{n+1}^n, \ldots)$ jest ciągiem nieskończonych wektorów nieujemnych wag takich, że dla każdego n wektor λ^n ma skończenie wiele dodatnich współrzędnych. Zauważmy, że dla $\bar{\mathcal{F}}_T$-mierzalnej zmiennej losowej $\tilde{\phi}$ danej wzorem

$$\tilde{\phi} = \begin{cases} 1 & gdy \ H = 0, \\ \frac{\tilde{Y}}{H} + 1 & gdy \ H > 0 \end{cases}$$

zachodzi równość $H(\tilde{\phi} - 1) = \tilde{Y}$.
Zatem, aby zakończyć dowód, wystarczy uzasadnić, że

$$\tilde{\phi} \text{ przyjmuje wartości z przedziału } [0,1]. \tag{3.6}$$

Ponieważ $-1 \leq (\phi_k - 1) \leq 0$ oraz $0 \leq H_k \leq H$, to $-H \leq Y_k \leq 0$ dla każdego k. Stąd oczywiście $-H \leq \tilde{Y}_n \leq 0$ i przechodząc do granicy, otrzymujemy $-H \leq \tilde{Y} \leq 0$, skąd wynika (3.6). □
Teraz udowodnimy

Lemat 3.2.7. $\tilde{\phi} \in \bar{\mathcal{R}}$

Dowód
Mamy sprawdzić, że $\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\bar{\mathcal{M}})} \bar{E}_{\mathbb{P}^*} \tilde{\phi} H \leq \tilde{V}_0$. Najpierw pokażemy, że ciąg $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $Z_n := \sum_{k \geq n} \lambda_k^n H_k \phi_k$ jest zbieżny $\bar{\mathbb{P}}$-p.n. Rozpatrzmy ciąg $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $X_n := \sum_{k \geq n} \lambda_k^n H_k$. Przy tych oznaczeniach możemy napisać $\tilde{Y}_n = Z_n - X_n$. Zauważmy, że

$\lim_{k\to\infty} H_k = H$ $\bar{\mathbb{P}}$-p.n. oraz ponieważ $H \in L^1$, to $\bar{\mathbb{P}}(H < \infty) = 1$, co implikuje, że dla $\bar{\mathbb{P}}$-prawie wszystkich $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ ciąg $H_k(\bar{\omega})$ jest od pewnego $n(\bar{\omega})$ stały i równy $H(\bar{\omega})$. Jest więc jasne, że $\lim_{n\to\infty} X_n = H$ $\bar{\mathbb{P}}$-p.n. Ponieważ ciąg $\tilde{Y}_n$ jest zbieżny $\bar{\mathbb{P}}$-p.n., to musi istnieć granica ciągu Z_n dla $\bar{\mathbb{P}}$-prawie wszystkich $\bar{\omega} \in \bar{\Omega}$ oraz zachodzi równość $\tilde{Y} = \lim_{n\to\infty} Z_n - H$. Z poprzedniego lematu otrzymujemy $H(\tilde{\phi} - 1) = \lim_{n\to\infty} Z_n - H$, skąd wynika, że ciąg $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ma granicę równą $H\tilde{\phi}$.
Teraz łatwo kończymy dowód. Ustalmy dowolne $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\bar{\mathcal{M}})$ i pokażemy, że $\bar{E}_{\mathbb{P}^*}\tilde{\phi}H \leq \tilde{V}_0$. Z lematu Fatou otrzymujemy
$E_{\mathbb{P}^*}\tilde{\phi}H \leq \liminf_{n\to\infty} E_{\mathbb{P}^*} Z_n = \liminf_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \lambda_k^n E_{\mathbb{P}^*} H_k\phi_k \leq \tilde{V}_0$, przy czym ostatnia nierówność wynika z tego, że λ^n jest dla każdego n wektorem o skończonej liczbie dodatnich wag oraz $\phi_k \in \bar{\mathcal{R}}^{(k)}$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$, co implikuje, że $E_{\mathbb{P}^*} H_k\phi_k \leq \tilde{V}_0$. □

Pozostaje dowieść, że $\tilde{\phi}$ realizuje minimum problemu (3.4).

Twierdzenie 3.2.8. $\bar{\rho}((\tilde{\phi} - 1)H) = \inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}} \bar{\rho}((\phi - 1)H)$.

Dowód
Krok 1. Sprawdzimy, że $\bar{\mathcal{R}} \subseteq \bar{\mathcal{R}}^{(n)}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech $\phi \in \bar{\mathcal{R}}$. Wówczas dla dowolnego $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\bar{\mathcal{M}})$ $\bar{E}_{\mathbb{P}^*} H_n\phi \leq \bar{E}_{\mathbb{P}^*} H\phi \leq \tilde{V}_0$, co dowodzi, że $\phi \in \bar{\mathcal{R}}^{(n)}$.
Krok 2. Niech

$$L := \inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}} \bar{\rho}((\phi - 1)H) \text{ oraz } L_n := \inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}^{(n)}} \bar{\rho}(H_n(\phi - 1)).$$

Pokażemy, że $L_n \leq L$ dla $n \in \mathbb{N}$.
Dla dowolnej $\bar{\mathcal{F}}_T$-mierzalnej zmiennej losowej $\phi : \bar{\Omega} \to [0,1]$ i dowolnego $n \in \mathbb{N}$ prawdziwa jest nierówność $H(\phi - 1) \leq H_n(\phi - 1)$. Stąd i z monotoniczności miary ryzyka $\bar{\rho}$ dostajemy $\bar{\rho}(H(\phi - 1)) \geq \bar{\rho}(H_n(\phi - 1))$, skąd

$$L_n = \inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}^{(n)}} \bar{\rho}(H_n(\phi - 1)) \leq \inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}^{(n)}} \bar{\rho}(H(\phi - 1)) \overset{(*)}{\leq} \inf_{\phi\in\bar{\mathcal{R}}} \bar{\rho}((\phi - 1)H) = L,$$

przy czym $(*)$ wynika z inkluzji $\bar{\mathcal{R}} \subseteq \bar{\mathcal{R}}^{(n)}$ dowiedzionej w kroku 1.
Krok 3. Ponieważ $\bar{\rho}$ jest $\sigma(L^1, L^\infty)$-półciągła z dołu, to $\bar{\rho}$ ma własność Fatou na mocy twierdzenia A.2.4. Zauważmy, że $|\tilde{Y}_n| \leq H \in L^1$ dla każdego n. Stąd i z faktu, że $\tilde{Y}_n \to \tilde{Y}$ $\mathbb{P}$ – p.n., w oparciu o własność Fatou otrzymujemy

$$\bar{\rho}(\tilde{Y}) \leq \liminf_{n\to\infty} \bar{\rho}(\tilde{Y}_n). \tag{3.7}$$

Z podaddytywności i dodatniej jednorodności $\bar{\rho}$ wynika, że

$$\bar{\rho}(\tilde{Y}_n) \leq \sum_{k\geq n} \lambda_k^n \bar{\rho}(H_k(\phi_k - 1)) \overset{(**)}{=} \sum_{k\geq n} \lambda_k^n L_k \leq L, \tag{3.8}$$

przy czym nierówność $(**)$ wynika z tego, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zmienna losowa ϕ_n jest rozwiązaniem zagadnienia (3.5). Ostatecznie łącząc (3.7) i (3.8), dostajemy $L \leq \bar{\rho}(H(\tilde{\phi} - 1)) = \bar{\rho}(\tilde{Y}) \leq \liminf_{n\to\infty} \bar{\rho}(\tilde{Y}_n) \leq L$, co oznacza, że $\tilde{\phi}$ realizuje minimum zagadnienia (3.4). □

Uwaga 3.2.9. *W dowodzie powyższego twierdzenia korzystaliśmy z tego, że $\bar{\rho}$ jest koherentną miarą ryzyka, a w szczególności jest dodatnio jednorodna i podaddytywna. W następnych podrozdziałach uzyskamy ogólniejsze wyniki, z których wyniknie, że zaprezentowaną tu ideę aproksymacji można zastosować również do zagadnienia efektywnego zabezpieczenia z wypukłymi miarami ryzyka.*

3.3 $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problem pierwotny i jego rozwiązanie

Przypomnijmy, że ustalona jest bezatomowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Zmierzamy do przeniesienia idei aproksymacji rozwiązania przedstawionej w przykładzie na przypadek ogólny. Celem tego podrozdziału jest uzyskanie wyników potrzebnych do rozwiązania zagadnień aproksymujących tzw. ogólny problem statyczny, który rozważymy w następnym podrozdziale. Dowody rezultatów z tego podrozdziału są w Dodatku C.

Zaczniemy od wprowadzenia oznaczeń, które będą obowiązywać do końca tego rozdziału.

Oznaczenia 3.3.1.

1. *Zbiór miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem $\mathbb{P}$ będziemy oznaczać przez $\mathcal{P}$, a zbiór miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem $\mathbb{P}$ o gęstościach ograniczonych przez $\mathcal{P}_b$.*
2. *Będziemy pisać $Z_{\mathbb{Q}} := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$. Poza tym często będziemy utożsamiać elementy $\mathcal{P}$ z ich gęstościami względem $\mathbb{P}$.*
3. *Dla dowolnego podzbioru $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ przez $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$ będziemy oznaczać σ-ciało wszystkich podzbiorów $\tilde{\mathcal{P}}$.*
4. *Dla dowolnego podzbioru $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ przez $\Lambda(\tilde{\mathcal{P}})$ (odp. $\Lambda_+(\tilde{\mathcal{P}})$) będziemy oznaczać zbiór miar ze znakiem (odp. miar nieujemnych) o skończonym wahaniu określonych na $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$.*
5. *Dla dowolnego $p \in [1, \infty]$ przez L^p oznaczać będziemy (o ile nie zostanie powiedziane inaczej) przestrzeń $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.*
6. *Dla dowolnego $p \in [1, \infty]$ wartość formy dwuliniowej związanej z przestrzeniami $(L^p, (L^p)^*)$ na parze $(Y, Y^*) \in (L^p, (L^p)^*)$ oznaczać będziemy przez $E(YY^*)$. Ponadto w przypadku, gdy $Y \in L^p$ i $Y^* = Z_{\mathbb{Q}}$ dla pewnego $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$ będziemy pisać niekiedy $E_{\mathbb{Q}}Y$ zamiast $E(YZ_{\mathbb{Q}})$.*
7. *Dla dowolnej przestrzeni topologicznej $(\mathcal{E}, \mathcal{O})$ i dowolnego podzbioru $C \in \mathcal{O}$ przez $\mathcal{I}_C$ oznaczać będziemy funkcję zdefiniowaną następująco:*

$$\mathcal{I}_C(x) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } x \in C, \\ \infty, & \text{gdy } x \notin C. \end{cases} \tag{3.9}$$

8. *Dla dowolnej funkcji $F : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ przez* $\mathrm{dom}(F)$ *oznaczymy dziedzinę efektywną funkcji F, tzn. zbiór $\{F < \infty\}$.*

9. *Dla* $p \in [1,\infty)$ *przez* $\mathcal{L}(L^\infty, L^p)$ *oznaczymy przestrzeń liniową operatorów liniowych ciągłych* L^∞ *do* L^p. *Dla* $A \in \mathcal{L}(L^\infty, L^p)$ *przez* A^* *oznaczać będziemy operator sprzężony do* A. *Ponadto przez* $\|A\|$ *(odp.* $\|A^*\|$*) oznaczać będziemy normę operatora* A *(odp. operatora* A^**).*

Definicja 3.3.2. *Niech* $\mathcal{R} = \{\phi : \Omega \to [0,1] \mid \phi\ -\ \mathcal{F}-\text{mierzalne}\}$. *Elementy zbioru* $\mathcal{R}$ *będziemy nazywać zrandomizowanymi testami.*

Uwaga 3.3.3. *Pojęcie zrandomizowanego testu pochodzi z teorii testowania hipotez statystycznych. Istnieje związek pomiędzy problemami efektywnego zabezpieczenia i zagadnieniami poszukiwania optymalnych testów statystycznych (np. [33]), co znajduje odzwierciedlenie w używanej terminologii. Rozdział ten jest poświęcony uogólnieniu metody rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia zwanej podejściem Neymana-Pearsona.*

Ustalmy liczbę $p \in [1,\infty)$, operator $B \in \mathcal{L}(L^\infty, L^p)$, funkcje $G : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $\beta : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ oraz niepusty zbiór $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$. Niech ponadto q będzie wykładnikiem sprzężonym do p, tzn. $L^q := (L^p)^*$. Funkcjonały liniowe ciągłe na L^p będziemy utożsamiać z elementami L^q.
Do końca tego podrozdziału obowiązuje

Założenie 3.3.4. $E_{\mathbb{Q}}(B\phi)$ *istnieje dla* $\phi \in \mathcal{R}$ *i* $\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}$.

Definiujemy zbiór

$$\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta} = \{\phi \in \mathcal{R}\ :\ E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \phi)] \leq \beta(\mathbb{Q}) \quad \forall \mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}\}.$$

Definicja zbioru $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest poprawna dzięki założeniu 3.3.4.

Definicja 3.3.5. *Powiemy, że zbiór* $\tilde{\mathcal{P}}$ *jest dopuszczalny dla* (B, G, β), *jeżeli* $G(B\phi) < \infty$ *dla pewnego* $\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$.

Definicja 3.3.6. *Zagadnienie znalezienia*

$$\inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}} G(B\phi) \tag{3.10}$$

nazwiemy $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemem pierwotnym. Powiemy, że* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problem pierwotny jest dobrze postawiony, jeżeli* $\tilde{\mathcal{P}}$ *jest zbiorem dopuszczalnym dla* (B, G, β).

Uwaga 3.3.7. *Wartość dobrze postawionego* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego jest mniejsza od* ∞, *ponieważ* $G(B\phi) < \infty$ *dla pewnego* $\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$.

Od tej pory do końca tego podrozdziału obowiązuje

Założenie 3.3.8. *Zbiór* $\tilde{\mathcal{P}}$ *jest dopuszczalny dla* (B, G, β).

Celem tego podrozdziału jest uzyskanie twierdzeń o istnieniu i postaci rozwiązania $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego. Techniki dowodów faktów przedstawionych w tym podrozdziale w nieznacznym stopniu uogólniają podejście zaprezentowane w [48] i [49]. W związku z tym, że uzasadnienie wyników sformułowanych w tym

podrozdziale wymagało niewielkiego własnego wkładu koncepcyjnego, ich dowody oraz rezultaty pomocnicze zamieszczamy w Dodatku C.
Podamy teraz dodatkową listę założeń, z których będziemy korzystać w tym podrozdziale. W każdym ze sformułowanych faktów wskażemy, z których założeń korzysta się w dowodzie. W twierdzeniu 3.3.17 używa się ze wszystkich założeń.

ZAŁOŻENIA 3.3.9.

I. *Funkcja* $\beta : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *jest ograniczona,* $\mathcal{S}(\mathcal{P})$*-mierzalna,* $\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \beta(\mathbb{Q}) > 0$.

II. *Funkcja* $G : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *jest wypukła, półciągła z dołu,* $G(0) \in \mathbb{R}$ *oraz jeżeli* $X \leq Y$*, to* $G(X) \leq G(Y)$.

III. *Operator* $B \in \mathcal{L}(L^\infty, L^p)$ *jest dodatni.*

IV. *Funkcja* $L^\infty \ni \phi \to E[(B\phi)Y^*]$ *jest* $\sigma(L^\infty, L^1)$*-ciągła dla każdego* $Y^* \in L^q$.

V. *Istnieje* $\phi_0 \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ *takie, że* $G(B\phi_0) < \infty$ *oraz funkcja* G *jest ciągła w punkcie* $B\phi_0$.

VI. *Zbiór* $\tilde{\mathcal{P}}$ *jest ograniczony w* L^q.

UWAGA 3.3.10. *Wszelkie inne założenia, które będą pojawiać się do końca tego rozdziału będą w razie potrzeby oznaczane w inny sposób niż symbolami* $I - VI$*. Zachowując taką konwencję, nie spowodujemy niejednoznaczności, jeżeli, odwołując się do poszczególnych warunków sformułowanych powyżej, będziemy pisać np.: „korzystamy z założenia* I *lub „korzystamy z warunku* I*, zamiast „korzystamy z warunku* I *z założenia 3.3.9”.*

DEFINICJA 3.3.11. *Zagadnienie*

$$\sup_{Y^*\in L^q_+}\Big\{\inf_{\phi\in\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}}\{E[(B\phi)Y^*] - G^*(Y^*)\}\Big\}. \tag{3.11}$$

będziemy nazywać $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemem dualnym.*

TWIERDZENIE 3.3.12. *Załóżmy, że spełnione są warunki* II, IV*. Niech* P *(odp.* D*) będzie wartością* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego (odp.* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego).*
a) *Zagadnienia te są dualne w sensie Fenchela.*
b) *Istnieje zrandomizowany test* $\bar{\phi}$ *będący rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego oraz* $P \in \mathbb{R}$.
c) *Załóżmy dodatkowo, że spełniony jest warunek* V*. Wówczas zachodzi mocna dualność, tzn.* $P = D$ *i istnieje* $\bar{Y}^*$ *będące rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego. Niech ponadto* $H : \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta} \times \mathrm{dom}(G^*) \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją zadaną wzorem*

$$H(\phi, Y^*) = E[(B\phi)Y^*] - G^*(Y^*). \tag{3.12}$$

Wówczas $(\bar{\phi}, \bar{Y}^*)$ *jest punktem siodłowym funkcji* H *takim, że*

$$\inf_{\phi\in\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}} H(\phi, \bar{Y}^*) = H(\bar{\phi}, \bar{Y}^*) = \sup_{Y^*\in\mathrm{dom}(G^*)} H(\bar{\phi}, Y^*).$$

UWAGA 3.3.13. *Z dowodu powyższego twierdzenia wynika, że $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problem pierwotny (odp. $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problem dualny) jest pierwotnym (odp. dualnym) problemem Fenchela.*

Kluczowym krokiem do otrzymania postaci rozwiązania $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego jest zbadanie wewnętrznego zagadnienia w $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemie dualnym, tzn. zagadnienia

$$\inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}} \left\{ E[(B\phi)Y^*] - G^*(Y^*) \right\} \tag{3.13}$$

dla dowolnego $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*) \subseteq L^q$.

DEFINICJA 3.3.14. *Niech $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$ będzie dowolne ustalone. Zagadnienie (3.13) będziemy nazywać $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemem pierwotnym.*

Ze sformułowanego poniżej lematu 3.3.16 wyniknie, że dla dowolnego $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$ zagadnienie

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_+(\tilde{\mathcal{P}})} W^{Y^*}_{\tilde{\mathcal{P}},B,G,\beta}(\lambda), \tag{3.14}$$

gdzie

$$W^{Y^*}_{\tilde{\mathcal{P}},B,G,\beta}(\lambda) = -E\left[B^*(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q}))\right]^- + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} (E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1}) - \beta(\mathbb{Q}))\lambda(d\mathbb{Q}) - G^*(Y^*).$$

jest dualnym problemem Fenchela dla $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego, co motywuje poniższą definicję.

DEFINICJA 3.3.15. *Niech $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$ będzie dowolne ustalone. Zagadnienie (3.14) będziemy nazywać $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemem dualnym.*

LEMAT 3.3.16. *Niech spełnione będą założenia I, III, IV oraz VI. Ustalmy dowolne $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$. Niech $p(Y^*)$ będzie wartością $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego oraz niech $d(Y^*)$ będzie wartością $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego.*
a) Zagadnienia te są dualne w sensie Fenchela.
b) Istnieje rozwiązanie $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego oraz $p(Y^*) \in \mathbb{R}$.
c) Zachodzi mocna dualność, czyli $p(Y^*) = d(Y^*)$ oraz istnieje rozwiązanie $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego.
d) Niech miara $\bar{\lambda}^{Y^*} \in \Lambda_+(\tilde{\mathcal{P}})$ będzie dowolnym rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego. Wówczas zmienna losowa $\bar{\phi}^{Y^*}$ jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bar{\phi}^{Y^*}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } B^*(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \bar{\lambda}^{Y^*}(d\mathbb{Q}))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } B^*(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \bar{\lambda}^{Y^*}(d\mathbb{Q}))(\omega) > 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

oraz

$$E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \bar{\phi}^{Y^*})] = \beta(\mathbb{Q}) \text{ dla } \bar{\lambda}^{Y^*} - \text{ prawie wszystkich } \mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}. \tag{3.16}$$

Z twierdzenia 3.3.12 i lematu 3.3.16 otrzymamy główny wynik tego podrozdziału dotyczący postaci rozwiązania $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego.

TWIERDZENIE 3.3.17. *Niech spełnione będą założenia 3.3.9. Wówczas:*
1. *Istnieją rozwiązania:* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego oraz* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego.*
2. *Dla dowolnego* $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$ *będącego rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego istnieje rozwiązanie* $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego.*
3. *Niech* $\tilde{Y}^*$ *będzie dowolnym rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego oraz niech* $\tilde{\lambda}$ *będzie dowolnym rozwiązaniem* $(\tilde{Y}^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego. Wówczas zrandomizowany test* $\tilde{\phi}$ *jest rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } B^*(\tilde{Y}^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \tilde{\lambda}(d\mathbb{Q}))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } B^*(\tilde{Y}^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \tilde{\lambda}(d\mathbb{Q}))(\omega) > 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

oraz

$$E_{\mathbb{Q}}[B(\boldsymbol{1} - \tilde{\phi})] = \beta(\mathbb{Q}) \text{ dla } \tilde{\lambda} - \text{ prawie wszystkich } \mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}. \tag{3.18}$$

Okazuje się, że tezy twierdzenia 3.3.17 można dowieść, przyjmując, że spełnione są warunki I–V z założenia 3.3.9, zaś warunek VI, zastępując poniższym założeniem.

ZAŁOŻENIE 3.3.18.
(A) *Funkcja* $\phi \to E\big(B\phi \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\big)$ *jest* $\sigma(L^\infty, L^1)$*-ciągła dla* $\lambda \in \Lambda_+(\tilde{\mathcal{P}})$
(B) $\sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}} B\boldsymbol{1} < \infty$.

Zachodzi

LEMAT 3.3.19. *Niech spełnione będą założenia* I, III, IV *oraz przyjmijmy, że zachodzi założenie 3.3.18. Wówczas dla dowolnego* $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$ *zachodzi teza lematu 3.3.16.*

Z powyższego lematu dostajemy twierdzenie, z którego wywnioskujemy główny wynik (tw. 4.9) z pracy [49] dotyczący istnienia i postaci rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia.

TWIERDZENIE 3.3.20. *Niech spełnione będą założenia* $I - V$ *oraz założenie 3.3.18. Wówczas:*
1. *Istnieją rozwiązania:* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego oraz* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego.*
2. *Dla dowolnego* $Y^* \in \mathcal{Y}^*$ *będącego rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego istnieje rozwiązanie* $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego.*
3. *Niech* $\tilde{Y}^*$ *będzie dowolnym rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego oraz niech* $\tilde{\lambda}$ *będzie dowolnym rozwiązaniem* $(\tilde{Y}^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu dualnego. Wówczas zrandomizowany test* $\tilde{\phi}$ *jest rozwiązaniem* $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$*-problemu pierwotnego wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\tilde{\phi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } B^*(\tilde{Y}^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \tilde{\lambda}(d\mathbb{Q}))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } B^*(\tilde{Y}^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \tilde{\lambda}(d\mathbb{Q}))(\omega) > 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

oraz

$$E_{\mathbb{Q}}[B(\boldsymbol{1} - \tilde{\phi})] = \beta(\mathbb{Q}) \text{ dla } \tilde{\lambda} - \text{ prawie wszystkich } \mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}. \tag{3.20}$$

Głównym celem tego rozdziału jest uzyskanie wyników dotyczących efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging (nie jest spełnione założenie 3.1.2) oraz efektywnego zabezpieczenia względem miar ryzyka, które nie spełniają warunku ciągłości (założenie 3.1.1), z którego w istotny sposób korzysta się w pracy [49]. Kluczowym krokiem do realizacji tego celu będzie rozwinięcie aproksymacyjnego podejścia do rozwiązania tzw. ogólnego problemu statycznego, którym zajmiemy się w następnym podrozdziale.

3.4 Ogólny problem statyczny

Przypomnijmy, że ustalona jest bezatomowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ oraz obowiązują oznaczenia 3.3.1. Zaczniemy od wprowadzenia kilku dodatkowych oznaczeń, które będą obowiązywać do końca tego rozdziału.

Oznaczenia 3.4.1.

1. *Niech* $\mathcal{X} = L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{Y} = L^{1}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{Y}_k = L^{p_k}(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, *dla pewnych ustalonych* p_k, $k \in \mathbb{N}$ *takich, że* $1 \le p_k < \infty$.
2. *Dla dowolnego podzbioru* $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$ *i dowolnych liczb* $k, r \in \mathbb{N}$ *przez* $\tilde{\mathcal{P}}_k^r$ *oznaczać będziemy zbiór* $\tilde{\mathcal{P}}_k^r := \{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}} : \|Z_{\mathbb{Q}}\|_{\mathcal{Y}_k^*} \le r\}$.

Do końca tego podrozdziału ustalmy dowolny operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, zbiór $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_b$ oraz funkcje $\alpha : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ i $F : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zauważmy, że dla zbioru $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}$ i operatora A spełnione jest założenie 3.3.4, co pozwala określić zbiór $\mathcal{R}_{\mathcal{Q},A,\alpha}$, który będziemy oznaczać przez $\mathcal{R}_0$. Do końca tego podrozdziału obowiązuje

Założenie 3.4.2. *Zbiór* $\mathcal{Q}$ *jest dopuszczalny dla* (A, F, α) *w sensie definicji 3.3.5.*

Definicja 3.4.3. *Ogólnym problemem statycznym nazwiemy zagadnienie*

$$\inf_{\phi \in \mathcal{R}_0} F(A\phi). \tag{3.21}$$

W następnym podrozdziale uzasadnimy, że problem statyczny (3.2) jest szczególnym przypadkiem ogólnego problemu statycznego. Celem tego podrozdziału jest przedstawienie aproksymacyjnej metody rozwiązania ogólnego problemu statycznego. Podejście aproksymacyjne pozwoli m.in. rozwiązać problem efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging. Idea podejścia aproksymacyjnego jest następująca: należy zdefiniować ciąg zagadnień, które można rozwiązać znanymi dotychczas metodami, a następnie z otrzymanych rozwiązań skonstruować ciąg zmiennych losowych zbieżny do rozwiązania ogólnego problemu statycznego. Zagadnienia aproksymujące będą $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemami pierwotnymi dla odpowiednio dobranych zbiorów $\tilde{\mathcal{P}}$, operatorów B oraz funkcji G i β. Ciągi zmiennych losowych zbieżne do rozwiązania ogólnego problemu statycznego będziemy konstruować w oparciu o lemat Delbaena i Schachermayera (Dodatek, lemat B.2.1).
Aby uprościć sformułowania wielu faktów w tym rozdziale, wprowadzimy następującą definicję.

DEFINICJA 3.4.4. *Powiemy, że ciąg* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jest DS-ciągiem, jeżeli dla każdego* $n \in \mathbb{N}$*:*
1. $\gamma_n = (\gamma_{n,n}, \gamma_{n,n+1}, \ldots)$.
2. *Współrzędne wektora* γ_n *są nieujemne, przy czym jest skończenie wiele niezerowych.*
3. $\sum_{k\geq n} \gamma_{n,k} = 1$.

UWAGA 3.4.5. *Pojecie DS-ciągu nawiązuje do pierwszych liter nazwisk autorów lematu B.2.1.*

Z założenia 3.4.2 wynika, że ogólny problem statyczny jest dobrze postawionym $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemem pierwotnym. Przejdziemy teraz do zbadania kwestii istnienia i opisu postaci rozwiązania ogólnego problemu statycznego. Podamy listę założeń, z których będziemy korzystać w tym podrozdziale. W każdym z dowodzonych faktów wskażemy, z których założeń będziemy korzystać. W dowodzie głównego twierdzenia będziemy korzystać ze wszystkich założeń.

ZAŁOŻENIA 3.4.6.
(i) $\alpha : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ *- funkcja ograniczona,* $\mathcal{S}(\mathcal{P})$*-mierzalna taka, że* $\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}} \alpha(\mathbb{Q}) > 0$.
(ii) $F : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *- wypukła, półciągła z dołu,* $F(0) \in \mathbb{R}$ *oraz jeżeli* $X \leq Y$*, to* $F(X) \leq F(Y)$.
Operator $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ *spełnia następujące warunki*
$(iii.a)$ A *- dodatni,*
$(iii.b)$ $A(\mathcal{R}) \supseteq \{Y \in \mathcal{Y} \ : \ 0 \leq Y \leq A\boldsymbol{1}\}$.
Istnieje ciąg operatorów $A_n : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}_n$, $n \in \mathbb{N}$ *takich, że*
$(iv.a)$ A_n*- dodatni,*
$(iv.b)$ $\forall \phi \in \mathcal{R}\ A_n\phi \to A\phi$ *w* L^1,
$(iv.c)$ $\forall \phi \in \mathcal{R}\ A_n\phi \leq A_{n+1}\phi\ \mathbb{P}-p.n.$,
$(iv.d)$ *funkcja* $L^\infty \ni \phi \to E[(A_n\phi)Y^*]$ *jest* $\sigma(L^\infty, L^1)$*-ciągła dla każdego* $Y^* \in \mathcal{Y}_n^*$.
Dla każdego $n \in \mathbb{N}$*, dla funkcji* $F_n := F_{|\mathcal{Y}_n}$ *zachodzi warunek*
(v) *Istnieje* $\phi_0^{(n)} \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_n,\alpha}$ *takie, że* $F_n(A_n\phi_0^{(n)}) < \infty$ *oraz funkcja* F_n *jest ciągła w* $A_n\phi_0^{(n)}$.

UWAGA 3.4.7. *Inne numerowane założenia sformułowane w podrozdziałach 3.4 i 3.5 będą oznaczane w inny sposób niż symbolami* $(i), (ii), (iii), (iv.a) - (iv.d), (v)$. *Przy takiej konwencji będziemy pisać np.: „korzystamy z warunku (założenia)* (i)*" i nie spowoduje to niejednoznaczności sformułowań.*

TWIERDZENIE 3.4.8. *Niech spełnione będą założenia 3.4.6. Wówczas:*
1. *Dla* $k, r \in \mathbb{N}$ *istnieje rozwiązanie* $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu dualnego.*
2. *Dla dowolnego* $\tilde{Y}^*$ *będącego rozwiązaniem* $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu dualnego istnieje rozwiązanie* $(\tilde{Y}^*, \mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu dualnego.*
3. *Dla* $k, r \in \mathbb{N}$ *niech* $Y_{k,r}^*$ *będzie dowolnym rozwiązaniem* $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu dualnego oraz niech* $\lambda_{k,r}$ *będzie dowolnym rozwiązaniem* $(Y_{k,r}^*, \mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu dualnego. Wówczas istnieje zrandomizowany test* $\phi_{k,r}$ *spełniający warunki*

$$\phi_{k,r}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } A_k^*(Y_{k,r}^* - \int_{\mathcal{Q}_k^r} Z_{\mathbb{Q}} \lambda_{k,r}(d\mathbb{Q}))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } A_k^*(Y_{k,r}^* - \int_{\mathcal{Q}_k^r} Z_{\mathbb{Q}} \lambda_{k,r}(d\mathbb{Q}))(\omega) > 0. \end{cases} \tag{3.22}$$

oraz

$$E_{\mathbb{Q}}[A_k(\mathbf{1}-\phi_{k,r})] = \alpha(\mathbb{Q}) \ \textit{dla} \ \lambda_{k,r}-\textit{prawie wszystkich} \ \mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_k^r. \tag{3.23}$$

4. *Dla $k,r \in \mathbb{N}$ niech $\phi_{k,r}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.22) oraz (3.23). Wówczas istnieją DS-ciągi $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ i zrandomizowany test $\bar{\phi}$ taki, że*

$$A\bar{\phi} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\geq n}\eta_{n,k}\lim_{m\to\infty}\sum_{r\geq m}\beta_{m,r}^{(k)}A_k\phi_{k,r} \qquad \mathbb{P}-p.n. \ i \ w \ L^1. \tag{3.24}$$

Ponadto, jeżeli $(\tilde{\eta}_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\tilde{\beta}_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$ są dowolnymi DS-ciągami, dla których istnieje zrandomizowany test $\tilde{\phi}$ taki, że zachodzi równość (3.24) z $\bar{\phi} = \tilde{\phi}$, $\eta_n = \tilde{\eta}_n$, $\beta_m^{(k)} = \tilde{\beta}_m^{(k)}$, $n,k,m \in \mathbb{N}$, to $\tilde{\phi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego.

Z twierdzenia wynika, że można wskazać rozwiązanie ogólnego problemu statycznego, jako iterowaną granicę $\mathbb{P}$-p.n. i w L^1 kombinacji wypukłych zmiennych losowych znanej postaci.
Przedstawimy teraz kroki dowodu i wskażemy w jaki sposób korzystamy z poszczególnych warunków występujących w założeniu 3.4.6.
1. Korzystając z warunków (i), (ii) oraz $(iv.b)-(iv.d)$, dowodzimy, że dla dowolnego k istnieje zmienna losowa ϕ_k, która rozwiązuje $(\mathcal{Q},A_k,F_k,\alpha)$-problem pierwotny.
2. Przyjmując, że spełnione są warunki (i), (ii), (iv) oraz (v) uzasadniamy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ zmienna losowa $A_k\phi_k$ jest granicą $\mathbb{P}$-p.n. i w L^1 skończonych kombinacji wypukłych elementów $(A_k\phi_{k,r})_{r\in\mathbb{N}}$, gdzie zrandomizowane testy $(\phi_{k,r})_{r\in\mathbb{N}}$ spełniają warunki (3.22) oraz (3.23).
3. Niech $Y_k = A_k\phi_k$. Z lematu B.2.1 wynika, że istnieją zmienne losowe $\tilde{Y}_k \in \mathrm{conv}(\{Y_k, Y_{k+1},\ldots\})$ takie, że ciąg $(\tilde{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny $\mathbb{P}$-p.n. do pewnej zmiennej losowej $\tilde{Y}$ o wartościach w $[0,\infty]$. Korzystając z warunku (iii), pokażemy, że $\tilde{Y} = A\tilde{\phi}$ dla pewnego $\tilde{\phi} \in \mathcal{R}$.
4. Sprawdzimy, że $\tilde{\phi} \in \mathcal{R}_0$, a następnie uzasadnimy, że $\tilde{\phi}$ realizuje minimum ogólnego problemu statycznego i zachodzi (3.24).

Przechodzimy do realizacji planu nakreślonego powyżej.
Ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że ponieważ $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_b \subseteq L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, a obraz A_k jest zawarty w $\mathcal{Y}_k^* \subseteq L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$, dla operatora A_k i zbioru $\mathcal{Q}$ spełnione jest założenie 3.3.4, co pozwala określić zbiór $\mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha}$ i rozważyć $(\mathcal{Q},A_k,F_k,\alpha)$-problem pierwotny.

§1. Istnienie rozwiązania $(\mathcal{Q},A_k,F_k,\alpha)$-problemu pierwotnego

Lemat 3.4.9. *Niech spełnione będą warunki $(iv.b)$, $(iv.c)$. Wówczas $A_k\phi \leq A\phi$ dla dowolnego $\phi \in \mathcal{R}$.*

Dowód
Załóżmy przeciwnie, że istnieje $\phi \in \mathcal{R}$ takie, że $\mathbb{P}(\{A_k\phi > A\phi\}) > 0$. Z warunku $(iv.c)$ wynika, że $\{A_k\phi > A\phi\} \subseteq \{A_l\phi > A\phi\}$ dla $l \geq k$. Stąd i z warunku $(iv.b)$ dostajemy

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{l\to\infty} E|A_l\phi - A\phi| &\geq \lim_{l\to\infty} E\big(\mathbf{1}_{\{A_k\phi > A\phi\}}|A_l\phi - A\phi|\big) \\ &\geq \lim_{l\to\infty} E\big(\mathbf{1}_{\{A_k\phi > A\phi\}}|A_k\phi - A\phi|\big) > 0. \text{ Sprzeczność. } \square \end{aligned}$$

Lemat 3.4.10. *Przy założeniach* $(iv.b)$, $(iv.c)$ *zachodzi inkluzja* $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A,\alpha} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha}$.

Dowód
Niech $\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A,\alpha}$. Wówczas

$$E_{\mathbb{Q}}A(\mathbf{1} - \phi) \le \alpha(\mathbb{Q}) \text{ dla } \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \tag{3.25}$$

Z lematu 3.4.9 zastosowanego do zrandomizowanego testu $\mathbf{1}-\phi$ wynika, że $A_k(\mathbf{1}-\phi) \le A(\mathbf{1} - \phi)$. Stąd oraz z (3.25) dostajemy
$E_{\mathbb{Q}}[A_k(\mathbf{1} - \phi)] \le E_{\mathbb{Q}}[A(\mathbf{1} - \phi)] \le \alpha(\mathbb{Q})$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, co implikuje $\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha}$. □

Twierdzenie 3.4.11. *Niech spełnione będą warunki* (ii) *oraz* $(iv.b) - (iv.d)$. *Wówczas istnieje rozwiązanie* $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu pierwotnego i wartość tego problemu jest skończona.*

Dowód
Uzasadnimy, że dla $L^p = \mathcal{Y}_k$, $L^q = \mathcal{Y}_k^*$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}$, $B = A_k$, $\beta = \alpha$ i $G = F_k$ spełnione są założenia punktu $b)$ w twierdzeniu 3.3.12, tzn. sprawdzimy, że zbiór $\mathcal{Q}$ jest dopuszczalny dla (A_k, F_k, α) oraz zachodzą warunki II i IV sformułowane w założeniach 3.3.9.
Ponieważ zbiór $\mathcal{Q}$ jest dopuszczalny dla (A, F, α) (założenie 3.4.2), istnieje $\hat{\phi} \in \mathcal{R}_0$, dla którego $F(A\hat{\phi}) < \infty$. Stąd i z lematu 3.4.10 wiemy, że zbiór $\mathcal{Q}$ jest dopuszczalny dla (A_k, F_k, α). Ponadto zachodzą następujące implikacje: $(ii) \Rightarrow II$, $(iv.d) \Rightarrow IV$ co dowodzi, że spełnione są założenia, przy których zachodzi punkt $b)$ tezy twierdzenia 3.3.12, skąd natychmiast wynika, że istnieje rozwiązanie $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego oraz wartość tego problemu jest skończona. □

§2. Postać rozwiązania $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego

Twierdzenie 3.4.12. *Niech spełnione będą warunki* $(i), (ii)$, (iv) *oraz* (v).
$a)$ *Zachodzą punkty* $1 - 3$ *tezy twierdzenia 3.4.8.*
$b)$ *Dla* $r \in \mathbb{N}$ *niech* $\phi_{k,r}$ *będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.22) oraz (3.23). Wówczas istnieje DS-ciąg* $(\bar{\beta}_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$ *oraz zrandomizowany test* $\bar{\phi}$ *taki, że*

$$A_k\bar{\phi} = \lim_{m\to\infty} \sum_{r\ge m} \bar{\beta}_{m,r}^{(k)} A_k\phi_{k,r} \ \mathbb{P} - p.n. \ i \ w \ L^1, \tag{3.26}$$

$c)$ *Niech* $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$ *będzie dowolnym DS-ciągiem, dla którego istnieje zrandomizowany test* ϕ_k *taki, że spełniona jest równość (3.26) z* $\bar{\phi} = \phi_k$ *oraz* $\bar{\beta}_m^{(k)} = \beta_m^{(k)}$, $m \in \mathbb{N}$. *Wówczas* ϕ_k *jest rozwiązaniem* $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$*-problemu pierwotnego.*

Dowód
Dowodzimy $a)$. Uzasadnimy punkty 1, 2, 3 tezy twierdzenia 3.4.8, rozważając $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemy pierwotne dla $r \in \mathbb{N}$. Sprawdzimy, że dla dowolnych $k, r \in \mathbb{N}$ i dla $L^p = \mathcal{Y}_k$, $L^q = \mathcal{Y}_k^*$, $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}_k^r$, $B = A_k$, $G = F_k$ oraz $\beta = \alpha$ spełnione są założenia twierdzenia 3.3.17. W tym celu zauważmy, że zachodzą następujące implikacje: $(i) \Rightarrow I, (ii) \Rightarrow II, (iv.a) \Rightarrow III, (iv.d) \Rightarrow IV, (v) \Rightarrow V$. Ponadto zbiór $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}_k^r$ jest

ograniczony w $L^q = \mathcal{Y}_k^*$, co daje warunek VI.
Sprawdziliśmy, że spełnione są założenia twierdzenia 3.3.17, skąd wynika, że dla dowolnych $k, r \in \mathbb{N}$ istnieje rozwiązanie $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego i $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego. Ponadto dla dowolnego Y^* będącego rozwiązaniem $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego istnieje rozwiązanie $(Y^*, \mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego. Niech $Y_{k,r}^*$ (odp. $\lambda_{k,r}$) będzie dowolnym rozwiązaniem $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego
(odp. $(Y_{k,r}^*, \mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego). Wówczas zrandomizowany test $\phi_{k,r}$ jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki (3.22) i (3.23). W ten sposób dowiedliśmy punktów 1, 2, 3 tezy twierdzenia 3.4.8, co kończy dowód punktu a).
Przechodzimy do dowodu punktu b).
Dla $r \in \mathbb{N}$ niech $\phi_{k,r}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.22) oraz (3.23), którego istnienie dowiedliśmy powyżej.
Krok 1. Ponieważ zbiór $\mathcal{R}$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-zwarty, to z ciągu $(\phi_{k,r})_{r\in\mathbb{N}}$ można wybrać podciąg $(\phi_{k,n_r})_{r\in\mathbb{N}}$ słabo* zbieżny do pewnej zmiennej losowej $\hat{\phi}_k$. Oznaczmy $\hat{\phi}_{k,r} := \phi_{k,n_r}$ dla $r \in \mathbb{N}$.
Krok 2. Sprawdzimy, że $\hat{\phi}_k \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha}$.
Ustalmy dowolną miarę $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Uzasadnimy, że

$$E_{\mathbb{Q}}[A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_k)] \leq \alpha(\mathbb{Q}). \tag{3.27}$$

Zauważmy najpierw, że ciąg $\left(A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_{k,r})\right)_{r=1}^\infty$ jest zbieżny do $A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_k)$ w topologii $\sigma(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_k^*)$. Istotnie, dla dowolnego $Y^* \in \mathcal{Y}_k^*$ mamy

$$\lim_{r\to\infty} E[(A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_{k,r}))Y^*] = E[(A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_k))Y^*], \tag{3.28}$$

co wynika z warunku $(iv.d)$ i tego, że ciąg $(\hat{\phi}_{k,r})_{r=1}^\infty$ jest słabo* zbieżny do $\hat{\phi}_k$. Niech teraz $N_0 \in \mathbb{N}$ będzie najmniejszą liczbą taką, że $\|Z_{\mathbb{Q}}\|_{\mathcal{Y}_k^*} \leq N_0$. Wówczas $E_{\mathbb{Q}}[A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_{k,r})] \leq \alpha(\mathbb{Q})$ dla $r \geq N_0$, bo $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_k^r$ i $\hat{\phi}_{k,r} \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q}_k^r,A_k,\alpha}$. Stąd i z (3.28) zastosowanego do $Y^* = Z_{\mathbb{Q}} \in \mathcal{Y}_k^*$ otrzymujemy $E_{\mathbb{Q}}[A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_k)] = E[(A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_k))Z_{\mathbb{Q}}] = \lim_{r\to\infty} E_{\mathbb{Q}}[A_k(\mathbf{1} - \hat{\phi}_{k,r})] \leq \alpha(\mathbb{Q})$, co dowodzi (3.27).
Krok 3. Niech $\hat{Y}_r := A_k\hat{\phi}_{k,r}$ dla $r \in \mathbb{N}$. Przy pomocy ciągu $(\hat{Y}_r)_{r=1}^\infty$ skonstruujemy ciąg zbieżny $\mathbb{P}$-p.n. do pewnej zmiennej losowej $\hat{Y}$ i jednocześnie zbieżny do $A_k\hat{\phi}_k$ w topologii $\sigma(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_k^*)$.
Z lematu Delbaena i Schachermayera wynika, że istnieje DS-ciąg $(\zeta_m)_{m\in\mathbb{N}}$, dla którego ciąg zmiennych losowych $\hat{Y}^{(m)} := \sum_{r\geq m} \zeta_{m,r}\hat{Y}_r$, $m \in \mathbb{N}$ jest $\mathbb{P}$-p.n. zbieżny do pewnej zmiennej losowej $\hat{Y}$. Twierdzimy, że ciąg $(\hat{Y}^{(m)})_{m=1}^\infty$ jest zbieżny do $A_k\hat{\phi}_k$ w topologii $\sigma(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_k^*)$.
Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz $Y^* \in \mathcal{Y}_k^*$. Pokażemy, że istnieje $M_0 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$|E(\hat{Y}^{(m)}Y^*) - E[(A_k\hat{\phi}_k)Y^*]| < \varepsilon$$

dla $m \geq M_0$ Ponieważ ciąg $(\hat{\phi}_{k,r})$ jest słabo* zbieżny do $\hat{\phi}_k$, to z warunku $(iv.d)$ wynika, że istnieje $M_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $|E[(A_k\hat{\phi}_{k,r})Y^*] - E[(A_k\hat{\phi}_k)Y^*]| < \varepsilon$ dla $r \geq M_0$.

Stąd $|E(\hat{Y}^{(m)}Y^*) - E[(A_k\hat{\phi}_k)Y^*]| \leq \sum_{r\geq m} \zeta_{m,r}|E[(A_k\hat{\phi}_{k,r})Y^*] - E[(A_k\hat{\phi}_k)Y^*]| < \varepsilon$ dla $m \geq M_0$.
Krok 4. Dowiedziemy, że $A_k\hat{\phi}_k = \hat{Y}$. W tym celu wystarczy sprawdzić, że

$$E(\hat{Y}Y^*) = E[(A_k\hat{\phi}_k)Y^*] \tag{3.29}$$

dla dowolnego $Y^* \in \mathcal{Y}_k^*$. Ustalmy teraz dowolne $Y^* \in \mathcal{Y}_k^*$ i uzasadnimy (3.29). Zauważmy, że $0 \leq \hat{Y}^{(m)} \leq A_k\mathbf{1}$, skąd $|\hat{Y}^{(m)}Y^*| \leq |Y^*|A_k\mathbf{1} \in L^1$ dla $m \in \mathbb{N}$ oraz $\lim_{m\to\infty} \hat{Y}^{(m)}Y^* = \hat{Y}Y^*$ $\mathbb{P}$ – p.n. Wówczas $E(\hat{Y}Y^*) \overset{(*)}{=} \lim_{m\to\infty} E(\hat{Y}^{(m)}Y^*) \overset{(**)}{=} E[(A_k\hat{\phi}_k)Y^*]$, przy czym $(*)$ wynika z twierdzenia Lebesgue o zbieżności zmajoryzowanej, a $(**)$ z tego, że ciąg $(\hat{Y}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $A_k\hat{\phi}_k$ w topologii $\sigma(\mathcal{Y}_k, \mathcal{Y}_k^*)$.
Krok 5. Definiujemy kandydata na rozwiązanie $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego, który spełnia warunek (3.26).
Niech $\bar{\phi} := \hat{\phi}_k$. Z kroku 5. wynika, że

$$A_k\bar{\phi} = \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq r_m} \zeta_{m,r} A_k\hat{\phi}_{k,r} = \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq r_m} \zeta_{m,r} A_k\phi_{k,n_r} \quad \mathbb{P} - \text{p.n.} \tag{3.30}$$

Definiujemy DS-ciąg $(\bar{\beta}_m^{(k)})_{m\in\mathbb{N}}$, przyjmując

$$\bar{\beta}_{m,l}^{(k)} = \begin{cases} \zeta_{m,r}, & \text{gdy } l = n_r \text{ dla pewnego } r \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{w p.p.,} \end{cases}$$

dla $l \geq m$, $m \in \mathbb{N}$. Ostatecznie (3.30) zapisuje się jako (3.26).
Krok 6. Zbieżność w L^1 wynika z (3.30), twierdzenia Lebesgue o zbieżności zmajoryzowanej i faktu, że $\sum_{r\geq m} \bar{\beta}_{m,r}^{(k)} A_k\phi_{k,r} \leq A\mathbf{1}$, dla $m \in \mathbb{N}$. Zakończyliśmy dowód punktu 4. tezy.
Przechodzimy do dowodu punktu c)
Niech $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^\infty$ będzie dowolnym DS-ciągiem, dla którego istnieje zrandomizowany test ϕ_k taki, że spełniona jest równość (3.26) z $\bar{\phi} = \phi_k$ oraz $\bar{\beta}_m^{(k)} = \beta_m^{(k)}$, $m \in \mathbb{N}$. Dowiedziemy, że ϕ_k jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego.
Niech L oznacza wartość $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego oraz dla $r \in \mathbb{N}$ przez L_r oznaczmy wartość $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego. Zauważmy, że

$$L_r \leq L \text{ dla } r \in \mathbb{N}, \tag{3.31}$$

ponieważ

$$\mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha} = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} \mathcal{R}_{\mathcal{Q}_k^r,A_k,\alpha}, \text{ skąd } \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{Q}_k^r,A_k,\alpha} \text{ dla } r \in \mathbb{N}$$

.
Z kroku 2. wiemy, że $\phi_k \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha}$. Zatem

$$\begin{aligned} L \leq F_k(A_k\phi_k) &\overset{(*)}{\leq} \liminf_{m\to\infty} F_k(\hat{Y}^{(m)}) = \liminf_{m\to\infty} F_k\Big(\sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} A_k\phi_{k,r}\Big) \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} F_k(A_k\phi_{k,r}) = \liminf_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} L_r \overset{(**)}{\leq} L, \end{aligned}$$

przy czym w (*) skorzystaliśmy z tego, że F_k jest półciągła z dołu na L^1 i $\lim_{m\to\infty} \hat{Y}^{(m)} = A_k\phi_k$ w L^1 na mocy kroku 6. Ponadto w $(**)$ zastosowaliśmy (3.31). □

§3. **Konstrukcja kandydata na rozwiązanie ogólnego problemu statycznego**

W poprzednim paragrafie dla każdego $k \in \mathbb{N}$ wskazaliśmy zrandomizowany test ϕ_k będący rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego spełniający warunek (3.26). Do zmiennych losowych $Y_k := A_k\phi_k$ dla $k \in \mathbb{N}$ zastosujemy lemat Delbaena i Schachermayera, który gwarantuje istnienie zmiennych losowych $\tilde{Y}_k \in \mathrm{conv}(\{Y_k, Y_{k+1}, \ldots\})$, $k \in \mathbb{N}$ takich, że ciąg $(\tilde{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny $\mathbb{P}$-p.n. do pewnej zmiennej losowej $\tilde{Y}$ o wartościach w $[0, \infty]$. Korzystając z dodatniości operatorów $A, A_1, A_2, \ldots$, dowiedziemy, że $0 \le \tilde{Y} \le A\mathbf{1}$. Stąd oraz z warunku $(iii.b)$ wyniknie istnienie zrandomizowanego testu, który będzie kandydatem na rozwiązanie ogólnego problemu statycznego.

Twierdzenie 3.4.13. *Niech spełnione będą założenia 3.4.6. Dla $k \in \mathbb{N}$ przez ϕ_k oznaczmy rozwiązanie $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego. Wówczas istnieje DS-ciąg $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz zrandomizowany test $\bar{\phi}$ taki, że dla zmiennych losowych zdefiniowanych wzorem*

$$\bar{Y}_n := \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} A_k \phi_k, \ \ n \in \mathbb{N} \tag{3.32}$$

zachodzi

$$A\bar{\phi} = \lim_{n\to\infty} \bar{Y}_n \quad \mathbb{P}-p.n. \ i \ w \ L^1. \tag{3.33}$$

Dowód

Krok 1. Z lematu Delbaena i Schachermayera wiemy, że istnieje DS-ciąg $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oraz istnieje zmienna losowa $\bar{Y}$ o wartościach w zbiorze $[0, \infty]$ t. że
$\bar{Y} = \lim_{k\to\infty} \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} A_k \phi_k \quad \mathbb{P}-\text{p.n.}$

Krok 2. Dowiedziemy, że $0 \le \bar{Y} \le A\mathbf{1}$ oraz $\bar{Y}_n \xrightarrow{L^1} \bar{Y}$.
Z lematu 3.4.9 otrzymujemy $0 \le \bar{Y}_n = \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} A_k \phi_k \le \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} A \phi_k = A \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} \phi_k \le A\mathbf{1}$, przy czym ostatnia nierówność wynika z tego, że A jest operatorem dodatnim oraz $\mathbf{1} - \sum_{k\ge n} \eta_{n,k}\phi_k \ge 0$. Stąd $0 \le \bar{Y}_n \le A\mathbf{1}$ $\mathbb{P}$-p.n. dla każdego $n \in \mathbb{N}$, skąd, przechodząc do granicy, otrzymujemy

$$0 \le \bar{Y} \le A\mathbf{1} \quad \mathbb{P}-\text{p.n.} \tag{3.34}$$

Ponadto z twierdzenia Lebesgue o zbieżności zmajoryzowanej wynika, że ciąg $(\bar{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $\bar{Y}$ w L^1.
Krok 3. Z (3.34) i z warunku $(iii.b)$ w założeniu 3.4.6 wynika, że istnieje zmienna losowa $\bar{\phi} \in \mathcal{R}$, dla której zachodzi równość $\bar{Y} = A\bar{\phi}$, skąd otrzymujemy (3.33). □

§4. **Kandydat jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego**

Niech $\tilde{\phi}$ (odp. $(\tilde{\eta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$) będzie dowolnym zrandomizowanym testem (odp. DS-ciągiem), dla których zachodzi równość (3.33) z $\bar{\phi} = \tilde{\phi}$ oraz $\eta_n = \tilde{\eta}_n$), $n \in \mathbb{N}$. Niech $\tilde{Y} := A\tilde{\phi}$. Zrandomizowany test $\tilde{\phi}$ jest kandydatem na rozwiązanie ogólnego problemu statycznego. Najpierw uzasadnimy, że $\tilde{\phi}$ jest elementem $\mathcal{R}_0$. W tym celu zdefiniujmy funkcję $H : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ wzorem

$$H(Y) := \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \big(E_{\mathbb{Q}}(-Y) - \alpha(\mathbb{Q})\big). \tag{3.35}$$

Funkcja H jest dobrze określona, ponieważ $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_b$. Zauważmy, że H jest funkcją wypukłą i półciągłą z dołu, jako supremum funkcji wypukłych i ciągłych. Ponadto dla funkcji H zachodzi następująca własność

$$H(Z_1) \le H(Z_2) \text{ dla dowolnych } Z_1, Z_2 \in \mathcal{Y} \text{ takich, że } Z_1 \ge Z_2. \tag{3.36}$$

LEMAT 3.4.14. *Niech $B \in \mathcal{L}(L^\infty, L^p)$ dla pewnego $1 \le p < \infty$, będzie dodatnim operatorem. Wówczas $\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},B,\alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $H(-B(\mathbf{1} - \phi)) \le 0$.*

DOWÓD
$\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},B,\alpha}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $E_{\mathbb{Q}} B(\mathbf{1} - \phi) \le \alpha(\mathbb{Q})$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, co jest równoważne warunkowi $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{Q}} \big(E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \phi)] - \alpha(\mathbb{Q})\big) \le 0$, czyli $H(-B(\mathbf{1} - \phi)) \le 0$. □

LEMAT 3.4.15. $\tilde{\phi} \in \mathcal{R}_0$

DOWÓD
Z lematu 3.4.14 wynika, że wystarczy sprawdzić warunek $H(-A(\mathbf{1} - \tilde{\phi})) \le 0$.
Krok 1. Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy zmienne losowe $X_n := -A_n\mathbf{1} + \bar{Y}_n$, gdzie zmienna losowa $\bar{Y}_n$ dana jest wzorem (3.32). Zauważmy, że ciąg $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny do $-A(\mathbf{1} - \tilde{\phi})$ w L^1. Istotnie

$$\|X_n - \big(-A(\mathbf{1} - \tilde{\phi})\big)\|_1 = \| - A_n\mathbf{1} + A\mathbf{1} + \bar{Y}_n - \tilde{Y}\|_1 \le \| - A_n\mathbf{1} + A\mathbf{1}\|_1 + \|\bar{Y}_n - \tilde{Y}\|_1 = I_n^1 + I_n^2.$$

$I_n^1 \to 0$ przy $n \to \infty$ na mocy warunku $(iv.b)$ oraz $I_n^2 \to 0$ przy $n \to \infty$ na mocy (3.33). Stąd, ponieważ funkcja H jest półciągła z dołu, otrzymujemy $H(-A(\mathbf{1}-\tilde{\phi})) \le \liminf_{n\to\infty} H(X_n)$.
Krok 2. Kończymy dowód uzasadniając, że

$$H(X_n) \le 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}. \tag{3.37}$$

Zauważmy, że $X_n = -A_n\mathbf{1} + \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} A_k \phi_k = \sum_{k\ge n} \eta_{n,k}(-A_n\mathbf{1} + A_k\phi_k)$. Stąd i z wypukłości funkcji H otrzymujemy

$$H(X_n) \le \sum_{k\ge n} \eta_{n,k} H(-A_n\mathbf{1} + A_k\phi_k). \tag{3.38}$$

Z warunku $(iv.c)$ wynika, że $A_n\mathbf{1} \le A_k\mathbf{1}$ dla $k \ge n$, skąd $-A_n\mathbf{1} + A_k\phi_k \ge -A_k\mathbf{1} + A_k\phi_k$. Stąd oraz z własności (3.36), otrzymujemy $H(-A_n\mathbf{1} + A_k\phi_k) \le H(-A_k\mathbf{1} + A_k\phi_k) = H(-A_k(\mathbf{1} - \phi_k)) \le 0$, przy czym ostatnia nierówność wynika z lematu 3.4.14 oraz tego, że $\phi_k \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_k,\alpha}$.
Otrzymaliśmy $H(-A_n\mathbf{1} + A_k\phi_k) \le 0$ dla $n \in \mathbb{N}$ i $k \ge n$. Wstawiając to do (3.38), dostajemy (3.37). □

Teraz przechodzimy do dowodu twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania ogólnego problemu statycznego.
DOWÓD (TWIERDZENIA 3.4.8)
Z punktu a) tezy twierdzenia 3.4.12 dostajemy punkty 1, 2, 3.

Przechodzimy do dowodu punktu 4. Dla $k, r \in \mathbb{N}$ niech $\phi_{k,r}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.22) oraz (3.23), którego istnienie wynika z punktu 3.
Krok 1. Z punktu b) w tezie twierdzenia 3.4.12 wiemy, że dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje DS-ciąg $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$ oraz zrandomizowany test ϕ_k będący rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego, dla którego zachodzi równość (3.26) z $\bar{\phi} = \phi_k$ oraz $\bar{\beta}_m^{(k)} = \beta_m^{(k)}$, $k, m \in \mathbb{N}$.
Z twierdzenia 3.4.13 wynika, że istnieje DS-ciąg $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$ oraz zrandomizowany test $\bar{\phi}$, dla którego zachodzi równość (3.33).
Krok 2. Uzasadnimy równość (3.24).
Oznaczmy lewą (odp. prawą) stronę równości (3.24) przez L (odp. P). Korzystając najpierw z (3.26) dla $\bar{\phi} = \phi_k$ oraz $\bar{\beta}_m^{(k)} = \beta_m^{(k)}$, $k, m \in \mathbb{N}$, a następnie z (3.33), otrzymujemy $P = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} A_k \phi_k = A\bar{\phi} = L$.
Krok 4. Niech $(\tilde{\eta}_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\tilde{\beta}_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$ będą dowolnymi DS-ciągami, dla których istnieje zrandomizowany test $\tilde{\phi}$ taki, że zachodzi równość (3.24) z $\bar{\phi} = \tilde{\phi}$, $\eta_n = \tilde{\eta}_n$, $\beta_m^{(k)} = \tilde{\beta}_m^{(k)}$, $k, m, n \in \mathbb{N}$. Uzasadnimy, że $\tilde{\phi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego.
Z lematu 3.4.15 wiemy, że $\tilde{\phi} \in \mathcal{R}_0$.
Niech

$$L_k := \inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q}, A_k, \alpha}} F_k(A_k \phi)$$

dla $k \in \mathbb{N}$ oraz niech L oznacza wartość ogólnego problemu statycznego.
Sprawdzimy, że

$$L_k \leq L \text{ dla } k \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Ustalmy dowolne $k \in \mathbb{N}$. Z lematu 3.4.9 wiemy, że $A_k \phi \leq A\phi$ dla $\phi \in \mathcal{R}$.
Ponadto z definicji $F_k = F$ na $\mathcal{Y}_k$, skąd $F_k(A_k\phi) = F(A_k\phi) \leq F(A\phi)$ dla $\phi \in \mathcal{R}$. Stąd

$$L_k = \inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q}, A_k, \alpha}} F_k(A_k\phi) \leq \inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\mathcal{Q}, A_k, \alpha}} F(A\phi) \overset{(*)}{\leq} \inf_{\phi \in \mathcal{R}_0} F(A\phi) = L,$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z inkluzji $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{Q}, A_k, \alpha}$, dowiedzionej w lemacie 3.4.10. Z twierdzenia 3.4.13 wiemy, że

$$\bar{Y}_n \xrightarrow{L^1} A\tilde{\phi}, \tag{3.40}$$

gdzie dla $n \in \mathbb{N}$ zmienne losowe $\bar{Y}_n$ dane są wzorem (3.32).
Z wypukłości F otrzymujemy

$$F(\bar{Y}_n) \leq \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} F(A_k \phi_k). \tag{3.41}$$

Z lematu 3.4.15 i z półciągłości F z dołu, dostajemy

$$\begin{aligned} L \leq F(A\tilde{\phi}) &\overset{(a)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} F(\bar{Y}_n) \overset{(b)}{\leq} \liminf_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} F(A_k\phi_k) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} F_k(A_k\phi_k) \overset{(c)}{=} \liminf_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} L_k \overset{(d)}{\leq} L, \end{aligned}$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy z (3.40), w (b) z (3.41), w (c) z tego, że ϕ_k jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A_k, F_k, \alpha)$-problemu pierwotnego, którego wartość wynosi L_k dla $k \in \mathbb{N}$, a w (d) z (3.39).
Otrzymaliśmy $\inf_{\phi \in \mathcal{R}_0} F(A\phi) = L = F(A\tilde{\phi})$, co oznacza, że $\tilde{\phi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego. □

3.5 Wypukłe zabezpieczenie

Przypomnijmy, że dana jest bezatomowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $\mathbb{F}$. Przypomnijmy również, że w podrozdziale 3.1 ustaliliśmy pewien wolny od arbitrażu model rynku $\mathcal{M} = (S, \Phi)$, gdzie S jest nieujemnym, adaptowanym procesem o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, zaś Φ oznacza zbiór strategii samofinansujących. Ustalmy wypukłą miarę ryzyka $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, nieujemną, całkowalną wypłatę H oraz liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Zastosujemy rezultaty z podrozdziałów 3.3 i 3.4 do rozwiązania problemu wypukłego zabezpieczenia (3.1). W twierdzeniu 3.5.7 otrzymamy nowe warunki opisujące postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia rozważanego w pracy [49]. Głównym wynikiem będzie postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia dowolnych nieujemnych, całkowalnych wypłat, względem miar ryzyka spełniających założenie 3.1.1 (twierdzenie 3.5.12). W szczególności jest to pierwszy rezultat, w którym podano postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging. Na zakończenie rozdziału, opierając się na twierdzeniu 3.4.8 wskażemy postać rozwiązania problemu wypukłego zabezpieczenia względem miar ryzyka z osłabionym warunkiem ciągłości (tw. 3.5.14). Zastosowanie twierdzeń 3.5.12 i 3.5.14 zilustrujemy przykładami.

3.5.1 Problem statyczny, jako szczególny przypadek ogólnego problemu statycznego

Do końca tego rozdziału przyjmijmy:

$$\begin{aligned} &F(Y) := \rho(-Y), \text{ dla } Y \in L^1,\ \mathcal{Q} := \mathcal{P}_b(\mathcal{M}),\ A\phi := H\phi, \text{ dla } \phi \in L^\infty, \\ &\alpha(\mathbb{P}^*) := \tilde{V}_0 \text{ dla } \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M}). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Niech ponadto

$$\tilde{\mathcal{R}}_b := \left\{ \phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H \le \tilde{V}_0 \right\}.$$

Dla $F, \mathcal{Q}, A, \alpha$ określonych w (3.42) ogólny problem statyczny (3.21) zapisuje się w postaci

$$\inf_{\psi \in \bar{\mathcal{R}}_b} \rho(-\psi H), \tag{3.43}$$

gdzie $\bar{\mathcal{R}}_b := \{\psi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H(\mathbf{1} - \psi) \le \tilde{V}_0\}$. Dokonując w (3.43) podstawienia $\phi =: \mathbf{1} - \psi \in \mathcal{R}$, otrzymujemy

$$\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}_b} \rho((\phi - \mathbf{1})H). \tag{3.44}$$

Zagadnienie (3.44) jest problemem statycznym (3.2), co wyniknie z kluczowej obserwacji.

Lemat 3.5.1. *Dla dowolnej nieujemnej wypłaty X zachodzi równość*

$$\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} X = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} X. \tag{3.45}$$

Dowód

Krok 1. Zauważmy, że obie strony równości (3.45) są dobrze określone i większe od $-\infty$. Oznaczmy lewą (odp. prawą) stronę równości (3.45) przez L (odp. P). Z inkluzji $\mathcal{P}_b(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M})$ wynika, że $L \geq P$.

Krok 2. Dowiedziemy, że dla dowolnej miary $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ takiej, że $X \in L^1(\mathbb{Q})$ istnieje miara $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})$ taka, że $E_{\tilde{\mathbb{Q}}} X = E_{\mathbb{Q}} X$.

Niech $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ będzie miarą, względem której wypłata X jest całkowalna. Definiujemy proces M wzorem $M_t = E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{F}_t)$ dla $t \in \mathcal{T}$. Rozważmy model rynku $\mathcal{M}' = (S', \Phi')$, gdzie $S' = (S, M)$ oraz Φ' jest zbiorem strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^{k+2}$. Ponieważ $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$, to z implikacji (2) $\Rightarrow$ (3) w twierdzeniu 1.1.12 zastosowanym do modelu rynku $\mathcal{M}'$ wynika istnienie miary $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}(\mathcal{M}')$ takiej, że $\max\{1, |X|\} \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} \in L^\infty$. W szczególności $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M}') \subseteq \mathcal{P}_b(\mathcal{M})$, gdyż każda miara martyngałowa w modelu $\mathcal{M}'$ jest również miarą martyngałową w modelu $\mathcal{M}$. Ponieważ X jest wypłatą osiągalna w modelu $\mathcal{M}'$, otrzymujemy $E_{\tilde{\mathbb{Q}}} X = E_{\mathbb{Q}} X$ na mocy twierdzenia 1.1.24.

Krok 3. Rozważmy przypadek, gdy $L = \infty$ i istnieje miara $\mathbb{P}_\infty \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ taka, że $E_{\mathbb{P}_\infty} X = \infty$. Wówczas, aby dowieść, że $L = P = \infty$ wystarczy uzasadnić, że dla dowolnego $c > 0$ istnieje miara $\mathbb{P}_c \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})$ takie, że $X \in L^1(\mathbb{P}_c)$ oraz $E_{\mathbb{P}_c} X > c$. Ustalmy dowolne $c > 0$ i niech n będzie takie, że $E_{\mathbb{P}_\infty}(X \wedge n) > c$. Z kroku 2 zastosowanego do zmiennej losowej $X \wedge n$ i miary $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_\infty$, wynika istnienie miary $\mathbb{P}_c \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})$ takiej że $E_{\mathbb{P}_c}(X \wedge n) = E_{\mathbb{P}_\infty}(X \wedge n) > c$.

Krok 4. Pozostaje rozważyć przypadek, gdy $L = \lim_{n\to\infty} E_{\mathbb{P}_n^*} X$ dla miar $\mathbb{P}_n^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ t. że $X \in L^1(\mathbb{P}_n^*)$, $n \in \mathbb{N}$. Z kroku 2. wynika, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje miara $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})$ t. że $X \in L^1(\mathbb{Q}_n)$ oraz $E_{\mathbb{P}_n^*} X = E_{\mathbb{Q}_n} X$ dla $n \in \mathbb{N}$. Stąd $L = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} X = \lim_{n\to\infty} E_{\mathbb{P}_n^*} X = \lim_{n\to\infty} E_{\mathbb{Q}_n} X \leq \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} X = P$, co kończy dowód równości (3.45). □

Z powyższego lematu otrzymujemy

Wniosek 3.5.2. $\left\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H \leq \tilde{V}_0\right\} = \tilde{\mathcal{R}}_b.$

Dowód

Inkluzja „$\subseteq$”jest oczywista.

Dowodzimy inkluzję „$\supseteq$”. Niech $\phi \in \tilde{\mathcal{R}}_b$. Stosując lemat 3.5.1 do zmiennej losowej ϕH, otrzymujemy $\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H \leq \tilde{V}_0$. □

Stąd dostajemy

Wniosek 3.5.3. *Problem statyczny (3.2) zapisuje się w postaci (3.44).*

Teraz sformułujemy lemat, którego będziemy używać, by wywnioskować warunki opisujące rozwiązanie problemu statycznego w postaci (3.44) z warunków opisujących rozwiązanie ogólnego problemu statycznego, dla $\mathcal{Q}$, F, A i α określonych w (3.42).

LEMAT 3.5.4. *Niech F, $\mathcal{Q}$, A i α będą określone w (3.42). Wówczas zrandomizowany test $\widetilde{\psi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{1}-\widetilde{\psi}$ jest rozwiązaniem problemu (3.44).*

DOWÓD
Dla F, $\mathcal{Q}$, A i α określonych w (3.42) ogólny problem statyczny można zapisać w postaci (3.43). Zatem $\widetilde{\psi}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.43) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{1}-\widetilde{\psi}$ jest rozwiązaniem problemu (3.44). □
Na zakończenie tego podrozdziału podamy lemat, z którego skorzystamy w dowodach twierdzeń o postaci wypukłego zabezpieczenia dowolnych nieujemnych, całkowalnych wypłat względem miar ryzyka spełniających warunek ciągłości 3.1.1 (tw. 3.5.12). W przypadku takich miar ryzyka ρ, dla funkcji F określonej wzorem $F(Y) = \rho(-Y)$ dla $Y \in L^1$, warunek ciągłości (v) sformułowany w założeniach 3.4.6 będzie spełniony dla $\mathcal{Y}_n = L^1$ i nie ma potrzeby obcinać F do podprzestrzeni $L^{p_n} \subset L^1$ dla pewnego $1 < p_n < \infty$, w celu uzyskania ciągłości w co najmniej jednym punkcie. A zatem w tej sytuacji założenie (iv) będzie trywialnie spełnione dla ciągu stałego operatorów $A_n = A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, z czego skorzystamy w poniższym lemacie. Natomiast w przykładzie z podrozdziału 3.2 określiliśmy miarę ryzyka, dla której nie jest spełnione założenie 3.1.1. Problem efektywnego zabezpieczenia względem takich miar ryzyka rozważymy w twierdzeniu 3.5.14, w którym wskażemy postać rozwiązania, przy założeniu, że istnieje ciąg przestrzeni $\mathcal{Y}_n$ i operatorów A_n, dla których spełnione będą warunki (iv) i (v).

LEMAT 3.5.5. *Niech F, $\mathcal{Q}$, A i α będą określone tak, jak w (3.42) oraz przyjmijmy, że istnieje zrandomizowany test $\phi_0 \in \widetilde{\mathcal{R}}_b$ taki, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ oraz miara ryzyka ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$.*
$a)$ Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\mathcal{Y}_n := L^1$ oraz $A_n := A$. Wówczas dla F, $\mathcal{Q}$, A i α oraz ciągu operatorów $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnione są założenia 3.4.6.
$b)$ Ponadto, jeżeli dla wypłaty H istnieje superhedging, to spełnione są warunki $I-V$ z założenia 3.3.9 oraz założenie 3.3.18.

DOWÓD
Krok 1. Zauważmy, że ponieważ $A_n := A$ dla $n \in \mathbb{N}$, dla F, $\mathcal{Q}$, A i α określonych w (3.42) zachodzą następujące równoważności: $(i) \Leftrightarrow I$, $(ii) \Leftrightarrow II$, $(iii.a) \Leftrightarrow III$, $(iv.d) \Leftrightarrow IV$, $(v) \Leftrightarrow V$.
W związku z tym najpierw dowiedziemy $a)$, uzasadniając, że spełnione są założenia 3.4.6, a następnie w dowodzie punktu $b)$ skorzystamy z punktu $a)$ i pokażemy dodatkowo, że spełnione są warunki (A) i (B) z założenia 3.3.18.
Krok 2. Dowodzimy $a)$.
Zauważmy, że $\alpha(\mathbb{Q}) = \widetilde{V}_0 > 0$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$, skąd wynika (i).
Funkcja $F(Y) = \rho(-Y)$, $Y \in L^1$ jest wypukła, właściwa i półciągła z dołu, gdyż ρ posiada te własności. Ponieważ miara ryzyka ρ jest monotoniczna, dostajemy

$F(X) = \rho(-X) \leq \rho(-Y) = F(Y)$ dla $X \leq Y$. Ponadto $F(0) \in \mathbb{R}$, gdyż $\rho(0) = 0$. Uzasadniliśmy, że spełnione jest założenie (ii).
Ponieważ $H \geq 0$, to A jest operatorem dodatnim, co daje $(iii.a)$. Ponadto zauważmy, że dla dowolnej zmiennej losowej $0 \leq Y \leq H$ mamy $Y = A\psi_Y$, gdzie $\psi_Y := \frac{Y}{H}\mathbf{1}_{\{H>0\}}$, co dowodzi, że $A(\mathcal{R}) \supseteq \{Y \in \mathcal{Y} : 0 \leq Y \leq A\mathbf{1}\}$, co dowodzi $(iii.b)$. Uzasadniliśmy, że spełnione jest założenie (iii).
Ponieważ $A_n = A$ dla $n \in \mathbb{N}$ w oczywisty sposób spełnione są założenia $(iv.a)-(iv.c)$. Uzasadnimy, że spełnione jest założenie $(iv.d)$. Ustalmy dowolne $Y^* \in \mathcal{Y}^* = L^\infty$. Ponieważ $HY^* \in L^1$, to funkcja $\phi \to E[(H\phi)Y^*] = E[(A\phi)Y^*]$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągła.
Zauważmy, że $F_n = F$ i $\mathcal{R}_{\mathcal{Q},A_n,\alpha} = \mathcal{R}_{\mathcal{Q},A,\alpha} = \mathcal{R}_0$, ponieważ $\mathcal{Y}_n = L^1$ i $A_n = A$ dla $n \in \mathbb{N}$. Zatem, aby dowieść warunku (v), wystarczy sprawdzić, że funkcja F jest ciągła w punkcie $A\psi_0$ dla pewnego $\psi_0 \in \mathcal{R}_0$ takiego, że $F(A\psi_0) < \infty$.
Z założenia wiemy, że istnieje zrandomizowany test $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}}_b$ taki, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ oraz funkcja ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$. Podstawmy $\psi_0 := \mathbf{1} - \phi_0$. Wówczas $F(A\psi_0) = \rho(-A\psi_0) = \rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ Ponadto, jeżeli ciąg $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w L^1 do $A\psi_0 = H(\mathbf{1} - \phi_0)$, to $-Y_n \overset{L^1}{\to} -A\psi_0 = H(\phi_0 - \mathbf{1})$. Stąd
$\lim_{n\to\infty} F(Y_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(-Y_n) \overset{(*)}{=} \rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) = F(A\psi_0)$, przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z tego, że funkcja ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$. Dowiedliśmy, że funkcja F jest skończona i ciągła w punkcie $A\psi_0$. Ponadto $\psi_0 \in \mathcal{R}_0$, gdyż $\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H(\mathbf{1} - \psi_0) = \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H\phi_0 \leq \tilde{V}_0$, przy czym ostatnia nierówność wynika z tego, że $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}}_b$. Uzasadniliśmy (v), co kończy dowód punktu $a)$.
Przechodzimy do dowodu $b)$.
Z kroku 1. i punktu $a)$ wynika, że spełnione są założenia $I - V$ Aby zakończyć dowód, pokażemy, że spełnione są warunki (A) i (B) z założenia 3.3.18.
Uzasadnimy, że zachodzi warunek (A)
Aby dowieść, że funkcja $\phi \to E\left(H\phi \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*)\right)$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągła, uzasadnimy, że

$$H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \in L^1. \tag{3.46}$$

Korzystając z tego, że λ jest miarą skończoną oraz z założenia, że dla H istnieje superhedging, dostajemy $\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H \lambda(d\mathbb{P}^*) \leq [\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H] \lambda(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) < \infty$. Stąd oraz z twierdzenia Tonelli (Dodatek, tw. B.2.4) wynika, że

$$E\left[H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*)\right] = \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E(HZ_{\mathbb{P}^*}) \lambda(d\mathbb{P}^*) < \infty,$$

co dowodzi (3.46).
Warunek (B) wynika z twierdzenia 1.1.26 zastosowanego do nieujemnej wypłaty H, dla której istnieje superhedging. □
Z dowodu powyższego lematu otrzymujemy przydatny

Wniosek 3.5.6. *Niech $\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$ oraz niech H będzie nieujemną wypłatą, dla której istnieje superhedging. Wówczas $H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \in L^1$ oraz zachodzi równość*

$$E\left[H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*)\right] = \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E(HZ_{\mathbb{P}^*}) \lambda(d\mathbb{P}^*).$$

3.5.2 Wypukłe zabezpieczenia wypłat, dla których istnieje superhedging

W tym podrozdziale uzyskamy nowe warunki opisujące postać rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia rozważanego przez Rudloff [49]. Sformułujemy główny wynik tego podrozdziału, a następnie skomentujemy różnice pomiędzy naszym rezultatem, a twierdzeniem 4.9 z [49].

Twierdzenie 3.5.7. *Niech $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie wypukłą, właściwą, półciągłą z dołu miarą ryzyka, $\rho(0) = 0$, niech H będzie nieujemną, całkowalną wypłatą oraz ustalmy liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Przyjmijmy, że spełnione są założenia:*
$(R1)$ istnieje zrandomizowany test $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}} = \left\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} \phi H \le \tilde{V}_0\right\}$, taki, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ i miara ryzyka ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$,
$(R2)$ $\sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H < \infty$.
Wówczas:
$a)$ Istnieje para $(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda}) \in \mathcal{P}_b \times \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$ będąca rozwiązaniem problemu

$$\sup_{\substack{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_b, \\ \lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))}} \left\{ E\left[H Z_{\mathbb{Q}} \wedge H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \right] - \tilde{V}_0 \lambda(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \right\}. \tag{3.47}$$

$b)$ Istnieje rozwiązanie problemu statycznego

$$\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}_b} \rho((\phi - \mathbf{1})H). \tag{3.48}$$

$c)$ Zrandomizowany test $\bar{\phi}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.48) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bar{\phi}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 1, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}(d\mathbb{P}^*))(\omega) > 0 \end{cases} \tag{3.49}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*} \bar{\phi} H = \tilde{V}_0 \text{ dla } \bar{\lambda} - \text{prawie wszystkich } \mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M}). \tag{3.50}$$

$d)$ Rozwiązaniem problemu wypukłego zabezpieczenia jest strategia $\tilde{\xi}$ superreplikująca wypłatę $\bar{\phi} H$.

Uwaga 3.5.8. *Z wniosku 3.5.3 wynika, że zagadnienie (3.48) jest identyczne z rozważanym przez Rudloff [49] problemem statycznym (3.2). W powyższym twierdzeniu przyjmujemy te same założenia, przy których dowiedziono tw. 4.9 z [49]. Wyniki z pracy Rudloff różnią się od sformułowanych w powyższym twierdzeniu tym, że w (3.47), (3.49) i (3.50) zamiast zbioru $\mathcal{P}_b(\mathcal{M})$ występuje zbiór $\mathcal{P}(\mathcal{M})$.*

Idea dowodu.
Niech F, $\mathcal{Q}$, A i α będą określone w (3.42). Wówczas z lematu 3.5.4 wynika, że zmienna losowa $\mathbf{1} - \tilde{\psi}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.48) wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{\psi}$ jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu pierwotnego. Z punktu $b)$ w lemacie 3.5.5 wynika, że spełnione są założenia twierdzenia 3.3.20, skąd otrzymujemy istnienie rozwiązania $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu pierwotnego. Postać rozwiązania wywnioskujemy z

twierdzenia 3.3.20, lematu 3.5.4 oraz lematu 3.5.11, który sformułujemy i dowiedziemy w dalszej części pracy.

Dowód twierdzenia poprzedzimy kilkoma przydatnymi obserwacjami.

Przypomnijmy, że zbiór $\mathcal{Q}$, operator A oraz funkcje F i α są zdefiniowane w (3.42). Niech $\mathcal{D} := \mathrm{dom}(F^*)$.

Lemat 3.5.9.

1. $F^*(Z) := \rho^*(-Z)$ *dla* $Z \in L^\infty$.
2. $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}_b$.

Dowód

Dowodzimy punkt 1. Ustalmy dowolne $Z \in L^\infty$. Z tw. Fenchela-Moreau, otrzymujemy

$$\begin{aligned} F^*(Z) &= \sup_{X\in L^1}\big(EXZ - F(X)\big) = \sup_{X\in L^1}\big(EXZ - \rho(-X)\big) \\ &= \sup_{X\in L^1}\big(E(-X)(-Z) - \rho(-X)\big) = \sup_{Y\in L^1}\big(EY(-Z) - \rho(Y)\big) = \rho^*(-Z). \end{aligned}$$

Dowód punktu 2. wynika natychmiast z punktu 1. oraz znanego faktu (np.: [49], str. 440), że $\{\rho^* < \infty\} \subseteq \{-Z_{\mathbb{Q}} \ \ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_b\}$. □

Dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ zdefiniujmy funkcje $G_{\mathbb{Q}} : \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$G_{\mathbb{Q}}(\lambda) = -E\left[H\Big(Z_{\mathbb{Q}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\Big)\right]^- + \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})}(E_{\mathbb{P}^*}H - \tilde{V}_0)\lambda(d\mathbb{P}^*) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}).$$

Funkcja $G_{\mathbb{Q}}$ jest dobrze określona, ponieważ $\rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) < \infty$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$, elementy zbioru $\Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$ są miarami skończonymi oraz

$$\left[H\Big(Z_{\bar{\mathbb{Q}}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\Big)\right]^- \le HZ_{\mathbb{Q}} + H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*) \in L^1,$$

co wynika z wniosku 3.5.6 oraz tego, że $H \in L^1$, $Z_{\mathbb{Q}} \in L^\infty$.

Dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ przez $p(\mathbb{Q})$ (odp. $d(\mathbb{Q})$) oznaczmy wartość problemu

$$\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}_b}\{E[H(\mathbf{1}-\phi)Z_{\mathbb{Q}}] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\}, \tag{3.51}$$

$$\left(\text{odp.} \sup_{\lambda\in\Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))} G_{\mathbb{Q}}(\lambda)\right). \tag{3.52}$$

Lemat 3.5.10. *Niech $\mathcal{Q}$, A, F, α będą określone w (3.42) oraz niech spełnione będą założenia twierdzenia 3.5.7.*

1. *Wówczas $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problem dualny zapisuje się jako*

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}}\Big\{\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}_b}\{E[H(\mathbf{1}-\phi)Z_{\mathbb{Q}}] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\}\Big\}. \tag{3.53}$$

2. *Niech $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ będzie dowolne. Wówczas $(Z_{\mathbb{Q}}, \mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problem pierwotny (odp. dualny) można zapisać w postaci (3.51) (odp. (3.52)),*
3. *Dla dowolnej miary $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ zagadnienia (3.51) oraz (3.52) są odpowiednio pierwotnym i dualnym problem Fenchela. Ponadto zachodzi mocna dualność tzn. $p(\mathbb{Q}) = d(\mathbb{Q})$.*

Dowód
Uzasadniamy punkt 1. Zauważmy, że dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42) zachodzi równość $\mathcal{R}_{A,F,\alpha} = \{\psi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H(\mathbf{1} - \psi) \le \tilde{V}_0\} =: \bar{\mathcal{R}}_b$. Ponadto dla $Z \in L^\infty$ mamy $F^*(Z) = \rho^*(-Z)$ na mocy punktu 1. w lemacie 3.5.9 oraz $\{F^* < \infty\} = \mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}_b$ na mocy punktu 2. w lemacie 3.5.9. Wynika stąd, że $(\tilde{\mathcal{Q}}, A, F, \alpha)$-problem dualny możemy zapisać w postaci $\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{D}} \big\{ \inf_{\psi \in \bar{\mathcal{R}}_b} \{ E[Z_{\mathbb{Q}}(H\psi)] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \} \big\}$. Podstawiając $\phi := \mathbf{1} - \psi$, dostajemy (3.53).
Ustalmy teraz dowolne $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$.
Punkt 2. otrzymuje się natychmiast przez wypisanie $(Z_{\mathbb{Q}}, \mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu dualnego dla $\mathcal{Q}$, A, F i α określonych w (3.42).
Dowiedziemy punkt 3 tezy. Zauważmy, że spełnione są założenia, przy których zachodzi punkt $b)$ tezy lematu 3.5.5, skąd wynika, że dla $Y^* = Z_{\mathbb{Q}}$ oraz $\mathcal{Q}$, A, F i α określonych w (3.42) spełnione są założenia lematu 3.3.19. Wynika stąd, że zachodzi teza lematu 3.3.16, skąd dostajemy, że problemy (3.51) oraz (3.52) są dualne w sensie Fenchela i zachodzi mocna dualność. □

Lemat 3.5.11. *Niech spełnione będą założenia twierdzenia 3.5.7. Para* $(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda}) \in \mathcal{P}_b \times \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$ *rozwiązuje zagadnienie (3.47) wtedy i tylko wtedy, gdy* $\bar{\mathbb{Q}}$ *jest rozwiązaniem problemu (3.53) i* $\bar{\lambda}$ *jest rozwiązaniem zagadnienia (3.52) dla* $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}$.

Dowód
Zaczniemy od dowodu implikacji $(\Leftarrow)$.
Niech $\bar{\mathbb{Q}}$ (odp. $\bar{\lambda}$) będzie rozwiązaniem zagadnienia (3.53) (odp. (3.52) dla $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}$). Uzasadnimy, że para $(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda})$ jest rozwiązaniem problemu (3.47).
Krok 1. Niech L będzie funkcją maksymalizowaną w zagadnieniu (3.47), tzn.

$$L(\mathbb{Q}, \lambda) := E\left[HZ_{\mathbb{Q}} \wedge H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \right] - \tilde{V}_0 \lambda(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}). \tag{3.54}$$

Zauważmy, że rozwiązując problem maksymalizacji funkcji L wystarczy ograniczyć się do par $(\mathbb{Q}, \lambda)$ takich, że $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$, co pozwala zapisać zagadnienie (3.47) w postaci

$$\sup_{\substack{\mathbb{Q} \in \mathcal{D}, \\ \lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))}} L(\mathbb{Q}, \lambda). \tag{3.55}$$

Zaczniemy od przekształcenia wartości oczekiwanej występującej w wyrażeniu definiującym funkcję L.
Zauważmy, że zachodzi równość

$$\begin{aligned} &E\left[HZ_{\mathbb{Q}} \wedge H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \right] = \\ &-E\left[H\left(Z_{\mathbb{Q}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \right) \right]^- + E\left[H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \right]. \end{aligned} \tag{3.56}$$

Istotnie, na zbiorze $\big\{ HZ_{\mathbb{Q}} < H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \big\}$ mamy
$-\big[HZ_{\mathbb{Q}} - H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \big]^- = HZ_{\mathbb{Q}} - H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*)$. Wtedy
$-\big[HZ_{\mathbb{Q}} - H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) \big]^- + H \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*) = HZ_{\mathbb{Q}}$.

Ponadto $-\big[HZ_{\mathbb{Q}}-H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\big]^- = 0$ na zbiorze $\big\{HZ_{\mathbb{Q}} \geq H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\big\}$, więc wówczas
$-\big[HZ_{\mathbb{Q}} - H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\big]^- + H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*) = H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)$. Stąd ostatecznie dostajemy (3.56).
Krok 2. Dowiedziemy, że $L(\mathbb{Q},\lambda) = G_{\mathbb{Q}}(\lambda)$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ i $\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$.
Niech
$I(\mathbb{Q},\lambda) := -E\big[HZ_{\mathbb{Q}} - H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\big]^- + EH\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)$.
Ustalmy dowolne $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ oraz $\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$. Z wniosku 3.5.6 wiemy, że $E[H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)] = \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}H\lambda(d\mathbb{P}^*)$. Stąd oraz z (3.56) wynika, że

$$\begin{aligned}
L(\mathbb{Q},\lambda) &= I(\mathbb{Q},\lambda) - \tilde{V}_0\lambda(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\\
&= -E\Big[HZ_{\mathbb{Q}} - H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\Big]^- + \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} (E_{\mathbb{P}^*}H - \tilde{V}_0)\lambda(d\mathbb{P}^*) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\\
&= G_{\mathbb{Q}}(\lambda)
\end{aligned}$$

Krok 3. Kończymy dowód implikacji ($\Leftarrow$).

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{\mathbb{Q}\in\mathcal{P}_b,\\ \lambda\in\Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))}} \left\{E\left[HZ_{\mathbb{Q}} \wedge H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\right] - \tilde{V}_0\lambda(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\right\} \overset{(a)}{=}\\
&\sup_{\substack{\mathbb{Q}\in\mathcal{D},\\ \lambda\in\Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))}} L(\mathbb{Q},\lambda) \overset{(b)}{=} \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}}\left\{\sup_{\lambda\in\Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))} G_{\mathbb{Q}}(\lambda)\right\} \overset{(c)}{=} \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}} d(\mathbb{Q}) \overset{(d)}{=} \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}} p(\mathbb{Q}) \overset{(e)}{=}\\
&\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}}\left\{\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}_b}\left\{E[Z_{\mathbb{Q}}H(\mathbf{1}-\phi)] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\right\}\right\} \overset{(f)}{=}\\
&\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}_b}\left\{E[Z_{\mathbb{Q}}H(\mathbf{1}-\phi)] - \rho^*(-Z_{\bar{\mathbb{Q}}})\right\} \overset{(g)}{=} p(\bar{\mathbb{Q}}) \overset{(h)}{=} d(\bar{\mathbb{Q}}) \overset{(i)}{=} \sup_{\lambda\in\Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))} G_{\bar{\mathbb{Q}}}(\lambda) \overset{(j)}{=}\\
&L(\bar{\mathbb{Q}},\bar{\lambda}) \overset{(k)}{=} E\left[HZ_{\bar{\mathbb{Q}}} \wedge H\int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}(d\mathbb{P}^*)\right] - \tilde{V}_0\bar{\lambda}(\mathcal{P}_b(\mathcal{M})) - \rho^*(-Z_{\bar{\mathbb{Q}}}),
\end{aligned}$$

przy czym w (a) i (k) skorzystaliśmy z (3.55), w (b) z kroku 2, w (c) oraz (i) z definicji $d(\mathbb{Q})$, w (d) i (h) z punktu 3 w lemacie 3.5.10, w (e) i (g) z definicji $p(\mathbb{Q})$ oraz w (f) z założenia, że $\bar{\mathbb{Q}}$ jest rozwiązaniem problemu (3.53). Ponadto w (j) skorzystaliśmy z kroku 2 i założenia, że $\bar{\lambda}$ jest rozwiązaniem problemu (3.52). Wynika stąd, że para $(\bar{\mathbb{Q}},\bar{\lambda})$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.47).
Przechodzimy do dowodu implikacji ($\Rightarrow$).
Załóżmy, że para $(\bar{\mathbb{Q}},\bar{\lambda})$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.47). Uzasadnimy, że $\bar{\mathbb{Q}}$ (odp. $\bar{\lambda}$) jest rozwiązaniem zagadnienia (3.53) (odp. (3.52) dla $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}$). W kroku 1. dowodu implikacji ($\Leftarrow$) uzasadniliśmy, że zagadnienie (3.47) można zapisać w postaci (3.55), skąd wynika, że $\bar{\mathbb{Q}} \in \mathcal{D}$. Z kroku 2. w dowodzie implikacji ($\Leftarrow$) wiemy, że zachodzi równość $L(\mathbb{Q},\lambda) = G_{\mathbb{Q}}(\lambda)$ dla $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ i $\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))$, zatem funkcja $\lambda \to L(\bar{\mathbb{Q}},\lambda) = G_{\bar{\mathbb{Q}}}(\lambda)$ osiąga maksimum w punkcie $\bar{\lambda}$, co oznacza, że $\bar{\lambda}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.52) dla $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}$.
Dowiedziemy teraz, że miara $\bar{\mathbb{Q}}$ jest rozwiązaniem problemu (3.53). Załóżmy, że tak

nie jest, co oznacza, że istnieje miara $\widehat{\mathbb{Q}} \in \mathcal{D}$ taka, że

$$p(\widehat{\mathbb{Q}}) > p(\bar{\mathbb{Q}}) \tag{3.57}$$

Jednocześnie z punktu 3. w lemacie 3.5.10, wnioskujemy, że $p(\mathbb{Q}) = d(\mathbb{Q}) = \sup_{\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))} L(\mathbb{Q}, \lambda)$ dla dowolnej miary $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$. Stąd oraz z (3.57), otrzymujemy

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))} L(\widehat{\mathbb{Q}}, \lambda) = p(\widehat{\mathbb{Q}}) > p(\bar{\mathbb{Q}}) = \sup_{\lambda \in \Lambda_+(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))} L(\bar{\mathbb{Q}}, \lambda) = L(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda}), \tag{3.58}$$

przy czym ostatnia równość wynika z dowiedzionego wcześniej faktu, że miara $\bar{\lambda}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.52) dla $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}$. Ostra nierówność w (3.58) gwarantuje istnienie miary $\widehat{\lambda}$, dla której $L(\widehat{\mathbb{Q}}, \widehat{\lambda}) > L(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda})$, co przeczy założeniu, że para $(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda})$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.47). □

Przechodzimy do dowodu twierdzenia o istnieniu i postaci rozwiązania problemu efektywnego zabezpieczenia nieujemnej, całkowalnej wypłaty, dla której istnieje superhedging.

Dowód (twierdzenia 3.5.7)

a) Przypomnijmy, że zagadnienie (3.48) jest identyczne z problem statycznym (3.44). Z lematu 3.5.4 wiemy, że zmienna losowa $\tilde{\psi}$ jest rozwiązaniem problemu (3.44) wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbf{1} - \tilde{\psi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42). Z założenia $(R1)$ wynika, że ogólny problem statyczny jest dobrze postawionym $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemem pierwotnym. Ponadto na mocy punktu *b*) w lemacie 3.5.5 spełnione są założenia twierdzenia 3.3.20, skąd wynika, że istnieje rozwiązanie $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu pierwotnego.

b) Niech para $(\bar{\mathbb{Q}}, \bar{\lambda})$ rozwiązuje zagadnienie (3.47). Z implikacji $(\Rightarrow)$ w lemacie 3.5.11 wynika, że $Z_{\bar{\mathbb{Q}}}$ (odp. $\bar{\lambda}$) jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu dualnego (odp. $(Z_{\bar{\mathbb{Q}}}, \mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu dualnego) dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42). Jednocześnie z twierdzenia 3.3.20 wiemy, że zrandomizowany test $\bar{\psi}$ jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemu pierwotnego wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunki (3.19) oraz (3.20), które dla $\tilde{Y}^* = Z_{\bar{\mathbb{Q}}}$, $\tilde{\lambda} = \bar{\lambda}$ zapisują się w postaci

$$\bar{\psi}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}} - \int_{\mathcal{P}_b(\mathcal{M})} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}(d\mathbb{P}^*))(\omega) > 0 \end{cases}$$

oraz $E_{\mathbb{P}^*}(\mathbf{1} - \bar{\psi})H = \tilde{V}_0$ dla $\bar{\lambda}$ – prawie wszystkich $\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})$.
Uzasadniliśmy, że $\bar{\psi}$ spełnia warunki powyższe warunki wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\psi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\phi} := \mathbf{1} - \bar{\psi}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.48). Wynika stąd, że zrandomizowany test $\bar{\phi}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.48) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\phi}$ spełnia warunki (3.49) i (3.50), co kończy dowód punktu *b*).
Punkt *c*) wynika natychmiast z twierdzenia 3.1.3. □

3.5.3 Wypukłe zabezpieczenie wypłat, dla których nie istnieje superhedging

Niech H będzie nieujemną, całkowalną, wypłatą dla której nie istnieje superhedging. Sprzedaż tej wypłaty po dowolnej cenie $\tilde{V}_0 > 0$ prowadzi do sytuacji, w której sprzedający wypłatę zajmuje pozycję obarczoną ryzykiem straty, ponieważ $\mathbb{P}(V_T(\xi) < H) > 0$ dla dowolnej strategii inwestycyjnej ξ. Zatem poszukiwanie efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging ma bardzo naturalną motywację ekonomiczną: wobec braku superreplikacji, sprzedający wskazuje strategię inwestycyjną, która minimalizuje ryzyko straty mierzone za pomocą wypukłej miary ryzyka ρ. Wypukłe miary ryzyka stanowią szeroką klasę obejmującą m.in. koherentne miary ryzyka, których pożądane z perspektywy oceny ryzyka własności wskazano m.in. w pionierskich pracach [2], [3]. Warto wspomnieć też, że używany w praktyce *expected shortfall* (np. [4]) jest koherentną miarą ryzyka.
Według naszej wiedzy rozwiązanie problemu efektywnego zabezpieczenia wypłat, dla których nie istnieje superhedging, nie było dotychczas znane w literaturze. W dalszej części podamy przykład zastosowania.

TWIERDZENIE 3.5.12. *Niech $\rho : L^1 \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ będzie wypukłą, właściwą, półciągłą z dołu miarą ryzyka, $\rho(0) = 0$, H nieujemną, całkowalną wypłatą oraz ustalmy liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Niech ponadto spełnione będzie założenie:*
(R1) Istnieje zrandomizowany test $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}} = \left\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}\phi H \le \tilde{V}_0\right\}$, taki, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$ i miara ryzyka ρ jest ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$.
Wówczas:
1. *Dla $r \in \mathbb{N}$ istnieje rozwiązanie zagadnienia*

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{D}} \Big\{ \inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}_b^r} \{ E_{\mathbb{Q}}[(\mathbf{1} - \phi)H] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}})\}\Big\}, \tag{3.59}$$

gdzie $\mathcal{D} = \{Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : \rho^*(-Z) < \infty\}$, zaś $\tilde{\mathcal{R}}_b^r := \left\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} E_{\mathbb{P}^*}\phi H \le \tilde{V}_0\right\}$, przy czym $(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r := \{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M}) : \|Z_{\mathbb{P}^*}\|_\infty \le r\}$, $r \in \mathbb{N}$.
Ponadto dla dowolnego $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ będącego rozwiązaniem problemu (3.59) istnieje rozwiązanie zagadnienia

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_+((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r)} G_{\mathbb{Q}}^r(\lambda), \tag{3.60}$$

gdzie

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{Q}}^r(\lambda) := &- E\left[H\Big(Z_{\mathbb{Q}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda(d\mathbb{P}^*)\Big)\right]^- \\ &+ \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} E_{\mathbb{P}^*}H\lambda(d\mathbb{P}^*) - \tilde{V}_0\lambda((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}). \end{aligned}$$

2. *Dla $r \in \mathbb{N}$ niech $\bar{\mathbb{Q}}_r$ (odp. $\bar{\lambda}_r$) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.59) (odp. (3.60) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_r$). Wówczas dla każdego $r \in \mathbb{N}$ istnieje zrandomizowany test spełniający warunki*

$$\psi_r(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_r} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}_r(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 1, & \text{gdy } H(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_r} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}_r(d\mathbb{P}^*))(\omega) > 0 \end{cases} \tag{3.61}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*} H\psi_r = \tilde{V}_0 \text{ dla } \bar{\lambda}_r - \text{prawie wszystkich } \mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r. \tag{3.62}$$

3. *Dla* $r \in \mathbb{N}$ *niech* $\bar{\mathbb{Q}}_r$ *(odp.* $\bar{\lambda}_r$*) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.59) (odp. (3.60)). Niech ponadto* $\bar{\psi}_r$ *będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.61) oraz (3.62) oraz niech* $\bar{\delta} \in \mathcal{R}$ *będzie dowolne. Wówczas istnieje DS-ciąg* $(\beta_m)_{m=1}^{\infty}$*, dla którego wzór*

$$\bar{\delta}\mathbf{1}_{\{H=0\}} + \lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}\psi_r, \tag{3.63}$$

definiuje zmienną losową $\bar{\psi}$ *będącą rozwiązaniem zagadnienia*

$$\inf_{\phi\in\tilde{\mathcal{R}}} \rho((\phi - \mathbf{1})H) \tag{3.64}$$

4. *Rozwiązaniem problemu efektywnego zabezpieczenia (3.1) jest strategia superreplikująca wypłatę* $\bar{\psi}H$*.*

Idea dowodu.
W pierwszej części dowodu wskazujemy rozwiązanie problemu (3.64), który związujemy z pewnym dobrze postawionym ogólnym problemem statycznym. W tej części dowiedziemy punktów 1 – 3 tezy twierdzenia. Punkt 4 wynika natychmiast z punktów 1 – 3 oraz z twierdzenia 3.1.3.
Dowód (twierdzenia 3.5.12)
Krok 1. Z wniosku 3.5.3 wiemy, że problem statyczny (3.64) zapisuje się w postaci (3.44). Z lematu 3.5.4 wynika, że zrandomizowany test $\mathbf{1} - \bar{\psi}$ jest rozwiązaniem problemu (3.44) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\psi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego (3.21) dla F, $\mathcal{Q}$, A i α określonych w (3.42).
Krok 2. Zbadamy istnienie i postać rozwiązania ogólnego problemu statycznego (3.21) dla F, $\mathcal{Q}$, A i α określonych w (3.42). Ogólny problem statyczny jest dobrze postawiony, co wynika z założenia, że miara ryzyka ρ jest skończona i ciągła w punkcie $H(\phi_0 - \mathbf{1})$ dla pewnego $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$.
Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\mathcal{Y}_n := L^1$ oraz niech $A_n := A$ oraz $F_n := F$. Zauważmy, że wówczas ogólny problem statyczny, który jest $(\mathcal{Q}, A, F, \alpha)$-problemem pierwotnym jest w oczywisty sposób identyczny z $(\mathcal{Q}, A_1, F_1, \alpha)$-problemem pierwotnym. Punkty 1, 2, i 3 tezy wywnioskujemy z twierdzenia 3.4.12 zastosowanego do $k = 1$. Ponieważ spełnione jest założenie $(R1)$, to z punktu $a)$ w lemacie 3.5.5 wiemy, że dla F, $\mathcal{Q}$, A i α oraz ciągu $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełnione są założenia 3.4.6, przy których zachodzi teza twierdzenia 3.4.12. W szczególności z punktu $a)$ w tezie twierdzenia 3.4.12 wiemy, że zachodzą punkty 1, 2, 3 tezy twierdzenia 3.4.8, z czego skorzystamy poniżej.
Krok 3. Dowodzimy punktu 1. tezy.
Z punktu 1 w tezie twierdzenia 3.4.8 wynika, że dla $r \in \mathbb{N}$ istnieje rozwiązanie $(\mathcal{Q}_1^r, A_1, F_1, \alpha)$-problemu dualnego, który dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42), $A_1 = A$, $F_1 = F$ i w oparciu o lemat 3.5.9 zapisuje się jako

$$\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{D}} \Big\{ \inf_{\phi\in\mathcal{R}_b^r} E_{\mathbb{Q}}(H\phi) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \Big\}, \tag{3.65}$$

gdzie $\bar{\mathcal{R}}_b^r := \left\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r} E_{\mathbb{P}^*}(\mathbf{1} - \phi)H \le \tilde{V}_0\right\}$, $r \in \mathbb{N}$. Po zamianie zmiennej ϕ na $\mathbf{1} - \phi$ zagadnienie (3.65) sprowadza się do (3.59).
Niech teraz $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.59). Wówczas z punktu 2 w tezie twierdzenia 3.4.8 zastosowanego do $Y^* = Z_{\mathbb{Q}}$ wiemy, że istnieje rozwiązanie $(Z_{\mathbb{Q}}, \mathcal{Q}_1^r, A_1, F_1, \alpha)$-problemu dualnego, który dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42) oraz $A_1 = A$, $F_1 = F$ zapisuje się jako (3.60). To dowodzi punktu 1. tezy.
Krok 4. Uzasadnimy punkt 2 tezy.
Dla $r \in \mathbb{N}$ niech $\mathbb{Q}_r$ (odp. λ_r) będzie rozwiązaniem $(\mathcal{Q}_1^r, A_1, F_1, \alpha)$-problemu dualnego (odp. $(Z_{\mathbb{Q}_r}, \mathcal{Q}_1^r, A_1, F_1, \alpha)$-problemu dualnego). Z punktu 2 w tezie twierdzenia 3.4.8 wiemy, że istnieje zmienna losowa $\phi_{1,r}$ spełniająca warunki (3.22) i (3.23), które dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42) oraz $A_1 = A$, $F_1 = F$ zapisują się jako

$$\phi_{1,r}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } H(Z_{\mathbb{Q}_r} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_1^r} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda_r(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } H(Z_{\mathbb{Q}_r} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_1^r} Z_{\mathbb{P}^*}\lambda_r(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0. \end{cases} \tag{3.66}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*}H(\mathbf{1} - \phi_{1,r}) = \tilde{V}_0 \text{ dla } \lambda_r - \text{ prawie wszystkich } \mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_1^r. \tag{3.67}$$

Zauważmy ponadto, że $(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_1^r = (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r$. Stąd oraz z (3.66) i (3.67) wynika, że dla $\psi_r := \mathbf{1} - \phi_{1,r}$ spełnione są warunki (3.61) oraz (3.62) dla $\mathbb{Q}_r = \bar{\mathbb{Q}}_r$ i $\lambda_r = \bar{\lambda}_r$, co kończy dowód punktu 2.
Krok 5. Dowodzimy punktu 3. tezy.
Dla $r \in \mathbb{N}$ niech $\mathbb{Q}_r$ (odp. λ_r) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.59) (odp. (3.60) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_r$). Niech ponadto $\phi_{1,r}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.66) i (3.67) oraz niech $\psi_r := \mathbf{1} - \phi_{1,r}$. Wówczas z punktu $b)$ w tezie twierdzenia 3.4.12 wynika, że istnieje DS-ciąg $(\beta_m^{(1)})_{m=1}^\infty$ oraz zrandomizowany test ϕ taki, że

$$A\phi = \lim_{m\to\infty} \sum_{r \ge m} \beta_{m,r}^{(1)} A\phi_{1,r}. \qquad \mathbb{P} - \text{p.n.} \tag{3.68}$$

Ponadto dowolna zmienna losowa ϕ, dla której zachodzi równość (3.68) jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A_1, F_1, \alpha)$- problemu pierwotnego.
Niech $\beta_{m,r} := \beta_{m,r}^{(1)}$ dla $r \ge m$, $r, m \in \mathbb{N}$. Zauważmy, że dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42) oraz $A_1 = A$ i $F_1 = F$ równość (3.68) zapisuje się w postaci

$$H\phi = \lim_{m\to\infty} \sum_{r \ge m} \beta_{m,r} H\phi_{1,r} \qquad \mathbb{P} - \text{p.n.} \tag{3.69}$$

Zauważmy również, że dla $\omega \in \{H > 0\}$ równość (3.69) implikuje, że
$\phi(\omega) = \lim_{m\to\infty} \sum_{r\ge m} \beta_{m,r}\phi_{1,r}(\omega)$. W szczególności wynika stąd, że
$\lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r \ge m} \beta_{m,r}\phi_{1,r}$ definiuje dobrze określoną zmienną losową. Niech $\tilde{\delta} \in \mathcal{R}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem. Zauważmy, że dla zrandomizowanego testu $\phi_1 = \tilde{\delta}\mathbf{1}_{\{H=0\}} + \lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r\ge m} \beta_{m,r}\phi_{1,r}$ spełniony jest warunek (3.69), więc ϕ_1 jest rozwiązaniem $(\mathcal{Q}, A_1, F_1, \alpha)$- problemu pierwotnego, który jest identyczny z ogólnym problemem statycznym, co zauważyliśmy w kroku 2.
Z lematu 3.5.4 wynika, że zrandomizowany test $\bar{\psi} := \mathbf{1} - \phi_1$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.44), który jest identyczny z problemem statycznym (3.64) (obserwacja

z kroku 1).
Ostatecznie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\bar{\psi} &= \mathbf{1} - \Big(\tilde{\delta}\mathbf{1}_{H=0} + \lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}\phi_{1,r}\Big) = \\
&(\mathbf{1}-\tilde{\delta})\mathbf{1}_{H=0} + \lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}(\mathbf{1}-\phi_{1,r}) = \bar{\delta}\mathbf{1}_{H=0} + \lim_{m\to\infty} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}\psi_r,
\end{aligned}
$$

przy czym z dowolności $\tilde{\delta}$ wynika, że $\bar{\delta}$ jest dowolnym zrandomizowanym testem. Zakończyliśmy dowód punktu 3. tezy.
Krok 6. Dowód punktu 4. wynika natychmiast z twierdzenia 3.1.3. □

Przykład 3.5.13. Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = (\mathbb{R}\times[0,1], \mathcal{B}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{B}([0,1]), \mu\times\lambda)$, gdzie μ jest standardową miarą gaussowską na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, a λ miarą Lebesgue na $\mathcal{B}([0,1])$. Niech $\mathcal{T} = \{0,1\}$ oraz ustalmy liczby $s_0 > 0$ i $\sigma > 0$. Definiujemy proces $S = (S^0, S^1)$ w sposób następujący: $S^0 \equiv 1$ oraz

$$
S^1_t(x,y) = \begin{cases} s_0 & \text{gdy } t = 0, \\ s_0 \exp(\sigma x - \frac{1}{2}\sigma^2) & \text{gdy } t = 1 \end{cases}
$$

dla $(x,y)\in\Omega$.
Niech $\mathbb{F}$ będzie filtracją generowaną przez proces S oraz niech Φ oznacza zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^2$. Definiujemy model rynku $\mathcal{M} = (S,\Phi)$. Zauważmy, że model $\mathcal{M}$ jest wolny od arbitrażu, ponieważ $\mathbb{P}\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$.
Zdefiniujemy teraz wypukłą miarę ryzyka na L^1 zwaną *shortfall risk* (np. [32], rozdział 4). Niech $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ będzie ustaloną wypukłą, ściśle rosnącą funkcją taką, że $E[l(-X)] < \infty$ dla każdego $X \in L^1$ oraz zdefiniujmy zbiór

$$
\mathcal{A} := \{X \in L^1 \;\; E[l(-X)] \leq l(0)\}.
$$

Niech SR_1 będzie funkcją daną wzorem $SR_1(X) := \inf\{m\in\mathbb{R} \mid X + m \in \mathcal{A}\}$ dla $X\in L^1$.
Wiemy, że SR_1 jest skończoną, ciągłą w L^1, wypukłą miarą ryzyka. (patrz [32], stw. 4.2) Ponadto zauważmy, że $SR_1(0) = 0$. Istotnie, ponieważ $0\in\mathcal{A}$, to $SR_1(0)\leq 0$. Z drugiej strony, gdyby $SR_1(0) < 0$, to dla pewnego $\varepsilon > 0$ zachodziłaby nierówność $E[l(-(0-\varepsilon))] \leq l(0)$. Stąd $l(\varepsilon) = E[l(-(-\varepsilon))] \leq l(0)$, co przeczy temu, że funkcja l jest ściśle rosnąca.
Rozważmy sytuację zakładu ubezpieczeń, którego pozycja związana z zawartymi ubezpieczeniami jest modelowana przez zmienną losową $-Y$, gdzie $Y(x,y) = y^{-\frac{4}{5}}$ dla $(x,y)\in\Omega$ i który posiada również długą pozycję w akcji S^1. Wypłata w chwili 1 tego zakładu ubezpieczeń wynosi $U(x,y) = -y^{-\frac{4}{5}} + S^1_1(x,y)$ dla $(x,y)\in\Omega$. Za cenę $\tilde{V}_0$ towarzystwo reasekuracji zobowiązuje się pokryć straty zakładu ubezpieczeń z tytułu wypłaty U, jeżeli przekroczą one poziom $K > 0$, co oznacza, że zakład ubezpieczeń nabył za kwotę $\tilde{V}_0$ kontrakt $H := (U+K)^-$. Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
H &= (U+K)^- = (-Y + S^1_1 + K)^- = (Y - S^1_1 - K)^+ \\
&= (Y + Z - K)^+, \qquad (3.70)
\end{aligned}
$$

gdzie $Z = -S_1^1$. Kontrakt zdefiniowany wzorem (3.70) znany jest w ubezpieczeniach pod nazwą *financial stop loss* ([42], rozdział 4.2.3). Rozważmy zagadnienie efektywnego zabezpieczenia wypłaty H względem miary ryzyka SR_1 przy kapitale początkowym $\tilde{V}_0$:

$$\inf_{\xi\in\Phi_{\tilde{V}_0}} SR_1\big(-(\xi_1 S_1 - H)^-\big), \tag{3.71}$$

gdzie $\Phi_{\tilde{V}_0} := \{\xi \in \Phi \;:\; 0 \le \xi_0 S_0 \le \tilde{V}_0,\; \xi_1 S_1 \ge 0\}$. Pokażemy, że dla zagadnienia (3.71) nie jest spełnione założenie $(R2)$ z twierdzenia 3.5.7. Wynika stąd, że do problemu (3.71) nie można zastosować ani wyników Rudloff [49], ani dowiedzionego w poprzednim podrozdziale tw. 3.5.7.
Dla $n \in \mathbb{N}$ niech $\mathbb{Q}_n$ będzie miarą o gęstości danej wzorem

$$\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}}(x,y) := c_n y^{-\frac{1}{5}} \mathbf{1}_{[\frac{1}{n+1},1]}(y) + \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n+1})}(y), \quad (x,y)\in\Omega,$$

gdzie c_n jest stałą normującą (zauważmy, że gęstość miary $\mathbb{Q}_n$ nie zależy od x). Zauważmy, że $\frac{d\mathbb{Q}_n}{d\mathbb{P}} \in L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ oraz $\mathbb{Q}_n \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ dla $n\in\mathbb{N}$. Ponadto

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}_n} H &\ge -K + E_{\mathbb{Q}_n} Z + E_{\mathbb{Q}_n} Y = -K - s_0 + c_n \int_{[\frac{1}{n+1},1]} \frac{1}{y} dy + 5 \cdot \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{5}}} \\ &\ge -K - s_0 + c_n \ln(n+1). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Przeprowadzając bezpośredni rachunek, sprawdzamy, że
$c_n = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{1-(\frac{1}{n+1})^{\frac{4}{5}}} - \frac{1}{n+1} \ge \frac{3}{5}$ dla dostatecznie dużych n. Stąd oraz z (3.72) wynika, że $\sup_{n\in\mathbb{N}} E_{\mathbb{Q}_n} H = \infty$, co implikuje $\sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*} H = \infty$. A zatem do zagadnienia 3.71 nie można zastosować twierdzenia 3.5.7, gdyż nie jest spełnione założenie $(R2)$
Zauważmy natomiast, że dla miary ryzyka $\rho := SR_1$, wypłaty H, modelu rynku $\mathcal{M}$ oraz liczby $\tilde{V}_0$ spełnione są założenia twierdzenia 3.5.12. Jak zauważyliśmy, SR_1 jest wypukłą, skończoną i ciągłą miarą ryzyka na L^1. Uzasadniliśmy również, że $SR_1(0) = 0$. Ponadto $0 \le H \le Y \in L^1$. Oczywiście $\tilde{V}_0 > 0$. A zatem zagadnienie (3.71) można rozwiązać, korzystając z twierdzenia 3.5.12. □

Rozdział ten zakończymy wynikiem dotyczącym istnienia i postaci rozwiązania problemu wypukłego zabezpieczenia nieujemnych wypłat względem miar ryzyka z osłabionym warunkiem ciągłości. Osłabienie warunku ciągłości polega na tym, że założenie $(R1)$ przyjmowane w twierdzeniach 3.5.7 i 3.5.12 zastępujemy sformułowanymi poniżej warunkami $(Z1)$ i $(Z2)$. Koniunkcja warunków $(Z1)$, $(Z2)$ jest słabsza niż założenie $(R1)$, co wynika z następującej obserwacji: założenie $(R1)$ implikuje $(Z1)$, $(Z2)$, przy czym w $(Z2)$ dla $k \in \mathbb{N}$ należy przyjąć $p_k = 1$, $H_k = H$ oraz $\phi_0^{(k)} = \phi_0$, gdzie ϕ_0 jest zrandomizowanym testem, takim, że $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$, którego istnienie wynika z $(R1)$.

Twierdzenie 3.5.14. *Niech $\rho : L^1 \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ będzie wypukłą, właściwą, półciągłą z dołu miarą ryzyka, $\rho(0) = 0$, H nieujemną, całkowalną wypłatą oraz ustalmy liczbę $\tilde{V}_0 > 0$. Niech ponadto spełnione będą następujące warunki:*
$(Z1)$ istnieje zrandomizowany test $\phi_0 \in \tilde{\mathcal{R}} := \left\{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^*\in\mathcal{P}(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}(\phi H) \le \tilde{V}_0\right\}$, dla którego $\rho(H(\phi_0 - \mathbf{1})) < \infty$.

(Z2) Dla każdego $k \in \mathbb{N}$ istnieje zmienna losowych $H_k \in L^{p_k}$ dla pewnego $1 \leq p_k < \infty$ oraz istnieje zrandomizowany test $\phi_0^{(k)} \in \tilde{\mathcal{R}}_b^{(k)} := \{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in \mathcal{P}_b(\mathcal{M})} E_{\mathbb{P}^*}(\phi H_k) \leq \tilde{V}_0\}$, takie, że:
a) miara ryzyka $\rho : L^{p_k} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ jest ciągła w punkcie $H_k(\phi_0^{(k)} - \mathbf{1})$,
b) $H_k \nearrow H$ $\mathbb{P}$-p.n. oraz istnieje zbiór Ω' taki, że $\mathbb{P}(\Omega' = 1)$ i dla każdego $\omega \in \Omega'$ istnieje $k_0(\omega)$ t. że $H_k(\omega) = H(\omega)$ dla $k \geq k_0(\omega)$.
Wówczas:
1. *Dla $k, r \in \mathbb{N}$ istnieje rozwiązanie zagadnienia*

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{D}} \Big\{ \inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}_b^{(k,r)}} \{ E_{\mathbb{Q}}\big[H_k(\mathbf{1} - \phi)\big] - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \} \Big\}, \tag{3.73}$$

gdzie $\mathcal{D} = \{Z \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) : \rho^*(-Z) < \infty\}$, zaś $\tilde{\mathcal{R}}_b^{(k,r)} = \{\phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} E_{\mathbb{P}^*}(\phi H_k) \leq \tilde{V}_0\}$. Ponadto dla dowolnego $\mathbb{Q} \in \mathcal{D}$ będącego rozwiązaniem problemu (3.73) istnieje rozwiązanie zagadnienia

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_+((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r)} G_{\mathbb{Q}}^{k,r}(\lambda), \tag{3.74}$$

gdzie

$$G_{\mathbb{Q}}^{k,r}(\lambda) := -E\left[H_k\big(Z_{\mathbb{Q}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} Z_{\mathbb{P}^*} \lambda(d\mathbb{P}^*)\big)\right]^- + \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} E_{\mathbb{P}^*} H_k \lambda(d\mathbb{P}^*) - \tilde{V}_0 \lambda((\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}).$$

2. *Dla $k, r \in \mathbb{N}$ niech $\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$ (odp. $\bar{\lambda}_{k,r}$) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.73) (odp. (3.74) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$). Wówczas dla dowolnych $k, r \in \mathbb{N}$ istnieje zrandomizowany test $\psi_{k,r}$ spełniający warunki*

$$\psi_{k,r}(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } H_k(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}_{k,r}(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 1, & \text{gdy } H_k(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} Z_{\mathbb{P}^*} \bar{\lambda}_{k,r}(d\mathbb{P}^*))(\omega) > 0 \end{cases} \tag{3.75}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*}(H_k \psi_{k,r}) = \tilde{V}_0 \textit{ dla } \bar{\lambda}_{k,r} - \textit{ prawie wszystkich } \mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r. \tag{3.76}$$

3. *Dla $k, r \in \mathbb{N}$ niech $\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$ (odp. $\bar{\lambda}_{k,r}$) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.73) (odp. (3.74) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$) oraz niech $\psi_{k,r}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.75) oraz (3.76). Wówczas istnieją DS-ciągi $(\eta_n)_{n=1}^\infty$, $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^\infty$, $k \in \mathbb{N}$ takie, że dla dowolnego $\bar{\delta} \in \mathcal{R}$ wzór*

$$\bar{\delta} \mathbf{1}_{\{H=0\}} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k \geq n} \eta_{n,k} \lim_{m \to \infty} \sum_{r \geq m} \beta_{m,r}^{(k)} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \psi_{k,r}. \tag{3.77}$$

definiuje zrandomizowany test $\bar{\psi}$ będący rozwiązaniem zagadnienia

$$\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} \rho((\phi - 1)H). \tag{3.78}$$

4. *Rozwiązaniem problemu efektywnego zabezpieczenia (3.1) jest strategia superreplikująca wypłatę $\bar{\psi} H$.*

Dowód
Krok 1. Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy ciąg przestrzeni $\mathcal{Y}_k := L^{p_k}$ i operatorów $A_k : L^\infty \to L^{p_k}$ wzorem

$$A_k \phi = H_k \phi, \ \ \phi \in L^\infty. \tag{3.79}$$

Niech ponadto $\mathcal{Q}$, A, F, α będą określone w (3.42). Z wniosku 3.5.3 wiemy, że problem statyczny (3.78) zapisuje się w postaci (3.44). Z lematu 3.5.4 wiemy, że zrandomizowany test $\mathbf{1} - \bar{\psi}$ jest rozwiązaniem (3.44) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bar{\psi}$ jest rozwiązaniem ogólnego problemu statycznego dla F, $\mathcal{Q}$, A i α określonych w (3.42). Zauważmy, że dla tak określonych F, $\mathcal{Q}$, A i α ogólny problem statyczny jest dobrze postawiony, gdyż zbiór $\mathcal{Q}$ jest dopuszczalny dla (A, F, α) na mocy założenia $(Z1)$.
Krok 2. Sprawdzimy, że dla tak określonych operatorów A_k, $k \in \mathbb{N}$ oraz α, $\mathcal{Q}$, A oraz F zdefiniowanych w (3.42) spełnione są założenia twierdzenia 3.4.8.
(i) wynika z faktu, że $\tilde{V}_0 > 0$.
(ii) otrzymujemy z definicji funkcji F i własności miary ryzyka ρ.
$(iii.a)$ wynika z definicji operatora A i tego, że $H \geq 0$. Pokażemy teraz $(iii.b)$. Niech $0 \leq Y \leq H$ będzie dowolną zmienną losową. Wówczas dla $\psi = \mathbf{1}_{\{H>0\}} \frac{Y}{H}$ otrzymujemy $H\psi = Y$.
Warunek (v) spełniony jest na mocy założenia $(Z2)$.
Warunki $(iv.a)-(iv.c)$ dostajemy wprost z definicji operatorów A_k i założenia $(Z2)$. Niech q_k będzie wykładnikiem sprzężonym do p_k, tzn. $(L^{p_k})^* = L^{q_k}$. Ponieważ dowolna miara $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_b$ jest elementem L^{q_k}, to zmienna losowa $Z_{\mathbb{Q}} H_k \in L^1$, więc funkcja $\phi \to E[(H_k \phi) Z_{\mathbb{Q}}]$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągła, co daje warunek $(iv.d)$.
Krok 3. Dowodzimy punktu 1. tezy.
Z punktu 1 tezy twierdzenia 3.4.8 wynika, że dla $k, r \in \mathbb{N}$ istnieje rozwiązanie $(\mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego, który dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42), A_k zdefiniowanych w (3.79) oraz $F_k := F|_{\mathcal{Y}_k}$, $k \in \mathbb{N}$ zapisuje się w postaci

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_b} \Big\{ \inf_{\phi \in \bar{\mathcal{R}}_b^{(k,r)}} \big\{ E_{\mathbb{Q}}(H_k \phi) - \rho^*(-Z_{\mathbb{Q}}) \big\} \Big\}, \tag{3.80}$$

gdzie

$$\bar{\mathcal{R}}_b^{(k,r)} := \left\{ \phi \in \mathcal{R} : \sup_{\mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))_k^r} E_{\mathbb{P}^*}\big[(\mathbf{1} - \phi) H_k \big] \leq \tilde{V}_0 \right\}, \ k, r \in \mathbb{N}.$$

Po zamianie zmiennej ϕ na $\mathbf{1} - \phi$ oraz na mocy lematu 3.5.9 zagadnienie (3.80) sprowadza się do (3.73).
Dla dowolnych $k, r \in \mathbb{N}$ niech $\mathbb{Q}_{k,r} \in \mathcal{D}$ będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.73). Wówczas z punktu 2 w tezie twierdzenia 3.4.8 zastosowanego do $Y^* = Z_{\mathbb{Q}_{k,r}}$ wiemy, że istnieje rozwiązanie $(Z_{\mathbb{Q}_{k,r}}, \mathcal{Q}_k^r, A_k, F_k, \alpha)$-problemu dualnego, który dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42), A_k zdefiniowanych w (3.79) oraz $F_k := F|_{\mathcal{Y}_k}$, $k \in \mathbb{N}$ zapisuje się jako (3.74) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$. To dowodzi punktu 1. tezy.
Krok 4. Dowodzimy punktu 2. tezy.
Dla $k, r \in \mathbb{N}$ niech $\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$ (odp. $\bar{\lambda}_{k,r}$) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.73) (odp. (3.74) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$). Z punktu 3 w tezie twierdzenia 3.4.8 wiemy, że dla dowolnych $k, r \in \mathbb{N}$ istnieje zmienna losowa $\phi_{k,r}$ spełniająca warunki (3.22) i (3.23), które dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42), A_k zdefiniowanych w (3.79) oraz $F_k := F|_{\mathcal{Y}_k}$,

$k \in \mathbb{N}$ zapisują się jako

$$\phi_{k,r}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } H_k(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r_k} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}_{k,r}(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } H_k(Z_{\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}} - \int_{(\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r_k} Z_{\mathbb{P}^*}\bar{\lambda}_{k,r}(d\mathbb{P}^*))(\omega) < 0. \end{cases} \tag{3.81}$$

oraz

$$E_{\mathbb{P}^*} H_k(\mathbf{1} - \phi_{k,r}) = \tilde{V}_0 \text{ dla } \bar{\lambda}_{k,r} - \text{ prawie wszystkich } \mathbb{P}^* \in (\mathcal{P}_b(\mathcal{M}))^r_k. \tag{3.82}$$

Wówczas dla $\psi_{k,r} := \mathbf{1} - \phi_{k,r}$ spełnione są warunki (3.75) oraz (3.76), co kończy dowód punktu 2.
Krok 5. Dowodzimy punktu 3 tezy.
Dla $k, r \in \mathbb{N}$ niech $\bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$ (odp. $\bar{\lambda}_{k,r}$) będzie dowolnym rozwiązaniem problemu (3.73) (odp. (3.74) z $\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}}_{k,r}$). Niech ponadto $\phi_{k,r}$ będzie dowolnym zrandomizowanym testem spełniającym warunki (3.81) i (3.82) oraz niech $\psi_{k,r} := \mathbf{1} - \phi_{k,r}$. Z punktu 4. w tezie twierdzenia 3.4.8 wiemy, że istnieją DS-ciągi $(\eta_n)_{n=1}^{\infty}$, $(\beta_m^{(k)})_{m=1}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$ oraz zrandomizowany test $\bar{\phi}$, dla którego

$$A\bar{\phi} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} A_k \phi_{k,r} \qquad \mathbb{P} - p.n. \tag{3.83}$$

Zauważmy, że dla $\mathcal{Q}$, A, F, α określonych w (3.42), A_k zdefiniowanych w (3.79) oraz $F_k := F|_{\mathcal{Y}_k}$, $k \in \mathbb{N}$ równość (3.83) zapisuje się w postaci

$$H\bar{\phi} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} H_k \phi_{k,r} \qquad \mathbb{P} - p.n. \tag{3.84}$$

Z definicji granicy iterowanej wynika, że dla każdego k istnieje granica
$M_k := \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} H_k \phi_{k,r} = H_k \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} \phi_{k,r} \quad \mathbb{P} - p.n.$ Z założenia wynika, że istnieje zbiór $\Omega' \subseteq \Omega$ taki, że dla każdego $\omega \in \Omega'$ istnieje $k_0(\omega) \in \mathbb{N}$ takie, że $H_k(\omega) = H(\omega)$ dla $k \geq k_0(\omega)$. Z (3.84) wynika, że dla dowolnego $\omega \in \Omega'$

$$\begin{aligned} H\phi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_k^{(n)} M_k(\omega) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n\geq k_0(\omega)} \eta_{n,k} M_k(\omega) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n\geq k_0(\omega)} \eta_{n,k} H(\omega) \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} \phi_{k,r}(\omega) \\ &= H(\omega) \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} \phi_{k,r}(\omega). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że jeżeli $H(\omega) > 0$, to

$$\phi(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} \phi_{k,r}(\omega). \tag{3.85}$$

Ustalmy dowolne $\bar{\delta} \in \mathcal{R}$. Z istnienia zmiennej losowej ϕ, dla której zachodzi (3.85) wynika, że

$$\bar{\phi} := \bar{\delta}\mathbf{1}_{H=0} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} \eta_{n,k} \lim_{m\to\infty} \sum_{r\geq m} \beta_{m,r}^{(k)} \mathbf{1}_{\{H>0\}} \phi_{k,r}, \tag{3.86}$$

jest dobrze określoną zmienną losową, dla której spełniona jest równość (3.84). Zatem z punktu 4 tezy twierdzenia 3.4.8 wynika, że $\bar{\phi}$ jest rozwiązaniem ogólnego

problemu statycznego. Z kroku 1. wiemy, że $\bar{\psi} := \mathbf{1} - \bar{\phi}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (3.78). Zatem z (3.86) oraz z lematu B.2.3 wynika, że dla zmiennej losowej $\bar{\psi}$ zachodzi równość (3.77).
Krok 6. Dowód punktu 4. wynika natychmiast z twierdzenia 3.1.3. $\square$

PRZYKŁAD 3.5.15. Wróćmy jeszcze raz do przykładu rozważanego w podrozdziale 3.2. Uzasadnimy, że dla miary ryzyka $\bar{\rho}$ zdefiniowanej w (3.3) oraz wypłaty H i liczby $\tilde{V}_0$, dla których zachodzi warunek 3.2.4, spełnione są założenia twierdzenia 3.5.14. Wyniknie stąd, że postać rozwiązania problemu statycznego (3.4) można otrzymać z twierdzenia 3.5.14. Zauważmy najpierw, że założenie 3.2.4 implikuje warunek $(Z1)$. Uzasadnimy, że zachodzi $(Z2)$. Dla $k \in \mathbb{N}$ definiujemy $p_k = 2$, $H_k = H \wedge k$ oraz $\phi_0^{(k)} = \widehat{\phi}$, gdzie $\widehat{\phi}$ jest zrandomizowanym testem, dla którego $\bar{\rho}((\widehat{\phi}-1)H) < \infty$ (istnienie takiego $\widehat{\phi}$ wynika z założenia 3.2.4).
Warunek $a)$ wynika natychmiast z faktu, że $\bar{\rho}$ przyjmuje wartości rzeczywiste na L^2 (punkt $b)$ w lemacie 3.2.3) oraz z twierdzenia A.2.10. Uzasadnimy, że zachodzi warunek $b)$. Ponieważ $H \in L^1$, istnieje zbiór $\Omega' \subseteq \Omega$ taki, że $H(\omega) < \infty$ dla każdego $\omega \in \Omega'$. Stąd dla każdego $\omega \in \Omega'$ istnieje $k_0(\omega) \in \mathbb{N}$ takie, że $(H \wedge k)(\omega) = H(\omega)$ dla $k \geq k_0(\omega)$, co daje warunek $b)$ w założeniu $(Z2)$. $\square$

Dodatek A

Wyniki z analizy funkcjonalnej i teorii dualności

A.1 Lokalnie wypukłe przestrzenie liniowo-topologiczne

Następujące definicje zostały zaczerpnięte z [1].

Definicja A.1.1. *Powiemy, że przestrzeń liniowa* $\mathcal{V}$ *jest przestrzenią liniowo-topologiczną nad ciałem* $\mathbb{K}$*, jeżeli działanie dodawania (odp. mnożenia przez skalary) jest ciągłą funkcją z* $\mathcal{V}\times\mathcal{V}$ *w* $\mathcal{V}$ *(odp. z* $\mathbb{K}\times\mathcal{V}$ *w* $\mathcal{V}$*). Powiemy, że przestrzeń liniowo-topologiczna jest lokalnie wypukła, jeżeli istnieje baza topologii złożona ze zbiorów wypukłych.*

Definicja A.1.2. *Niech* $\mathcal{V}$ *będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną. Przestrzeń liniową ciągłych liniowych funkcjonałów na* $\mathcal{V}$ *nazwiemy przestrzenią topologicznie sprzężoną i oznaczymy przez* $\mathcal{V}^*$*. Załóżmy, że dla określonej na* $\mathcal{V}\times\mathcal{V}^*$ *funkcji* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ *dana wzorem*

$$\langle v, v^*\rangle_{\mathcal{V}} = v^*(v)$$

dla dowolnego $v\in\mathcal{V}$ *i* $v^*\in\mathcal{V}^*$ *spełnione są warunki*

- $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ *jest dwuliniowa,*
- *jeżeli* $\langle v, v^*\rangle_{\mathcal{V}} = 0$ *dla każdego* $v^*\in\mathcal{V}^*$*, to* $v = 0$*,*
- *jeżeli* $\langle v, v^*\rangle_{\mathcal{V}} = 0$ *dla każdego* $v\in\mathcal{V}$*, to* $v^* = 0$*.*

Wówczas parę przestrzeni $(\mathcal{V},\mathcal{V}^*)$ *wraz z formą dwuliniową* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ *nazwiemy parą topologicznie sprzężoną (w skrócie: parą sprzężoną).* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{V}}$ *będziemy nazywać formą dwuliniową związaną z parą przestrzeni* $(\mathcal{V},\mathcal{V}^*)$*.*

Definicja A.1.3. *Niech* $\mathcal{V}$ *będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną oraz niech* $\mathcal{V}^*$ *będzie przestrzenią topologicznie sprzężoną. Najsłabszą topologię na* $\mathcal{V}$*, przy której odwzorowanie* $v\to\langle v, v^*\rangle_{\mathcal{V}}$ *jest ciągłe dla każdego* $v^*\in\mathcal{V}^*$ *nazywamy słabą topologią na* $\mathcal{V}$ *i oznaczamy ją przez* $\sigma(\mathcal{V},\mathcal{V}^*)$*. Najsłabszą topologię na* $\mathcal{V}^*$*, przy której odwzorowanie* $v^*\to\langle v, v^*\rangle_{\mathcal{V}}$ *jest ciągłe dla każdego* $v\in\mathcal{V}$ *nazywamy słabą* topologią na* $\mathcal{V}^*$ *i oznaczamy ją przez* $\sigma(\mathcal{V}^*,\mathcal{V})$*.*

DEFINICJA A.1.4. *Powiemy, że lokalnie wypukła topologia Haussdorffa τ na $\mathcal{V}$ jest zgodna z parą sprzężoną $(\mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$ jeżeli $(\mathcal{V}, \tau)^* = \mathcal{V}^*$. Analogicznie definiujemy zgodne topologie na $\mathcal{V}^*$.*

DEFINICJA A.1.5. *Najsilniejszą lokalnie wypukłą topologię Haussdorffa na $\mathcal{V}$ zgodną z parą sprzężoną $(\mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$ nazwiemy topologią Mackeya.*

DEFINICJA A.1.6. *Niech $\mathcal{V}$ będzie lokalnie wypukłą przestrzenią liniowo-topologiczną. Powiemy, że zbiór $A \subseteq \mathcal{V}$ jest zbalansowany, jeżeli $tA \subseteq A$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, $|t| \leq 1$ oraz powiemy, że jest absorbujący, jeżeli dla każdego $v \in \mathcal{V}$ istnieje $\alpha > 0$ takie, że $v \in tA$ dla każdego $t \in \mathbb{R}$, $|t| \geq \alpha$. Powiemy, że $\mathcal{V}$ jest przestrzenią beczkową, jeżeli każdy domknięty, zbalansowany i absorbujący podzbiór $\mathcal{V}$ jest otoczeniem 0.*

TWIERDZENIE A.1.7 ([27], Corollary II.2, II.4). *Lokalnie wypukła przestrzeń topologiczna $(\mathcal{V}, \tau)$ jest przestrzenią beczkową wtedy i tylko wtedy, gdy τ jest topologią Mackeya.*

Z powyższego twierdzenia wynika ważny

WNIOSEK A.1.8. *Niech $(\mathcal{V}, \tau)$ będzie przestrzenią beczkową oraz niech $\mathcal{V}'$ będzie przestrzenią sprzężoną. Wówczas słaba topologia $\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ pokrywa się z topologią Mackeya.*

TWIERDZENIE A.1.9 (Banacha - Alaoglu, [1], tw. 6.26). *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią unormowaną. Wówczas dowolny domknięty i ograniczony zbiór w przestrzeni $\mathcal{V}^*$ jest słabo*-zwarty.*

DEFINICJA A.1.10. *Niech $p \in [1, \infty)$. Powiemy, że $q \in (1, \infty]$ jest wykładnikiem sprzężonym do p jeżeli $(L^p)^* = L^q$.*

A.2 Analiza wypukła

DEFINICJA A.2.1. *[32] Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią liniowo topologiczną i niech $\mathcal{V}^*$ będzie przestrzenią sprzężoną do $\mathcal{V}$. Transformatą Fenchela-Legendre'a funkcji $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]$ nazwiemy funkcję $f^* : \mathcal{V}^* \to \mathbb{R} \cup [-\infty, \infty]$ określoną dla dowolnego $v^* \in \mathcal{V}^*$ wzorem*

$$f^*(v^*) = \sup_{v \in \mathcal{V}} \big(\langle v, v^* \rangle_{\mathcal{V}} - f(v) \big).$$

DEFINICJA A.2.2. *[32] Niech $F : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $1 \leq p \leq \infty$ będzie dowolną funkcją.*
*1. Powiemy, że F ma **własność Fatou** jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n) \subseteq L^p$ takiego, że $|X_n| \leq Y$ dla pewnego $Y \in L^p$ oraz $X_n \to X$ dla pewnego $X \in L^p$ zachodzi*

$$F(x) =\leq \liminf_{n \to \infty} F(X_n).$$

*2. Powiemy, że F jest **ciągła od dołu** (ang. continuous from below) jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n) \subseteq L^p$ takiego, że $X_n \nearrow X$ dla pewnego $X \in L^p$ zachodzi*

$$F(x) = \lim_{n \to \infty} F(X_n).$$

3. Powiemy, że F jest ***ciągła od góry*** *(ang. continuous from above) jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n) \subseteq L^p$ takiego, że $X_n \searrow X$ dla pewnego $X \in L^p$ zachodzi*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(X_n).$$

4. Powiemy, że F jest ***ciągła w sensie Lebesgue*** *(ang. Lebesgue continuous) jeżeli dla dowolnego ciągu $(X_n) \subseteq L^p$ takiego, że $|X_n| \leq Y$ dla pewnego $Y \in L^p$ oraz $X_n \to X$ dla pewnego $X \in L^p$ zachodzi*

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(X_n).$$

Definicja A.2.3. *[18] Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią liniowo topologiczną. Dziedziną efektywną funkcji $F : \mathcal{V} \to [-\infty, \infty]$ nazwiemy zbiór*

$$\mathrm{dom}(F) = \{F < \infty\}.$$

Ponadto powiemy, że funkcja F jest właściwa jeżeli F nie przyjmuje wartości $-\infty$.

Twierdzenie A.2.4. *[[32], tw. 3.3] Niech $F : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $1 \leq p < \infty$ będzie wypukłą, właściwą funkcją taką, że $F(X) \leq F(Y)$ dla dowolnych $X, Y \in L^p$ takich, że $X \leq Y$ $\mathbb{P}-$p.n. Wówczas równoważne są warunki*

1. *F jest $\sigma(L^p, L^q)$-półciągła z dołu.*
2. *F jest $\|\cdot\|_p$-półciągła z dołu.*
3. *$F(X) = \sup_{Z\in L^q}(EZX - F^*(Z))$.*
4. *F jest ciągła od dołu.*
5. *F ma własność Fatou.*

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy wniosek, z którego korzystamy w rozprawie.

Wniosek A.2.5. *Niech $F : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $1 \leq p < \infty$ będzie wypukłą, właściwą funkcją taką, że $F(0) \in \mathbb{R}$ oraz $F(X) \leq F(Y)$ dla dowolnych $X, Y \in L^p$ takich, że $X \leq Y$ $\mathbb{P}-$p.n. Wówczas $\mathrm{dom}(F^*) \subseteq L^q_+$. W szczególności równoważne są warunki:* 1, 2, 3, 4, 5 *z twierdzenia A.2.4 oraz warunek*

3'. $F(X) = \sup\limits_{Z\in L^q_+}(EZX - F^*(Z))$.

Dowód

Uzasadnimy, że $\mathrm{dom}(F^*) \subseteq L^q_+$. Załóżmy przeciwnie, że $\mathbb{P}(\hat{Z} < 0) > 0$ dla pewnego $\hat{Z} \in \mathrm{dom}(F^*)$. Niech $A := \{\hat{Z} < 0\}$. Zauważmy, że $-t\mathbf{1}_A \leq 0$ implikuje $F(-t\mathbf{1}_A) \leq F(0)$ dla każdego $t \in \mathbb{R}_+$. Ponieważ $\hat{Z} \in \mathrm{dom}(F^*)$, to

$$E(-t\mathbf{1}_A\hat{Z}) - F^*(\hat{Z}) \leq F(-t\mathbf{1}_A) \leq F(0).$$

Stąd, ponieważ $-\hat{Z} > 0$ na A oraz $\mathbb{P}(A) > 0$, dostajemy

$$\underbrace{t\,E(-\hat{Z}\mathbf{1}_A)}_{>0} = E(-t\hat{Z}\mathbf{1}_A) \leq F^*(\hat{Z}) + F(0) < \infty.$$

Biorąc $t \nearrow \infty$, dostajemy sprzeczność. Z inkluzji $\mathrm{dom}(F^*) \subseteq L^q_+$ wynika równoważność warunków 3 i 3′. Stąd i z twierdzenia A.2.4 otrzymujemy równoważność warunków 1, 2, 3, 3′, 4 i 5. □
Wprowadzimy teraz kilka pojęć, za pomocą których sformułujemy twierdzenia Fenchela o dualności.

Definicja A.2.6 ([18]). *Niech $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami liniowo topologicznymi, niech dane będą funkcje wypukłe $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$. Pierwotnym problemem Fenchela nazwiemy zagadnienie*

$$\inf_{u \in \mathcal{V}} [f(u) + g(Lu)]. \tag{A.1}$$

Dualnym problemem Fenchela nazwiemy zagadnienie

$$\sup_{y^* \in \mathcal{W}^*} [-f^*(L^* y^*) - g^*(-y^*)]. \tag{A.2}$$

Niekiedy będziemy mówić, że są to problemy dualne w sensie Fenchela.
Niech $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (odp. $d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$) będzie wartością pierwotnego (odp. dualnego) problemu Fenchela. Powiemy, że zachodzi mocna dualność, jeżeli $p = d$.

Twierdzenie A.2.7 (Fenchela o dualności, [18], tw. 4.1, uw. 4.2). *Niech $\mathcal{V}$ oraz $\mathcal{W}$ będą przestrzeniami liniowo topologicznymi, niech dane będą funkcje wypukłe $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, operator $L \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ oraz niech $p, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ będą wartościami, odpowiednio, pierwotnego i dualnego zagadnienia Fenchela, tzn.*

$$p = \inf_{u \in \mathcal{V}} [f(u) + g(Lu)],$$

oraz

$$d = \sup_{y^* \in \mathcal{W}^*} [-f^*(L^* y^*) - g^*(-y^*)].$$

Załóżmy, że

1. *$p < \infty$,*
2. *istnieje $u_0 \in V$ t. że $f(u_0) < \infty$, $g(Lu_0) < \infty$ oraz funkcja g jest ciągła w Lu_0.*

Wówczas zachodzi mocna dualność, tzn. $p = d$ oraz istnieje co najmniej jedno rozwiązanie problemu dualnego.

Podamy również wersję powyższego twierdzenia dla przestrzeni beczkowej, w którego sformułowaniu pojawia się algebraiczne wnętrze zbioru.

Definicja A.2.8 ([7]). *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią liniową i $A \subseteq \mathcal{V}$ zbiorem wypukłym. Powiemy, że punkt $u \in \mathcal{V}$ należy do* ***algebraicznego wnętrza*** *zbioru A, jeżeli dla dowolnego $v \in \mathcal{V}$ istnieje $\varepsilon > 0$ taki, że*

$$u + tv \in A \quad \text{dla każdego } t \in [0, \varepsilon].$$

Algebraiczne wnętrze zbioru A będziemy oznaczać przez $\operatorname{core}(A)$.

Twierdzenie A.2.9 ([7], Th. 5). *Niech $\mathcal{V}$ będzie przestrzenią Banacha, a $\mathcal{W}$ przestrzenią beczkową. Niech dane będą wypukłe, półciągłe z dołu funkcje $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ oraz liniowy domknięty operator L określony na gęstym podzbiorze $\mathcal{V}$. Niech $p, d \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ będą wartościami pierwotnego i dualnego zagadnienia Fenchela. Wówczas $p \geq d$, tzn. zachodzi tzw. słaba dualność.*
Ponadto jeżeli

$$0 \in \operatorname{core}\big(\operatorname{dom}(g) - B\operatorname{dom}(f)\big),$$

to zachodzi mocna dualność, tzn. $p = d$ oraz istnieje rozwiązanie problemu dualnego, o ile $d \in \mathbb{R}$.

Podamy teraz ważny wynik dotyczący ciągłości funkcji wypukłych w przestrzeniach L^p.

Twierdzenie A.2.10 ([8], tw. 1). *Niech $F : L^p \to (-\infty, \infty]$, $1 \leq p \leq \infty$ będzie funkcją wypukłą właściwą taką, że $F(X) \leq F(Y)$ dla dowolnych $X, Y \in L^p$ takich, że $X \leq Y$. Wówczas F jest ciągła we wnętrzu zbioru $\{F < \infty\}$.*

Dodatek B

Wyniki z analizy stochastycznej

B.1 Zmienne losowe o wartościach w $\tilde{\mathbb{R}}$

Przez $\tilde{\mathbb{R}}$ oznaczać będziemy zbiór $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\} \cup \{\kappa\}$, gdzie κ oznacza wartość nieokreśloną. W zbiorze $\tilde{\mathbb{R}}$ rozpatrujemy standardowe działania dodawania i mnożenia, przyjmując następujące konwencje

- $a + \kappa = \kappa, a \cdot \kappa = \kappa \ \forall a \in \tilde{\mathbb{R}}$,
- $0 \cdot \infty = 0,\ 0 \cdot (-\infty) = 0$,
- $\infty + (-\infty) = \kappa$.

Ponadto przeważnie będziemy pisać $a - b$ zamiast $a + (-b)$.
Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie ogólną przestrzenią probabilistyczną.

Definicja B.1.1. *Zmienną losową nazwiemy dowolną $\mathcal{F}$-mierzalną funkcję $X : \Omega \to \tilde{\mathbb{R}}$. Powiemy, że zmienna losowa X jest dobrze określona, jeżeli $\mathbb{P}(\{X = \kappa\}) = 0$.*

Przestrzeń liniową wszystkich zmiennych losowych o wartościach w $\tilde{\mathbb{R}}$ będziemy oznaczać przez $L^0(\tilde{\mathbb{R}})$.

Uwaga B.1.2. *W pracy rozpatruje się przede wszystkim zmienne losowe o wartościach w $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Zauważmy jednak, że zmienne losowe o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$ nie tworzą przestrzeni liniowej, co motywuje rozważanie zmiennych losowych o wartościach w $\tilde{\mathbb{R}}$.*

Ustalmy teraz dowolne σ-ciało $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$.
Wprowadzimy definicję warunkowej wartości oczekiwanej dla zmiennej losowej z $L^0(\tilde{\mathbb{R}})$. Zaczniemy od definicji warunkowej wartości oczekiwanej nieujemnej zmiennej losowej.

Definicja B.1.3. *Niech X będzie zmienną losową o wartościach $\bar{\mathbb{R}}_+ \cup \{0\}$. Warunkową wartością oczekiwaną zmiennej losowej X pod warunkiem $\mathcal{G}$ nazwiemy zmienną losową*

$$E(X|\mathcal{G}) := \lim_{n\to\infty} E(X \wedge n|\mathcal{G}),$$

gdzie $E(X \wedge n|\mathcal{G})$ jest wyznaczoną jednoznacznie z dokładnością do zbiorów $\mathbb{P}$-miary zero, $\mathcal{G}$-mierzalną zmienną losową taką, że dla każdego $A \in \mathcal{G}$

$$\int_A E(X \wedge n|\mathcal{G}) d\mathbb{P} = \int_A (X \wedge n) d\mathbb{P}.$$

Definicja B.1.4. *Niech $X \in L^0(\tilde{\mathbb{R}})$. Jeżeli zmienna losowa*

$$\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) := E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G})$$

jest dobrze określona, to powiemy, że istnieje warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$ i jest $\mathbb{P}$-p.n. równa $\mathcal{E}(X|\mathcal{G})$. Warunkową wartość oczekiwaną X pod warunkiem $\mathcal{G}$ będziemy oznaczać przez $E(X|\mathcal{G})$.

Przedstawimy kilka własności warunkowej wartości oczekiwanej, z których korzystamy w rozprawie.

Stwierdzenie B.1.5 ([24], problem 3, § 23.1). *Niech $X, Y \in L^0(\bar{\mathbb{R}})$ będą zmiennymi losowymi takimi, że $E(X|\mathcal{G})$, $E(Y|\mathcal{G})$ istnieją. Wówczas*
(i) Jeżeli zmienna losowa $E(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})$ jest dobrze określona, to istnieje $E(X + Y|\mathcal{G})$ i zachodzi równość $E(X + Y|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) + E(Y|\mathcal{G})$.
(ii) $E(aX|\mathcal{G}) = aE(X|\mathcal{G})$ dla dowolnego $a \in \mathbb{R}$.

Stwierdzenie B.1.6 ([24], przykład 3, § 23.2). *Niech $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie mierzalną funkcją wypukłą oraz niech X będzie rzeczywistą zmienną losową, dla której $E(X|\mathcal{G})$ istnieje i jest rzeczywistą zmienną losową. Wówczas*

$$\phi(E(X|\mathcal{G})) \leq E(\phi(X|\mathcal{G})).$$

Twierdzenie B.1.7 ([53], tw. 2, *II.* § 7). *Niech $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$.*
(i) Jeżeli $X_n \leq Y$ dla $n \in \mathbb{N}$, $EY < \infty$ i $X_n \to X$ $\mathbb{P}$-p.n., to

$$E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G}) \ \mathbb{P}-\text{p.n. oraz } E(|X_n - X||\mathcal{G}) \to 0 \quad \mathbb{P} - p.n.$$

(ii) Jeżeli $X_n \geq Y$ dla $n \in \mathbb{N}$, $EY > -\infty$ i $X_n \nearrow X$ $\mathbb{P}$-p.n., to

$$E(X_n|\mathcal{G}) \nearrow E(X|\mathcal{G}) \quad \mathbb{P}-\text{p.n.}$$

(iii) Jeżeli $X_n \geq Y$ dla $n \in \mathbb{N}$, $EY > -\infty$, to

$$E(\liminf_{n\to\infty} X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf_{n\to\infty} E(X_n|\mathcal{G}) \quad \mathbb{P} - p.n.$$

Definicja B.1.8. *Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie dowolnym σ-ciałem. $\mathcal{G}$-rozbiciem zbioru Ω nazwiemy dowolną co najwyżej przeliczalną rodzinę rozłącznych zbiorów $\mathcal{G}$-mierzalnych, których sumą jest Ω.*

Zaczniemy od wyniku, który będzie przydatny, by w pewnych sytuacjach uzasadnić istnienie warunkowej wartości oczekiwanej.

Lemat B.1.9. *Niech* $\{A_1, A_2, \ldots\}$ *będzie dowolnym* $\mathcal{F}$*-rozbiciem* Ω. *Wówczas* $E(X|\mathcal{G})$ *istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego* $i \in \mathbb{N}$ *zmienna losowa* $\mathbf{1}_{A_i}\mathcal{E}(X|\mathcal{G})$ *jest dobrze określona. Jeżeli spełniony jest którykolwiek z powyższych warunków, wówczas zachodzi równość*

$$E(X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i}\mathcal{E}(X|\mathcal{G}). \tag{B.1}$$

Dowód
Zauważmy, że dla każdego $i \in \mathbb{N}$ zmienna losowa $\mathbf{1}_{A_i}\mathcal{E}(X|\mathcal{G})$ jest dobrze określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{P}(\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) = \kappa) = 0$, co jest równoważne istnieniu $E(X|\mathcal{G})$. Ponadto $E(X|\mathcal{G}) = \mathcal{E}(X|\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_i}\mathcal{E}(X|\mathcal{G})$, co dowodzi równości (B.1). □ Przypomnijmy klasyczną wersję abstrakcyjnego wzoru Bayesa.

Stwierdzenie B.1.10 ([29], zad. 12, § 6.4). *Niech* $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e$ *oraz niech* X *będzie* $\mathbb{Q}$*-całkowalną zmienną losową. Wówczas*

$$E_{\mathbb{Q}}(X|\mathcal{G}) = \frac{E(X\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}.$$

Podamy teraz lemat, w którym dowiedziemy, że dla zmiennej losowej X i $\mathcal{G}$-mierzalnej zmiennej losowej Y równość

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G})$$

zachodzi przy założeniach słabszych niż w klasycznej wersji.

Lemat B.1.11. *Niech* X, Y *będą zmiennymi losowymi takimi, że*

$$\mathbb{P}(\{Y = 0\} \cap \{E(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \cap \{E(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}) = 0. \tag{B.2}$$

oraz Y *jest* $\mathcal{G}$*-mierzalna. Wówczas jeżeli istnieje zmienna losowa* $E(XY|\mathcal{G})$*, to zachodzi wzór*

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X|\mathcal{G}). \tag{B.3}$$

Dowód
Krok 1. Pokażemy, że

$$E[(XY)^+|\mathcal{G}] = Y^+E(X^+|\mathcal{G}) + Y^-E(X^-|\mathcal{G}) =: \xi_1 + \xi_2 \tag{B.4}$$

oraz

$$E[(XY)^-|\mathcal{G}] = Y^+E(X^-|\mathcal{G}) + Y^-E(X^+|\mathcal{G}) =: \eta_1 + \eta_2. \tag{B.5}$$

Zauważmy, że

$$XY = (XY)^+ - (XY)^-,$$

gdzie

$$(XY)^+ = X^+Y^+ + X^-Y^- \text{ oraz } (XY)^- = X^+Y^- + X^-Y^+.$$

Stąd oraz z liniowości otrzymujemy

$$\begin{aligned}
E[(XY)^+|\mathcal{G}] &= E(X^+Y^+|\mathcal{G}) + E(X^-Y^-|\mathcal{G}) \\
&\overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} E[(X^+\wedge n)(Y^+\wedge n)|\mathcal{G}] + \lim_{n\to\infty} E[(X^-\wedge n)(Y^-\wedge n)|\mathcal{G}] \\
&\overset{(b)}{=} \lim_{n\to\infty}(Y^+\wedge n)E(X^+\wedge n|\mathcal{G}) + \lim_{n\to\infty}(Y^-\wedge n)E(X^-\wedge n|\mathcal{G}) \\
&= Y^+E(X^+|\mathcal{G}) + Y^-E(X^-|\mathcal{G}),
\end{aligned}$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy z warunkowej wersji twierdzenia o zbieżności monotonicznej, a w (b) zastosowaliśmy wzór (B.3), o którym wiadomo, że jest prawdziwy m.in. dla ograniczonych zmiennych losowych.
Dowiedliśmy (B.4). Dowód równości (B.5) pomijamy, gdyż przebiega on analogicznie.
Krok 2. Twierdzimy, że

$$\xi_1 - \eta_2 = YE(X^+|\mathcal{G}) \text{ oraz } \xi_2 - \eta_1 = -YE(X^-|\mathcal{G}). \tag{B.6}$$

Udowodnimy pierwszą równość. Zauważmy, że dobrze określona jest zmienna losowa $YE(X^+|\mathcal{G})$. Istotnie,

$$\left[YE(X^+|\mathcal{G})\right]^+ = Y^+E(X^+|\mathcal{G}) \text{ oraz } \left[YE(X^+|\mathcal{G})\right]^- = Y^-E(X^+|\mathcal{G}). \tag{B.7}$$

Ponieważ zmienne losowe $Y^+E(X^+|\mathcal{G})$ i $Y^-E(X^+|\mathcal{G})$ mogą przyjmować wartości większe od zera wyłącznie na rozłącznych zbiorach

$$\mathbb{P}\big(\{Y^+E(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \cap \{Y^-E(X^+|\mathcal{G}) = \infty\}\big) = 0,$$

co w połączeniu z (B.7) implikuje, że zmienna losowa $YE(X^+|\mathcal{G})$ jest dobrze określona oraz

$$YE(X^+|\mathcal{G}) = \xi_1 - \eta_2.$$

Analogicznie dowodzi się, że dobrze określona jest zmienna losowa $YE(X^-|\mathcal{G})$ i zachodzi równość

$$-YE(X^-|\mathcal{G}) = \xi_2 - \eta_1.$$

W ten sposób otrzymaliśmy (B.6).
Krok 3. Uzasadniamy, że

$$E(XY|\mathcal{G}) = YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})].$$

$$\begin{aligned}
E(XY|\mathcal{G}) &= E[(XY)^+|\mathcal{G}] - E[(XY)^-|\mathcal{G}] \overset{(*)}{=} \xi_1 + \xi_2 - \eta_1 - \eta_2 = \xi_1 - \eta_2 + \xi_2 - \eta_1 \\
&\overset{(**)}{=} YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})],
\end{aligned}$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z kroku 1., a w $(**)$ z kroku 2.
Krok 4. Niech $U := YE(X^+|\mathcal{G})$ oraz $V := -YE(X^-|\mathcal{G})$. Zdefiniujmy zbiory

$$\begin{aligned}
&A := \{U = \infty\},\ B := \{U = -\infty\},\ C := \{U \in \mathbb{R}\} \text{ oraz} \\
&D := \{V = \infty\},\ E := \{V = -\infty\}.
\end{aligned}$$

Twierdzimy, że

$$\mathbb{P}(A \cap E) = 0 \text{ oraz } \mathbb{P}(B \cap D) = 0. \tag{B.8}$$

Uzasadnimy najpierw pierwszą równość. Załóżmy przeciwnie, że $\mathbb{P}(A \cap E) > 0$. Dla $\omega \in A$ mamy $U(\omega) = Y(\omega)E(X^+|\mathcal{G})(\omega) = \infty$ co implikuje, że $Y^+(\omega)E(X^+|\mathcal{G})(\omega) = \infty$. Stąd i z (B.4) wynika, że

$$E[(XY)^+|\mathcal{G}](\omega) = \infty \text{ dla } \omega \in A. \tag{B.9}$$

Dla $\omega \in E$ mamy $V(\omega) = -Y(\omega)E(X^-|\mathcal{G})(\omega) = -\infty$ co implikuje, że $Y^+(\omega)E(X^-|\mathcal{G})(\omega) = \infty$. Stąd i z (B.5) wynika, że

$$E[(XY)^-|\mathcal{G}](\omega) = \infty \text{ dla } \omega \in E. \tag{B.10}$$

Ponieważ istnieje $E(XY|\mathcal{G})$, zmienne losowe $E[(XY)^+|\mathcal{G}]$ oraz $E[(XY)^-|\mathcal{G}]$ są jednocześnie równe ∞ na zbiorze miary zero, co w połączeniu (B.9) i (B.10) przeczy założeniu, że $\mathbb{P}(A \cap E) > 0$. Dowód równości $\mathbb{P}(B \cap D) = 0$ pomijamy, gdyż przebiega on analogicznie.
Krok 5. Przypomnijmy, że przez $\mathcal{E}(X|\mathcal{G})$ oznaczamy zmienną losową $E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G}) \in L^0(\tilde{\mathbb{R}})$. Dowiedziemy, że równość

$$YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})] = Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) \tag{B.11}$$

jest spełniona osobno na każdym ze zbiorów A, B, C zdefiniowanych w kroku 4. Zauważmy najpierw, że zbiór A możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned} A &= \{YE(X^+|\mathcal{G}) = \infty\} \\ &= \big(\{Y = \infty\} \cap \{E(X^+|\mathcal{G}) > 0\}\big) \cup \big(\{0 < Y < \infty\} \cap \{E(X^+|\mathcal{G}) = \infty\}\big) \\ &=: A_1 \cup A_2. \end{aligned}$$

Uzasadnimy, że $\mathbb{P}(\mathbf{1}_{A_1}E(X^-|\mathcal{G}) = 0) = 1$. Załóżmy przeciwnie, że $E(X^-|\mathcal{G}) > 0$ na podzbiorze dodatniej miary $A_1^+ \subseteq A_1$. Wówczas $V = -YE(X^-|\mathcal{G}) = -\infty$ na A_1^+, co implikuje, że $A_1^+ \subseteq E$. Ostatecznie otrzymujemy $0 < \mathbb{P}(A_1^+) \le \mathbb{P}(A \cap E)$, co przeczy (B.8). Dowiedliśmy, że na zbiorze A_1 zmienna losowa $E(X^-|\mathcal{G})$, a więc także $-YE(X^-|\mathcal{G})$ przyjmuje wartość 0, skąd

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{A_1}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] &= \mathbf{1}_{A_1}YE(X^+|\mathcal{G}) + \underbrace{\mathbf{1}_{A_1}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{=0} \\ &= \mathbf{1}_{A_1}Y[\mathbf{1}_{A_1}E(X^+|\mathcal{G}) - 0 \cdot \mathbf{1}_{A_1}] \\ &= \mathbf{1}_{A_1}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}). \end{aligned} \tag{B.12}$$

Teraz uzasadnimy, że na zbiorze A_2 zmienna losowa $E(X^-|\mathcal{G}) < \infty$. Załóżmy przeciwnie, że $E(X^-|\mathcal{G}) = \infty$ na podzbiorze dodatniej miary $A_2^+ \subseteq A_2$. Wówczas $V = -YE(X^-|\mathcal{G}) = -\infty$ na A_2^+ co implikuje, że $A_2^+ \subseteq E$ i znów otrzymujemy sprzeczność z (B.8). Dowiedliśmy, że zmienna losowa $\mathbf{1}_{A_2}E(X^-|\mathcal{G})$, a więc także zmienna losowa $\mathbf{1}_{A_2}(-Y)E(X^-|\mathcal{G})$ przyjmuje wartości rzeczywiste, skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned} &\mathbf{1}_{A_2}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \underbrace{\mathbf{1}_{A_2}YE(X^+|\mathcal{G})}_{=\infty} + \underbrace{\mathbf{1}_{A_2}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{\in\mathbb{R}} = \\ &\infty \cdot \mathbf{1}_{A_2} = \mathbf{1}_{A_2}\underbrace{Y}_{\in\mathbb{R}_+}[\underbrace{\mathbf{1}_{A_2}E(X^+|\mathcal{G})}_{=\infty} - \underbrace{\mathbf{1}_{A_2}E(X^-|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}}] = \mathbf{1}_{A_2}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}). \end{aligned} \tag{B.13}$$

Z (B.12) i (B.13) wynika, że prawdziwa jest równość

$$\mathbf{1}_A\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \mathbf{1}_A Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).$$

Przechodzimy do dowodu równości (B.11) na zbiorze B.
Zauważmy najpierw, że zbiór B możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}B &= \{YE(X^+|\mathcal{G}) = -\infty\}\\ &= \big(\{Y = -\infty\} \cap \{E(X^+|\mathcal{G}) > 0\}\big) \cup \big(\{-\infty < Y < 0\} \cap \{E(X^+|\mathcal{G}) = \infty\}\big)\\ &=: B_1 \cup B_2.\end{aligned}$$

Uzasadnimy, że $\mathbb{P}(\mathbf{1}_{B_1}E(X^-|\mathcal{G}) = 0) = 1$. Załóżmy przeciwnie, że $E(X^-|\mathcal{G}) > 0$ na podzbiorze dodatniej miary $B_1^+ \subseteq B_1$. Wówczas $V = -YE(X^-|\mathcal{G}) = \infty$ na B_1^+, co implikuje, że $B_1^+ \subseteq D$. Ostatecznie otrzymujemy $0 < \mathbb{P}(B_1^+) \le \mathbb{P}(B \cap D)$, co przeczy (B.8). Dowiedliśmy, że na zbiorze B_1 zmienna losowa $E(X^-|\mathcal{G})$, a więc także $-YE(X^-|\mathcal{G})$ przyjmuje wartość 0, skąd

$$\begin{aligned}\mathbf{1}_{B_1}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] &= \mathbf{1}_{B_1}YE(X^+|\mathcal{G}) + \underbrace{\mathbf{1}_{B_1}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{=0}\\ &= \mathbf{1}_{B_1}Y[E(X^+|\mathcal{G}) - 0]\\ &= \mathbf{1}_{B_1}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}). \end{aligned} \tag{B.14}$$

Teraz uzasadnimy, że $E(X^-|\mathcal{G}) < \infty$ na zbiorze B_2. Załóżmy przeciwnie, że $E(X^-|\mathcal{G}) = \infty$ na podzbiorze dodatniej miary $B_2^+ \subseteq B_2$. Wówczas $V = -YE(X^-|\mathcal{G}) = \infty$ na B_2^+ co implikuje, że $B_2^+ \subseteq D$ i znów otrzymujemy sprzeczność z (B.8). Dowiedliśmy, że zmienna losowa $\mathbf{1}_{B_2}E(X^-|\mathcal{G})$, a więc także zmienna losowa $\mathbf{1}_{B_2}(-Y)E(X^-|\mathcal{G})$ przyjmuje wartości rzeczywiste, skąd otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\mathbf{1}_{B_2}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \underbrace{\mathbf{1}_{B_2}YE(X^+|\mathcal{G})}_{=-\infty} + \underbrace{\mathbf{1}_{B_2}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{\in\mathbb{R}} =\\ &-\infty\cdot\mathbf{1}_{B_2} = \mathbf{1}_{B_2}\underbrace{Y}_{\in\mathbb{R}_-}\big[\underbrace{\mathbf{1}_{B_2}E(X^+|\mathcal{G})}_{=\infty} - \underbrace{\mathbf{1}_{B_2}E(X^-|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}}\big] = \mathbf{1}_{B_2}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).\end{aligned} \tag{B.15}$$

Z (B.14) i (B.15) wynika, że zachodzi równość

$$\mathbf{1}_B\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \mathbf{1}_B Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).$$

Przechodzimy do dowodu równości (B.11) na zbiorze C.
Zauważmy najpierw, że zbiór C możemy przedstawić w postaci

$$\begin{aligned}C &= \{YE(X^+|\mathcal{G}) \in \mathbb{R}\}\\ &= \{Y = 0\} \cup \{E(X^+|\mathcal{G}) = 0\} \cup \big(\{Y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\} \cap \{0 < E(X^+|\mathcal{G}) < \infty\}\big)\\ &=: C_1 \cup C_2 \cup C_3.\end{aligned}$$

Zauważmy, że

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{C_2}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] &= \underbrace{\mathbf{1}_{C_2}YE(X^+|\mathcal{G})}_{=0} + \mathbf{1}_{C_2}[-YE(X^-|\mathcal{G})] \\
&= \mathbf{1}_{C_2}Y[0\cdot\mathbf{1}_{C_2} - \mathbf{1}_{C_2}E(X^-|\mathcal{G})] \\
&= \mathbf{1}_{C_2}Y[\mathbf{1}_{C_2}E(X^+|\mathcal{G}) - \mathbf{1}_{C_2}E(X^-|\mathcal{G})] \\
&= \mathbf{1}_{C_2}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).
\end{aligned}
$$

Zdefiniujmy zbiory

$$
\begin{aligned}
C_3^1 &:= C_3 \cap \{E(X^-|\mathcal{G}) < \infty\}, \\
C_3^2 &:= C_3 \cap \{Y > 0\} \cap \{E(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}, \\
C_3^3 &:= C_3 \cap \{Y < 0\} \cap \{E(X^-|\mathcal{G}) = \infty\}.
\end{aligned}
$$

Wówczas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{C_3^1}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] &= \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^1}YE(X^+|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^1}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{\in\mathbb{R}} \\
&= \mathbf{1}_{C_3^1}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).
\end{aligned} \tag{B.16}
$$

Ponadto

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{C_3^2}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^2}YE(X^+|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^2}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{=-\infty} = \\
&-\infty\cdot\mathbf{1}_{C_3^2} = \mathbf{1}_{C_3^2}\underbrace{Y}_{\in\mathbb{R}_+}[\underbrace{\mathbf{1}_{C_3^2}E(X^+|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^2}E(X^-|\mathcal{G})}_{=\infty}] = \mathbf{1}_{C_3^2}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).
\end{aligned} \tag{B.17}
$$

Podobnie

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{1}_{C_3^3}\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^3}YE(X^+|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}} + \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^3}[-YE(X^-|\mathcal{G})]}_{=\infty} = \\
&\infty\cdot\mathbf{1}_{C_3^3} = \mathbf{1}_{C_3^3}\underbrace{Y}_{\in\mathbb{R}_-}[\underbrace{\mathbf{1}_{C_3^3}E(X^+|\mathcal{G})}_{\in\mathbb{R}} - \underbrace{\mathbf{1}_{C_3^3}E(X^-|\mathcal{G})}_{=\infty}] = \mathbf{1}_{C_3^3}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).
\end{aligned} \tag{B.18}
$$

Ostatecznie z (B.16), (B.17) i (B.18) wynika, że równość (B.11) jest spełniona na zbiorze C_3.
Zauważmy teraz, że $\mathbf{1}_{C_1}YE(X^+|\mathcal{G}) = 0$ oraz $\mathbf{1}_{C_1}YE(X^-|\mathcal{G}) = 0$. Z (B.2) wynika, że zmienna losowa $\mathbf{1}_{C_1}Y[E(X^+|\mathcal{G}) - E(X^-|\mathcal{G})]$ jest dobrze określona i jest równa 0. Ostatecznie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\mathbf{1}_{C_1}[YE(X^+|\mathcal{G}) + (-Y)E(X^-|\mathcal{G})] = 0\cdot\mathbf{1}_{C_1} &= \mathbf{1}_{C_1}Y[\mathbf{1}_{C_1}E(X^+|\mathcal{G}) - \mathbf{1}_{C_1}E(X^-|\mathcal{G})] \\
&= \mathbf{1}_{C_1}Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).
\end{aligned}
$$

Dowiedliśmy, że równość (B.11) jest spełniona na zbiorach C_1, C_2 oraz C_3, więc jest spełniona na C, tzn.

$$
\mathbf{1}_C\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] = \mathbf{1}_CY\mathcal{E}(X|\mathcal{G}).
$$

Krok 6. Dowodzimy równości (B.3).

$$
\begin{aligned}
E(XY|\mathcal{G}) &\overset{(a)}{=} YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})] \\
&\overset{(b)}{=} \mathbf{1}_A\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] \\
&+ \mathbf{1}_B\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] \\
&+ \mathbf{1}_C\big[YE(X^+|\mathcal{G}) + [-YE(X^-|\mathcal{G})]\big] \\
&\overset{(c)}{=} \mathbf{1}_A Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) + \mathbf{1}_B Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) + \mathbf{1}_C Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) \\
&= Y\mathcal{E}(X|\mathcal{G}),
\end{aligned}
$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy z kroku 3., w (b) z tego, że $\{A,B,C\}$ jest $\mathcal{F}$-rozbiciem, zaś w (c) z kroku 5. Ponieważ zmienna losowa $E(XY|\mathcal{G})$ jest dobrze określona, również zmienna losowa $\mathcal{E}(X|\mathcal{G})$ jest dobrze określona, a więc $\mathcal{E}(X|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G})$, skąd wynika teza. □

Stwierdzenie B.1.12 ([24], stw. 6, § 23.3). *Niech X będzie zmienną losową o wartościach w $\bar{\mathbb{R}}$ oraz niech $\mathcal{H}$ będzie dowolnym σ-ciałem takim, że $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{F}$. Jeżeli istnieje $E(X|\mathcal{G})$, to istnieje $E(X|\mathcal{H})$ i $\mathbb{P}$-p.n. zachodzi równość*

$$E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G}) = E(X|\mathcal{G}) = E(E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}). \tag{B.19}$$

Uwaga B.1.13. *Tożsamość (B.19) jest ogólnie znana dla zmiennych całkowalnych. Powyższe stwierdzenie podaje słabszy warunek wystarczający na to, by zachodziła równość (B.19). W ogólności może się zdarzyć, że zarówno $E(X|\mathcal{H})$, jak i $E(E(X|\mathcal{H})|\mathcal{G})$ istnieją, ale $E(X|\mathcal{G})$ nie istnieje i równość (B.19) nie zachodzi, co ilustruje przykład B.1.15, w którym skorzystamy z lematu B.1.11 oraz znanego faktu, który sformułujemy poniżej.*

Stwierdzenie B.1.14. *Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ będzie dowolnym σ-ciałem oraz niech X będzie całkowalną zmienną losową niezależną od $\mathcal{G}$. Wówczas $E(X|\mathcal{G}) = EX$.*

Przykład B.1.15. Niech $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P}) = ([0,1]\times\{-1,1\},\mathcal{B}([0,1])\otimes 2^{\{-1,1\}},\lambda\times\mu)$, gdzie λ jest miarą Lebesgue na $[0,1]$, a μ jest rozkładem jednostajnym na zbiorze $\{-1,1\}$. Definiujemy zmienne losowe

$$U_1(x,y) = x \text{ oraz } U_2(x,y) = y, \ (x,y) \in \Omega.$$

Jest jasne, że U_1 i U_2 są niezależne. Niech ponadto

$$Y = \left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right)U_2.$$

Ustalmy σ-ciała $\mathcal{G} = \{\Omega,\varnothing\}$ oraz $\mathcal{H} = \sigma(U_1)$.
Pokażemy, że istnieją zmienne losowe $E(Y|\mathcal{H})$, $E[E(Y|\mathcal{H})|\mathcal{G}]$, ale nie istnieje zmienna losowa $E(Y|\mathcal{G}) = E(Y)$.
Istotnie. Zauważmy, że

$$Y^+ = \left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right)\mathbf{1}_{\{U_2=1\}} \quad \text{oraz} \quad Y^- = \left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right)\mathbf{1}_{\{U_2=-1\}}.$$

Stąd

$$E(Y^+|\mathcal{H}) \overset{(a)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right) E(\mathbf{1}_{\{U_2=1\}}|\mathcal{H}) \overset{(b)}{=} \left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right)\mathbb{P}(\{U_2 = 1\}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right),$$

przy czym w (a) skorzystaliśmy ze lematu B.1.11, a w (b) ze stwierdzenia B.1.14. Podobnie $E(Y^-|\mathcal{H}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{U_1}} + \frac{1}{U_1}\right)$, skąd $E(Y|\mathcal{H}) = 0$. Wobec tego

$$E[E(Y|\mathcal{H})|\mathcal{G}] = 0.$$

Uzasadnimy, że $E(Y|\mathcal{G})$ nie istnieje. Zaczniemy od sprawdzenia, że $E(Y^+|\mathcal{G}) = \infty$. Zauważmy, że $E(Y^+|\mathcal{G}) = EY^+ = E[E(Y^+|U_2)]$. Ponadto

$$E(Y^+|U_2) = \mathbf{1}_{\{U_2=1\}}\frac{1}{\mathbb{P}(U_2 = 1)}\int_{\{U_2=1\}} Y^+ d\mathbb{P} + \mathbf{1}_{\{U_2=-1\}}\frac{1}{\mathbb{P}(U_2 = -1)}\underbrace{\int_{\{U_2=-1\}} Y^+ d\mathbb{P}}_{=0}.$$

Z twierdzenia Tonelli

$$\int_{\{U_2=1\}} Y^+ d\mathbb{P} = \underbrace{\int_{(0,1)}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x}\right)\lambda(dx)}_{=\infty} \cdot \underbrace{\int_{\{1\}} \mu(dy)}_{=\frac{1}{2}} = \infty.$$

Ostatecznie $E(Y^+|U_2) = \infty \cdot \mathbf{1}_{\{U_2=1\}}$, skąd $EY^+ = E[E(Y^+|U_2)] = \infty$. Podobnie pokazuje się, że $E(Y^-|\mathcal{G}) = EY^- = E[E(Y^-|U_2)] = \infty$, skąd wynika, że $E(Y|\mathcal{G}) = EY$ nie istnieje. □

Dowiedziemy teraz, że abstrakcyjny wzór Bayesa zachodzi przy założeniach słabszych niż w klasycznej wersji.

LEMAT B.1.16. *Niech $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e$ oraz niech Y będzie dowolną zmienną losową. Następujące warunki są równoważne:*

(i). Istnieje $E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G})$.

(ii). Zmienna losowa

$$\frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Y|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}$$

jest dobrze określona.

(iii). Istnieje

$$E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}Y\,\middle|\,\mathcal{G}\right).$$

Jeżeli spełniony jest którykolwiek z powyższych warunków, wówczas $\mathbb{P}$-p.n. zachodzi równość

$$E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G}) = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Y|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} = E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}Y\,\middle|\,\mathcal{G}\right).$$

Dowód
Zaczniemy od pokazania implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.
Sprawdzimy, że

$$E_{\mathbb{Q}}(Y^+|\mathcal{G}) = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Y^+|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P}-\text{p.n.} \tag{B.20}$$

Istotnie,

$$E_{\mathbb{Q}}(Y^+|\mathcal{G}) \overset{(a)}{=} \lim_{n\to\infty} E_{\mathbb{Q}}(Y^+ \wedge n|\mathcal{G}) \overset{(b)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}(Y^+ \wedge n)|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \overset{(c)}{=} \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Y^+|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})},$$

przy czym (a) i (c) wynika z warunkowej wersji twierdzenia o zbieżności monotonicznej, a (b) wynika z abstrakcyjnego wzoru Bayesa zastosowanego do $\mathbb{Q}$-całkowalnych zmiennych losowych $Y^+ \wedge n$. W ten sposób dowiedliśmy (B.20). Powtarzając powyższe rozumowanie dla Y^- dostajemy

$$E_{\mathbb{Q}}(Y^-|\mathcal{G}) = \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Y^-|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})} \qquad \mathbb{P}-\text{p.n.} \tag{B.21}$$

Z istnienia $E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G})$ wynika, że dla $\mathbb{P}$-prawie wszystkich $\omega \in \Omega$ co najwyżej jedna z wartości $E_{\mathbb{Q}}(Y^+|\mathcal{G})(\omega)$ oraz $E_{\mathbb{Q}}(Y^-|\mathcal{G})(\omega)$ jest równa ∞. Stąd, oraz z (B.20) i (B.21) wynika dowodzona implikacja.
Przechodzimy do dowodu implikacji $(i) \Rightarrow (iii)$.
Aby uzasadnić, że z istnienia $E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G})$ wynika, że dobrze określona jest zmienna losowa

$$E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}Y\middle|\mathcal{G}\right)$$

wystarczy zauważyć, że

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}(Y^+|\mathcal{G}) &= \lim_{n\to\infty} E_{\mathbb{Q}}(Y^+ \wedge n|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}(Y^+ \wedge n)\middle|\mathcal{G}\right) \\ &= E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}Y^+\middle|\mathcal{G}\right) \end{aligned}$$

oraz

$$E_{\mathbb{Q}}(Y^-|\mathcal{G}) = \lim_{n\to\infty} E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}(Y^- \wedge n)\middle|\mathcal{G}\right) = E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}Y^-\middle|\mathcal{G}\right).$$

Dalsza część dowodu tej implikacji przebiega analogicznie do dowodu implikacji $(i) \Rightarrow (ii)$.
Pozostałe implikacje dowodzi się podobnie, więc ich uzasadnienie pomijamy. □

Uwaga B.1.17. *Zauważmy, że powyższy lemat stanowi uogólnienie klasycznej wersji abstrakcyjnego wzoru Bayesa (stwierdzenie B.1.10) w której zakłada się, że zmienna losowa X jest całkowalna względem $\mathbb{Q}$. W powyższym lemacie twierdzimy, że aby* *zachodził wzór Bayesa, wystarczy założyć, że dobrze określona jest co najmniej jedna ze zmiennych losowych*

$$E_{\mathbb{Q}}(Y|\mathcal{G}),\ \frac{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}Y|\mathcal{G})}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}\ \text{lub}\ E\left(\frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|\mathcal{G})}Y\middle|\mathcal{G}\right).$$

Jest to istotnie słabsze założenie, co wynika z przykładu B.1.15, w którym pokazaliśmy, że może istnieć warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej, dla której nie istnieje wartość oczekiwana (nawet równa ∞ lub $-\infty$).

B.2 Inne wyniki

Przez $\operatorname{conv}(\{X_1, X_2, \ldots\})$ oznaczać będziemy zbiór skończonych kombinacji wypukłych zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots$. Sformułujemy teraz bardzo ważny lemat, z którego wielokrotnie korzystamy w rozprawie.

LEMAT B.2.1 ([16], lemat *A*1.1). *Niech $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem zmiennych losowych o wartościach w $[0,\infty)$. Wówczas istnieją zmienne losowe*

$$g_n \in \operatorname{conv}(\{f_n, f_{n+1}, \ldots\}),\ \ n \in \mathbb{N}$$

takie, że

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g\ \mathbb{P}-\text{p.n.},$$

gdzie g jest pewną zmienną losową o wartościach w $[0,\infty]$.

TWIERDZENIE B.2.2 (nierówność całkowa Minkowskiego, [39]). *Niech $(S_i, \mathcal{H}_i, \mu_i)$, $i = 1,2$ będą przestrzeniami z miarami σ-skończonymi, niech $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mierzalną względem $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ oraz niech $1 \le r \le \infty$. Wówczas, jeżeli*

$$\int_{S_2} \|f(x,y)\|_{L^r(\mu_1)}\mu_2(dy) < \infty,$$

to

$$\left\|\int_{S_2} f(x,y)\mu_2(dy)\right\|_{L^r(\mu_1)} \le \int_{S_2} \|f(x,y)\|_{L^r(\mu_1)}\mu_2(dy) < \infty.$$

LEMAT B.2.3. *Niech dany będą ciągi $(t_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ oraz $(s_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$. Załóżmy, że*

$$A = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} t_{n,m})\ \text{oraz}\ B = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} s_{n,m}).$$

Wówczas istnieje granica iterowana ciągu $(t_{n,m} + s_{n,m})_{n,m=1}^{\infty}$ i jest równa $A + B$.

DOWÓD
Niech $A_n := \lim_{m\to\infty} t_{n,m}$ oraz $B_n := \lim_{m\to\infty} s_{n,m}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją granice $\lim_{m\to\infty} t_{n,m}$ i $\lim_{m\to\infty} s_{n,m}$, to istnieje granica $\lim_{m\to\infty}(t_{n,m} + s_{n,m})$, którą oznaczać będziemy przez C_n. Wówczas $A_n + B_n = C_n$. Ponieważ istnieją granice $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ i $B = \lim_{n\to\infty} B_n$, to istnieje $\lim_{n\to\infty}(A_n + B_n)$ i zachodzi równość

$$A + B = \lim_{n\to\infty}(A_n + B_n) = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(t_{n,m} + s_{n,m}). \square$$

Twierdzenie B.2.4 (Tonelli, [17], tw. III.11.14). *Niech* $(\mathcal{V}, \Sigma_{\mathcal{V}}, \nu)$, $(\mathcal{W}, \Sigma_{\mathcal{W}}, \lambda)$ *będą przestrzeniami z miarami* σ*-skończonymi oraz niech*

$$(\mathcal{E}, \Sigma_{\mathcal{E}}, \mu) := (\mathcal{V}, \Sigma_{\mathcal{V}}, \nu) \times (\mathcal{W}, \Sigma_{\mathcal{W}}, \lambda).$$

Ponadto niech $f : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ *będzie nieujemną,* $\Sigma_{\mathcal{E}}$ *mierzalną funkcją, dla której*

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\int_{\mathcal{W}} f(v, w) \lambda(dw) \right] \nu(du) < \infty.$$

Wówczas funkcja f *jest* μ*-całkowalna i zachodzi równość*

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\int_{\mathcal{W}} f(v, w) \lambda(dw) \right] \nu(du) = \int_{\mathcal{W}} \left[\int_{\mathcal{V}} f(v, w) \nu(du) \right] \lambda(dw) < \infty.$$

Lemat B.2.5. *Niech* $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ *będzie dowolnym* σ*-ciałem. Miary* $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2 \in \mathcal{P}$ *są równe na* $\mathcal{E}$ *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$E\left(\frac{d\mathbb{Q}_1}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{E} \right) = E\left(\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{E} \right).$$

Stwierdzenie B.2.6 (rozkład Dooba, [22], stw. 6.1). *Niech* $\mathbb{Q}$ *będzie miarą probabilistyczną na* $(\Omega, \mathcal{F})$ *oraz niech* $(\mathcal{F}_t)_{t=1}^T$ *będzie filtracją taką, że* $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$*. Niech ponadto* Y *będzie procesem adaptowanym takim, że* $Y_t \in L^1(\mathbb{Q})$ *dla każdego* t*. Wówczas istnieje jednoznaczny rozkład* $Y = M - A$*, gdzie* M *jest* $\mathbb{Q}$*-martyngałem, a* A*-procesem prognozowalnym. Rozkład ten jest nazywany rozkładem Dooba procesu* Y *względem miary* $\mathbb{Q}$*.*

Uwaga B.2.7. *Z dowodu powyższego stwierdzenia wynika, że rozkład Dooba adaptowanego procesu* Y *zdefiniowany jest w sposób następujący:* $A_0 = 0$*,* $A_t = A_{t-1} - E_{\mathbb{Q}}(Y_t - Y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1})$ *dla* $t \in \mathcal{T}_0$ *oraz* $M_t := Y_t + A_t$ *dla* $t \in \mathcal{T}$*.*

Dodatek C

Dowody twierdzeń dotyczących $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego

Przypomnijmy, że ustalona jest bezatomowa przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, liczba $p \in [1, \infty)$, operator $B \in \mathcal{L}(L^\infty, L^p)$, funkcje $G : L^p \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i $\beta : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ oraz niepusty zbiór $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$. Niech ponadto q będzie wykładnikiem sprzężonym do p, tzn. $L^q := (L^p)^*$. Funkcjonały liniowe ciągłe na L^p będziemy utożsamiać z elementami L^q.
W tym Dodatku obowiązują założenia 3.3.4, 3.3.8 oraz 3.3.9. Ponadto cyfry rzymskie będą używane wyłącznie na potrzeby odwoływania się do poszczególnych założeń 3.3.9. Dzięki takiej konwencji nie powstanie niejednoznaczność, jeżeli będziemy np. pisać: „korzystamy z warunku/założenia I", zamiast „korzystamy z warunku I z założeń 3.3.9".

C.1 Wyniki pomocnicze

Lemat C.1.1. *Jeżeli spełnione jest założenie IV, to zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest zwarty w topologii $\sigma(L^\infty, L^1)$.*

Dowód
Zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest niepusty na mocy założenia 3.3.8.
Z twierdzenia Banacha-Alaoglu (Dodatek, tw. A.1.9) wynika, że zbiór $\mathcal{R}$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-zwarty, gdyż jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-domknięty i ograniczony w normie $\|\cdot\|_\infty$.
Wystarczy pokazać, że zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest domknięty w topologii $\sigma(L^\infty, L^1)$, bo ograniczoność wynika z faktu, że zbiór zrandomizowanych testów jest podzbiorem kuli jednostkowej w L^∞. Z założenia IV wynika, że funkcja $\phi \to E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1}-\phi)] - \beta(\mathbb{Q})$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągła dla dowolnego $\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}$. Zatem funkcja $\phi \to \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}}\{E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1}-\phi)] - \beta(\mathbb{Q})\}$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-półciągła z dołu, co implikuje, że zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-domknięty, jako przeciwobraz domkniętej półprostej $(-\infty, 0]$. □

Lemat C.1.2. *Niech spełnione będą założenia II oraz IV. Wówczas funkcja $\phi \to G(B\phi)$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-półciągła z dołu.*

Dowód
Funkcja G jest wypukła i półciągła z dołu na L^p, zatem z twierdzenia A.2.4 wnioskujemy, że $G(Y) = \sup_{Y^*\in L^q}\big(E(YY^*)-G^*(Y^*)\big)$ dla $Y \in L^p$. Z warunku IV wynika, że dla dowolnego $Y^* \in L^q$ funkcja $\phi \to E[(B\phi)Y^*] - G^*(Y^*)$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągła. Zatem funkcja $\phi \to G(B\phi)$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-półciągła z dołu jako supremum funkcji $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągłych. □

Stwierdzenie C.1.3. *Zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest wypukły.*

Dowód
Niech $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ oraz niech $\lambda \in [0,1]$. Wówczas dla dowolnego $\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}$ mamy

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{Q}}\big[B\big(\mathbf{1} - (\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2)\big)\big] &= \lambda E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1}-\phi_1)] + (1-\lambda)E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1}-\phi_2)] \\ &\leq \lambda\beta(\mathbb{Q}) + (1-\lambda)\beta(\mathbb{Q}) = \beta(\mathbb{Q}). \ \square \end{aligned}$$

C.2 Dowody rezultatów z rozdziału 3.3

Dowód (twierdzenia 3.3.12)
Aby uprościć notację w dowodzie, zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ oznaczać będziemy przez $\tilde{\mathcal{R}}$.
Zaczniemy od dowodu punktu b) Ponieważ zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest dopuszczalny dla (B, G, β), to istnieje $\hat{\phi} \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$, dla którego $G(B\hat{\phi}) < \infty$. Zatem istnienie minimum wynika natychmiast z lematów C.1.1 i C.1.2 oraz faktu, że na zbiorze zwartym funkcja półciągła z dołu osiąga swoje minimum dla pewnej zmiennej losowej $\bar{\phi} \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$.
Minimum jest skończone, ponieważ $-\infty < G(B\bar{\phi}) \leq G(B\hat{\phi}) < \infty$.
Przechodzimy do dowodu punktów a) i c).
Krok 1. Przedstawimy $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problem pierwotny jako pierwotny problem Fenchela i sprawdzimy, że spełnione są założenia twierdzenia A.2.7. Zapiszmy $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problem pierwotny w postaci

$$\inf_{\phi\in L^\infty}\{G(B\phi) + \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{R}}}(\phi)\}, \tag{C.1}$$

gdzie $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ jest funkcją zadaną wzorem (3.9) dla $C = \tilde{\mathcal{R}}$. Zauważmy, że zagadnienie (C.1) jest pierwotnym problemem Fenchela (A.1) dla przestrzeni $\mathcal{V} = (L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, $\mathcal{W} = (L^p, \|\cdot\|_p)$, funkcji $f = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{R}}}$, $g = G$ oraz operatora $L = B$. Sprawdzimy, że dla powyższego zagadnienia spełnione są założenia twierdzenia A.2.7.
Ze stwierdzenia C.1.3 wiemy, że zbiór $\tilde{\mathcal{R}}$ jest wypukły, co implikuje, że funkcja f jest wypukła. Funkcja g jest wypukła na mocy założenia II. Ponadto przypomnijmy, że wartość problemu (C.1), którą będziemy oznaczać przez P jest skończona, na mocy punktu b).
Z założenia V wynika, że $f(u_0) < \infty$, $g(Lu_0) < \infty$ oraz funkcja g jest ciągła w Lu_0 dla pewnego $u_0 \in \tilde{\mathcal{R}}$.
Pokazaliśmy, że spełnione są założenia twierdzenia A.2.7. Wobec tego $P = D$, gdzie

$$D = \sup_{Y^*\in L^q}[-f^*(L^*Y^*) - g^*(-Y^*)].$$

Krok 2. Obliczymy $f^*(L^*Y^*)$ oraz $g^*(-Y^*)$ dla dowolnego $Y^* \in L^q$.

$$f^*(L^*Y^*) = f^*(B^*Y^*) = \sup_{\phi \in L^\infty}\Big(E[\phi(B^*Y^*)] - \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{R}}}(\phi)\Big) = \sup_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} E[(B\phi)Y^*],$$

przy czym ostatnia równość wynika z tego, że funkcja $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{R}}}$ przyjmuje wartość ∞ poza zbiorem $\tilde{\mathcal{R}}$. Stąd ostatecznie

$$D = \sup_{Y^* \in L^q}\Big(-\sup_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} E[(B\phi)Y^*] - G^*(-Y^*)\Big), \tag{C.2}$$

bo $g = G$. Przypomnijmy, że dla dowolnej funkcji F przez $\mathrm{dom}(F)$ oznaczamy dziedzinę efektywną funkcji F. Z wniosku A.2.5 wynika, że $\mathrm{dom}(G^*) \subseteq L^q_+$, co pozwala zapisać (C.2) w postaci

$$\begin{aligned} D &= \sup_{Y^* \in L^q_-}\Big(-\sup_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} E[(B\phi)Y^*] - G^*(-Y^*)\Big) = \sup_{Y^* \in L^q_-}\Big(\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} E[(B\phi)(-Y^*)] - G^*(-Y^*)\Big) \\ &= \sup_{Y^* \in L^q_+}\Big(\inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} E[(B\phi)Y^*] - G^*(Y^*)\Big), \end{aligned} \tag{C.3}$$

co dowodzi, że zachodzi mocna dualność dla $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego i $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego, ponieważ $\tilde{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$.
Krok 3. Z twierdzenia Fenchela o dualności wiemy, że istnieje $\bar{Y}^* \in L^q$ będące rozwiązaniem zagadnienia występującego po prawej stronie równości (C.2). Dowiedziemy, że $(\bar{\phi}, \bar{Y}^*)$ jest punktem siodłowym funkcji danej wzorem (3.12).
Zaczniemy od przekształcenia problemów pierwotnego i dualnego.

$$P = G(B\bar{\phi}) \overset{\text{tw.A.2.4}}{=} \sup_{Y^* \in L^q}\Big(E[(B\bar{\phi})Y^*] - G^*(Y^*)\Big) \geq E[(B\bar{\phi})\bar{Y}^*] - G^*(\bar{Y}^*). \tag{C.4}$$

Teraz zajmiemy się problemem dualnym.

$$D = \inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}}\Big(E[(B\phi)\bar{Y}^*] - G^*(\bar{Y}^*)\Big) \leq E[(B\bar{\phi})\bar{Y}^*] - G^*(\bar{Y}^*). \tag{C.5}$$

Stąd otrzymujemy łatwo, że $(\bar{\phi}, \bar{Y}^*)$ jest punktem siodłowym funkcji danej w (3.12). Istotnie, korzystając kolejno z (C.4), tego, że $P = D$ oraz (C.5), otrzymujemy $E[(B\bar{\phi})\bar{Y}^*] - G^*(\bar{Y}^*) \leq P = D = \inf_{\phi \in \tilde{\mathcal{R}}} E[(B\phi)\bar{Y}^*] - G^*(\bar{Y}^*)$, co dowodzi, że funkcja $\phi \to E[(B\phi)\bar{Y}^*] - G^*(\bar{Y}^*)$ osiąga swoje minimum w punkcie $\bar{\phi}$. Podobnie, opierając się na (C.4), równości $P = D$ i (C.5), wnioskujemy, że funkcja $Y^* \to E[(B\bar{\phi})Y^*] - G^*(Y^*)$ osiąga swoje maksimum w punkcie $\bar{Y}^*$. □

Dowód (lematu 3.3.16)
Krok 1. Uzasadnimy, że istnieje rozwiązanie $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego i wartość tego problemu jest skończona, tzn. $p(Y^*) \in \mathbb{R}$.
Istnienie rozwiązania wynika natychmiast z faktu, że funkcja $\phi \to E(Y^*B\phi) - G^*(Y^*)$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-ciągła (założenie *IV*), a zbiór $\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ jest $\sigma(L^\infty, L^1)$-zwarty na mocy lematu C.1.1 i niepusty, ponieważ zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest dopuszczalny dla (B, G, β). Wartość $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego jest skończona, co również wynika z faktu, że zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest dopuszczalny dla (B, G, β) (założenie 3.3.8). Dowiedliśmy punktu *b*)

tezy.
Znajdziemy warunki konieczne i wystarczające na to, by zmienna losowa $\bar{\phi}^{Y^*}$ była rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego. Przy okazji dowiedziemy, że istnieje rozwiązanie $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego.
Krok 2. Zauważmy, że zmienna losowa $\bar{\phi}^{Y^*}$ jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}}, B, \beta}} E[(B\phi)Y^*]. \tag{C.6}$$

Podobnie zauważmy, że miara $\bar{\lambda}^{Y^*}$ jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego wtedy i tylko wtedy, gdy jest rozwiązaniem zagadnienia

$$\sup_{\lambda \in \Lambda_+(\tilde{\mathcal{P}})} \left\{ -E\left[B^*(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q}))\right]^- + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} (E_{\mathbb{Q}} B\mathbf{1} - \beta(\mathbb{Q}))\lambda(d\mathbb{Q}) \right\}. \tag{C.7}$$

Aby uprościć notację, znajdziemy postać rozwiązania problemu (C.6). Wartość problemu (C.6) (odp. (C.7)) oznaczmy przez $\widehat{p}(Y^*)$ (odp. $\widehat{d}(Y^*)$). Zauważmy, że zachodzi $p(Y^*) = d(Y^*)$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\widehat{p}(Y^*) = \widehat{d}(Y^*). \tag{C.8}$$

Zatem, aby dostać punkt c) tezy lematu, wystarczy dowieść (C.8).
Krok 3. Przedstawimy zagadnienie (C.6) jako pierwotny problem Fenchela.
Niech $\mathcal{L}$ - przestrzeń liniowa ograniczonych, mierzalnych funkcji rzeczywistych na $(\tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}}))$. W szczególności przez $\mathbf{0}_{\mathcal{L}}$ (odp. $\mathbf{1}_{\mathcal{L}}$) oznaczać będziemy funkcję stałą, równą 0 (odp. 1). Ponadto przez $\leq_{\mathcal{L}}$ oznaczać będziemy relację częściowego porządku zdefiniowaną dla par elementów zbioru $\mathcal{L}$ w sposób następujący:

$$l_1 \leq_{\mathcal{L}} l_2 \Leftrightarrow l_2 - l_1 \in \mathcal{L}_+ = \{l \in \mathcal{L} : l(\mathbb{Q}) \geq 0 \ \forall \mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}\}.$$

Niech Λ (odp. Λ_+) oznacza przestrzeń miar ze znakiem (odp. miar) na $(\tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}}))$, które mają skończone wahanie. $\mathcal{L}$ i Λ są algebraicznie dualne z formą dwuliniową określoną wzorem $\langle l, \lambda \rangle := \int_{\tilde{\mathcal{P}}} l(\mathbb{Q})\lambda(d\mathbb{Q})$ dla $l \in \mathcal{L}$ oraz $\lambda \in \Lambda$.
Na $\mathcal{L}$ wprowadzamy topologię Mackeya $\tau(\mathcal{L}, \Lambda)$ (Dodatek, definicja A.1.4). W ten sposób zapewniamy, że Λ jest przestrzenią sprzężoną do $(\mathcal{L}, \tau(\mathcal{L}, \Lambda))$. Ponadto z twierdzenia A.1.7 wynika, że $\mathcal{L}$ jest przestrzenią beczkową.
Określamy operator liniowy $S : (L^\infty, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{L}, \tau(\mathcal{L}, \Lambda))$ wzorem

$$S\phi(\mathbb{Q}) := -E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \phi)]. \tag{C.9}$$

Udowodnimy, że S jest ciągły.
Zdefiniujmy normę $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ wzorem $\|l\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} |l(\mathbb{Q})|$ dla $l \in \mathcal{L}$. Ponieważ topologia $\tau(\mathcal{L}, \Lambda)$ jest słabsza niż topologia wyznaczona przez normę $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, wystarczy

udowodnić, że S jest ciągły, jako operator z $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ do $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$.

$$\begin{aligned}
\|S\phi_1 - S\phi_2\|_{\mathcal{L}} &= \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} |S\phi_1(\mathbb{Q}) - S\phi_2(\mathbb{Q})| \\
&= \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} |E_{\mathbb{Q}}[B(\phi_1 - \phi_2)]| \le \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} |E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1})| \\
&\le \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} |E[\mathbf{1}(B^* Z_{\mathbb{Q}})]| \le \|\phi_1 - \phi_2\|_\infty E\mathbf{1}\|B^*\| \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_{L^q} \\
&= C\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty,
\end{aligned}$$

gdzie $C := \|B^*\| \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q < \infty$, gdyż założyliśmy, że zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest ograniczony w normie L^q. Wynika stąd, że S jest ciągły jako operator z $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ do $(\mathcal{L}, \|\,\|_{\mathcal{L}})$, a więc również, jako operator z $(L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ do $(\mathcal{L}, \tau(\mathcal{L}, \Lambda))$.
Niech $\mathcal{L}_+ - \beta := \{l - \beta : l \in \mathcal{L}_+\}$. Problem (C.6) możemy zapisać w postaci

$$\inf_{\phi\in L^\infty} \{E[(B\phi)Y^*] + \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\phi) + \mathcal{I}_{\mathcal{L}_+-\beta}(S\phi)\}. \tag{C.10}$$

Istotnie, $\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \mathcal{R}$ i $\mathbf{0}_{\mathcal{L}} \le_{\mathcal{L}} S\phi + \beta$, wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \in \mathcal{R}$ i istnieje $\hat{l} \in \mathcal{L}_+$ takie, że $\mathbf{0}_{\mathcal{L}} \le_{\mathcal{L}} S\phi + \beta = \hat{l}$, co jest równoważne koniunkcji warunków: $\phi \in \mathcal{R}$ i $S\phi = \hat{l} - \beta \in \mathcal{L}_+ - \beta$.
Zauważmy, że zagadnienie (C.10) jest pierwotnym problemem Fenchela (A.1) dla przestrzeni $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$, operatora $L = S$ oraz funkcji $f : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $g : \mathcal{W} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ określonych w sposób następujący:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{V} := (L^\infty, \|\cdot\|_\infty),\ \mathcal{W} := (\mathcal{L}, \tau(\mathcal{L}, \Lambda)),\ L = S \\
&f(\phi) := E(Y^* B\phi) + \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\phi),\ g(l) := \mathcal{I}_{\mathcal{L}_+-\beta}(l).
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Zmierzamy do tego, by do zagadnienia (C.10) zastosować wersję twierdzenia Fenchela o dualności dla przestrzeni beczkowej (Dodatek, twierdzenie A.2.9).
Krok 4. Sprawdzimy, że spełnione są założenia twierdzenia A.2.9.
Uzasadnimy najpierw, że funkcje f i g określone w (C.11) są wypukłe i półciągłe z dołu.
Funkcja f jest wypukła jako suma funkcji liniowej oraz funkcji wypukłej $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$. Również funkcja g jest wypukła, gdyż zbiór $\mathcal{L}_+ - \beta$ jest wypukły.
Ponieważ zachodzi warunek IV, funkcja f jest półciągła z dołu w topologii wyznaczonej przez normę $\|\cdot\|_\infty$, gdyż jest półciągła z dołu w słabszej topologii $\sigma(L^\infty, L^1)$.
Uzasadnimy, że funkcja g jest półciągła z dołu. $\mathcal{L}$ jest przestrzenią beczkową, więc topologia $\tau(\mathcal{L}, \Lambda)$, pokrywa się z słabą topologią $\sigma(\mathcal{L}, \Lambda)$ na mocy wniosku A.1.8. W związku z tym wystarczy dowieść, że g jest półciągła z dołu w słabej topologii. W tym celu pokażemy, że zbiór $\mathcal{L}_+ - \beta$ jest domknięty w słabej topologii. Załóżmy, że ciąg uogólniony $(l_u) \subseteq \mathcal{L}_+ - \beta$ jest słabo zbieżny do pewnego $l \in \Lambda$. Sprawdzimy, że $l \in \mathcal{L}_+ - \beta$. Załóżmy, że tak nie jest, tzn. $l(\hat{\mathbb{Q}}) + \beta(\hat{\mathbb{Q}}) < 0$ dla pewnego $\hat{\mathbb{Q}} \in \tilde{\mathcal{P}}$. Niech $\hat{\lambda} \in \Lambda_+$ będzie deltą Diraca w punkcie $\hat{\mathbb{Q}}$. Wówczas z definicji słabej zbieżności otrzymujemy

$$0 > l(\hat{\mathbb{Q}}) + \beta(\hat{\mathbb{Q}}) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} (l(\mathbb{Q}) + \beta(\mathbb{Q}))\hat{\lambda}(d\mathbb{Q}) = \lim_u \int_{\tilde{\mathcal{P}}} (l_u(\mathbb{Q}) + \beta(\mathbb{Q}))\hat{\lambda}(d\mathbb{Q}) \ge 0.$$

Otrzymaliśmy sprzeczność, co kończy dowód domkniętych zbioru $\mathcal{L}_+ - \beta$.
Teraz sprawdzimy, że dla funkcji f i g oraz operatora S spełniony jest warunek regularności $0 \in \operatorname{core}\big(\operatorname{dom}(g) - S\operatorname{dom}(f)\big)$, gdzie core oznacza algebraiczne wnętrze zbioru (Dodatek, definicja A.2.8). Zauważmy, że $\operatorname{dom}(g) = \mathcal{L}_+ - \beta$ oraz $\operatorname{dom}(f) = \mathcal{R}$. Zatem warunek do sprawdzenia przyjmuje postać $0 \in \operatorname{core}(\mathcal{L}_+ - \beta - S\mathcal{R})$, co możemy równoważnie zapisać w sposób następujący:
$\forall l \in \mathcal{L}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall t \in [0, \varepsilon] \quad tl \in \mathcal{L}_+ - \beta - S\mathcal{R}$. Ustalmy dowolne $l \in \mathcal{L}$. Wystarczy wskazać liczbę $\varepsilon > 0$ taką, że dla każdego $t \in [0, \varepsilon]$ istnieje zmienna losowa $\phi_t \in \mathcal{R}$ taka, że

$$tl(\mathbb{Q}) + \beta(\mathbb{Q}) - E_{\mathbb{Q}} B(1 - \phi_t) \geq 0. \tag{C.12}$$

Skorzystamy z założenia I. Niech $m := \inf_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} \beta(\mathbb{Q}) > 0$ oraz niech $\varepsilon := \frac{m}{\|l\|_{\mathcal{L}}} > 0$. Dla $t \in [0, \varepsilon]$ weźmy $\phi_t \equiv \mathbf{1} \in \mathcal{R}$. Wówczas w (C.12), otrzymujemy $tl(\mathbb{Q}) + \beta(\mathbb{Q}) - E_{\mathbb{Q}} B(1 - \phi_t) \geq -\frac{|l(\mathbb{Q})|}{\|l\|_{\mathcal{L}}} m + m \geq 0$ dla dowolnego $\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}$. W ten sposób zakończyliśmy sprawdzanie założeń twierdzenia A.2.9.
Krok 5. Przypomnijmy, że dualnym problemem Fenchela dla zagadnienia (C.10) jest zagadnienie

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{W}^*} [-f^*(L^*\lambda) - g^*(-\lambda)], \tag{C.13}$$

gdzie $\mathcal{W}, L, f, g$ są zdefiniowane w (C.11). Dowiedziemy, że problem (C.13) jest równoważny zagadnieniu (C.7). Zaczniemy od wyliczenia $g^*(\lambda)$ oraz $f^*(L^*\lambda)$.

$$\begin{aligned} g^*(\lambda) &= \sup_{l \in \mathcal{L}} \big(\langle l, \lambda \rangle - \mathcal{I}_{\mathcal{L}_+ - \beta}(l)\big) = \sup_{l \in \mathcal{L}_+ - \beta} \langle l, \lambda \rangle \\ &= \sup_{l \in \mathcal{L}_+} \langle l, \lambda \rangle - \langle \beta, \lambda \rangle = \mathcal{I}_{\mathcal{L}_+^*}(\lambda) - \langle \beta, \lambda \rangle, \end{aligned} \tag{C.14}$$

gdzie $\mathcal{L}_+^* := \{\lambda \in \Lambda : \langle l, \lambda \rangle \leq 0\ \forall l \in \mathcal{L}_+\}$.

$$f^*(L^*\lambda) = \sup_{\phi \in L^\infty} \big(E\phi S^*\lambda - EY^*B\phi - \mathcal{I}_{\mathcal{R}}(\phi)\big) = \sup_{\phi \in \mathcal{R}} \big(\langle S\phi, \lambda \rangle - EY^*B\phi\big). \tag{C.15}$$

Niech d będzie wartością problemu (C.13). Wówczas z (C.13), (C.14) i (C.15), dostajemy

$$\begin{aligned} d &= \sup_{\lambda \in \Lambda} \Big\{ -\sup_{\phi \in \mathcal{R}} \big[-\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \phi)]\lambda(d\mathbb{Q}) - E[(B\phi)Y^*]\big] - \mathcal{I}_{\mathcal{L}_+^*}(-\lambda) + \langle \beta, -\lambda \rangle \Big\} \\ &= \sup_{\lambda \in -\mathcal{L}_+^*} \Big\{ -\sup_{\phi \in \mathcal{R}} \big[-\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \phi)]\lambda(d\mathbb{Q}) - E[(B\phi)Y^*]\big] + \langle \beta, -\lambda \rangle \Big\}, \end{aligned}$$

gdzie $-\mathcal{L}_+^* = \{\lambda \in \Lambda : \langle l, \lambda \rangle \geq 0\ \forall l \in \mathcal{L}_+\}$.
Pokażemy, że $-\mathcal{L}_+^* = \Lambda_+$. Niech $\lambda \in -\mathcal{L}_+^*$ i załóżmy, że $\lambda \notin \Lambda_+$. Wówczas istnieje $M \in \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$ t. że $\lambda(M) < 0$. Wtedy dla $\bar{l} := \mathbf{1}_M \in \mathcal{L}_+$ otrzymujemy $\langle \bar{l}, \lambda \rangle = \lambda(M) < 0$, co przeczy $\lambda \in -\mathcal{L}_+^*$.
Na odwrót, jeżeli $\lambda \in \Lambda_+$, to $\langle l, \lambda \rangle \geq \langle 0, \lambda \rangle = 0$ dla dowolnego $l \in \mathcal{L}_+$, co dowodzi, że $\lambda \in -\mathcal{L}_+^*$.
Stąd

$$d = \sup_{\lambda \in \Lambda_+} \Big\{ \inf_{\phi \in \mathcal{R}} \big[\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1} - \phi)]\lambda(d\mathbb{Q}) + EY^*B\phi \big] - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \beta(\mathbb{Q})\lambda(d\mathbb{Q}) \Big\}. \tag{C.16}$$

Niech $I := \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}[B(\mathbf{1}-\phi)]\lambda(d\mathbb{Q})$. Uzasadnimy, że można zmienić kolejność całkowania, skąd otrzymamy

$$I = E\left[\int_{\tilde{\mathcal{P}}} B(\mathbf{1}-\phi) Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\right]. \tag{C.17}$$

Ustalmy $\lambda \in \Lambda_+$. Wówczas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $(\tilde{\mathcal{P}}, S(\tilde{\mathcal{P}}), \lambda)$ są przestrzeniami z miarami skończonymi. Ponadto dla każdego $\phi \in \mathcal{R}$ funkcja
$f_\phi : \Omega \times \tilde{\mathcal{P}} \to [0, \infty]$ określona wzorem

$$f_\phi(\omega, \mathbb{Q}) = B(\mathbf{1}-\phi)(\omega) Z_{\mathbb{Q}}(\omega)$$

jest $\mathcal{F} \otimes S(\tilde{\mathcal{P}})$-mierzalna, co wynika z faktu, że zmienna losowe $B(\mathbf{1}-\phi)$ oraz $Z_{\mathbb{Q}}$ są $\mathcal{F}$-mierzalne, a $S(\tilde{\mathcal{P}})$ jest σ-ciałem wszystkich podzbiorów $\tilde{\mathcal{P}}$. Ponadto dla dowolnych $\lambda \in \Lambda_+$ i $\phi \in \mathcal{R}$

$$\begin{aligned}
&\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E|B(\mathbf{1}-\phi) Z_{\mathbb{Q}}| \lambda(d\mathbb{Q}) \overset{(*)}{\leq} \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E(B\mathbf{1} Z_{\mathbb{Q}}) \lambda(d\mathbb{Q}) \leq \\
&\int_{\tilde{\mathcal{P}}} \sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1}) \lambda(d\mathbb{Q}) \overset{(**)}{\leq} \sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q \|B\mathbf{1}\|_p \lambda(\tilde{\mathcal{P}}) \overset{(***)}{<} \infty,
\end{aligned}$$

przy czym $(*)$ wynika z dodatniości operatora B (warunek III), w $(**)$ skorzystaliśmy z nierówności Hölidera, a w $(***)$ z założenia, że zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest ograniczony L^q oraz z tego, że λ jest miarą skończoną. Stosując twierdzenie Tonelli (Dodatek, twierdzenie B.2.4), dostajemy (C.17), skąd
$I = E\big[B(\mathbf{1}-\phi) \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\big]$. Stąd oraz z (C.16), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
d &= \sup_{\lambda \in \Lambda_+} \left\{ \inf_{\phi \in \mathcal{R}} \left[E\big[B(\mathbf{1}-\phi) \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\big] + E[(B\phi) Y^*] \right] - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \beta(\mathbb{Q}) \lambda(d\mathbb{Q}) \right\} \\
&\overset{(*)}{=} \sup_{\lambda \in \Lambda_+} \left\{ \inf_{\phi \in \mathcal{R}} \left[E\big[B\phi\big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\big)\big] \right] + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \big(E_{\mathbb{Q}} B\mathbf{1} - \beta(\mathbb{Q})\big) \lambda(d\mathbb{Q}) \right\},
\end{aligned} \tag{C.18}$$

przy czym w $(*)$ skorzystaliśmy z tw. Tonelli, co jest uprawnione, ponieważ

$$\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E[(B\mathbf{1}) Z_{\mathbb{Q}}] \lambda(d\mathbb{Q}) \leq \sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q \|B\mathbf{1}\|_p \lambda(\tilde{\mathcal{P}}) < \infty. \tag{C.19}$$

Pokażemy, że

$$E\left[(B\phi)\big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\big)\right] = E\left[\phi B^*\big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q})\big)\right] \tag{C.20}$$

dla dowolnego $\lambda \in \Lambda_+$. W tym celu uzasadnimy, że

$$\int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q}) \in L^q, \tag{C.21}$$

stosując nierówność całkową Minkowskiego (Dodatek, twierdzenie B.2.2).
Ustalmy dowolną miarę $\lambda \in \Lambda_+$ i rozważmy parę przestrzeni z miarami skończonymi: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i $(\tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}}), \lambda)$. Niech ponadto $h : \Omega \times \tilde{\mathcal{P}} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$h(\omega, \mathbb{Q}) = Z_{\mathbb{Q}}(\omega), \text{ dla } (\omega, \mathbb{Q}) \in \Omega \times \tilde{\mathcal{P}}.$$

Funkcja h jest mierzalna względem $\mathcal{F} \otimes \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$, ponieważ $Z_{\mathbb{Q}}$ jest $\mathcal{F}$-mierzalna dla $\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}$, a $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$ jest σ-ciałem wszystkich podzbiorów $\tilde{\mathcal{P}}$. Dla przestrzeni $(S_1, \mathcal{H}_1, \mu_1) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(S_2, \mathcal{H}_2, \mu_2) = (\tilde{\mathcal{P}}, \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}}), \lambda)$ funkcji $f = h$ oraz $r = q$ spełnione są założenia, przy których zachodzi nierówność całkowa Minkowskiego. Istotnie,

$$\int_{\tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q \lambda(d\mathbb{Q}) \leq \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q \lambda(d\mathbb{Q}) = \lambda(\tilde{\mathcal{P}}) \sup_{\mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q < \infty, \tag{C.22}$$

ponieważ λ jest miarą skończoną, a zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest ograniczony w L^q. Zatem, stosując twierdzenie B.2.2, otrzymujemy $\left\| \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q}) \right\|_q \leq \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \|Z_{\mathbb{Q}}\|_q \lambda(d\mathbb{Q}) < \infty$, co dowodzi (C.21) i implikuje (C.20). Ponieważ $Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q}) \in L^q$, to z założenia IV wynika, że

$$B^* \Big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}} \lambda(d\mathbb{Q}) \Big) \tag{C.23}$$

można utożsamić z pewną całkowalną zmienną losową, którą oznaczymy przez ν_{λ, Y^*}. Wówczas

$$d = \sup_{\lambda \in \Lambda_+} \left\{ \inf_{\phi \in \mathcal{R}} E\phi \nu_{\lambda, Y^*} + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \big(E_{\mathbb{Q}} B\mathbf{1} - \beta(\mathbb{Q}) \big) \lambda(d\mathbb{Q}) \right\}. \tag{C.24}$$

Zauważmy, że kres dolny w wyrażeniu występującym po prawej stronie powyższej równości jest osiągany dla zmiennych losowych spełniających warunki

$$\phi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } \nu_{\lambda, Y^*}(\omega) < 0, \\ 0, & \text{gdy } \nu_{\lambda, Y^*}(\omega) > 0, \end{cases}$$

skąd otrzymujemy

$$d = \sup_{\lambda \in \Lambda_+} \left\{ -E\nu^-_{\lambda, Y^*} + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \big(E_{\mathbb{Q}} B\mathbf{1} - \beta(\mathbb{Q}) \big) \lambda(d\mathbb{Q}) \right\} = \widehat{d}(Y^*), \tag{C.25}$$

przy czym w ostatniej równości skorzystaliśmy z oznaczenia $\widehat{d}(Y^*)$ dla wartości (C.7). Dowiedliśmy, że dla $\mathcal{V}, \mathcal{W}, B, f, g$ określonych w (C.11) zagadnienie (C.13) zapisuje się w postaci (C.7). Zdefiniujmy funkcję $h_d(\lambda) := -E\nu^-_{\lambda, Y^*} + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} \big(E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1}) - \beta(\mathbb{Q}) \big) \lambda(d\mathbb{Q})$, $\lambda \in \Lambda_+$. Zauważmy, że funkcja h_d jest dobrze określona, ponieważ $\nu^-_{\lambda, Y^*} \in L^1$ oraz zbiór $\tilde{\mathcal{P}}$ jest ograniczony w L^q. Ponadto

$$\widehat{d}(Y^*) = \sup_{\lambda \in \Lambda_+} h_d(\lambda). \tag{C.26}$$

Funkcją h_d posłużymy się w dalszej części dowodu.
Krok 6. Zagadnienia (C.6) i (C.7) są problemami dualnymi w sensie Fenchela, co wynika następujących obserwacji:
-Zagadnienie (C.6) jest pierwotnym problemem Fenchela dla $\mathcal{V}, \mathcal{W}, B, f, g$ określonych w (C.11). (z kroku 3)
-Dualny problem Fenchela przyjmuje postać (C.13). (z kroku 5)
-Dla $\mathcal{V}, \mathcal{W}, B, f, g$ określonych w (C.11) zagadnienie (C.13) zapisuje się jako (C.7). (z kroku 5)
Uzasadniliśmy, że zachodzi punkt a) tezy lematu.

Krok 7. Dowodzimy, że $\widehat{p}(Y^*) = \widehat{d}(Y^*)$ oraz istnieje miara $\bar{\lambda}^{Y^*}$ będąca rozwiązaniem problemu (C.7).
Wartość pierwotnego problemu Fenchela (C.6) (odp. dualnego zagadnienia (C.7)) wynosi $\widehat{p}(Y^*)$ (odp. $\widehat{d}(Y^*)$). W kroku 4 sprawdziliśmy, że spełnione są założenia twierdzenia A.2.9, z którego wynika, że $\widehat{p}(Y^*) = \widehat{d}(Y^*)$, co daje (C.8). Ponieważ $p(Y^*) \in \mathbb{R}$ na mocy kroku 1 oraz $Y^* \in \mathrm{dom}(G^*)$, to $\widehat{p}(Y^*) = p(Y^*) + G^*(Y^*) \in \mathbb{R}$. Stąd i z (C.8) wynika, że również wartość problemu dualnego (C.7) jest skończona i w tej sytuacji twierdzenie A.2.9 gwarantuje istnienie miary $\bar{\lambda}^{Y^*} \in \Lambda_+$ będącej rozwiązaniem zagadnienia (C.7). Ponadto z równości (C.8) i z kroku 2 wiemy, że $p(Y^*) = d(Y^*)$, co dowodzi punktu $c)$ tezy.
Krok 8. Z równości $0 = \widehat{p}(Y^*) - \widehat{d}(Y^*)$ wywnioskujemy warunki konieczne na to, by zmienna losowa $\bar{\phi}^{Y^*}$ (odp. miara $\bar{\lambda}^{Y^*}$) była rozwiązaniem pierwotnego problemu Fenchela (C.6) (odp . dualnego problemu Fenchela (C.7)).
Zdefiniujmy funkcję $h_p : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ wzorem $h_p(\phi) = E[(B\phi)Y^*]$.
Zauważmy najpierw, że dla dowolnego $\phi \in \mathcal{R}$ i $\lambda \in \Lambda_+$ zachodzą równości

$$h_p(\phi) = E[\phi(B^*Y^*)] = E\left[\phi\left(B^*Y^* - B^*\int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})\right)\right] + E\left[\phi\left(B^*\int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})\right)\right] =$$
$$E(\phi\nu^+_{\lambda,Y^*}) - E(\phi\nu^-_{\lambda,Y^*}) + E\left[\phi\left(B^*\int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})\right)\right] =: I_1(\phi,\lambda) + I_2(\phi,\lambda) + I_3(\phi,\lambda),$$

przy czym ν_{λ,Y^*} jest zmienną losową utożsamianą z funkcjonałem (C.23).
Zauważamy, że $I_3(\phi,\lambda)$ można zapisać w postaci $I_3(\phi,\lambda) = E\left[B\phi\int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})\right]$. Ponieważ $\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}B\phi\lambda(d\mathbb{Q}) \le \lambda(\tilde{\mathcal{P}})\sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}B\mathbf{1} \le \sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}}\|Z_{\mathbb{Q}}\|_q\|B\mathbf{1}\|_p < \infty$, do $I_3(\phi,\lambda)$ stosujemy twierdzenie Tonelli, otrzymując $I_3(\phi,\lambda) = \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}B\phi\lambda(d\mathbb{Q})$. Stąd

$$h_p(\phi) = E(\phi\nu^+_{\lambda,Y^*}) - E(\phi\nu^-_{\lambda,Y^*}) + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}(B\phi)\lambda(d\mathbb{Q}) \tag{C.27}$$

Z kroków 1 i 2 wiemy, że wartość $\widehat{p}(Y^*)$ pierwotnego problemu Fenchela jest przyjmowana dla pewnej zmiennej losowej $\bar{\phi}^{Y^*}$. Stąd oraz z (C.27) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\widehat{p}(Y^*) &= h_p(\bar{\phi}^{Y^*}) = E(\bar{\phi}^{Y^*}\nu^+_{\lambda,Y^*}) - E(\bar{\phi}^{Y^*}\nu^-_{\lambda,Y^*}) + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}(B\bar{\phi}^{Y^*})\lambda(d\mathbb{Q}) \\ &= I_1(\bar{\phi}^{Y^*},\lambda) + I_2(\bar{\phi}^{Y^*},\lambda) + I_3(\bar{\phi}^{Y^*},\lambda)\end{aligned} \tag{C.28}$$

dla dowolnej miary $\lambda \in \Lambda_+$. Z kroku 7 wiemy, że istnieje miara $\bar{\lambda}^{Y^*}$ będąca rozwiązaniem dualnego problemu Fenchela (C.7). W szczególności wstawiając $\lambda = \bar{\lambda}^{Y^*}$ do (C.28), dostajemy $\widehat{p}(Y^*) = I_1(\bar{\phi}^{Y^*},\bar{\lambda}^{Y^*}) + I_2(\bar{\phi}^{Y^*},\bar{\lambda}^{Y^*}) + I_3(\bar{\phi}^{Y^*},\bar{\lambda}^{Y^*}) =: I_1 + I_2 + I_3$. Ponadto z (C.26) i kroku 7 wynika, że $\widehat{d}(Y^*) = h_d(\bar{\lambda}^{Y^*}) = -E\nu^-_{\bar{\lambda}^{Y^*},Y^*} + \int_{\tilde{\mathcal{P}}}\big[E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1}) - \beta(\mathbb{Q})\big]\bar{\lambda}^{Y^*}(d\mathbb{Q}) =: I_4 + I_5$. Na mocy twierdzenia A.2.9 zachodzi mocna dualność, skąd

$$0 = \widehat{p}(Y^*) - \widehat{d}(Y^*) = I_1 + I_2 + I_3 - (I_4 + I_5) = (-I_4 + I_2) + I_1 + (I_3 - I_5) =$$
$$E\big[(\mathbf{1} - \bar{\phi}^{Y^*})\nu^-_{\bar{\lambda}^{Y^*},Y^*}\big] + E\big[\bar{\phi}^{Y^*}\nu^+_{\bar{\lambda}^{Y^*},Y^*}\big] + \int_{\tilde{\mathcal{P}}}\big[-E_{\mathbb{Q}}[B(1 - \bar{\phi}^{Y^*})] + \beta(\mathbb{Q})\big]\bar{\lambda}^{Y^*}(d\mathbb{Q}).$$

Suma całek z nieujemnych funkcji jest równa 0 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z tych funkcji jest p.n. równa 0. Oznacza to, że zmienna losowa $\bar{\phi}^{Y^*}$ będąca rozwiązaniem pierwotnego problemu Fenchela spełnia warunki (3.15) i (3.16), w których występuje miara $\bar{\lambda}^{Y^*}$, która, na mocy kroku 2, jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego. Ponieważ $\bar{\phi}^{Y^*}$ jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego, otrzymaliśmy następującą implikację: jeżeli $\bar{\phi}^{Y^*}$ jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego, to spełnia warunki (3.15) i (3.16), w których występuje miara $\bar{\lambda}^{Y^*}$ będąca rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego.
Krok 9. Pokażemy dostateczność warunków (3.15) i (3.16), tzn. dowiedziemy, że jeżeli dla zrandomizowanego testu $\bar{\phi} \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ (odp. miary $\bar{\lambda} \in \Lambda_+$) spełnione są warunki (3.15) i (3.16), to $\bar{\phi}$ (odp. $\bar{\lambda}$) jest rozwiązaniem problemu (C.6) (odp. zagadnienia (C.7)). Stąd oraz z kroku 2 wyniknie natychmiast, że $\bar{\phi}$ (odp. $\bar{\lambda}$) jest rozwiązaniem $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego (odp. $(Y^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego). Z twierdzenia A.2.9 wiemy, że zachodzi słaba dualność, tzn. $\widehat{p}(Y^*) \geq \widehat{d}(Y^*)$, skąd w szczególności wynika, że

$$h_p(\phi) \geq h_d(\lambda) \tag{C.29}$$

dla dowolnego $\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ oraz $\lambda \in \Lambda_+$. Ponieważ dla zmiennej losowej $\bar{\phi} \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$ (odp. miary $\bar{\lambda} \in \Lambda_+$) spełnione są warunki (3.15) i (3.16), to

$$\begin{aligned} h_p(\bar{\phi}) &= I_1(\bar{\phi}, \bar{\lambda}) + I_2(\bar{\phi}, \bar{\lambda}) + I_3(\bar{\phi}, \bar{\lambda}) = E(\bar{\phi}\nu^+_{\bar{\lambda},Y^*}) - E(\bar{\phi}\nu^-_{\bar{\lambda},Y^*}) + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}(B\bar{\phi})\bar{\lambda}(d\mathbb{Q}) \\ &= -E(\bar{\phi}\nu^-_{\bar{\lambda},Y^*}) + \int_{\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}(B\bar{\phi})\bar{\lambda}(d\mathbb{Q}) = h_d(\bar{\lambda}). \end{aligned} \tag{C.30}$$

Stąd oraz z (C.29) wynika, że $E[(B\phi)Y^*] = h_p(\phi) \geq h_d(\bar{\lambda}) = h_p(\bar{\phi}) = E[(B\bar{\phi})Y^*]$ dla dowolnego $\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}$, co oznacza, że $\bar{\phi}$ jest rozwiązaniem problemu (C.6). Podobnie dla dowolnej miary $\lambda \in \Lambda_+$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} &-E\Big[B^*\Big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})\Big)\Big]^- + \int_{\tilde{\mathcal{P}}}\big(E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1}) - \beta(\mathbb{Q})\big)\lambda(d\mathbb{Q}) = h_d(\lambda) \leq h_p(\bar{\phi}) = \\ &h_d(\bar{\lambda}) = -E\Big[B^*\Big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\bar{\lambda}(d\mathbb{Q})\Big)\Big]^- + \int_{\tilde{\mathcal{P}}}\big(E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1}) - \beta(\mathbb{Q})\big)\bar{\lambda}(d\mathbb{Q}), \end{aligned}$$

skąd wynika, że $\bar{\lambda}$ jest rozwiązaniem zagadnienia (C.7). □

Dowód (twierdzenia 3.3.17)
Punkt 1. (odp. punkt 2.) tezy twierdzenia wynika natychmiast z twierdzenia 3.3.12 (odp. lematu 3.3.16).
Przechodzimy do dowodu punktu 3. Niech $\tilde{\phi}$ (odp. $\tilde{Y}^*$) będzie dowolnym rozwiązaniem $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego (odp. $(\tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego) oraz niech $\tilde{\lambda}$ będzie dowolnym rozwiązaniem $(\tilde{Y}^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu dualnego. Z twierdzenia 3.3.12 wiemy, że $(\tilde{\phi}, \tilde{Y}^*)$ jest punktem siodłowym funkcji H określonej w (3.12) takim, że

$$\inf_{\phi \in \mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}},B,\beta}} E[(B\phi)\tilde{Y}^*] - G^*(\tilde{Y}^*) = E[(B\tilde{\phi})\tilde{Y}^*] - G^*(\tilde{Y}^*).$$

Wynika stąd, że $\tilde{\phi}$ realizuje minimum $(\tilde{Y}^*, \tilde{\mathcal{P}}, B, G, \beta)$-problemu pierwotnego. Stąd i z lematu 3.3.16 zastosowanego do $Y^* = \tilde{Y}^*$, dostajemy tezę. □

Dowód (lematu 3.3.19)
Wystarczy uzasadnić, że założenie o ograniczoności zbioru $\tilde{\mathcal{P}}$ w L^q można zastąpić założeniem 3.3.18.
W dowodzie lematu 3.3.16 korzystamy z ograniczoności zbioru $\tilde{\mathcal{P}}$ w L^q czterokrotnie:
a) Sprawdzając, że operator S określony w (C.9) jest ciągły.
b) Dowodząc (C.17) w oparciu o twierdzenie Tonelli.
c) W (C.19), sprawdzając założenia potrzebne do ponownego zastosowania tw. Tonelli.
d) Dowodząc (C.21), co jest potrzebne do uzasadnienia równości (C.24).
Omówimy teraz, jak dowieść $a) - d)$, korzystając z założeń lematu, zamiast ograniczoności $\tilde{\mathcal{P}}$ w L^q.
Ad. a) Ciągłość operatora S wynika z oszacowania

$$\|S\phi_1 - S\phi_2\|_{\mathcal{L}} \leq \big(\sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}} B\mathbf{1}\big)\|\phi_1 - \phi_2\|_\infty$$

oraz z warunku (B) w założeniu założenia 3.3.18.
Ad. b) Aby dowieść (C.17) w oparciu tw. Tonelli, podajemy oszacowanie

$$\int_{\tilde{\mathcal{P}}} E|B(\mathbf{1}-\phi)Z_{\mathbb{Q}}|\lambda(d\mathbb{Q}) \leq \big[\sup_{\mathbb{Q}\in\tilde{\mathcal{P}}} E_{\mathbb{Q}}(B\mathbf{1})\big]\cdot\lambda(\tilde{\mathcal{P}}) < \infty.$$

Analogicznie postępujemy w przypadku c)
A zatem zastąpienie założenia o ograniczoności zbioru $\tilde{\mathcal{P}}$ w L^q warunkiem (B) z założenia 3.3.18, pozwala dowieść a), b) oraz c). Zauważmy teraz, że po dokonaniu takiego zastąpienia nie można udowodnić (C.21) za pomocą nierówności całkowej Minkowskiego, postępując tak, jak w (C.22). Przypomnijmy, że (C.21) jest potrzebne do wywnioskowania równości (C.24) z (C.20), (C.18) i założenia IV. Zamiast dowodzić (C.21), pokażemy, że z założenia IV oraz z warunku (A) w założeniu 3.3.18 wynika istnienie zmiennej losowej $\nu_{\lambda,Y^*} \in L^1$, dla której zachodzi

$$E\left[\left[(B\phi)\big(Y^* - \int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})\big)\right]\right] = E(\phi\nu_{\lambda,Y^*}) \text{ dla } \phi\in L^\infty,\ Y^*\in L^q. \tag{C.31}$$

Stąd oraz z (C.18) dostaniemy (C.24). Przechodzimy do dowodu równości (C.31).
Warunek IV w założeniu 3.3.9 (odp. warunek (A) w założeniu 3.3.18) gwarantuje, że funkcjonał liniowy $\phi\to E[(B\phi)Y^*]$ (odp. funkcjonał liniowy $\phi\to E[(B\phi)\int_{\tilde{\mathcal{P}}} Z_{\mathbb{Q}}\lambda(d\mathbb{Q})]$) przyjmuje postać $\phi\to E\phi\xi_{Y^*}$ dla pewnego $\xi_{Y^*}\in L^1$ (odp. $\phi\to E(\phi L_{B,\lambda})$ dla pewnego $L_{B,\lambda}\in L^1$) Wynika stąd, że

$$\nu_{\lambda,Y^*} := \xi_{Y^*} - L_{B,\lambda}$$

definiuje zmienną losową całkowalną, dla której zachodzi (C.31), skąd wynika (C.24).
□

Dowód (twierdzenia 3.3.20)
Dowód przebiega analogicznie, jak dowód twierdzenia 3.3.17 z jedną różnicą. Ponieważ nie możemy bezpośrednio stosować lemat 3.3.16, gdyż nie jest spełnione założenie VI, korzystamy z lematu 3.3.19. □

Dodatek D

Indeks oznaczeń

Oznaczenia podstawowe

$\mathbb{N}$	zbiór liczb naturalnych: $\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	zbiór liczb rzeczywistych
$\bar{\mathbb{R}}$	$= \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
κ	wartość nieokreślona
$\tilde{\mathbb{R}}$	$= \bar{\mathbb{R}} \cup \{\kappa\}$
$\mathcal{L}(L^p, L^q)$	przestrzeń liniowych i ciągłych operatorów z L^p do L^q, $1 \leq p, q \leq \infty$
$\mathcal{I}_C$	funkcja charakterystyczna zbioru C(w analizie wypukłej)
$\mathrm{dom}(F)$	dziedzina efektywna funkcji $F : \mathcal{V} \to \bar{\mathbb{R}}$
$\mathrm{core}(A)$	algebraiczne wnętrze zbioru A
$\mathrm{conv}(A)$	zbiór skończonych kombinacji wypukłych elementów zbioru A
$\mathcal{V}^*$	przestrzeń topologicznie sprzężona do przestrzeni $\mathcal{V}$
$\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{W})$	słaba topologia dla pary przestrzeni $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$
$\sigma(\mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$	słaba topologia przestrzeni $\mathcal{V}$
$\sigma(\mathcal{V}^*, \mathcal{V})$	słaba* topologia przestrzeni $\mathcal{V}^*$
$\\|\cdot\\|_{\mathcal{V}}$	norma przestrzeni $\mathcal{V}$
$\tau(\mathcal{V}, \mathcal{W})$	topologia Mackeya dla pary przestrzeni $\mathcal{V}$ i $\mathcal{W}$
f^*	transformata Fenchela-Legendre funkcji f

Oznaczenia probabilistyczne

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$, $T \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{T}$	$= \{0, 1, \dots, T\}$
$\mathcal{T}_i$	$= \mathcal{T} \setminus \{i\}$
$\mathcal{P}$	zbiór miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem $\mathbb{P}$
$\mathcal{P}_b$	zbiór miar probabilistycznych absolutnie ciągłych względem $\mathbb{P}$ o gęstościach istotnie ograniczonych względem $\mathbb{P}$
$\mathcal{P}_e$	zbiór miar probabilistycznych równoważnych $\mathbb{P}$
$(\mathcal{P}_e)_\mathcal{G}$	$= \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}_e \ : \ E\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \middle| \mathcal{G} \right) = 1 \right\}$
$\mathcal{Q}_\mathcal{G}$	$= \left\{ \tilde{\mathbb{Q}} \in (\mathcal{P}_e)_\mathcal{G} \ : \ \exists \mathbb{Q} \in \mathcal{Q} \text{ t. że } \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = \frac{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}{E(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\|\mathcal{G})} \right\}, \ \mathcal{Q} \subseteq \mathcal{P}_e$
Φ	zbiór strategii samofinansujących o wartościach w $\mathbb{R}^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ względem filtracji $\mathbb{F}$
EY	wartość oczekiwana zmiennej losowej Y
$Var(Y)$	wariancja zmiennej losowej Y
$E(Y\|\mathcal{G})$	warunkowa wartość oczekiwana zmiennej losowej Y pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G}$
$Var(Y\|\mathcal{G})$	warunkowa wariancja zmiennej losowej Y pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G}$
$cov(X, Y\|\mathcal{G})$	warunkowa kowariancja zmiennych losowych X i Y pod warunkiem σ-ciała $\mathcal{G}$
ΔX_t	$= X_t - X_{t-1}, \ t \in \mathcal{T}_0, \ X -$ adaptowany proces
$\mathcal{Z}(\mathbf{U})$	zbiór ciągów funkcji $\mathbf{Z} = (Z^t)_{t \in \mathcal{T}_0}$ takich, że $Z^t : \mathcal{U}_{t-1} \to (\mathcal{P}_e)_{\mathcal{F}_{t-1}}, \ \mathcal{U}_{t-1} \subseteq \mathcal{F}_{t-1}, \ t \in \mathcal{T}_0.$
$\mathcal{Z}_c(\mathbf{U})$	zbiór elementów zbioru $\mathcal{Z}(\mathbf{U})$ reprezentujących zgodny wybór względem $\mathbb{F}$
$Z_\mathbb{Q}$	gęstość względem $\mathbb{P}$ miary probabilistycznej $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}$
$\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$	σ-ciało wszystkich podzbiorów zbioru $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$
$\Lambda(\tilde{\mathcal{P}})$	zbiór miar ze znakiem o skończonym wahaniu określonych na $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$, $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$
$\Lambda_+(\tilde{\mathcal{P}})$	zbiór miar o skończonym wahaniu określonych na $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{P}})$, $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}$
$\mathcal{X}$	$= L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathcal{Y}$	$= L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
$\mathcal{R}$	zbiór zrandomizowanych testów
$\mathcal{R}_{\tilde{\mathcal{P}}, B, \beta}$	$= \{\phi \in \mathcal{R} \ : \ E_\mathbb{Q} B(1 - \phi) \leq \beta(\mathbb{Q}) \ \forall \mathbb{Q} \in \tilde{\mathcal{P}}\}$, gdzie $\tilde{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}_b$, $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\beta : \mathcal{P}_b \to \mathbb{R} -$ funkcja ograniczona, mierzalna
$\mathcal{G} \otimes \mathcal{H}$	iloczyn kartezjański σ-ciał $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$
$X_{Z,\mathcal{G}}$	Z-warunkowa wartość oczekiwana X pod warunkiem $\mathcal{G}$

Oznaczenia z matematyki finansowej

Niech na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ z filtracją $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ dany będzie model rynku $\mathcal{M}$. Wówczas wprowadzamy oznaczenia

$\mathcal{P}(\mathcal{M})$	zbiór miar martyngałowych w modelu rynku $\mathcal{M}$
$\mathcal{P}_b(\mathcal{M})$	zbiór miar martyngałowych w modelu rynku $\mathcal{M}$ o gęstościach ograniczonych
$\Xi(H)$	zbiór procesów ceny arbitrażowej wypłaty H
$\Xi_t(H)$	zbiór cen arbitrażowych wypłaty H w chwili t, $t \in \mathcal{T}$
$\Pi(H)$	proces ceny arbitrażowej osiągalnej wypłaty H
$V(\xi)$	proces wartości strategii $\xi \in \Phi$
$\mathcal{A}_\rho$	zbiór dopuszczalny dla miary ryzyka ρ
$\Pi^{\mathbf{Z}}(H)$	proces ceny wypłaty H zgodny z $\mathbf{Z}$
$\mathcal{Z}_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$	zbiór schematów wyceny
$\mathcal{Z}^H_{\mathcal{M}}(\mathbf{U})$	zbiór schematów dopuszczalnych dla wyceny wypłaty H
$\Phi^+_{\tilde{V}_0}$	zbiór strategii, których proces wartości jest nieujemny i w chwili 0 nie przekracza $\tilde{V}_0$

Bibliografia

[1] C. D. Aliprantis, K. C. Border *Infinite dimensional analysis*, Springer, 1999.

[2] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath *Thinking coherently* Risk 10 (11), (1997), 68-71

[3] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, D. Heath *Coherent Measures if Risk* Math. Finance 9(3), (1999), 203-228

[4] C. Acerbi, C. Nordio, C. Sirtori *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management* preprint, http://arxiv.org/PS_cache/cond-mat/pdf/0102/0102304v1.pdf

[5] M. Barski *Quantile hedging on markets with proportional transaction costs* Applicationes Mathematicae, (2003), 193-208.

[6] F. Black, R. Litterman *Global Portfolio Optimization* Financial Analysts Journal 48, (1992), 28-43.

[7] J.M. Borwein, Q.J. Zhu *Variational Methods in Convex Analysis* Journal of Global Optimization 35, (2006), 197–213

[8] S. Biagini, M. Frittelli *On the extension of the Namioka-Klee theorem and on the Fatou property for Risk Measures* In: Optimality and risk: modern trends in mathematical finance. The Kabanov Festschrift (2009)

[9] J.d Castillo, J-P. Ortega *Hedging of time disrete auto-regressive stochastic volatility options* arXiv, 2011

[10] A. Cerny, J. Kallsen *Hedging by sequential regression revisited* Mathematical Finance 19, (2009), 591-617.

[11] J. Cvitanic *Minimizing expected loss of hedging in incomplete and constrained markets* SIAM J. Control Optimization 38 (2000), 1050–1066

[12] J. Cvitanic, I. Karatzas *On dynamic measures of risk* Finance and Stochastics 3 (1999), 451– 482

[13] J. Cvitanic, I. Karatzas *Generalized Neyman-Pearson lemma via convex duality* Bernoulli 7 (2001), 79–97

[14] R.C. Dalang, A. Morton, W. Willinger *Equivalent martingale measures and no arbitrage in stochastic securities market model* Stochastics Stochastics Rep. 29, (1990), 185-201.

[15] F. Delbaen *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces* Essays in Honour of Dieter Sondermann, Springer, (2002), 1-37

[16] F. Delbaen, W. Schachermayer *A general version of the fundamental theorem of asset pricing*, Math. Ann. 300, (1994), 463-520 .

[17] N. Dunford, J.T. Schwartz *Linear operators. Part I: General Theory* Wiley, 1988

[18] I. Ekeland, R. Temam *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, 1976,

[19] H. Föllmer, Y. M. Kabanov *Optional decomposition and Lagrange multipliers* Finance and Stochastics 2 (1998), 69-82

[20] H. Föllmer, P. Leukert *Quantile hedging* Finance and Stochastics 3 (1999), 251-273

[21] H. Föllmer, P. Leukert *Efficient hedging: Cost versus shortfall risk* Finance and Stochastics 4 (2000), 117-146

[22] H. Föllmer, A. Schied *Stochastic Finance: an introduction in discrete time* Walter de Gruyter, 2002

[23] H. Föllmer, A. Schied *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*, Finance and Stochastics 6, (2002), 429-447

[24] B. Fristedt, L. Gray *A Modern Approach to Probability Theory* Birkhäuser, 1997

[25] M. Frittelli *The minimal entropy martingale measure and the valuation problem in incomplete markets* Mathematical Finance 10, (2000), 39-52.

[26] A.A. Gushchin, E. Mordecki *Bounds on option prices for semimartingale market models* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics 237, (2002), 73-113.

[27] T. Husain, S. M. Khaleelulla *Barrelledness in Topological and Ordered Vector Spaces* Springer, (1978).

[28] J. Jacod, A.N. Shiryaev *Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case* Finance and Stochastics, 2 (1998), 259-273

[29] J. Jakubowski, *Modelowanie rynków finansowych*, SCRIPT, 2006 (in Polish).

[30] J. Jakubowski, A. Palczewski, M. Rutkowski, Ł. Stettner *Matematyka Finansowa. instrumenty pochodne*, WNT, 2003.

[31] J. Jakubowski, Rafał Sztencel *Wstęp do Teorii Prawdopodobieństwa*, SCRIPT, 2001.

[32] M. Kaina, L. Rüschendorf, *On Convex Risk Measures on L^p spaces*, Math. Meth. Oper. Res. 69, (2009), 475–495.

[33] I. Karatzas, B. Rudloff , *Testing Composite Hypotheses via Convex Duality* Bernoulli 16 (4), 2010, 1224-1239.

[34] S. G. Kellison *The Theory of Interest* Irwin/McGraw-Hill, 1991

[35] D. Kramkov, W. Schachermayer *The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets*, The Annals of Applied Probability 9, 1999, 904-950.

[36] S. Kusuoka *On law-invariant coherent risk measures* Advances in mathematical economics 3, (2001), 83-95.

[37] T. Luehrman *Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers* Harvard Business Review 76, (1998), 51-67.

[38] T. Luehrman *Strategy as a Portfolio of Real Options* Harvard Business Review 76, (1998), 87-99.

[39] R.S. Laugesen *Harmonic Analysis Lecture Notes*, (2009), 161-162, dostępne z: www.scribd.com/doc/63333698/13/Minkowski's-integral-inequality

[40] S. Mathews, J. Salmon *Business Engineering: A Practical Approach to Valuing High-Risk, High-Return Projects Using Real Options* Tutorials in Operations Research, INFORMS, 2007

[41] A.V. Melnikov, M.L. Nechaev *On the Mean-Variance Hedging Problem* Theor. Probab. Appl. 43, (1999), 588–603.

[42] T. Møller *On valuation and risk management at the interface of insurance and finance* British Actuarial Journal 8, (2002), 787-827

[43] M. Musiela, M. Rutkowski *Martingale methods in financial modelling*, Springer, (2005).

[44] Y. Nakano *Minimizing coherent risk measures of shortfall in discrete-time models with cone constraints* Applied Mathematical Finance 10, (2003), 163–181

[45] Y. Nakano *Efficient hedging with coherent risk measure* J. Math. Anal. Appl., 293 (2004), 345-354

[46] S. R. Pliska *Wprowadzenie do matematyki finansowej. Modele z czasem dyskretnym*, WNT, (2005).

[47] B. Rudloff *A generalized Neyman-Pearson lemma for hedge problems in incomplete markets* Proceeding of the Workshop *Stochastische Analysis*, 2005, 41-50

[48] B. Rudloff *Hedging in Incomplete Markets and Testing Compound Hypotheses via Convex Duality* Ph. D. Thesis, 2006

[49] B. Rudloff *Convex hedging in incomplete Markets*, Applied Mathematical Finance 14, 2007, 437-452.

[50] B. Rudloff *Coherent hedging in incomplete markets* Quantitative Finance 9, 2009, 197–206.

[51] M. Schäl *Portfolio optimization and martingale measures* Mathematical Finance 10, (2000), 289-303.

[52] M. Schweizer *A Guided Tour through Quadratic Hedging Approaches* In: Option Pricing, Interest Rates and Risk Management, pages 538 – 574, (2001), Cambridge University Press

[53] A. N. Shiryaev *Probability*, Springer, (1996).

[54] Ł. Stettner *Option Pricing in Discrete-Time Incomplete Market Models* Mathematical Finance 10, (2000), 305-321.

[55] Ł. Stettner, M. Rasonyi *On Utility Maximization in Discrete-Time Financial Market Models* Annals of Applied Probability 15, (2005), 1367-1395.

[56] G. Svindland *Convex Risk Measures Beyond Bounded Risk* Ph. D. Thesis, 2008

[57] G. Svindland, D. Filipovic *The Canonical Model Space for law-invariant Convex risk Measures is* L^1 przyjęte do Mathematical Finance

[58] M. Tehranchi *Characterizing Attainable Claims: A Simple Proof* Journal of Applied Probability 47, (2010), 1013-1022.

[59] H. Witting *Mathematische Statistik I* Treubner: Stuttgart, 1985

[60] R. Zagst *Interest Rate Management* Springer-Verlag, 2002