Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Piotr Szopa

Dynamika rozwiązań równań płynu mikropolarnego na dwuwymiarowym torusie

Rozprawa doktorska

Promotor rozprawy

Prof. dr hab. Grzegorz Łukaszewicz

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki
Uniwersytet Warszawski

11.2007

Oświadczenie autora rozprawy:

oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

....

data *podpis autora rozprawy*

Oświadczenie promotora rozprawy:

niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

....

data *podpis promotora rozprawy*

Dynamika rozwiązań równań płynu mikropolarnego na dwuwymiarowym torusie[1]

Słowa kluczowe:
płyn mikropolarny, globalne rozwiązania, atraktor globalny, wymiar atraktora, harmoniki determinujące, węzły determinujące, rozwiązania w klasach Gevrey'a

AMS Mathematical Subject Classification 2000:
35B40, 35Q35, 37L30, 76D03, 76F20

Streszczenie

Model płynu mikropolarnego jest uogólnieniem klasycznego modelu hydrodynamiki - modelu Naviera-Stokesa w tym sensie, że bierze pod uwagę mikrostrukturę płynu. Celem tej rozprawy jest badanie tego modelu w kontekście badań nad turbulencją przepływów. Ważnym aspektem tych badań jest problem opisu przepływu za pomocą skończonej liczby parametrów i temu problemowi została poświęcona główna część rozprawy.

Jako wstęp do dalszych rozważań udowodniłem istnienie i jednoznaczność globalnych rozwiązań, ponadto przy założeniu, że siły są niezależne od czasu i należą do pewnej przestrzeni Gevrey'a pokazałem, że rozwiązania są analitycznymi funkcjami czasu o wartościach w innej przestrzeni Gevrey'a. Wykazałem istnienie globalnego atraktora i oszacowałem jego wymiar fraktalny oraz oszacowałem liczbę harmonik i węzłów determinujących. Uzyskane wyniki porównałem z analogicznymi wynikami dla równań Naviera-Stokesa. Wyprowadziłem oszacowania drabinowe, wiążące ewolucję N-tych seminorm rozwiązań z seminormami niższego rzędu.

[1]Praca powstała przy wsparciu Ministerstwa Nauki i Szkolnictwa Wyższego z grantu promotorskiego N201 034 32/2270

Dynamics of solutions for micropolar fluid equations on two-dimensional torus[2]

Keywords:
micropolar fluid, global solutions, global attractor, dimension of attractor, determining modes, determining nodes, Gevrey regularity

AMS Mathematical Subject Classification 2000:
35B40, 35Q35, 37L30, 76D03, 76F20

Abstract

The micropolar fluid model is an generaliation of the classical model in hydrodynamics - Navier-Stokes model, in that sense that it takes into account the microstructure of the fluid. The aim of this thesis is the study on this model in the context of study on turbulence. One of the most important aspects of this study is the finite-dimensionality of the flow. The main part of this dissertation was devoted to this issue.

I proved the existence and uniqueness of global solutions as a preliminary to subsequent considerations, moreover I showed that the solutions are analytic functions of time with values in Gevrey space. I proved the existence of a global attractor and estimated its fractal and Hausdorff dimension. The number of determining modes and nodes was also estimeted. The obtained results was compared with analogous results for the Navier-Stokes equation. The ladder-type estimates, connecting the evolution of the $N-$th seminorm with seminorms of the lower order.

[2]This PhD thesis has been supported by Ministry of Science and Higher Education of Poland, grant N201 034 32/2270

Spis treści

Rozdział 1

Wprowadzenie. Problematyka rozprawy

1.1 Płyny nieNewtonowskie

Klasyczny model w hydrodynamice, model Naviera-Stokesa, jest używany i badany od wielu lat i wiadomo bardzo dużo o przepływach dwuwymiarowych (wiele wyników zostało zebranych w książce [17]). Jednak dotychczas nie udało się znaleźć odpowiedzi na fundamentalne pytanie: czy istnieją globalne w czasie i regularne rozwiązania, gdy obszar przepływu jest trójwymiarowy. Ponadto model ten ma jeszcze jedno ważne ograniczenie - z definicji nie opisuje płynów posiadających mikrostrukturę.

Model płynu mikropolarnego, rozważany w rozprawie a wyprowadzony w [9], opisuje płyny posiadające mikrostrukturę np. krew, ciekłe kryształy, ciekłe polimery [35, 36]. Model ten powstaje przez dodanie do równań Naviera-Stokesa dodatkowego równania wyrażającego zasadę zachowania momentu pędu oraz pewne sprzęgnięcie równań. Dzięki takiej konstrukcji model ten zawiera w sobie, jako przypadek szczególny, model Naviera-Stokesa. Równania płynu mikropolarnego mają postać

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \tag{1.3}$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$ jest polem prędkości płynu, p - ciśnieniem, a $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - polem mikrorotacji określającym prędkości kątowe obracających się cząstek. Pola $f = (f_1, f_2, f_3)$ i $g = (g_1, g_2, g_3)$ są siłami i momentami zewnętrznymi działającymi na płyn. Stałe ν, ν_r, α oraz β są dodatnie i reprezentują współczynniki lepkości. W równaniach (1.1) - (1.3) i w całej pracy zakładamy, że płyn jest nieściśliwy a jego gęstość jest równa jeden.

Celem tej rozprawy jest badanie modelu płynu mikropolarnego w kontekście badań nad turbulencją przepływów. Ważnym aspektem badań turbulencji jest problem skończonej wymiarowości przepływu tzn. możności opisu przepływu za pomocą skończonej liczby parametrów. Temu zagadnieniu zostanie poświęcona główna część tej pracy.

1.2 Problem skończonej wymiarowości przepływu

Argumenty fizyczne wskazują na to, że asymptotyczne w czasie zachowanie się pewnych układów dyssypatywnych, w tym niektórych równań hydrodynamiki, można opisać za pomocą skończonej liczby parametrów [27, 28, 29]. W szczególności dotyczy to przepływów turbulentnych. Pierwsze ścisłe wyniki w tej dziedzinie, to prace Foiasa i Prodiego [11], Ładyżeńskej [31] oraz Foiasa i Temama [12] dotyczące równań Naviera-Stokesa. W [11] pokazano, że jeżeli pewna liczba harmonik Fourierowskich dwóch różnych przepływów ma takie samo zachowanie asymptotyczne, to całe przepływy również asymptotycznie zachowują się tak samo. Sugeruje to, że do opisu asymptotyki przepływu wystarczy skończona liczba harmonik. W [31] udowodniono istnienie globalnego atraktora dla dwuwymiarowego przepływu w obszarze ograniczonym, a w [12] pokazano, że jego wymiar fraktalny jest skończony i oszacowano go w zależności od paramertów przepływu.

Istnienie atraktora globalnego jest jedną z ważniejszych cech układu dynamicznego. Atraktor globalny to zwarty, niezmienniczy podzbiór przestrzeni fazowej, który przyciąga zbiory ograniczone. Jego wymiar może być interpretowany jako ograniczenie na liczbę stopni swobody układu ewoluującego przez długi czas [37, 44]. Powstaje więc pytanie czy i w jaki sposób można układ nieskończene wymiarowy, generowany przez półgrupę związaną z równaniami różniczkowymi cząstkowymi, przybliżać przez układ skończenie wymiarowy np. skończony układ równań różniczkowych zwyczajnych. Okazuje się, że w pewnych przypadkach można opisać stan układu znając wartości prędkości w skończonym zbiorze punktów w obszarze przepływu [18, 38]. Dotychczas udowodniono to dla rozwiązań analitycznych.

W przypadku układów nieautonomicznych, nie posiadających atraktora w klasycznym sensie, można postawić pytanie, jakie warunki muszą być spełnione, aby dwa różne przepływy miały takie samo zachowanie asymptotyczne. Odpowiedzią są np. harmoniki lub węzły determinujące. W pierwszym przypadku rozwijamy rozwiązania w szeregi Fouriera i pytamy ile pierwszych harmonik musi mieć takie samo zachowanie asymptotyczne dla dużych czasów, żeby również całe przepływy asymptotycznie zachowywały się tak samo. W drugim wybieramy zbiór punktów w obszarze przepływu i pytamy jak wiele ich potrzeba i jak muszą być rozłożone w obszarze przepływu, żeby ze zbieżności rozwiązań do siebie w tych punktach wynikała zbieżność w całym obszarze przepływu. W [11] pokazano, że jeżeli różnica pomiędzy pewną liczbą pierwszych N harmonik Fourierowskich dwóch rozwiązań równań Naviera-Stokesa zbiega do zera, dla czasów dążących do nieskończoności, to całe rozwiązania asymptotycznie zachowują się tak samo. Następnie poprawiano oszacowanie na N w [17] i [25]. Szukano również innych niż harmoniki Fourierowskie rodzajów stopni swobody. Foias i Temam w [14] za stopnie swobody przyjęli wartości prędkości w pewnej liczbie punktów (zwanych węzłami) w obszarze przepływu, a Jones i Titi w [24] średnie wartości prędkości w kwadratach, na które podzielony jest obszar przepływu. Czytelnika zainteresowanego ogólniejszą dyskusją na temat stopni swobody odsyłamy do pracy [5].

Model płynu mikropolarnego był pod tym kątem badany przez m.in. Łukaszewicza, który w [33] pokazał istnienie atraktora i oszacował jego wymiar i Szopę, który w [40] oszacował liczbę harmonik determinujących. Obie prace dotyczyły przepływu w ograniczonym obszarze płaskim z warunkiem Dirichleta na brzegu.

W pracy porównamy modele Naviera-Stokesa i płynu mikropolarnego, aby zbadać jak liczba stopni swobody zależy od modelu. Będzie nas interesować zależność oszacowań od ν_r – parametru, który w pewnym sensie rozróżnia te modele (dla $\nu_r = 0$ następuje rozsprzęgnięcie równań - układ "rozpada się" na równanie Naviera-Stokesa i równanie na rotację cząstek) oraz od warunków brzegowych – porównamy oszacowania dla warunku okresowego i Dirichleta.

1.3 Postawienie zagadnienia początkowo-brzegowego rozważanego w rozprawie

Przypomnijmy, że równania płynu mikropolarnego, wyprowadzone przez Eringena w [9] mają postać

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f, \tag{1.4}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega - \beta\nabla \operatorname{div} \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \tag{1.6}$$

gdzie $u = (u_1, u_2, u_3)$ jest polem prędkości płynu, p - ciśnieniem, a $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ - polem mikrorotacji określającym prędkości kątowe obracających się cząstek. Pola $f = (f_1, f_2, f_3)$ i $g = (g_1, g_2, g_3)$ są siłami i momentami zewnętrznymi działającymi na płyn. Stałe ν, ν_r, α oraz β są dodatnie i reprezentują współczynniki lepkości. Zakładamy, że płyn jest nieściśliwy a jego gęstość jest równa jeden.

W rozprawie tej będziemy rozpartywać przepływ dwuwymiarowy w kwadracie $Q \subset \mathbb{R}^2$. Przepływ taki może być interpretowany jako ruch płynu w płaszczyźnie $x_3 = \text{const}$ przecinającej kostkę $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$ przy następujących założeniach: pola zewnętrzne oraz sam ruch nie zależą od x_3. Możemy to osiągnąć w następujący sposób: zakładamy, że składowa prędkości u_3 jest zerowa oraz że osie obrotu cząstek płynu są prostopadłe do płaszczyzny (x_1, x_2). Powyższe założenia implikują, że pola u, p, ω przyjmują postać: $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), 0)$, $p = p(x,t)$, $\omega = (0, 0, \omega_3(x,t))$, gdzie $x = (x_1, x_2) \in Q$. Niech $f = (f_1(x,t), f_2(x,t), 0)$, $g = (0, 0, g_3(x,t))$, wtedy wstawiając u, p, ω w powyższej postaci do układu (1.4) - (1.6) otrzymujemy następujący układ równań opisujący przepływ płynu w Q:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u_1 + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_1} = 2\nu_r \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + f_1, \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u_2 + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial p}{\partial x_2} = -2\nu_r \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + f_2, \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial \omega_3}{\partial t} + \alpha \Delta \omega_3 + u_1 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} + 4\nu_r \omega_3 = 2\nu_r \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + g_3. \tag{1.10}$$

Aby napisać równania (1.7) - (1.10) w bardziej zwartej postaci zmienimy nieco notację. Od teraz $x = (x_1, x_2) \in Q$, $u = (u_1(x,t), u_2(x,t))$, $p = p(x,t)$, $\omega = \omega_3(x,t)$, $f = (f_1(x,t), f_2(x,t))$, $g = g_3(x,t)$ oraz

$$\operatorname{rot} u = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \qquad \operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \qquad \operatorname{rot} \omega = \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2}, -\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right).$$

Możemy więc napisać układ (1.7) - (1.10) w następującej formie

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f, \tag{1.11}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha \Delta \omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r \omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g. \tag{1.13}$$

W rozprawie będziemy rozważać układ równań (1.11) - (1.13) z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \omega(x,0) = \omega_0(x), \quad x \in Q$$

i okresowym warunkiem brzegowym

$$u(x + Le_i, t) = u(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2,$$
$$\omega(x + Le_i, t) = \omega(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0, \quad i = 1, 2,$$

gdzie e_1, e_2 jest kanoniczną bazą w $\mathbb{R}^2$, a L jest okresem w i -tym kierunku, $Q = (0, L)^2$. Ponadto, dla uproszczenia rozważań będziemy zakładać, że średnie u, ω, f, g na Q są równe zero. Pokażemy, że nie prowadzi to do ograniczenia rozważań.

Wprowadźmy średnie u and ω na Q:

$$m_u(t) = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q u(x,t)\,dx,$$

$$m_\omega(t) = \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q \omega(x,t)\,dx$$

i oznaczmy

$$u = m_u + \tilde{u}, \quad \omega = m_\omega + \tilde{\omega}. \tag{1.14}$$

Średnie m_u oraz m_ω są wyznaczone wprost przez dane. Po scałkowniu (1.11) i (1.13) na Q, używając (1.12), warunków brzegowych i twierdzenia Stokesa, otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m_u(t) = m_f(t) \qquad\qquad &:= \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q f(x,t)\,dx, \\ \frac{d}{dt} m_\omega(t) + 4\nu_r m_\omega(t) = m_g(t) &:= \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q g(x,t)\,dx, \end{aligned}$$

skąd wynika, że

$$\begin{aligned} m_u(t) &= m_{u_0} + \int\limits_0^t m_f(s)\,ds, \\ m_\omega(t) &= e^{-4\nu_r t} \left(m_{\omega_0} + \int\limits_0^t m_g(s) e^{4\nu_r s}\,ds \right). \end{aligned}$$

Po wstawieniu (1.14) do (1.11) i (1.13) mamy

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{u} + (m_u \cdot \nabla)\tilde{u} + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \tilde{\omega} + \tilde{f}, \tag{1.15}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial t} - \alpha \Delta \tilde{\omega} + (\tilde{u} \cdot \nabla)\tilde{\omega} + (m_u \cdot \nabla)\tilde{\omega} + 4\nu_r \tilde{\omega} + 4\nu_r m_\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} \tilde{u} + \tilde{g}, \tag{1.17}$$

gdzie $\tilde{f} = f - m_f$, $\tilde{g} = g - m_g$. Ponieważ wielkości m_u i m_ω są znane, rozważania dotyczące układu (1.15) - (1.17) są podobne do rozważań dotyczących układu (1.11) - (1.13). Dla uproszczenia założymy więc, że średnia prędkość i rotacja znikają: $m_u = m_\omega = 0$. Dzięki temu mamy nierówność Poincaré, która pozwala na wprowadzenie wygodniejszych w użyciu iloczynów skalarnych w przestrzeniach V oraz $\dot{H}^1_{per}$ (przestrzenie te zostaną zdefiniowane w podrozdziale 2.1. Ponadto w przypadku, gdy średnia jest niezerowa pojawiają się problemy z operatorem Stokesa - nie jest dodatnio określony, nie jest $1-1$, ponieważ funkcja stała jest elementem jego dziedziny, co pociąga za sobą, że nie jest on odwracalny.

Ostatecznie będziemy więc rozważać następujące zagadnienie brzegowo-początkowe w obszarze Q:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f, \tag{1.18}$$

$$\operatorname{div} u = 0, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \alpha\Delta\omega + (u \cdot \nabla)\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \tag{1.20}$$

z warunkiem początkowym

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \omega(x,0) = \omega_0(x), \quad x \in Q \tag{1.21}$$

i warunkiem brzegowym

$$\begin{aligned} u(x + Le_i, t) = u(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0, \quad i = 1,2 \\ \omega(x + Le_i, t) = \omega(x,t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \forall t > 0 \quad i = 1,2, \end{aligned} \tag{1.22}$$

gdzie średnie przestrzenne funkcji u, ω, f, g są równe zero, e_1, e_2 jest kanoniczną bazą w $\mathbb{R}^2$, a L jest okresem w i -tym kierunku: $Q = (0, L)^2$.

1.4 Plan rozprawy

Drugi rozdział jest poświęcony zdefiniowaniu podstawowych przestrzeni funkcyjnych oraz operatorów różniczkowych, których będziemy używać w dalszym ciągu pracy.

W trzecim rozdziale, korzystając z metody Galerkina, udowodnimy istnienie i jednoznaczność słabych i silnych rozwiązań, ponadto pokażemy, że jeśli siły i momenty są niezależne od czasu i analityczne to rozwiązania są analiyczne względem czasu o wartościach w przestrzeni Gevreya.

Rozdział czwarty jest poświęcony sposobom opisu asymptotycznego zachowania się płynu. Najpierw wyprowadzimy dodatkowe oszacowania *a priori*, a potem udowodnimy twierdzenie o istnieniu atraktora globalnego dla układu autonomicznego i oszacujemy z góry jego wymiar. Dla układu nieautonomicznego oszacujemy liczbę harmonik i węzłów determinujących. Na końcu pokażemy, że jeżeli siły i momenty są niezależne od czasu i należą do przestrzeni Gevrey'a to istnieje jednoznaczne odwzorowanie z węzłów rozmieszczonych w obszarze przepływu na trajektorię na atraktorze. Pokażemy również, że węzły te są determinujące asymptotycznie (przy założeniu, że atraktor przyciąga w normie L^∞) tzn. jeżeli różnica prędkości i rotacji dwóch przepływów w tych punktach zbiega z czasem do zera, to oba przepływy zachowują się asymptotycznie tak samo.

Rozdział piąty poświęcony jest wyprowadzeniu oszacowań drabinowych, tj. nierówności opisujących ewolucję norm $N-$tych pochodnych rozwiązań za pomocą norm pochodnych innego (niższego) rzędu.

W rozdziale szóstym podsumujemy otrzymane wyniki i porównamy je z analogicznymi wynikami dla równań Naviera-Stokesa.

Rozdział 2

Przestrzenie funkcyjne, elementy analizy funkcjonalnej

W tym rozdziale zdefiniujemy podstawowe przestrzenie funkcyjne, których będziemy używać w dalszych rozważaniach, ponadto zdefiniujemy operator Stokesa, formy trójliniowe b i b_1 oraz przypomnimy ich podstawowe własności. Przedstawimy również dwa uogólnienia Lematu Gronwalla.

2.1 Definicje przestrzeni funkcyjnych

W dalszym ciągu pracy będziemy używać następujących przestrzeni funkcyjnych:

L^p – standardowa przestrzeń Lebesgue'a $L^p(Q)$ funkcji $f\colon Q \to R^k$ takich, że

$$\int\limits_Q |f(x)|^p \, dx < \infty.$$

W dalszym ciągu pracy, jeżeli nie będzie to powodowało kolizji oznaczeń, będziemy oznaczać iloczyn skalarny w L^2 przez $(\cdot,\cdot)$ a normę przez $|\cdot|$.

$L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ – przestrzeń funkcji, które należą do $L^p(K)$ dla każdego zwartego podzbioru $K \subset\subset \mathbb{R}^n$.

H^m – standardowa przestrzeń Sobolewa $H^m(Q)$ funkcji, których pochodne aż do rzędu m należą do L^2.

$H^m_{loc}(\mathbb{R}^n)$ – przestrzeń funkcji należących do $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, których pochodne aż do rzędu m należą do $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

$H^m_{per}(Q)$, $m \in \mathbb{N}$ – przestrzeń funkcji, które należą $H^m_{loc}(\mathbb{R}^n)$ oraz są okresowe z okresem L w każdym kierunku:

$$u(x + Le_i) = u(x) \quad \text{dla } i = 1, 2.$$

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $H^m_{per}(Q)$ z iloczynem skalarnym

$$(u,v)_m = \sum_{|\alpha|\le m} \int\limits_Q D^\alpha u(x) D^\alpha v(x)\, dx$$

jest przestrzenią Hilberta. Normę indukowaną oznaczamy $|\cdot|_m$. Funkcje z przestrzeni $H^m_{per}(Q)$ można zcharakteryzować za pomocą ich rozwinięć w szereg Fouriera

$$H^m_{per}(Q) = \left\{ u\colon u = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k e^{2i\pi k/L\cdot x},\ \bar{u}_k = u_{-k},\ |u|_m = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} |k|^{2m}|u_k|^2 < \infty \right\},$$

gdzie $k/L = (k_1/L, k_2/L)$, a $\bar{u}$ oznacza sprzężenie zespolone u, norma $|u|_m$ jest równoważna normie $\{\sum_{k\in\mathbb{Z}^n}(1+|k|^{2m})|u_k|^2\}^{1/2}$. Ponadto oznaczamy

$$\dot{H}^m_{per}(Q) = \{u \in H^m_{per}(Q), u_0 = 0\},$$

gdzie u_0 jest zerowym wyrazem w rozwinięciu Fouriera funkcji u.

Dla dowolnej przestrzeni unormowanej X przez $\mathbb{X}$ będziemy oznaczać $X \times X$ ze standardową normą produktową.

H – przestrzeń funkcji bezdywergentnych należących do $\dot{\mathbb{H}}^0_{per}(Q)$.

V – przestrzeń funkcji bezdywergentnych należących do $\dot{\mathbb{H}}^1_{per}(Q)$. W przestrzeni V wprowadzamy następujący iloczyn skalarny oraz normę

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right), \qquad ||u|| = \{((u,u))\}^{1/2}.$$

V z tym iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta, a norma idnukowana przez ten iloczyn skalarny jest równoważna z normą indukowaną z $\mathbb{H}^1_{per}(Q)$,

Oznaczmy $\mathcal{H} = H \times \dot{H}^0_{per}$ oraz $\mathcal{V} = V \times \dot{H}^1_{per}$ ze standardowymi iloczynami skalarnymi i normami produktowymi.

Przez $\dot{H}^{-m}_{per}$ będziemy oznaczać przestrzeń dualną do $\dot{H}^m_{per}$, przestrzeń dualną do V oznaczamy V'.

$L^q(0,T;X)$ – przestrzeń silnie mierzalnych funkcji $u\colon (0,T) \to X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, z normą

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int\limits_0^T ||u(t)||^p_X\, dt\right)^{1/p} & \text{dla} \quad 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} ||u(t)||_X & \text{dla} \quad p = \infty. \end{cases}$$

C([0,T],X) – przestrzeń funkcji ciągłych $u\colon [0,T] \to X$, gdzie X jest przestrzenią Banacha, z normą

$$||u||_{C([0,T],X)} = \sup_{t\in[0,T]} ||u(t)||_X.$$

Ponadto będziemy używać przestrzeni Gevrey'a, ale do ich wprowadzenia potrzebne będą operatory zdefiniowane w następnym podrozdziale. Przestrzenie te wprowadzimy w podrozdziale 3.3, w którym przedstawimy dowód twierdzenia o istnieniu rozwiązań w przestrzeni Gevrey'a.

2.2 Operatory

W tym podrozdziale zdefiniujemy operatory, których będziemy używać w dalszym ciągu pracy oraz opiszemy ich podstawowe własności.

2.2.1 Operator Stokesa i $-\Delta$

Rozważmy problem Stokesa związany z okresowymi warunkami brzegowymi. Problem ten ma postać:

Dla danego $f \in \dot{\mathbb{H}}^0_{per}(Q)$ znaleźć $u \in \dot{\mathbb{H}}^1_{per}(Q)$ oraz $p \in L^2(Q)$ takie, że

$$-\Delta u + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot u = 0. \tag{2.1}$$

Ponieważ rozpatrujemy okresowe warunki brzegowe, więc możemy łatwo rozwiązać ten problem używając szeregów Fouriera. Wprowadźmy rozwinięcia funkcji u, p oraz f w szeregi Fouriera:

$$u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i k/L \cdot x} u_k, \qquad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i k/L \cdot x} f_k,$$

gdzie u_k i f_k należą do $\mathbb{R}^2$ oraz $f_0 = u_0 = 0$. Rozwinięcie p jest podobne

$$p = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i k/L \cdot x} p_k,$$

ale p jest funkcją skalarną, więc $p_k \in \mathbb{R}$. Ponadto mamy

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{2\pi i k/L \cdot x} |k|^2 u_k, \\ \nabla p &= \frac{2\pi i}{L} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} k e^{2\pi i k/L \cdot x} p_k. \end{aligned}$$

Porównując współczynniki rozwinięć fourierowskich w (2.1) otrzymujemy

$$\frac{4\pi^2 |k|^2}{L^2} u_k - \frac{2\pi i k}{L} p_k = f_k. \tag{2.2}$$

Warunek bezdywergentności u wygląda następująco

$$k \cdot u_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^2, \quad k \neq 0. \tag{2.3}$$

Biorąc iloczyn skalarny (2.2) z k i używając warunku (2.3), znajdujemy wzór na p_k

$$p_k = \frac{Lk \cdot f_k}{2\pi i |k|^2}, \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad k \neq 0. \tag{2.4}$$

Podstawiając (2.4) do (2.1) dostajemy

$$u_k = \frac{L^2}{4\pi^2 |k|^2} \left(f_k - \frac{(k \cdot f_k) k}{|k|^2} \right), \quad k \in \mathbb{Z}^2, \quad k \neq 0.$$

Zauważmy, że jeżeli $f \in H$, to $k \cdot f_k = 0$ dla każdego $k \in \mathbb{Z}^2$. Zatem $p = 0$ oraz

$$u_k = \frac{L^2}{4\pi^2 |k|^2} f_k.$$

W ten sposób jednoznacznie definiujemy przekształcenie $f \to u$ z H na $D(A) = \{u \in H, \Delta u \in H\} = \dot{\mathbb{H}}^2_{per} \cap H$. Jego odwrotność z $D(A)$ na H oznaczamy przez A. Tak zdefiniowany operator nazywamy operatorem Stokesa. W rzeczywistości $Au = -\Delta u$ dla każdego $u \in D(A)$ (por. [37], [43]).

Operator A^{-1} jest liniowy, ciągły z H w $D(A)$. Ponieważ zanurzenie $D(A)$ w H jest zwarte, więc możemy rozważać A^{-1} jako zwarty operator w H. Ponadto A^{-1} jako operator w H jest samosprzężony, więc posiada ciąg funkcji własnych w_j, $j \in \mathbb{N}$ który tworzy bazę ortonormalną w H

$$\begin{aligned} &Aw_j = \lambda_j w_j, \qquad w_j \in D(A), \\ &0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots, \qquad \lambda_j \to \infty \quad \text{dla} \quad j \to \infty, \end{aligned}$$

Przez A_1 będziemy oznaczać operator $-\Delta$ z dziedziną $D(A_1) = \dot{H}^2_{per} \cap \dot{H}^0_{per}$. Operator ten ma takie same własności jak operator Stokesa (przy założeniu $\nabla \cdot f = 0$). W szczególności operatory te mają takie same wartości własne. Wektory własne operatora A_1 będziemy oznaczać przez ρ_n.

Każdy element $u \in H$ oraz $\omega \in \dot{H}^0_{per}$ możemy zapisać w bazie wektorów własnych operatorów A i A_1, odpowiednio:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) w_k(x), \qquad \omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(t) \rho_k(x).$$

Operatory $A^{1/2} \colon V \to H$ oraz $A_1^{1/2} \colon \dot{H}^1_{per} \to \dot{H}^0_{per}$ definiujemy następująco

$$A^{1/2} u = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} u_k(t) w_k(x), \qquad A_1^{1/2} \omega(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1/2} \omega_k(t) \rho_k(x).$$

Niech $\bar{u} = (u, \omega) \in \mathcal{V}$. Operator $\mathcal{A}^{1/2} \colon \mathcal{V} \to \mathcal{H}$ definiujemy następująco $\mathcal{A}^{1/2} \bar{u} = (A^{1/2} u, A_1^{1/2} \omega)$.

Dla każdego $m \in \mathbb{N}$ rzuty Galerkina P_m (P_m^1) definiujemy jako rzuty prostopadłe z H ($\dot{H}^0_{per}$) na przestrzeń rozpiętą przez m pierwszych wektorów własnych operatora A (A_1) t.j. dla każdego $u \in H$ ($\omega \in \dot{H}^0_{per}$) mamy

$$P_m u(x,t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t) w_k(x), \qquad P_m^1 \omega(x,t) = \sum_{k=1}^{m} \omega_k(t) \rho_k(x),$$

gdzie $w_k(x)$ są funkcjami własnymi operatora Stokesa, a ρ_k operatora A_1. Rzuty $u \in H$, $\omega \in \dot{H}^0_{per}$ na harmoniki wyższe niż m oznaczamy przez $Q_m = I - P_m$ i $Q_m^1 = I - P_m^1$ odpowiednio:

$$Q_m u(x,t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} u_k(t) w_k(x), \quad Q_m^1 \omega(x,t) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \omega_k(t) \rho_k(x).$$

Zauważmy, że rzuty te komutują z operatorami A, A_1 oraz rot.

2.2.2 Formy trójllliniowe b i b_1

Najpierw zdefiniujmy następujące formy trójliniowe:

$$b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_Q u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \, dx$$

dla wszystkich $u, v, w \in V$ oraz

$$b_1(u,\omega,\psi) = \sum_{i=1}^{2} \int_Q u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \psi \, dx$$

dla każdego $u \in V$, oraz wszystkich funkcji skalarnych $\omega, \psi \in \dot{H}^1_{per}(Q)$. Formy b i b_1 mają następujące własności

$$\begin{aligned} b(u,v,w) &= -b(u,w,v) \quad &&\text{dla każdego} \quad u,v,w \in V, \\ b_1(u,\omega,\psi) &= -b_1(u,\psi,\omega) \quad &&\text{dla każdego} \quad u \in V \ \omega,\psi \in \dot{H}^1_{per}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Z powyższych równości wynika, że

$$b(u,v,v) = 0, \, b_1(u,\omega,\omega) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad u,v \in V, \ \omega \in \dot{H}^1_{per}. \tag{2.6}$$

W przypadku dwuwymiarowym z okresowymi warunkami brzegowymi forma b posiada jeszcze jedną ważną własność (por. [44])

$$b(u,u,Au) = 0 \quad \text{dla każdego} \quad u \in D(A), \tag{2.7}$$

której forma b_1 nie posiada t.j. nie jest prawdą, że $b_1(u,\omega,A_1\omega) = 0$ dla każdego $u \in D(A)$ i $\omega \in D(A_1)$.

W celu uzyskania oszacowań form trójliniowych będziemy używać nierówności Ładyżeńskiej [30]

$$||u||_{L^4} \leq \tilde{c}_1 |u|^{1/2} ||u||^{1/2}, \quad u \in \dot{H}^1_{per},$$

gdzie stała $\tilde{c}_1 \leq (6/\pi)^{1/4}$ (por. [22], [21]), nierówności Agmona [1]

$$||u||_{L^\infty} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} |u|^{1/2} |Au|^{1/2}, \quad u \in D(A),$$

(najlepszą stałą w tej nierówności uzyskano w [23]) oraz nierówności Höldera. Poniżej przedstawiamy oszacowania na formy b i b_1:

$$\begin{array}{ll} |b(u,v,w)| \leq c_1 |u|^{1/2} \|u\|^{1/2} \|v\| \cdot |w|^{1/2} ||w||^{1/2} & u, v, w \in V \\ |b(u,v,u)| \leq c_1 |u| \cdot ||u|| \cdot ||v|| & u, v \in V, \\ |b(u,v,Aw)| \leq c_1 |u|^{1/2} ||u||^{1/2} ||v||^{1/2} |Av|^{1/2} |Aw| & u \in V, \ v, w \in D(A), \\ |b_1(u,\omega,\psi)| \leq c_1 |u|^{1/2} ||u||^{1/2} |\psi|^{1/2} ||\psi||^{1/2} ||\omega|| & u \in V, \ \omega, \psi \in \dot{H}^1_{per}, \\ |b_1(u,\omega,A_1\psi)| \leq c_1 |u|^{1/2} |Au|^{1/2} ||\omega|| \cdot |A_1\psi| & u \in D(A), \ \omega \in \dot{H}^1_{per}, \ \psi \in D(A_1), \end{array} \tag{2.8}$$

dla pewnej stałej $c_1 \leq (6/\pi)^{1/2}$.

Z formami b i b_1 wiążemy funkcjonały $B\colon V \times V \to V'$ i $B_1\colon V \times \dot{H}^1_{per} \to \dot{H}^{-1}_{per}$, odpowiednio. Funkcjonały te definiujemy następująco:

$$(B(u,v), w) = b(u,v,w),$$

(w celu uproszczenia notacji będziemy piasć $B(u)$ zamiast $B(u,u)$) oraz

$$(B_1(u,\omega), \vartheta) = b_1(u,\omega,\vartheta).$$

Operator rot posiada następujące własności, które przydadzą się nam w dalszym ciągu pracy

$$\int_Q \operatorname{rot} u \cdot \omega \, dx = \int_Q \operatorname{rot} \omega \cdot u \, dx, \tag{2.9}$$

$$\int_Q |\operatorname{rot} \omega|^2 \, dx = ||\omega||^2, \tag{2.10}$$

$$\int_Q |\operatorname{rot} u|^2 \, dx = ||u||^2, \tag{2.11}$$

dla każdego $u \in V$ i $\omega \in \dot{H}^1_{per}$. Równości (2.9) i (2.10) dowodzi się bezpośrednio, dowód (2.11) opiera się na następujących tożsamościach: $\operatorname{rot}\operatorname{rot} u = \nabla \operatorname{div} u - \Delta u$ oraz $\operatorname{div} u = 0$.

Dzięki wprowadzeniu powyższych oznaczeń możemy napisać równania płynu mikropolarnego (1.18)-(1.20) z okresowym warunkiem brzegowym w wygodniejszej do pewnych rozważań postaci funkcjonalnej

$$\begin{aligned} &u_t + (\nu + \nu_r)Au + B(u) = 2\nu_r \operatorname{rot}\omega + f \\ &\omega_t + \alpha A_1\omega + B_1(u,\omega) + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g. \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.3 Lematy Gronwalla

W tym podrozdziale przedstawimy uogólnienia klasycznego lematu Gronwalla, które przydadzą się między innymi do pokazania istnienia globalnego atraktora oraz oszacowania liczby harmonik i węzłów determinujących. Dotyczą one nierówności

$$\frac{d\xi}{dt} \leq \gamma\xi + \beta.$$

Klasyczny lemat Gronwalla daje następujące ograniczenie na funkcję ξ dla $t \geq t_0$

$$\xi(t) \leq \xi(t_0)\exp\left(\int_{t_0}^{t} \gamma(\tau)\,d\tau\right) + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\exp\left(\int_{s}^{t}\gamma(\tau)\,d\tau\right)\,ds.$$

Taka nierówność jest przydatna gdy wartości t są ograniczone. Jednak gdy $t \to \infty$, powyższe oszacowanie jest nieodpowiednie ponieważ dopuszcza eksponencjalny wzrost funkcji ξ.

Pierwsze z poniższych uogólnień lematu Gronwalla osłabia warunki na β i γ w klasycznej nierówności Gronwalla aby można było wnioskować, że $\xi \to 0$ przy $t \to \infty$. Drugie, przy dodatkowych założeniach na γ i β, daje jednostajne w czasie oszacowanie na ξ.

Lemat 2.1 (Uogólniony lemat Gronwalla [17]). *Niech $\gamma = \gamma(t)$ i $\beta = \beta(t)$ będą lokalnie całkowalnymi, rzeczywistymi funkcjami określonymi na $[t_0, \infty)$, które spełniają poniższe warunki dla pewnego $T > 0$:*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \gamma(\tau)\,d\tau > 0, \tag{2.13}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \gamma^-(\tau)\,d\tau < \infty, \tag{2.14}$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} \beta^+(\tau)\,d\tau = 0, \tag{2.15}$$

gdzie $\gamma^-(t) = \max\{-\gamma(t), 0\}$, a $\beta^+(t) = \max\{\beta(t), 0\}$. Załóżmy, że $\xi = \xi(t)$ jest absolutnie ciągłą, nieujemną funkcją określoną $[t_0, \infty)$, która spełnia następującą nierówność prawie wszędzie na $[t_0, \infty)$:

$$\frac{d\xi}{dt} + \gamma\xi \leq \beta.$$

Wedy $\xi(t) \to 0$ *dla* $t \to \infty$.

Lemat 2.2 (Jednostajny lemat Gronwalla [44]). *Niech* ξ, γ *oraz* β *będą dodatnimi funkcjami spełniającymi nierówność*

$$\frac{d\xi}{dt} \leq \gamma\xi + \beta$$

w przedziale $[t_0, \infty)$. *Załóżmy, że funkcje* $\xi, \frac{d\xi}{dt}, \beta, \gamma$ *są lokalnie całkowalne w przedziale* $[t_0, \infty)$ *oraz istnieją stałe* a_1, a_2, a_3 *takie, że dla pewnego* r *oraz* t_1 *poniższe warunki są spełnione dla wszystkich* $t \geq t_1$:

$$\int_t^{t+r} \gamma(s)\, ds \leq a_1, \quad \int_t^{t+r} \beta(s)\, ds \leq a_2, \quad \int_t^{t+r} \xi(s)\, ds \leq a_3.$$

Wtedy dla wszystkich $t \geq t_1 + r$ *spełniona jest nierówność*

$$\xi(t) \leq \left(\frac{a_3}{r} + a_2\right) e^{a_1}.$$

2.4 Elementy analizy funkcjonalnej

W tym podrozdziale przedstawimy wykorzystywane w pracy twierdzenia analizy funkcjonalnej.

Lemat 2.3 ([37]). *Niech* $X = H, V$ *lub* V', $Y = \dot{H}^0_{per}, \dot{H}^1_{per}$ *lub* $\dot{H}^{-1}_{per}$ *oraz* $x \in X$, $y \in Y$, *wtedy*

$$\begin{aligned} ||P_n x||_X &\leq ||x||_X, \quad \text{oraz } P_n x \to x \text{ w } X,\\ ||P_n y||_Y &\leq ||y||_Y, \quad \text{oraz } P_n y \to y \text{ w } Y. \end{aligned}$$

Lemat ten jest oczywisty w kontekście szeregów Fouriera.

Twierdzenie 2.1 (Lions-Aubin [37]). *Niech* $X \subset\subset H \subset Y$ *będą przestrzeniami Banacha. Niech* X *będzie refleksywna. Załóżmy, że* u_n *jest ciągiem jednostajnie ograniczonym w* $L^2(0,T;X)$ *oraz że* $\frac{du_n}{dt}$ *jest jednostajnie ograniczone w* $L^p(0,T;Y)$ *dla pewnego* $p > 0$. *Wtedy istnieje podciąg, który jest silnie zbieżny w* $L^2(0,T;H)$.

Rozdział 3

Istnienie i jednoznaczność rozwiązań

W tym rozdziale udowodnimy twierdzenia o istnieniu i regularności rozwiązań równań płynu mikropolarnego. Pierwsze dwa będą dotyczyć istnienia słabych (Twierdzenie 3.1 str. 23) i silnych (Twierdzenie 3.2 str. 30) rozwiązań. Następnie pokażemy, że słabe rozwiązania są w istocie silne (Twierdzenie 3.3 str. 32). Ponadto wykażemy, że jeżeli siły i momenty działające na płyn są niezależne od czasu i analityczne względem zmiennej przestrzennej to rozwiązania są funkcjami analitycznymi względem zmiennej czasowej o wartościach w odpowiedniej przestrzeni Gevrey'a, czyli w szczególności są analityczne względem czasu i przestrzeni (Twierdzenie 3.4 str. 35).

3.1 Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności słabych rozwiązań

W tym podrozdziale udowodnimy twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności słabych rozwiązań. Najpierw zdefiniujmy co rozumiemy przez słabe rozwiązanie:

Definicja 3.1. *Niech $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H)$, $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^0_{per})$ oraz $u_0 \in H$, $\omega_0 \in \dot{H}^0_{per}$. Przez słabe rozwiązanie problemu* (1.18)-(1.20) *rozumiemy parę funkcji* (u, ω)

$$\begin{aligned} &u \in C([0,T]; H) \cap L^2(0,T; V) && \text{dla każdego } T > 0, \\ &\omega \in C([0,T]; \dot{H}^0_{per}) \cap L^2(0,T; \dot{H}^1_{per}) && \text{dla każdego } T > 0, \end{aligned}$$

taką, że $u(x,0) = u_0(x)$, $\omega(x,0) = \omega_0(x)$ i spełniającą poniższe tożsamości

$$\frac{d}{dt}(u(t), \varphi) + (\nu + \nu_r)(\nabla u(t), \nabla \varphi) + b(u(t), u(t), \varphi) = 2\nu_r(\operatorname{rot} \omega(t), \varphi) + (f, \varphi) \tag{3.1}$$

dla każdego $\varphi \in V$ oraz

$$\frac{d}{dt}(\omega(t), \psi) + \alpha(\nabla \omega(t), \nabla \psi) + b_1(u(t), \omega(t), \psi) + 4\nu_r(\omega(t), \psi) = 2\nu_r(\operatorname{rot} u(t), \psi) + (g(t), \psi) \tag{3.2}$$

dla każdego $\psi \in \dot{H}^1_{per}(Q)$*, w sensie dystrybucji skalarnych na* $(0, \infty)$.

Słabe rozwiązania równań płynu mikropolarnego istnieją przy słabszych założeniach na siły i momenty tzn. dla $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; V')$ i $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^{-1}_{per})$ (szacowania (3.16) i (4.14)) są podobne). Ze względu na późniejsze rozważania o silnych rozwiązaniach zdecydowaliśmy się założyć nieco więcej o siłach i momentach. Pokażemy również, że słabe rozwiązania z Definicji 3.1 są w istocie silne.

Twierdzenie 3.1. *Istnieje jednoznaczne rozwiązanie problemu* (1.18)-(1.20)*,* (1.21)*,* (1.22) *w sensie Definicji 3.1. Ponadto dla każdego* $t > 0$ *przekształcenie* $(u_0, \omega_0) \to (u(t), \omega(t))$ *jest ciągłe jako przekształcenie w* $H \times \dot{H}^0_{per}$*.*

Dowód. Dowód twierdzenia będziemy prowadzić metodą Faedo-Galerkina, mianowicie będziemy szukać przybliżonych rozwiązań równań (1.18) - (1.20) postaci

$$u_n(x,t) = \sum_{i=1}^{n} u_n^i(t) w_i(x), \quad \omega_n = \sum_{i=1}^{n} \omega_n^i(t) \rho_i(x),$$

gdzie $\{w_i\}$ jest bazą ortonormalną w H, a $\{\rho_i\}$ bazą ortonormalną w $\dot{H}^0_{per}$. Funkcje u_n oraz ω_n mają spełniać układ równań

$$\frac{du_n}{dt} + (\nu + \nu_r) A u_n + P_n B(u_n) = 2\nu_r P_n \operatorname{rot} \omega_n + P_n f, \tag{3.3}$$

$$\frac{d\omega_n}{dt} + \alpha A_1 \omega_n + P_n^1 B_1(u_n, \omega_n) + 4\nu_r \omega_n = 2\nu_r P_n^1 \operatorname{rot} u_n + P_n^1 g. \tag{3.4}$$

Ponieważ nieliniowość w układzie (3.3) - (3.4) spełnia lokalnie warunek Lipschitza, więc układ ten posiada jednoznaczne, lokalne w czasie rozwiązanie. Naszym celem jest pokazanie, że rozwiązania te są ograniczone w czasie oraz że ograniczenia te nie zależą od n.

W celu uzyskania niezależnych od n ograniczeń na normy u_n oraz ω_n w różnych przestrzeniach funkcyjnych mnożymy skalarnie równanie (3.3) przez u_n i otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n|^2 + (\nu + \nu_r)(A u_n, u_n) + (P_n B(u_n), u_n) = 2\nu_r (P_n^1 \operatorname{rot} \omega_n, u_n) + (P_n f, u_n). \tag{3.5}$$

Ponieważ $u_n \in P_n H$ oraz $b(u, v, v) = 0$ (por. (2.6)), więc mamy

$$\begin{aligned} (P_n B(u_n), u_n) &= (B(u_n), P_n u_n) = (B(u_n), u_n) = b(u_n, u_n, u_n) = 0, \\ (P_n \operatorname{rot} \omega_n, u_n) &= (\operatorname{rot} \omega_n, P_n u_n) = (\operatorname{rot} \omega_n, u_n). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Zatem możemy zapisać równanie (3.5) w postaci

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n|^2 + (\nu + \nu_r)||u_n||^2 = 2\nu_r (\operatorname{rot} \omega_n, u_n) + (f, u_n).$$

Korzystając z (2.9), (2.10), nierówności Poincaré

$$|u| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}||u||, \quad \forall u \in V, \tag{3.7}$$

gdzie $\lambda_1 = 4\pi^2/L^2$ jest pierwszą wartością własną operatora Stokesa, oraz nierówności Schwartza otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n|^2 + (\nu + \nu_r)||u_n||^2 \leq 2\nu_r|\omega_n| \cdot ||u_n|| + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}||u_n|| \cdot |f|. \tag{3.8}$$

Stosując nierówność Younga do wyrazów prawej strony (3.8) dostajemy

$$2\nu_r|\omega_n| \cdot ||u_n|| \leq \frac{\nu_r}{2}||u_n||^2 + 2\nu_r|\omega_n|^2$$

oraz

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}||u_n|| \cdot |f| \leq \frac{\nu}{2}||u_n||^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|f|^2.$$

Dzięki powyższym szacowaniom z (3.8) wnioskujemy, że

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n|^2 + \frac{\nu + \nu_r}{2}||u_n||^2 \leq 2\nu_r|\omega_n|^2 + \frac{1}{2\nu\lambda_1}|f|^2. \tag{3.9}$$

Teraz zajmiemy się równaniem (3.4), będziemy postępować podobnie jak z równaniem (3.3). Po pomnożeniu skalarnie (3.4) przez ω_n dostajemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega_n|^2 + \alpha(A_1\omega_n, \omega_n) + (P_n^1 B_1(u_n, \omega_n), \omega_1) + 4\nu_r|\omega_n|^2 = 2\nu_r(P_n^1 \operatorname{rot} u_n, \omega_n) + (P_n^1 g, \omega_n). \tag{3.10}$$

Podobnie jak w (3.6) mamy

$$(P_n^1 B_1(u_n, \omega_n), \omega_n) = (B_1(u_n, \omega_n), P_n^1\omega_n) = (B_1(u_n, \omega_n), \omega_n) = b_1(u_n, \omega_n, \omega_n) = 0,$$
$$(P_n^1 \operatorname{rot} u_n, \omega_n) = (\operatorname{rot} u_n, P_n^1\omega_n) = (\operatorname{rot} u_n, \omega_n).$$

Możemy zatem zapisać równanie (3.10) w postaci

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega_n|^2 + \alpha||\omega_n||^2 + 4\nu_r|\omega_n|^2 = 2\nu_r(\operatorname{rot} u_n, \omega_n) + (g, \omega_n). \tag{3.11}$$

Używając nierówności Schwatrza, Younga i Poincaré

$$|\omega| \leq ||\omega||/\sqrt{\lambda_1} \tag{3.12}$$

dla $\omega \in \dot{H}^1_{per}$ do wyrazów prawej strony dostajemy

$$2\nu_r|\omega_n| \cdot ||u_n|| \leq \frac{\nu_r}{2}||u_n||^2 + 2\nu_r|\omega_n|^2,$$
$$|g| \cdot |\omega_n| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|g| \cdot ||\omega_n|| \leq \frac{\alpha}{2}||\omega_n||^2 + \frac{1}{2\alpha\lambda_1}|g|^2.$$

Wstawiając powyższe oszacowania do (3.11) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega_n|^2 + \frac{\alpha}{2}||\omega_n||^2 + 2\nu_r|\omega_n|^2 \le \frac{\nu_r}{2}||u_n||^2 + \frac{1}{2\alpha\lambda_1}|g|^2. \tag{3.13}$$

Dodając nierówności (3.9) i (3.13) mamy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(|u_n|^2 + |\omega_n|^2\right) + \frac{\nu}{2}||u_n||^2 + \frac{\alpha}{2}||\omega_n||^2 \le \frac{1}{2\lambda_1}\left(\frac{1}{\nu}|f|^2 + \frac{1}{\alpha}|g|^2\right). \tag{3.14}$$

Oznaczmy

$$k_1 = \min\{\nu, \alpha\}, \qquad k_2 = k_1 \cdot \lambda_1. \tag{3.15}$$

Możemy zatem przepisać (3.14) w postaci

$$\frac{d}{dt}\left(|u_n|^2 + |\omega_n|^2\right) + k_1\left(||u_n||^2 + ||\omega_n||^2\right) \le \frac{1}{k_2}\left(|f|^2 + |g|^2\right). \tag{3.16}$$

Po scałkowaniu (3.16) w przedziale $(0, t)$ dostajemy

$$\begin{aligned} |u_n(t)|^2 + |\omega_n(t)|^2 + k_1 \int_0^T \left(||u_n(s)||^2 + ||\omega_n(s)||^2\right) ds \\ \le |u_n(0)|^2 + |\omega_n(0)|^2 + \frac{1}{k_2}\int_0^t \left(|f(s)|^2 + |g(s)|^2\right) ds. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ponieważ $|u_n(0)| = |P_n u(0)| \le |u(0)|$ oraz $|\omega_n(0)| = |P_n^1\omega(0)| \le |\omega(0)|$ (Lemat 2.3), więc otrzymujemy oszacowanie niezależne od n

$$|u_n(t)|^2 + |\omega_n(t)|^2 \le |u(0)|^2 + |\omega(0)|^2 + \frac{1}{k_2}\left(||f||^2_{L^2(0,T,H)} + ||g||^2_{L^2(0,T;L^2)}\right) =: M_1 \tag{3.18}$$

oraz

$$\int_0^T \left(||u_n(s)||^2 + ||\omega_n(s)||^2\right) ds \le M_1/k_1. \tag{3.19}$$

Zatem ciąg $\bar{u}_n = (u_n, \omega_n)$ jest ograniczony (jednostajnie ze względu na n) w $L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V})$. Możemy więc, korzystając z twierdzenia Banacha-Alaoglu (Tw. 4.18 w [37]), wybrać podciąg (w celu uproszczenia oznaczeń będziemy go dalej oznaczać przez $\bar{u}_n$ taki, że

$$\bar{u}_n \overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u} \quad \text{w} \quad L^\infty(0, T; \mathcal{H}).$$

Z ciągu $\bar{u}_n$ wybieramy (por. Wniosek 4.19 w [37]) podciąg, który w dalszym ciągu będziemy oznaczać $\bar{u}_n$ taki, że

$$\bar{u}_n \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{w} \quad L^2(0, T; \mathcal{V})$$

dla pewnego $\bar{u} \in L^\infty(0, T; \mathcal{H}) \cap L^2(0, T; \mathcal{V})$. Aby dowieść silnej zbieżności $\bar{u}_n \to \bar{u}$ w $L^2(0, T, \mathcal{H})$ wystarczy, że znajdziemy oszacowania na pochodne $\frac{du_n}{dt}$ w $L^2(0, T; V')$ oraz pochodne $\frac{d\omega_n}{dt}$

w $L^2(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})$. Zacznijmy od oszacowania wyrazów nieliniowych. Korzystając z własności (2.5) i oszacowań (2.8) otrzymujemy następującą nierówność

$$|b(u,v,w)| \le c_1 |u|^{1/2} ||u||^{1/2} |v|^{1/2} ||v||^{1/2} ||w||,$$

z której wynika, że

$$||B(u)||_{V'} \le c_1 |u| \cdot ||u||. \tag{3.20}$$

Z Lematu 2.3 mamy $||P_n B(u,v)||_{V'} \le ||B(u,v)||_{V'}$, zatem

$$||P_n B(u_n,u_n)||^2_{L^2(0,T;V')} \le \int_0^T ||B(u_n(s),u_n(s))||^2\, ds.$$

Dzięki oszacowaniu (3.20) z powyższej nierówności wnioskujemy, że

$$||P_n B(u_n,u_n)||^2_{L^2(0,T;V')} \le c_1 \int_0^T |u_n(s)|^2 ||u_n(s)||^2\, ds \le c_1 ||u_n||^2_{L^\infty(0,T;H)} ||u_n||^2_{L^2(0,T;V)}.$$

Ze względu na to, że u_n są ograniczone jednostajnie ze względu na n w przestrzeni $L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;V)$, otrzymujemy jednostajne ze względu na n oszacowanie $P_n B(u_n,u_n)$ w $L^2(0,T;V')$.

Teraz zajmiemy się formą B_1. Oszacowanie

$$|b_1(u,\omega,\psi)| \le c_1 |u|^{1/2} ||u||^{1/2} |\omega|^{1/2} ||\omega||^{1/2} ||\psi||,$$

implikuje następującą nierówność dla formy B_1

$$||B_1(u,\omega)||^2_{\dot{H}^{-1}_{per}} \le c_1 |u| \cdot |\omega| \cdot ||u|| \cdot ||\omega||. \tag{3.21}$$

Podobnie jak dla formy B, z Lematu 2.3 wynika, że

$$||P^1_n B_1(u_n,\omega_n)||_{\dot{H}^{-1}_{per}} \le ||B_1(u_n,\omega_n)||_{\dot{H}^{-1}_{per}}.$$

Z powyższej nierówności, przy użyciu oszacowania (3.21), wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} ||P^1_n B_1(u_n,\omega_n)||^2_{L^2(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})} &\le c_1 \int_0^T |u_n(s)| \cdot |\omega_n(s)| \cdot ||u_n(s)|| \cdot ||\omega_n(s)||\, ds \\ &\le \frac{c_1}{4} \int_0^T \left(|u_n(s)|^2 + |\omega_n(s)|^2\right) \cdot \left(||u_n(s)||^2 + ||\omega_n(s)||^2\right)\, ds \\ &\le \frac{c_1}{4} \left(||u_n||^2_{L^\infty(0,T;H)} + ||\omega_n||^2_{L^\infty(0,T;\dot{H}^0_{per})} \right) \\ &\quad \cdot \left(||u_n||^2_{L^2(0,T;V)} + ||\omega_n||^2_{L^2(0,T;\dot{H}^1_{per})} \right). \end{aligned} \tag{3.22}$$

Z oszacowań (3.18) oraz (3.19) wynika, że ciąg $\bar{u}_n$ jest ograniczony jednostajnie ze względu na n w $L^\infty(0,T;\mathcal{H}) \cap L^2(0,T;\mathcal{V})$. Zatem $P_n^1 B_1(u_n,\omega_n)$ jest ograniczony jednostajnie ze względu na n w $L^2(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})$. Oszacowanie wyrazów liniowych w $L^2(0,T;V')$ oraz $L^2(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})$ jest proste, więc nie będziemy go pisać.

Oszacowania na normy pochodnych $\frac{du_n}{dt}$ w przestrzeni $L^2(0,T;V')$ oraz pochodnych $\frac{d\omega_n}{dt}$ w przestrzeni $L^2(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})$ pozwalają na skorzystanie z Twierdzenia 2.1 i wyciągnięcie podciągu zbieżnego silnie w $L^2(0,T;\mathcal{H})$. Teraz pokażemy, że silna zbieżność (u_n,ω_n) daje nam słabą z * zbieżność formy B,

$$B(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} B(u) \quad \text{w } L^2(0,T;V').$$

Niech $w \in L^2(0,T;V)$. Mamy

$$\begin{aligned}\int_0^T b(u_n(t),u_n(t),w(t))\,dt &= -\int_0^T b(u_n(t),w(t),u_n(t))\,dt\\ &= -\sum_{i,j=1}^{2}\int_0^T\int_Q u_n^i(t)(D_i w_j(t))u_n^j(t))\,dx\,dt,\end{aligned}$$

gdzie u_n^i to i-ta współrzędna wektora u_n. Pokażemy, że

$$\int_0^T b(u_n,u_n,w)-b(u,u,w)\,dt = \sum_{i,j=1}^{2}\int_0^T\int_Q (u_n^i-u^i)(D_iw_j)u_j + u_n^i(D_iw_j)[u_n^j-u_j]\,dx\,dt$$

dąży do 0 gdy n dąży do ∞. Rozważmy wyrażenie postaci

$$E_n = \int_0^T\int_Q (v_n-v)wv_n\,dx\,dt, \tag{3.23}$$

gdzie $v_n \to v$ w $L^2(0,T;H)$, $w \in L^2(0,T;H)$ oraz v_n jest ograniczony w $L^\infty(0,T;H)$. Z (3.23) wnioskujemy, że

$$|E_n| \le ||v_n||_{L^\infty(0,T;H)}||w||_{L^2(0,T;H)}||v_n-v||_{L^2(0,T;H)}.$$

Pierwsze dwa czynniki po prawej stronie powyższej nierówności są ograniczone, trzeci dąży do 0, gdy $n\to\infty$. Możemy zatem stwierdzić, że $E_n \to 0$ dla $n\to\infty$, co implikuje zbieżność $B(u_n) \overset{*}{\rightharpoonup} B(u)$ w $L^2(0,T;V')$. W podobny sposób pokazujemy, że $B_1(u_n,\omega_n) \overset{*}{\rightharpoonup} B_1(u,\omega)$ w $L^2(0,T;\dot{H}^{-1}_{per})$.

Teraz udowodnimy, że nasze rozwiązanie spełnia warunek początkowy. Wybierzmy funkcję $\Phi \in C^1([0,T];V)$ taką, że $\Phi(T)=0$. Po pomnożeniu równania na u przez Φ i scałkowaniu wyniku na przedziale $[0,T]$ otrzymamy

$$\int_0^T (u'(t),\Phi(t))\,dt + (\nu+\nu_r)\int_0^T ((u(t),\Phi(t)))\,dt + \int_0^T b(u(t),u(t),\Phi(t))\,dt$$
$$= 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot}\omega(t),\Phi(t))\,dt + \int_0^T \langle f(t),\Phi(t)\rangle\,dt.$$

Po scałkowaniu przez części, dzięki warunkowi $\Phi(T)=0$, dostajemy

$$-\int_0^T (u(t),\Phi'(t))\,dt + (\nu+\nu_r)\int_0^T ((u(t),\Phi(t)))\,dt + \int_0^T b(u(t),u(t),\Phi(t))\,dt$$
$$= 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot}\omega(t),\Phi(t))\,dt + \int_0^T \langle f(t),\Phi(t)\rangle\,dt + (u(0),\Phi(0)).$$

Analogicznie traktujemy przybliżenia Galerkinowskie. Mamy więc

$$\int_0^T (u_n'(t),\Phi(t))\,dt + (\nu+\nu_r)\int_0^T ((u_n(t),\Phi(t)))\,dt + \int_0^T b(u_n(t),u_n(t),\Phi(t))\,dt$$
$$= 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot}\omega_n(t),\Phi(t))\,dt + \int_0^T \langle f(t),\Phi(t)\rangle\,dt$$

oraz

$$-\int_0^T (u_n(t),\Phi'(t))\,dt + (\nu+\nu_r)\int_0^T ((u_n(t),\Phi(t)))\,dt + \int_0^T b(u_n(t),u_n(t),\Phi(t))\,dt$$
$$= 2\nu_r \int_0^T (\operatorname{rot}\omega_n(t),\Phi(t))\,dt + \int_0^T \langle f(t),\Phi(t)\rangle\,dt + (u_n(0),\Phi(0)).$$

Ponieważ $u_n(0) = P_n u_0 \to u_0$ w L^2, więc $u(0) = u_0$. Postępując analogicznie można sprawdzić, że ω spełnia warunek początkowy.

Teraz wykażemy jednoznaczność rozwiązań i ciągłość przekształcenia $(u_0,\omega_0) \to (u(t),\omega(t))$ dla ustalonego $t>0$, gdzie $(u(t),\omega(t))$ jest jednoznacznym rozwiązaniem równań (3.1)-(3.2) z warunkiem początkowym (u_0,ω_0). Załóżmy, że istnieją dwa rozwiązania naszego problemu (u_1,ω_1) i (u_2,ω_2) z warunkami początkowymi (u_{01},ω_{01}) i (u_{02},ω_{02}), odpowiednio. Ich różnica $(u,\omega) = (u_1-u_2,\omega_1-\omega_2)$ spełnia równania

$$\begin{gathered} u_t - (\nu+\nu_r)\Delta u + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot}\omega + (u_2\cdot\nabla)u_2 - (u_1\cdot\nabla)u_1, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \omega_t - \alpha\Delta\omega + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + (u_2\cdot\nabla)\omega_2 - (u_1\cdot\nabla)\omega_1. \end{gathered} \tag{3.24}$$

Oznaczmy

$$f_1 = (u_2 \cdot \nabla)u_2 - (u_1 \cdot \nabla)u_1, \quad g_1 = (u_2 \cdot \nabla)\omega_2 - (u_1 \cdot \nabla)\omega_1. \tag{3.25}$$

Z równań (3.24), (3.25) oraz (3.16) wynika, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2\right) &+ 2k_1\left(||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2\right) \\ &\leq 2\left[(f_1, u) + (g_1, \omega)\right]. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Używając oszacowań (2.8) i antysymetryczności form b i b_1 (2.5), szacujemy prawą stronę nierówności (3.26) następująco

$$2(f_1, u) \leq 2|b(u, u_1, u)| \leq 2c_1|u| \cdot ||u|| \cdot ||u_1|| \leq \frac{k_1}{2}||u||^2 + \frac{2c_1^2}{k_1}|u|^2||u_1||^2 \tag{3.27}$$

oraz

$$\begin{aligned} 2(g_1, \omega) &= 2b_1(u, \omega_1, \omega) \\ &\leq 2c_1|u|^{1/2}||u||^{1/2}||\omega_1||^{1/2} \cdot ||\omega_1||^{1/2}|\omega|^{1/2}||\omega||^{1/2} \\ &\leq 2c_1^2|u| \cdot ||u|| \cdot ||\omega_1|| + \frac{1}{2}||\omega_1|| \cdot |\omega| \cdot ||\omega|| \\ &\leq \frac{k_1}{2}||u||^2 + \frac{2c_1^4}{k_1}||\omega_1||^2|u|^2 + k_1||\omega||^2 + \frac{1}{16k_1}||\omega_1||^2|\omega|^2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Nierówność (3.26) wraz z powyższymi oszacowaniami implikuje

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2\right) &+ k_1\left(||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2\right) \\ &\leq \frac{2c_1^2(c_1^2+1)+1}{k_1}\left\{||u_1(t)||^2 + ||\omega_1(t)||^2\right\}\left(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Używając lematu Gronwalla do (3.29), dostajemy

$$\begin{aligned} |u(t)|^2 + |\omega(t)|^2 \leq & \exp\left(\frac{2c_1^2(c_1^2+1)+1}{k_1}\int_0^t \left(||u_1(s)||^2 + ||\omega_1(s)||^2\right) ds\right) \\ & \cdot \left(|u(0)|^2 + |\omega(0)|^2\right). \end{aligned} \tag{3.30}$$

dla $0 \leq t \leq T$.

Aby udowodnić jednoznaczność rozwiązań zakładamy, że $(u_{01}, \omega_{01}) = (u_{02}, \omega_{02})$. Wtedy $|u(0)|^2 + |\omega(0)|^2 = 0$. Zatem z (3.30) wynika, że $|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2 = 0$ dla $t > 0$, co dowodzi jednoznaczności. Z nierówności (3.30) wynika również ciągłość dla ustalonego $t > 0$ przekształcenia $(u_0, \omega_0) \to (u(t), \omega(t))$ jako przekształcenia $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$. □

3.2 Istnienie silnych rozwiązań

Gdy rozpatrujemy przepływ dwuwymiarowy, możemy uzyskać gładsze rozwiązania przy tych samych założeniach na siły i momenty zewnętrzne, jeżeli zrobimy mocniejsze założenia na warunek początkowy: $(u_0, \omega_0) \in \mathcal{V}$ zamiast $(u_0, \omega_0) \in \mathcal{H}$.

Definicja 3.2. *Niech* $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H)$, $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^0_{per})$ *oraz* $u_0 \in V$, $\omega_0 \in \dot{H}^1_{per}$. *Przez silne rozwiązanie problemu* (1.18)-(1.20) *rozumiemy parę funkcji* (u, ω)

$$
\begin{aligned}
&u \in C([0,T]; V) \cap L^2(0,T; D(A)) && \textit{dla każdego } T > 0,\\
&\omega \in C([0,T]; \dot{H}^1_{per}) \cap L^2(0,T; D(A_1)) && \textit{dla każdego } T > 0,
\end{aligned}
$$

taką, że $u(x,0) = u_0(x)$, $\omega(x,0) = \omega_0(x)$ *i spełniającą poniższe równania*

$$\frac{d}{dt}u + (\nu + \nu_r)Au + B(u,u) = 2\nu_r \operatorname{rot}\omega + f$$

oraz

$$\frac{d}{dt}\omega + \alpha A_1 \omega + B_1(u,\omega) + 4\nu_r \omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g$$

jako równości w $L^2(0,T; H)$ *i* $L^2(0,T; \dot{H}^0_{per})$, *odpowiednio.*

Wykażemy istnienie silnych rozwiązań równań płynu mikropolarnego tzn. udowodnimy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3.2. *Niech* $(u_0, \omega_0) \in \mathcal{V}$, $(f, g) \in L^2_{loc}(0, \infty; \mathcal{H})$. *Wtedy słabe rozwiązania z Twierdzenia 3.1 spełniają dodatkowo*

$$(u, \omega) \in L^\infty(0,T; \mathcal{V}) \cap L^2(0,T; D(A) \times D(A_1))$$

oraz $(u, v) \in C([0,T]; \mathcal{V})$. *Ponadto rozwiązanie zależy w sposób ciągły w topologii* V *od danych początkowych.*

Dowód. Zauważmy, że jednoznaczność silnych rozwiązań wynika z jednoznaczności słabych rozwiązań, ponieważ silne rozwiązania są również słabymi rozwiązaniami.

Będziemy postępować podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia. Pomnóżmy skalarnie równanie (3.3) przez Au_n. Ponieważ $b(u,u,Au) = 0$, to

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||^2 + (\nu + \nu_r)|Au_n|^2 = 2\nu_r(\operatorname{rot}\omega_n, Au_n) + (f, Au_n). \tag{3.31}$$

Wyrazy prawej strony szacujemy następująco,

$$
\begin{aligned}
(f, Au_n) &\le \frac{\nu}{4}|Au_n|^2 + \frac{1}{\nu}|f|^2,\\
2\nu_r(\operatorname{rot}\omega_n, Au_n) &\le \nu_r|Au_n|^2 + \nu_r||\omega_n||^2.
\end{aligned}
$$

Po wstawieniu powyższych oszacowań do (3.31) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_n(t)||^2 + \frac{3}{4}\nu|Au_n|^2 \leq \nu_r||\omega_n||^2 + \frac{1}{\nu}|f|^2. \tag{3.32}$$

Teraz zajmiemy się równaniem na rotację. Po pomnożeniu równania (3.4) przez $A_1\omega_n$ dostajemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\omega_n||^2 + \alpha|A_1\omega_n|^2 &+ (P_n^1 B_1(u_n,\omega_n), A_1\omega_n) + 4\nu_r||\omega_n||^2 \\ &= 2\nu_r(\operatorname{rot} u_n, A_1\omega_n) + (g, A_1\omega_n).\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ponieważ A_1 komutuje z rzutem P_n^1, więc

$$(P_n^1 B_1(u_n,\omega_n), A_1\omega_n) = (B_1(u_n,\omega_n), A_1\omega_n) = b_1(u_n,\omega_n,A_1\omega_n).$$

Wyrazy prawej strony (3.33) szacujemy następująco

$$\begin{aligned}(g, A_1\omega_n) &\leq \frac{\alpha}{4}|A_1\omega_n|^2 + \frac{1}{\alpha}|g|^2,\\ 2\nu_r(\operatorname{rot} u_n, A_1\omega_n) &\leq \frac{\alpha}{4}|A_1\omega_n|^2 + \frac{4\nu_r^2}{\alpha}||u_n||^2.\end{aligned}$$

Pozostało nam jeszcze oszacować jeszcze wyraz nieliniowy. Zrobimy to używając (2.8) oraz nierówności Younga:

$$\begin{aligned}|b_1(u_n,\omega_n,A_1\omega_n)| &\leq c_1|u_n|^{1/2}|Au_n|^{1/2}||\omega_n||\cdot|A_1\omega_n|\\ &\leq \frac{\alpha}{4}|A_1\omega_n|^2 + \frac{c_1^2}{\alpha}|u_n|\cdot|Au_n|\cdot||\omega_n||^2\\ &\leq \frac{\alpha}{4}|A_1\omega_n|^2 + \frac{\nu}{4}|Au_n|^2 + \frac{c_1^4}{\nu\alpha^2}|u_n|^2||\omega_n||^4.\end{aligned}$$

Używając powyższych nierówności, z (3.33) wnioskujemy, że

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\omega_n||^2 + \frac{\alpha}{4}|A_1\omega_n|^2 + 4\nu_r||\omega_n||^2 \leq \frac{4\nu_r^2}{\alpha}||u_n||^2 + \frac{c_1^4}{\nu\alpha^2}|u_n|^2||\omega_n||^4 + \frac{1}{\alpha}|g|^2. \tag{3.34}$$

Po dodaniu stronami równań (3.32) i (3.34) mamy (dla $k_1 = \min(\nu,\alpha)$ jak w (3.15))

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(||u_n||^2 + ||\omega_n||^2\right) + \frac{k_1}{2}\left(|Au_n|^2 + |A_1\omega_n|^2\right) &\leq \frac{1}{k_1}\left(|f|^2 + |g|^2\right)\\ &\quad + \frac{8\nu_r^2}{\alpha}||u_n||^2 + \frac{c_1^4}{\nu\alpha^2}|u_n|^2||\omega_n||^4,\end{aligned} \tag{3.35}$$

co pociąga za sobą

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(||u_n||^2 + ||\omega_n||^2\right) + \frac{k_1}{2}\left(|Au_n|^2 + |A_1\omega_n|^2\right) &\leq \left(||u_n||^2 + ||\omega_n||^2\right)\\ &\cdot\left(\frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{2c_1^4}{\nu\alpha^2}|u_n|^2||\omega_n||^2\right) + \frac{2}{k_1}\left(|f|^2 + |g|^2\right).\end{aligned} \tag{3.36}$$

Ustalmy $T > 0$. Pomijając drugi wyraz lewej strony (3.36) i korzystając z lematu Gronwalla uzyskujemy oszacowanie normy rozwiązań w $L^\infty(0,T;\mathcal{V})$,

$$||u_n(T)||^2 + ||\omega_n(T)||^2 \leq \exp\left(\int_0^T \left(\frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{2c_1^4}{\nu\alpha^2}|u_n(s)|^2||\omega_n||^2\right) ds\right)$$
$$\cdot\left\{||u_n(0)||^2 + ||\omega_n(0)||^2 + \frac{2}{k_1}\int_0^T (|f(s)|^2 + |g(s)|^2)\, ds\right\}.$$

Wnioskujemy stąd, używając oszacowań na normy rozwiązań w $L^\infty(0,T;\mathcal{H})$ oraz w $L^2(0,T;\mathcal{V})$, że dla pewnego M_2 zachodzi

$$\sup_{t\in[0,T]} (||u_n(t)||^2 + ||\omega_n(t)||^2) \leq M_2. \tag{3.37}$$

Ustalmy $t \leq T$. Całkując równanie (3.36) w przedziale $(0,t)$, otrzymujemy

$$\begin{aligned}\frac{k_1}{2}\int_0^t (|Au_n(s)|^2 + |A\omega_n|^2)\, ds &\leq ||u_n(0)||^2 + ||\omega_n(0)||^2\\ &+\int_0^t \left\{\left(||u_n||^2 + ||\omega_n||^2\right)\left(\frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{2c_1^4}{\nu\alpha^2}|u_n|^2||\omega_n||^2\right) + \frac{2}{k_1}\left(|f|^2 + |g|^2\right)\right\} ds,\end{aligned} \tag{3.38}$$

co dzięki oszacowaniom na normę rozwiązań w $L^\infty(0,T;\mathcal{H})$ i $L^2(0,T;\mathcal{V})$ (nierówności (3.18) i (3.19)) oraz (3.37) implikuje, że norma rozwiązań w $L^2(0,T;D(A)\times D(A_1))$ jest skończona. Możemy zatem, podobnie jak w dowodzie poprzedniego twierdzenia, wybrać podciąg $\bar{u}_n = (u_n,\omega_n)$ taki, że

$$\begin{aligned}\bar{u}_n &\overset{*}{\rightharpoonup} \bar{u} \quad \text{w} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}),\\ \bar{u}_n &\rightharpoonup \bar{u} \quad \text{w} \quad L^2(0,T;D(A)\times D(A_1))\end{aligned}$$

do pewnego $\bar{u} \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \cap L^2(0,T;D(A)\times D(A_1))$. Argumenty podobne jak w poprzednim twierdzeniu pozwolą nam pokazać, że $\frac{d\bar{u}}{dt} \in L^2(0,T;\mathcal{H})$, co implikuje $\bar{u} \in C([0,T];\mathcal{V})$. □

Z powyższych twierdzeń można wysnuć następujący wniosek o regularności rozwiązań dla równań płynu mikropolarnego.

Twierdzenie 3.3. *Niech $f \in L^2(0,T;H)$, $g \in L^2(0,T,\dot{H}^0_{per})$. Dla każdego $u_0 \in H, \omega_0 \in \dot{H}^0_{per}$, $T > 0$ i ε z przedziału $(0,T)$ słabe rozwiązanie problemu* (1.18)-(1.20), (1.21), (1.22) *należy do przestrzeni*

$$\begin{aligned}u &\in C([\varepsilon,T];V) \cap L^2(\varepsilon,T;D(A)),\\ \omega &\in C([\varepsilon,T];\dot{H}^1_{per}) \cap L^2(\varepsilon,T;D(A_1)).\end{aligned}$$

Dowód. Załóżmy, że $\bar{u}_0 = (u_0, \omega_0) \in \mathcal{H}$. Z Twierdzenia 3.1 wynika, że rozwiązanie $\bar{u}(t) = (u(t), \omega(t)) \in L^2(0, T, \mathcal{V})$. To pociąga za sobą $\bar{u}(t) \in \mathcal{V}$ dla prawie wszystkich $t \in (0, T)$. Weźmy δ takie, że $0 < \delta < \varepsilon$ oraz $\bar{u}(\delta) \in \mathcal{V}$. Z Twierdzenia 3.2 wynika, że $\bar{u}(t) \in C([\delta, T]; \mathcal{V}) \cap L^2(\delta, T; D(A) \times D(A_1))$, co kończy dowód. □

3.3 Twierdzenie o istnieniu w klasach Gevrey'a

W tym podrozdziale, korzystając z metody kompleksyfikacji, udowodnimy, że jeżeli siły i momenty zewnętrzne są niezależne od czasu i należą do pewnej przestrzeni Gevreya to silne rozwiązania są analitycznymi funkcjami czasu o wartościach w innej przestrzeni Gevreya (Twierdzenie 3.4 str. 35).

W poprzednim podrozdziale pokazaliśmy (Twierdzenie 3.3), że równania płynu mikropolarnego mają własność regularyzacji rozwiązań tzn., dla dodatnich czasów rozwiązania są bardziej regularne niż warunki początkowe. Poniższe twierdzenie dotyczy silniejszej własności regularyzacji, mianowicie dla danych początkowych w $\mathcal{V}$, odpowiadające im rozwiązanie jest analityczną funkcją zarówno zespolonego czasu jak i przestrzeni. Ta regularyzacja jest globalna w tym sensie, że obszar analityczności zawiera całą dodatnią półoś czasu. Aby uzyskać analityczność względem zmiennej czasowej zaczniemy od przybliżeń Galerkinowskich, dla których jest ona oczywista - są to rozwiązania skończenie wymiarowego układu równań różniczkowych zwyczajnych z wielomianową nieliniowością. Wystarczy więc odpowiednie oszacowanie a priori żeby przejść do granicy.

Analityczność względem zmiennej przestrzennej jest uzyskana dzięki wykorzystaniu przestrzeni Gevreya. Zasadniczo pokazujemy, że rozwiązanie jest analityczną funkcją czasu o wartościach w przestrzeni Gevreya funkcji analitycznych względem zmiennej przestrzennej. Do uzyskania analityczności względem zmiennej przestrzennej musimy założyć, że siły i momenty są analityczne względem tej zmiennej. Dla uproszczenia założymy, że są one niezależne od czasu. Poniższe rozważania można uogólnić na siły i momenty zależne od czasu, przy założeniu, że f i g są analitycznymi funkcjami czasu w obszarze, który zostanie zdefiniowany w trakcie dowodu.

W celu pokazania analityczności rozwiązań musimy dokonać kompleksyfikacji zagadnienia, tzn. rozszerzyć rówania na zespolone "czasy" i wprowadzić zespolone odpowiedniki rozważanych przestrzeni i operatorów. Elementy zespolonych odpowiedników rzeczywistych przestrzeni mają postać $v = v_1 + iv_2$, gdzie $i = \sqrt{-1}$ jest jednostką urojoną a v_j należą do odpowiedniej przestrzeni rzeczywistej. Rozszerzone przestrzenie i operatory będziemy oznaczać przez dopisanie indeksu $\mathbb{C}$ do ich rzeczywistych odpowiedników. Iloczyn skalarny w $H_{\mathbb{C}}$ przyjmuje postać

$$(u,v)_{\mathbb{C}} = (u_1 + iu_2, v_1 + iv_2) = (u_1, v_1) + (u_2, v_2) + i[(u_2, v_1) - (u_1, v_2)]$$

i podobnie dla innych przestrzeni.

Musimy również rozszerzyć operatory liniowe A, A_1 oraz rot i dwuliniowe B i B_1. Przyjmują one postać

$$\begin{aligned} A_{\mathbb{C}} u &= Au_1 + iAu_2, \\ A_{1\mathbb{C}} u &= A_1 u_1 + iA_1 u_2, \\ \operatorname{rot}_{\mathbb{C}} u &= \operatorname{rot} u_1 + i \operatorname{rot} u_2 \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} B(u,v)_{\mathbb{C}} &= B(u_1, v_1) + B(u_2, v_2) + i[B(u_1, v_2) + B(u_2, v_1)], \\ B_1(u,\omega)_{\mathbb{C}} &= B_1(u_1, \omega_1) + B_1(u_2, \omega_2) + i[B_1(u_1, \omega_2) + B_1(u_2, \omega_1)]. \end{aligned}$$

Operator $A_{\mathbb{C}}$ ($A_{1\mathbb{C}}$) jest liniowym, samosprzężonym operatorem w $H_{\mathbb{C}}$ ($\dot{H}^0_{p\mathbb{C}}$) z dziedziną $D(A_{\mathbb{C}}) = D(A)_{\mathbb{C}}$ ($D(A_{1\mathbb{C}}) = D(A_1)_{\mathbb{C}}$). Niech $\bar{u} = (u, \omega) \in D(A_{\mathbb{C}}) \times D(A_{1\mathbb{C}})$, operator $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$ z dziedziną $D(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}) = D(A_{\mathbb{C}}) \times D(A_{1\mathbb{C}})$ definiujemy następująco $\mathcal{A}_{\mathbb{C}} \bar{u} = (A_{\mathbb{C}} u, A_{1\mathbb{C}} \omega)$.

Operatory $B_{\mathbb{C}} \colon V_{\mathbb{C}} \times V_{\mathbb{C}} \to V'_{\mathbb{C}}$ oraz $B_{1\mathbb{C}} \colon \dot{H}^1_{p\mathbb{C}} \times \dot{H}^1_{p\mathbb{C}} \to \dot{H}^{-1}_{p\mathbb{C}}$ są ciągłe dwuliniowe. Zespolone trójliniowe formy $b_{\mathbb{C}}$ i $b_{1\mathbb{C}}$ są zdefiniowane następująco

$$\begin{aligned} b(u,v,w)_{\mathbb{C}} &= (B(u,v)_{\mathbb{C}}, w)_{\mathbb{C}}, \\ b_1(u,\omega,\rho)_{\mathbb{C}} &= (B_1(u,\omega)_{\mathbb{C}}, \rho)_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Zauważmy, że $b(\cdot,\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ i $b_1(\cdot,\cdot,\cdot)_{\mathbb{C}}$ nie są antysymetryczne ze względu na dwie ostatnie współrzędne. Z tego powodu tracą one własność ortogonalności (2.6).

Rozpatrzmy rozwinięcie Fourierowskie pól prędkości i rotacji płynu

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x} u_k(t), \\ \omega(x,t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x} \omega_k(t), \end{aligned}$$

gdzie $k/L = (k_1/L, k_2/L)$. Operatory $e^{\tau A^{1/2}}$ oraz $e^{\tau A_1^{1/2}}$ definiujemy następująco:

$$\begin{aligned} e^{\tau A^{1/2}} u(x,t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau|k|} u_k(t), \\ e^{\tau A_1^{1/2}} \omega(x,t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} e^{-ik/L \cdot x + \tau|k|} \omega_k(t). \end{aligned}$$

Działanie tych operatorów to pomnożenie k-tej harmoniki Fourierowskiej przez $e^{\tau|k|}$.

Dla danych $\tau, s > 0$ przestrzeń Gevreya $D(e^{\tau \mathcal{A}^s})$ definiujemy następująco

$$D(e^{\tau \mathcal{A}^s}) = D(e^{\tau A^s}) \times D(e^{\tau A_1^s}),$$

gdzie

$$D(e^{\tau A^s}) = \left\{ u \in H \colon |e^{\tau A^s} u|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} e^{2\tau|j|^{2s}} |u_j|^2 < \infty \right\},$$
$$D(e^{\tau A_1^s}) = \left\{ \omega \in \dot{H}^0_{per} \colon |e^{\tau A_1^s} \omega|^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}^2} e^{2\tau|j|^{2s}} |\omega_j|^2 < \infty \right\}.$$

Z definicji normy w tych przestrzeniach wynika, że współczynniki rozwinięcia Fouriera funkcji z $D(e^{\tau A^s})$ lub $D(e^{\tau A_1^s})$ maleją eksponencjalnie do zera ze wzrostem k.

W przestrzeni $D(e^{\tau A^{1/2}})$ wprowadzamy iloczyn skalarny

$$(u,v)_\tau = (e^{\tau A^{1/2}} u, e^{\tau A^{1/2}} v)$$

oraz normę $|u|_\tau = (u,u)_\tau^{1/2}$. Normę i iloczyn skalarny w $D(e^{\tau A_1^{1/2}})$ wprowadzamy analogicznie i będziemy je oznaczać tak samo jak normę i iloczyn skalarny w $D(e^{\tau A^{1/2}})$.

Ponadto dla danych $\tau, s, \alpha > 0$ definiujemy przestrzenie $D(A^\alpha e^{\tau A^s})$ i $D(A_1^\alpha e^{\tau A_1^s})$ funkcji z $D(e^{\tau A^s})$ i $D(e^{\tau A^s})$, odpowiednio spełniających

$$|A^\alpha e^{\tau A^s} u|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2\alpha} e^{2\tau|k|^{2s}} |u_k|^2 < \infty,$$
$$|A_1^\alpha e^{\tau A_1^s} \omega|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} |k|^{2\alpha} e^{2\tau|k|^{2s}} |\omega_k|^2 < \infty.$$

W przestrzeni $D(A^{1/2} e^{\tau A^{1/2}})$ wprowadzamy iloczyn skalarny

$$((u,v))_\tau = (A^{1/2} e^{\tau A^{1/2}} u, A^{1/2} e^{\tau A^{1/2}} v)$$

i normę $\|\cdot\|_\tau$ przez niego indukowaną. Iloczyn skalarny i normę przestrzeni $D(A_1^{1/2} e^{\tau A_1^{1/2}})$ definiujemy analogicznie i oznaczamy tak samo.

Normę i iloczyn skalarny w $D(e^{\tau A^{1/2}}) \times D(e^{\tau A_1^{1/2}})$ będziemy oznaczać przez $|\cdot|_\tau$ i $(\cdot,\cdot)_\tau$. Te oznaczenia mogą się wydać mylące, ale z kontekstu będzie wynikać, czy mamy na myśli normę w $D(e^{\tau A^{1/2}})$, $D(e^{\tau A_1^{1/2}})$ czy w $D(e^{\tau A^{1/2}}) \times D(e^{\tau A_1^{1/2}})$.

Ponieważ zajmujemy się problemem z okresowym warunkiem brzegowym, więc operatory $A, e^{\tau A^{1/2}}, P_m$ oraz $A_1, e^{\tau A_1^{1/2}}, P_m^1$ komutują ze sobą.

Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem tego podrozdziału.

Twierdzenie 3.4. *Niech $\bar{u}(0) \in \mathcal{V}$, $G = (f,g) \in D(e^{\sigma_1 \mathcal{A}^{1/2}})$ dla pewnego $\sigma_1 > 0$. Wtedy istnieje czas $T_* > 0$, który zależy od sił i momentów działających na płyn oraz paramertów modelu i warunku początkowego $\bar{u}(0)$ poprzez jego normę w $\mathcal{V}$ takie, że zachodzi:*

(i) Równania (1.18) - (1.20) *posiadają jednoznaczne analityczne względem czasu rozwiązanie $\bar{u}(t)$, ciągłe z $[0,T_*]$ w $\mathcal{V}$, takie, że przekształcenie $t \to e^{\psi(t)\mathcal{A}^{1/2}} \mathcal{A}^{1/2} \bar{u}(t)$ (gdzie $\psi(t) = \min(t, \sigma_1, T_*)$) jest analityczne na $(0,T_*)$ o wartościach w $\mathcal{H}$.*

(ii) rozwiązanie $\bar{u}(t)$ jest analityczne na (T_*, ∞) o wartościach w $D(\mathcal{A}^{1/2}e^{\sigma\mathcal{A}^{1/2}})$ dla pewnego $\sigma > 0$ i T_* jak poprzednio.

Następujący lemat zapewni nam odpowiednie oszacowanie wyrazu nieliniowego.

Lemat 3.1. *[15] Niech $u, v, w \in D(Ae^{\tau A^{1/2}})$, $\omega, \rho \in D(A_1 e^{\tau A_1^{1/2}})$, $\tau > 0$ wtedy $B(u,v) \in D(e^{\tau A^{1/2}})$, $B_1(u,\omega) \in D(e^{\tau A_1^{1/2}})$ i dla pewnej stałej c_2 zachodzą poniższe oszacowania*

$$\begin{aligned}|(e^{\tau A^{1/2}}B(u,v), e^{\tau A^{1/2}}Aw)| &\le c_2 |e^{\tau A^{1/2}}A^{1/2}u|^{1/2} \cdot |e^{\tau A^{1/2}}Au|^{1/2} \\ &\cdot |e^{\tau A^{1/2}}A^{1/2}v| \cdot |e^{\tau A^{1/2}}Aw|, \\ |(e^{\tau A_1^{1/2}}B_1(u,\omega), e^{\tau A_1^{1/2}}A_1\rho)| &\le c_2 |e^{\tau A^{1/2}}A^{1/2}u|^{1/2} \cdot |e^{\tau A^{1/2}}Au|^{1/2} \\ &\cdot |e^{\tau A_1^{1/2}}A_1^{1/2}\omega| \cdot |e^{\tau A_1^{1/2}}A_1\rho|.\end{aligned}$$

Dowód. Pokażemy tylko oszacowanie formy B, ponieważ oszacowanie formy B_1 wyprowadza się tak samo. Oznaczmy

$$u = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} u_j e^{ijx}, \quad u_j^* = e^{\tau|j|}u_j, \quad u^* = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} u_j^* e^{ijx},$$

gdzie i jest jednostką urojoną. Będziemy używać podobnej notacji dla v, w. Patrząc na transformatę Fouriera formy B widzimy, że

$$(B(u,v), w) = L^2 i \sum_{j+k=l} (u_j \cdot k)(v_k \cdot \bar{w}_l),$$

gdzie $j, k, l \in \mathbb{Z}^2$, a $\bar{w}_l$ to sprzężenie w_l. Analogicznie

$$\begin{aligned}(e^{\tau A^{1/2}}B(u,v), e^{\tau A^{1/2}}w) &= L^2 i \sum_{j+k=l} (u_j \cdot k)(v_k \cdot \bar{w}_l)|l|^2 e^{2\tau|l|} \\ &= L^2 i \sum_{j+k=l} (u_j^* \cdot k)(v_k^* \cdot \bar{w}_l^*)|l|^2 e^{2\tau(|l|-|j|-|k|)}.\end{aligned}$$

Z nierówności trójkąta wynika, że $|l| - |j| - |k| = |j+k| - |j| - |k| \le 0$. Zatem

$$|(e^{\tau A^{1/2}}B(u,v), e^{\tau A^{1/2}}w)| \le L^2 \sum_{j+k=l} |u_j^*| \cdot |k| \cdot |v_k^*| \cdot |w_l^*| \cdot |l|^2. \tag{3.39}$$

Prawa strona (3.39) jest równa całce

$$\int_Q \xi(x)\psi(x)\theta(x)\,dx,$$

gdzie

$$\xi(x) = \sum_{j=\mathbb{Z}^2} |u_j^*|e^{ijx}, \quad \psi(x) = \sum_{k=\mathbb{Z}^2} |k| \cdot |v_k^*|e^{ikx}, \quad \theta(x) = \sum_{l=\mathbb{Z}^2} |l|^2|w_j^*|e^{ilx}.$$

Używając uogólnionej nierówności Höldera, szacując pierwszy wyraz w L^∞ a dwa następne w L^2 i używając nierówności Agmona dostajemy tezę:

$$\int_Q \xi(x)\psi(x)\theta(x)\,dx \leq ||\xi||_{L^\infty}||\psi||_{L^2}||\theta||_{L^2} \leq c_2|\xi(t)|^{1/2}|A\xi|^{1/2}|\psi|\cdot|\theta|$$
$$= c_2|e^{\tau A^{1/2}}A^{1/2}u|^{1/2}\cdot|e^{\tau A^{1/2}}Au|^{1/2}\cdot|e^{\tau A^{1/2}}A^{1/2}v|\cdot|e^{\tau A^{1/2}}Aw|.$$

□

Mając zapewnione odpowiednie oszacowanie wyrazów nieliniowych przejdźmy do dowodu Twierdzenia 3.4.

Dowód. Plan dowodu jest następujący: na początku zrobimy oszacowania *a priori*, w drugim kroku pokażemy, że aproksymacje Galerkinowskie są analitycznymi funkcjami czasu o wartościach w $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A})$, ostatni krok to przejście graniczne względem n.

Dla uproszczenia w trakcie dowodu będziemy oznaczać przestrzenie i operatory zespolone tak, jak ich rzeczywiste odpowiedniki. Równania (2.12) przepisują się bez zmian

$$\frac{du}{d\zeta} + (\nu+\nu_r)Au + B(u) = 2\nu_r \operatorname{rot}\omega + f, \tag{3.40}$$

$$\frac{d\omega}{d\zeta} + \alpha A_1\omega + B_1(u,\omega) + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \tag{3.41}$$

gdzie $\zeta = se^{i\theta}$, $s>0$ i $\cos\theta>0$ (żeby $\operatorname{Re}\zeta>0$).

Krok 1 (oszacowania a priori).

Oznaczmy $\varphi(t) = \min(t,\sigma_1)$. Iloczyn skalarny równania (3.40) z elementym $Au(se^{i\theta})$ w przestrzeni $D(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}})$, mnożymy przez $e^{-i\theta}$ i bierzemy część rzeczywistą całości. Mamy więc

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re} e^{-i\theta}\left(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}}\frac{du}{d\zeta}(se^{i\theta}), e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}}Au(se^{i\theta})\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(A^{1/2}\frac{d}{ds}\left(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}}u(se^{i\theta})\right) - e^{-i\theta}\varphi'(s\cos\theta)Au(se^{i\theta}), e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}}A^{1/2}u(se^{i\theta}\right)\\
&=\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|A^{1/2}u(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)} - \cos^2\theta\varphi'(s\cos\theta)|Au(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)}\cdot|A^{1/2}u(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)}
\end{aligned}$$

Używając nierówności Younga otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{ds}|A^{1/2}u(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)} - \cos^2\theta\varphi'(s\cos\theta)|Au(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)}\cdot|A^{1/2}u(se^{i\theta})|_{\varphi(s\cos\theta)}\\
&\geq \frac{1}{2}\frac{d}{ds}||u(se^{i\theta})||^2_{\varphi(s\cos\theta)} - \frac{\nu\cos\theta}{4}|Au(se^{i\theta})|^2_{\varphi(s\cos\theta)} - \frac{1}{\nu\cos\theta}||u(se^{i\theta})||^2_{\varphi(s\cos\theta)}.
\end{aligned}\tag{3.42}$$

Ponadto

$$\operatorname{Re} e^{-i\theta}\left(e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}}Au(se^{i\theta}),\ e^{\varphi(s\cos\theta)A^{1/2}}Au(se^{i\theta})\right) = \cos\theta|Au|^2_{\varphi(s\cos\theta)}.$$

Dla skrócenia zapisu opuścimy zależność funkcji u od "czasu", tzn. opuścimy s gdzie to tylko możliwe i będziemy pisać φ zamiast $\varphi(s\cos\theta)$. Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}||u||^2_\varphi + \left(\frac{3}{4}\nu + \nu_r\right)\cos\theta|Au|^2_\varphi - \frac{1}{\nu\cos\theta}||u||^2_\varphi \\ \leq \operatorname{Re} 2\nu_r e^{-i\theta}(\operatorname{rot}\omega, Au)_\varphi + \operatorname{Re} e^{-i\theta}(f, Au)_\varphi + \operatorname{Re} e^{-i\theta}(B(u), Au)_\varphi.\end{aligned} \tag{3.43}$$

Szacując w powyższej nierówności części rzeczywiste iloczynów skalarnych przez ilocyny norm, korzystając z Lematu 3.1 oraz nierówności Younga, mamy

$$\begin{aligned}2\nu_r\cos\theta|\operatorname{rot}\omega|_\varphi|Au|_\varphi + \cos\theta|f|_\varphi|Au|_\varphi + c_2\cos\theta||u||^{3/2}_\varphi|Au|^{3/2}_\varphi \\ \leq \nu_r\cos\theta|Au|^2_\varphi + \nu_r\cos\theta||\omega||^2_\varphi + \frac{\nu\cos\theta}{8}|Au|^2_\varphi + \frac{2}{\nu\cos\theta}|f|^2_\varphi \\ + \frac{7c_2^4}{(\nu\cos\theta)^3}||u||^6_\varphi + \frac{\nu\cos\theta}{4}|Au|^2_\varphi.\end{aligned}$$

Korzystając z powyższego oszacowania w (3.43) dostajemy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}||u||^2_\varphi + \frac{3}{8}\nu\cos\theta|Au|^2_\varphi \leq \frac{1}{\nu\cos\theta}||u||^2_\varphi + \nu_r\cos\theta||\omega||^2_\varphi \\ + \frac{2}{\nu\cos\theta}|f|^2_\varphi + \frac{7c_2^4}{(\nu\cos\theta)^3}||u||^6_\varphi.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Teraz zajmiemy się równaniem na mikrorotację. Iloczyn skalarny równania (3.41) przez $A_1\omega$ w $D(e^{\varphi(s\cos\theta)})$ mnożymy przez $e^{-i\theta}$ i bierzemy część rzeczywistą. Po oszacowaniach podobnych do (3.42) otrzymujemy

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re} e^{-i\theta}\left(e^{\varphi(s\cos\theta)A_1^{1/2}}\frac{d\omega}{d\zeta}(se^{i\theta}), e^{\varphi(s\cos\theta)A_1^{1/2}}A_1\omega(se^{i\theta})\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\frac{d}{ds}||\omega(s\cos\theta)||^2_{\varphi(s\cos\theta)} - \frac{\alpha\cos\theta}{4}|A_1\omega(s\cos\theta)|^2_{\varphi(s\cos\theta)} - \frac{1}{\alpha\cos\theta}||\omega(s\cos\theta)||^2_{\varphi(s\cos\theta)}.\end{aligned}$$

Ponownie skracamy zapis przez opuszczenie zależności od s

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}||\omega||^2_\varphi + \frac{3}{4}\alpha\cos\theta|A_1\omega|^2_\varphi + \left(4\nu_r - \frac{1}{\alpha\cos\theta}\right)||\omega||^2_\varphi \\ \leq \operatorname{Re} 2\nu_r e^{-i\theta}(\operatorname{rot} u, A_1\omega)_\varphi + \operatorname{Re} e^{-i\theta}(g, A_1\omega)_\varphi + \operatorname{Re} e^{-i\theta}(B_1(u,\omega), A_1\omega)_\varphi.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Wyrazy liniowe prawej strony (3.45) szacujemy następująco:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} 2\nu_r e^{-i\theta}(\operatorname{rot} u, A_1\omega)_\varphi \leq 2\nu_r\cos\theta|\operatorname{rot} u|_\varphi|A_1\omega|_\varphi \leq \frac{\alpha\cos\theta}{8}|A_1\omega|^2_\varphi + \frac{8\nu_r^2}{\alpha\cos\theta}||u||^2_\varphi, \\ \operatorname{Re} e^{-i\theta}(g, A_1\omega)_\varphi \leq \cos\theta(g, A_1\omega)_\varphi \leq \frac{\alpha\cos\theta}{8}|A_1\omega|^2_\varphi + \frac{2}{\alpha\cos\theta}|g|^2_\varphi,\end{aligned}$$

a formę B_1 szacujemy korzystając z Lematu 3.1 oraz nierówności Younga

$$\begin{aligned}\cos\theta(B_1(u,\omega),A_1\omega)_\varphi &\le c_2\cos\theta||u||_\varphi^{1/2}|Au|_\varphi^{1/2}||\omega||_\varphi|A_1\omega|_\varphi\\ &\le \frac{\alpha\cos\theta}{4}|A_1\omega|_\varphi^2+\frac{c_2^2\cos\theta}{\alpha}||u||_\varphi|Au|_\varphi||\omega||_\varphi^2\\ &\le \frac{\alpha\cos\theta}{4}|A_1\omega|_\varphi^2+\frac{\nu\cos\theta}{8}|Au|_\varphi^2+\frac{2c_2^4}{\nu\alpha^2\cos^3\theta}||u||_\varphi^2||\omega||_\varphi^4\\ &\le \frac{\alpha\cos\theta}{4}|A_1\omega|_\varphi^2+\frac{\nu\cos\theta}{8}|Au|_\varphi^2+\frac{2c_2^4}{\nu\alpha^2\cos^3\theta}\left(||u||_\varphi^6+||\omega||_\varphi^6\right).\end{aligned}$$

Dzięki powyższym oszacowaniom z (3.45) wnioskujemy, że

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{ds}||\omega||_\varphi^2+\frac{\alpha\cos\theta}{4}|A_1\omega|_\varphi^2-\frac{\nu\cos\theta}{8}|Au|_\varphi^2\\ &\quad\le\frac{2}{\alpha\cos\theta}|g|_\varphi^2+\frac{8\nu_r^2}{\alpha\cos\theta}||u||_\varphi^2+\frac{1}{\alpha\cos\theta}||\omega||_\varphi^2+\frac{2c_2^4}{\alpha^2\nu\cos^3\theta}\left(||u||_\varphi^6+||\omega||_\varphi^6\right).\end{aligned}\tag{3.46}$$

Dodając stronami nierówności(3.44) i (3.46) dostajemy (dla $k_1=\min(\nu,\alpha)$)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2\right)&+\frac{k_1\cos\theta}{4}\left(|Au|_\varphi^2+|A_1\omega|_\varphi^2\right)\\ &\le\frac{2}{k_1\cos\theta}\left(|f|_\varphi^2+|g|_\varphi^2\right)+\frac{8\nu_r^2+1}{k_1\cos\theta}\left(||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2\right)\\ &\quad+\frac{9c_2^4}{(k_1\cos\theta)^3}\left(||u||_\varphi^6+||\omega||_\varphi^6\right).\end{aligned}\tag{3.47}$$

Korzystając z nierówności Younga szacujemy wyraz z $||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2$ po prawej stronie następująco

$$\begin{aligned}\frac{8\nu_r^2+1}{k_1\cos\theta}\left(||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2\right)&\le\frac{8\nu_r^2+1}{k_1\cos\theta}\left(1+\frac{4}{9}||u||_\varphi^6+\frac{4}{9}||\omega||_\varphi^6\right)\\ &\le\frac{8\nu_r^2+1}{k_1\cos\theta}+\frac{8\nu_r^2+1}{2k_1\cos\theta}\left(||u||_\varphi^6+||\omega||_\varphi^6\right).\end{aligned}$$

Dzięki temu z (3.47) wynika, że

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\left(||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2\right)&\le\frac{4}{k_1\cos\theta}\left(|f|_\varphi^2+|g|_\varphi^2\right)+\frac{16\nu_r^2+2}{k_1\cos\theta}\\ &\quad+\frac{18c_2^4+k_1^2(8\nu_r^2+1)}{(k_1\cos\theta)^3}\left(||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2\right)^3\end{aligned}\tag{3.48}$$

i ostatecznie

$$\frac{dy}{ds}\le K_1y^3,\tag{3.49}$$

gdzie

$$\begin{aligned}y(s)&=1+||u||_\varphi^2+||\omega||_\varphi^2=1+|e^{\varphi(s\cos\theta)\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(se^{i\theta})|^2,\\ K_1&=\frac{4}{k_1\cos\theta}\left(|f|_\varphi^2+|g|_\varphi^2\right)+\frac{18c_2^4+k_1^2(16\nu_r^2+2)}{(k_1\cos\theta)^3}.\end{aligned}$$

Nierówność (3.49) pociąga za sobą $y(s) \leq 2y(0)$ tzn.

$$1 + |e^{\varphi(s\cos\theta)\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(se^{i\theta})|^2 \leq 2 + 2|\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(0)|^2 \tag{3.50}$$

lub równoważnie

$$1 + |\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(se^{i\theta})|_{\varphi}^2 \leq 2 + 2|\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(0)|^2$$

dla $\zeta = se^{i\theta} \in \Delta(\bar{u}_0)$, gdzie $\Delta(u_0)$ jest zbiorem tych $(s, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times (-\pi/2, \pi/2)$, dla których

$$0 \leq s \leq T_1(|\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(0)|) = \frac{1}{4}K_1(1 + |\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(0)|^2)^{-2}, \quad \cos\theta \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]. \tag{3.51}$$

To pokazuje, że jeżeli $\bar{u}(0) \in \mathcal{V}$ to $\bar{u}(se^{i\theta}) \in D(e^{\varphi(s\cos\theta)\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2})$ w podzbiorze $\mathbb{C}$ określonym w (3.51).

Krok 2 (aproksymacje Galerkinowskie)

Zauważmy, że operator $\mathcal{A}$ posiada ortonormalną rodzinę funkcji własnych $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots$ i odpowiadających im wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ takich, że

$$\begin{aligned} &0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \quad \to \infty, \\ &\bar{w}_j \in D(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Będziemy rozważać następujący zespolony układ równań różniczkowych w przestrzeni $W_m = span\{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m\}$ rozpiętej przez pierwszych m wektorów własnych operatora $\mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\zeta}\bar{u}_m + \mathcal{A}\bar{u}_m + \mathbb{P}_m\mathcal{B}(\bar{u}_m) + \mathcal{R}\bar{u}_m = \mathbb{P}_m G, \\ &\bar{u}_m(0) = \mathbb{P}_m\bar{u}(0), \end{aligned} \tag{3.52}$$

gdzie $\mathbb{P}_m \colon \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \to W_m$ jest rzutem ortogonalnym na przestrzeń rozpiętą przez m pierwszych wektorów własnych operatora $\mathcal{A}$. Z twierdzenia Cauchy'ego-Kowalewskiej ([26]) wynika, że powyższe równanie ma jednoznaczne analityczne rozwiązanie $\bar{u}_m$ w pewnym otoczeniu 0 na płaszczyźnie zespolonej. Dzięki oszacowaniu (3.50) mamy

$$1 + |e^{\varphi(s\cos\theta)\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}_m(se^{i\theta})|^2 \leq 2 + 2|\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(0)|^2 \tag{3.53}$$

dla $(s, \theta) \in \Delta(\bar{u}_0)$.

Krok 3 (dowód punktu *(ii)*)

Oznaczmy $\tau = \varphi(T_1/\sqrt{2})$. Ponieważ wiemy, że norma rozwiązania w $\mathcal{V}$ jest ograniczona jednostajnie ze względu na t: $|\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}(t)| \leq M_2$, $\forall t \geq 0$ (dla małych t gwarantuje nam to oszacowanie (3.37) a potem rozwiązanie wpada w zbiór pochłaniający w $\mathcal{V}$), więc możemy powtórzyć powyższe rozumowanie dla dowolnego czasu $t_0 > 0$. Z (3.53) wnioskujemy, że

$$1 + |e^{\tau \mathcal{A}^{1/2}} \mathcal{A}^{1/2} \bar{u}_m(T_2 e^{i\theta} + t_0)|^2 \leq 2(1 + M_2^2)$$

dla $t_0 > 0$, $\cos\theta \in [\sqrt{2}/2, 1]$ oraz

$$T_2 = T_2(M_2) = \frac{K_1}{4}(1 + M_2^2)^{-2}.$$

To pociąga za sobą

$$|e^{\tau \mathcal{A}^{1/2}} \mathcal{A}^{1/2} \bar{u}_m(\zeta)|^2 \leq 2(1 + M_2^2)$$

dla ζ w pasku

$$\blacksquare = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}\zeta > \frac{T_2}{\sqrt{2}}, \, |\operatorname{Im}\zeta| \leq \frac{T_2}{\sqrt{2}} \right\}.$$

Zauważmy, że $\blacksquare$ jest obszarem analityczności wszystkich $\bar{u}_m(\zeta)$. Wprowadźmy oznaczenia

$$\tilde{u} = e^{\tau A^{1/2}} u, \quad \tilde{\omega} = e^{\tau A_1^{1/2}} \omega, \quad \tilde{\bar{u}} = e^{\tau \mathcal{A}^{1/2}} \bar{u},$$

dla funckji $u \in D(e^{\tau A^{1/2}})$, $\omega \in D(e^{\tau A_1^{1/2}})$ oraz $\bar{u} \in D(e^{\tau \mathcal{A}^{1/2}})$. Ze wzoru całkowego Cauchy'ego mamy

$$\frac{d^k}{d\zeta^k} \tilde{\bar{u}}_m(\zeta) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|z-\zeta| = d/2} \frac{\tilde{\bar{u}}_m(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} \, dz,$$

gdzie $d = \operatorname{dist}(\zeta, \partial\blacksquare)$. Stąd wnioskujemy, że dla $\zeta \in \blacksquare$

$$\left| \mathcal{A}^{1/2} \frac{d^k}{d\zeta^k} \tilde{\bar{u}}_m(\zeta) \right| \leq \frac{k! 2^k}{d^k} \sup_{z \in \blacksquare} |\mathcal{A}^{1/2} \tilde{\bar{u}}(z)| \leq \frac{k! 2^{k+1}}{d^k}(1 + M_2^2).$$

Zatem dla każdego zbioru $K \subset\subset \blacksquare$ mamy

$$\left| \mathcal{A}^{1/2} \frac{d^k}{d\zeta^k} \tilde{\bar{u}}_m(\zeta) \right| \leq \frac{k! 2^{k+1}}{[\operatorname{dist}(K, \partial\blacksquare)]^k}(1 + M_2^2),$$

co implikuje

$$\sup_{\zeta \in K} |\mathcal{A}^{1/2} \frac{d^k}{d\zeta^k} \tilde{\bar{u}}_m(\zeta)| \leq C_1(K, M_2).$$

Wróćmy teraz do równania (3.52). Ponieważ

$$\frac{d}{d\zeta} \tilde{\bar{u}}_m + \mathcal{A} \tilde{\bar{u}}_m + \mathbb{P}_m \widetilde{\mathcal{B}(\bar{u}_m)} + \mathcal{R} \tilde{\bar{u}}_m = \mathbb{P}_m \tilde{G},$$

więc

$$|\mathcal{A} \tilde{\bar{u}}_m| \leq \left| \frac{d}{d\zeta} \tilde{\bar{u}}_m \right| + |\widetilde{\mathcal{B}(\bar{u}_m)}| + |\mathcal{R} \tilde{\bar{u}}_m| + |\tilde{G}|. \tag{3.54}$$

Prawą stronę powyższej nierówności szacujemy następująco (używając Lematu 3.1 oraz nierówności Younga i Poincaré)

$$
\begin{aligned}
|\widetilde{\mathcal{B}(\bar{u}_m)}| &\le c_2\left(|A^{1/2}\tilde{u}_m|^{3/2}\cdot|A\tilde{u}_m|^{1/2}+|A^{1/2}\tilde{u}_m|^{1/2}|A\tilde{u}_m|^{1/2}|A_1^{1/2}\tilde{\omega}_m|\right)\\
&\le \frac{1}{2}|\mathcal{A}\tilde{\bar{u}}_m|+c_3|\mathcal{A}^{1/2}\tilde{\bar{u}}_m|^3\\
|\mathcal{R}\tilde{\bar{u}}_m| &\le 2\nu_r|\operatorname{rot}\tilde{\omega}_m|+2\nu_r|\operatorname{rot}\tilde{u}_m|+4\nu_r|\tilde{\omega}_m|\\
&\le 4\nu_r|\mathcal{A}^{1/2}\tilde{\bar{u}}_m|+\frac{4\nu_r}{\sqrt{\lambda_1}}|A_1^{1/2}\tilde{\omega}_m|\\
&\le c_4|\mathcal{A}^{1/2}\tilde{\bar{u}}_m|.
\end{aligned}
$$

Wstawiając powyższe oszacowanie do (3.54) otrzymujemy

$$\sup_K|\mathcal{A}\tilde{\bar{u}}_m|\le c_5(K,M_2)$$

dla wszystkich $K\subset\subset\blacksquare$. Z powyższego oszacowania wynika, że dla każdego $\zeta\in K$ oraz $d=\operatorname{dist}(\zeta,\partial\blacksquare)$ zachodzi

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{A}\frac{d^k}{d\zeta^k}\tilde{\bar{u}}_m(\zeta)| &\le \frac{k!}{2\pi}\int_{|z-\zeta|=d/2}\frac{|\mathcal{A}\tilde{\bar{u}}_m|}{|z-\zeta|^{k+1}}\,dz\\
&\le \frac{2^k k!}{[\operatorname{dist}(K,\partial\blacksquare)]^k}\sup_{z\in K'}|\mathcal{A}\tilde{\bar{u}}(z)|,
\end{aligned}
$$

gdzie

$$K'=\{\zeta\in\blacksquare\colon\ \operatorname{dist}(\zeta,\partial\blacksquare)\le\frac{1}{2}\operatorname{dist}(K,\partial\blacksquare)\}.$$

Zatem

$$\sup_K|\mathcal{A}\frac{d^k}{d\zeta^k}\tilde{\bar{u}}_m|\le c_6(K,M_2), \tag{3.55}$$

co implikuje, że $\tilde{\bar{u}}_m$ jest funkcją analityczną o wartościach w $D(\mathcal{A})$.

Krok 4 (przejście do granicy)

Wybierzmy gęsty, przeliczalny podzbiór $\{\zeta_k\}\subset\blacksquare$. Z (3.55) wynika, że dla każdego ζ_k ciąg $\bar{u}_m(\zeta_k)$ jest ograniczony w $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A})$. Ponieważ zanurzenie $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A})\hookrightarrow D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2})$ jest zwarte, więc dla każdego k możemy wybrać podciąg $\bar{u}^k_{m_n}$, zbieżny w $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2})$. Korzystając z metody przekątniowej możemy wybrać podciąg, (który będziemy oznaczać przez $\bar{u}_m$) zbieżny we wszystkich punktach ζ_k. Z wektorowej wersji twierdzenia Vitaliego (Tw. 3.14.1 w [19]) wynika, że zbieżność ta jest jednostajna ze względu na ζ na wszystkich zwartych podzbiorach $\blacksquare$ i granica $\bar{u}$ jest funkcją analityczną o wartościach w $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2})$.

Zauważmy, że obcięcie $\bar{u}(\zeta)$ do osi rzeczywistej jest silnym rozwiązaniem z Twierdzenia 3.2. Stąd wynika, że $\bar{u}(\zeta)$ jest jednoznacznym analitycznym rozszerzeniem $\bar{u}(t)$, dla t rzeczywistych.

W związku z tym $\bar{u}(t)$ jest funkcją analityczną rzeczywistej zmiennej czasowej t o wartościach w $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2})$ dla $t > T_2(M_2)/\sqrt{2}$.

Krok 5 (dowód punktu *(i)*).

Z (3.50) wynika, że ciąg $e^{\varphi(s)\mathcal{A}^{1/2}}\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}_m(se^{i\theta})$ jest ograniczony jednostajnie ze względu na $se^{i\theta}$ w $\Delta(\bar{u}_0)$. Podobnie jak poprzednio możemy wybrać gęsty, przeliczalny podzbiór $s_k e^{i\theta_k}$ w $\Delta(\bar{u}_0)$, ponieważ zanurzenie $\mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$ jest zwarte, więc korzystając z metody przekątniowej możemy wybrać podciąg (który będziemy dalej oznaczać przez $\bar{u}_m$) taki, że

$$e^{\varphi(s_k)\mathcal{A}^{1/2}}\bar{u}_m(s_k e^{i\theta_k}) \to e^{\varphi(s)\mathcal{A}^{1/2}}\bar{u}(se^{i\theta}) \text{ w } \mathcal{H}$$

dla wszystkich k. Z twierdzenia Vitaliego wynika, że

$$e^{\varphi(s)\mathcal{A}^{1/2}}\bar{u}_m(se^{i\theta}) \to e^{\varphi(s)\mathcal{A}^{1/2}}\bar{u}(se^{i\theta}) \text{ w } \mathcal{H}$$

jednostajnie na zwartych podzbiorach $\Delta(\bar{u}_0)$ i $e^{\varphi(s)\mathcal{A}^{1/2}}\bar{u}(se^{i\theta})$ jest funkcją analityczną o wartościach w $\mathcal{H}$. To kończy dowód twierdzenia dla $T_* = T_2$ i $\sigma = \min(\sigma_1, T_1(\mathcal{A}^{1/2}\bar{u}_0)/\sqrt{2})$. $\square$

Rozdział 4

Opis asymptotycznego zachowania się rozwiązań za pomocą skończonej liczby parametrów

Koncepcja adekwatnego opisu przepływu płynu (układu nieskończenie wymiarowego) za pomocą skończonej liczby parametrów wywodzi się z hipotezy, że szybko zmieniające się harmoniki o dużej liczbie falowej w przepływie turbulentnym zanikają tak szybko, że nie mają wpływu na harmoniki o mniejszej liczbie falowej. Z teorii Kołmogorowa [27, 28] wynika, że w trójwymiarowym przepływie turbulentnym wystarczy rozważać harmoniki o liczbach falowych mniejszych niż $\kappa_d = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$. Jest to granica pomiędzy zakresem inercyjnym, w którym dominuje człon inercyjny równania i zakresem dyssypatywnym, w którym dominuje człon lepkościowy. Jak wyjaśniono w [32] powższy problem redukuje się do znalezienia liczby kostek potrzebnych do opisania przepływu płynu np. w kostce o boku długości l_0. Najmniejsza długość boku kostki jaką musimy rozważać to $l_d = 1/\kappa_d$, więc liczba rozważanych elementów objętości wynosi $(l_0/l_d)^3$.

Teoria Kraichnana [29], odnosząca się do dwuwymiarowych przepływów turbulentnych, pozwala na oszacowanie liczby kostek jako $(l_0/\lambda_{Kr})^2$, gdzie λ_{Kr} jest długością Kraichnana $\lambda_{Kr} = (\nu^3/\chi)^{1/6}$, a χ jest średnią dyssypacją enstrofii. Dokładna dyskusja o skalach długości w przepływach turbulentnych znajduje się w książce [7].

W tym rozdziale zajmiemy się trzema sposobami opisu dynamiki płynu przy pomocy skończonej liczby parametrów. Najpierw ograniczymy się do układu autonomicznego i pokażemy istnienie atraktora oraz oszacujemy jego *wymiar*. Następnie będziemy rozpatrywać układ nieautonomiczny i oszacujemy liczbę *harmonik* oraz *węzłów determinujących*. Na końcu połączymy rozważania dotyczące atraktora, rozwiązań analitycznych oraz węzłów determinujących i pokażemy, że można wyznaczyć jednoznacznie trajektorię na atraktorze znając wartości prędkości i rotacji cząstek tylko w pewnej (zależnej od wymiaru fraktalnego atraktora) liczbie punktów w obszarze przepływu - węzłów natychmiastowo determinujących (*instantanously determining nodes*). Pokażemy ponadto, że węzły te są determinujące w sensie asymptotycznym.

Zanim jednak zaczniemy dalsze rozważania musimy wyprowadzić pewne oszacowania aprioryczne.

4.1 Dalsze oszacowania a priori

W tym podrozdziale wyprowadzimy oszacowania *a priori* na normy oraz na średnie norm rozwiązań w różnych przestrzeniach. Oszacowania te będą zależały od asymptotycznej wielkości sił i momentów, mierzonej w normach L^2 i H^{-1}. Oznaczmy

$$\tilde{F} = \limsup_{t\to\infty} \left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)^{1/2} \quad \text{oraz} \quad \tilde{F}_{-1} = \limsup_{t\to\infty} \left(||f(t)||^2_{\mathbb{H}^{-1}} + ||g(t)||^2_{H^{-1}}\right)^{1/2}. \tag{4.1}$$

Niech (u,ω) będzie rozwiązaniem równań (1.18)-(1.20). Z nierówności (3.16) i nierówności Poincaré wnioskujemy, że

$$\frac{d}{dt}(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2) + k_2\left(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2\right) \leq k_2^{-1}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right). \tag{4.2}$$

Z oszacowania (4.2) i nierówności Gronwalla otrzymujemy oszacowanie na normę rozwiązania dla dużych czasów,

$$\begin{aligned}
|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2 \leq & e^{-k_2(t-t_0)}\Bigg\{|u(t_0)|^2 + |\omega(t_0)|^2 \\
& + k_2^{-1}\int_{t_0}^{t}\left(|f(s)|^2 + |g(s)|^2\right)e^{k_2(s-t_0)}\,ds\Bigg\} \\
\leq & e^{-k_2(t-t_0)}\Bigg\{|u(t_0)|^2 + |\omega(t_0)|^2 \\
& + k_2^{-1}\int_{t_0}^{t}\left(||f||^2_{L^\infty(t_0,t;H)} + ||g||^2_{L^\infty(t_0,t;\dot{H}^0_{per})}\right)e^{k_2(s-t_0)}\,ds\Bigg\} \\
\leq & e^{-k_2(t-t_0)}\Bigg\{|u(t_0)|^2 + |\omega(t_0)|^2 \\
& + k_2^{-2}\left(||f||^2_{L^\infty(t_0,t;H)} + ||g||^2_{L^\infty(t_0,t;\dot{H}^0_{per})}\right)\left(e^{k_2(t-t_0)} - 1\right)\Bigg\} \\
\leq & e^{-k_2(t-t_0)}\left(|u(t_0)|^2 + |\omega(t_0)|^2\right) \\
& + k_2^{-2}\left(1 - e^{-k_2(t-t_0)}\right)\left(||f||^2_{L^\infty(t_0,t;H)} + ||g||^2_{L^\infty(t_0,t;\dot{H}^0_{per})}\right).
\end{aligned}$$

Zatem dla t_0 i t odpowiednio dużych mamy

$$|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2 \leq \frac{2}{k_2^2}\tilde{F}^2. \tag{4.3}$$

Naszym następnym celem jest oszacowanie średniej względem czasu kwadratu normy rozwiązań w $\mathcal{V}$, tj. wielkości $\frac{1}{T}\int_t^{t+T}(||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2)\,ds$. Ponownie użyjemy nierówności (3.16). Po scałkowaniu jej na przedziale $(t, t+T)$ dostajemy

$$\begin{aligned} |u(t+T)|^2 + |\omega(t+T)|^2 + & k_1 \int_t^{t+T} \left(||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2\right) ds \\ & \leq k_2^{-1} \int_t^{t+T} \left(|f(s)|^2 + |g(s)|^2\right) ds + |u(t)|^2 + |\omega(t)|^2. \end{aligned}$$

Ponieważ funkcja $|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2$ jest ograniczona jednostajnie ze względu na t (szacowanie (3.18)), więc dla t i T odpowiednio dużych mamy

$$\begin{aligned} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} (||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2)\,ds \leq & (k_1 k_2)^{-1}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} (|f(s)|^2 + |g(s)|^2)\,ds \\ & + \frac{1}{T}\left(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2\right) \leq \frac{2}{k_1 k_2}\tilde{F}^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

W celu jednostajnego oszacowania normy rozwiązań w $\mathcal{V}$ będziemy rozważać nierówność (3.36), z której wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(||u||^2 + ||\omega||^2\right) + & \frac{k_1}{2}\left(|Au|^2 + |A_1\omega|^2\right) \leq \frac{2}{k_1}\left(|f|^2 + |g|^2\right) \\ & + \left(||u||^2 + ||\omega||^2\right)\left(\frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{2c_1^4}{\nu\alpha^2}|u|^2||\omega||^2\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Oznaczmy

$$\begin{aligned} y(t) &= ||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2, \\ \tilde{g}(t) &= \left(\frac{2c_1^4}{\alpha^2\nu}|u(t)|^2||\omega(t)||^2 + \frac{8\nu_r^2}{\alpha}\right), \\ \tilde{h}(t) &= \frac{2}{k_1}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right). \end{aligned}$$

Dzięki tym oznaczeniom możemy przepisać nierówność (4.5) w postaci

$$\frac{dy}{dt} \leq \tilde{g}y + \tilde{h}.$$

Teraz sprawdzimy założenia jednostajnego lematu Gronwalla (Lemat 2.2) . Dla t_0 odpowiednio dużych i $r = 1$ spełnione są poniższe nierówności

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_0+1} \tilde{g}(s)\,ds \le& \int_{t_0}^{t_0+1} \left\{ \frac{2c_1^4}{\alpha^2\nu} \left(|u(s)|^2 + |\omega(s)|^2\right) \left(||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2\right) + \frac{8\nu_r^2}{\alpha} \right\} ds \\
\le& \frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{4c_1^4}{\alpha^2\nu k_2^2}\tilde{F}^2 \int_{t_0}^{t_0+1} \left(||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2\right) ds \\
\le& \frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{8c_1^4}{\alpha^2\nu k_1 k_2^3}\tilde{F}^4 \equiv a_1, \\
\int_{t_0}^{t_0+1} \tilde{h}(s)\,ds \le& \frac{3}{k_1}\tilde{F}^2 \equiv a_2, \\
\int_{t_0}^{t_0+1} y(s)\,ds \le& \frac{2}{k_2^2}\tilde{F}^2 \equiv a_3.
\end{aligned}$$

Założenia są spełnione, więc dla każdego $t > t_0 + 1$, mamy

$$||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 \le \frac{2 + 3k_2}{k_1 k_2}\tilde{F}^2 \exp\left(\frac{8\nu_r^2}{\alpha} + \frac{8c_1^4}{\alpha^2\nu k_1 k_2^3}\tilde{F}^4\right). \tag{4.6}$$

Dla uproszczenia zapisu oznaczmy

$$\hat{c}_1 = \frac{2 + 3k_2}{k_1 k_2}, \quad \hat{c}_2 = \frac{8\nu_r^2}{\alpha}, \quad \hat{c}_3 = \frac{8c_1^4}{\alpha^2\nu k_1 k_2^3}, \tag{4.7}$$

i zapiszmy nierówność (4.6) w bardziej zwartej postaci

$$||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 \le \hat{c}_1\tilde{F}^2 \exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4\right). \tag{4.8}$$

Następne oszacowanie, które chcemy wyprowadzić to oszacowanie średniej kwadratu normy w $D(A) \times D(A_1)$. Całkując nierówność (4.5) w przedziale $(t, t+T)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
&||u(t+T)||^2 + ||\omega(t+T)||^2 - ||u(t)||^2 - ||\omega(t)||^2 + \frac{k_1}{2}\int_t^{t+T} \left(|Au(s)|^2 + |A_1\omega(s)|^2\right) ds \\
&\le \int_t^{t+T} \left\{ \left(\frac{2c_1^4}{\alpha^2\nu}|u(t)|^2||\omega(t)||^2 + \frac{8\nu_r}{\alpha}\right)\left(||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2\right) + \frac{2}{k_1}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right) \right\} ds.
\end{aligned}$$

Korzystając z oszacowań (3.18), (4.4) i (4.8), szacując pierwszy składnik iloczynu pod całką od góry, z powyższej nierówności wnioskujemy, że dla t i T odpowiednio dużych zachodzi

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T} (|Au(s)|^2 + |A_1\omega(s)|^2)\,ds \le \left(\frac{5}{k_1^2} + \frac{32\nu_r^2}{k_1^2 k_2 \alpha}\right)\tilde{F}^2 + \frac{16c_1^4\hat{c}_1}{\nu\alpha^2 k_1^4 k_2}\tilde{F}^6 \exp(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4). \tag{4.9}$$

Do zbadania, jak rozkład sił i momentów na harmonikach wpływa na oszacowanie liczby harmonik determinujących będziemy potrzebować jeszcze jednego oszacowania. Biorąc iloczyn skalarny (1.18) z u w H otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|^2 + (\nu+\nu_r)||u||^2 = 2\nu_r(\operatorname{rot}\omega, u) + (f, u), \tag{4.10}$$

ponieważ $b(u, u, u) = 0$. Wyrazy prawej strony (4.10) szacujemy następująco

$$\begin{aligned} 2\nu_r(\operatorname{rot}\omega, u) = 2\nu_r(\omega, \operatorname{rot} u) \le 2\nu_r|\omega|\cdot||u|| \le 2\nu_r|\omega|^2 + \frac{\nu_r}{2}||u||^2,\\ (f,u) \le ||f||_{V'}||u|| \le \frac{\nu}{2}||u||^2 + \frac{1}{2\nu}||f||^2_{V'}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Równaniem (1.20) zajmiemy się w podobny sposób, mianowicie pomnóżmy je przez ω i scałkujmy po Q. Dostaniemy wtedy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\omega|^2 + \alpha||\omega||^2 + 4\nu_r|\omega|^2 = 2\nu_r(\operatorname{rot} u, \omega) + (g, \omega), \tag{4.12}$$

ponieważ $b_1(u, \omega, \omega) = 0$. Wyrazy prawej strony (4.12) szacujemy w następujący sposób

$$\begin{aligned} 2\nu_r(\operatorname{rot} u, \omega) \le 2\nu_r|\omega|^2 + \frac{\nu_r}{2}||u||^2,\\ (g,\omega) \le ||g||_{\dot{H}^{-1}_{per}}||\omega|| \le \frac{\alpha}{2}||\omega||^2 + \frac{1}{2\alpha}||g||^2_{\dot{H}^{-1}_{per}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Dodając równania (4.10) i (4.12), używając oszacowań (4.11) i (4.13) wnioskujemy, że

$$\frac{d}{dt}\left(|u|^2 + |\omega|^2\right) + k_1\left(||u||^2 + ||\omega|^2\right) \le \frac{1}{k_1}\left(||f||^2_{V'} + ||g||^2_{\dot{H}^{-1}_{per}}\right). \tag{4.14}$$

Zauważmy, że (4.14) wygląda podobnie do (4.2), więc postępując podobnie jak przy wyprowadzaniu (4.3) dla t i T odpowiednio dużych otrzymujemy

$$\frac{1}{T}\int_t^{t+T}(||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2)\,ds \le \frac{2}{k_1^2}\tilde{F}^2_{-1}. \tag{4.15}$$

To było ostatnie oszacowanie potrzebne w dalszym ciągu pracy.

Zbieżmy powyższe oszacowania w jeden lemat:

Lemat 4.1. *Niech $u_0 \in H$, $\omega_0 \in \dot{H}^0_{per}$ oraz $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; H) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; H)$, $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^0_{per}) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \dot{H}^0_{per})$ dla każdego $T > 0$. Wtedy rozwiązanie układu (1.18) - (1.20) z warunkiem* *brzegowym* (1.22) *spełnia, dla t i T odpowiednio dużych, następujące nierówności:*

$$|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2 \leq \frac{2}{k_2^2}\tilde{F}^2, \tag{4.16}$$

$$||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 \leq \hat{c}_1 \tilde{F}^2 \exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3 \tilde{F}^4\right), \tag{4.17}$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} (||u(s)||^2 + ||\omega(s)||^2)\, ds \leq \frac{2}{k_1 k_2}\tilde{F}^2, \tag{4.18}$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} (||u(s)||^2 + ||\omega(s))||^2)\, ds \leq \frac{2}{k_1^2}\tilde{F}_{-1}^2, \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} (|Au(s)|^2 + |A\omega(s)|^2)\, ds \leq \left(\frac{5}{k_1^2} + \frac{32\nu_r^2}{\alpha k_1^2 k_2}\right)\tilde{F}^2 + \frac{16C\hat{c}_1}{\alpha^2 \nu k_1^2 k_2^3}\tilde{F}^6 \exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3 \tilde{F}^4\right), \tag{4.20}$$

gdzie stałe $\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3$ zostały zdefiniowane w (4.7)*, $k_1 = \min(\nu, \alpha)$, $k_2 = k_1\lambda_1$, a $\tilde{F}$ i $\tilde{F}_{-1}$ w* (4.1)*.*

Oszacowania (4.17) oraz (4.20) są podobne (eksponencjalnie zależą od wielkości sił) do analogicznych oszacowań dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu, wyprowadzonych w [43]. Jest to spowodowane tym, że forma b_1 w równaniu z okresowym warunkiem brzegowym podobnie jak forma b w równaniu z warunkiem Dirichleta nie posiada własności ortogonalności (2.7). W związku z tym wyraz nieliniowy nie znika i, aby otrzymać powyższe oszacowania, trzeba użyć nierówności Gronwalla.

4.2 Istnienie globalnego atraktora i oszacowanie jego wymiaru

Atraktor globalny jest zwartym zbiorem niezmienniczym w przestrzeni fazowej, który przyciąga wszystkie trajektorie układu. Dzięki "Lematowi o cieniu" (Proposition 10.14 w [37]) dla dowolnej trajektorii u, $\varepsilon > 0$ i $T > 0$ istnieje trajektoria układu $u_{\mathbb{A}}$ leżąca na atraktorze, która przez okres czasu T jest blisko niej t.j. $|u(t) - u_{\mathbb{A}}(t)| < \epsilon$ dla $t \in (t_0, t_1)$, dla pewnych $t_0, t_1 > 0$ takich, że $t_1 - t_0 = T$. Z drugiej strony ataktor o skończonym wymiarze fraktalnym możemy sparametryzować skończoną liczbą parametrów [16, 20, 34]. Zatem możemy w ten sposób w przybliżeniu opisać długookresowe zachowanie się płynu przy pomocy skończonej liczby parametrów. W tym podrozdziale będziemy zakładać, że siły i momenty zewnętrzne działające na płyn są niezależne od czasu. Na początku przypomnimy podstawowe pojęcia i twierdzenie o istnieniu globalnego atraktora ([44]) a następnie pokażemy, że półgrupa $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ stowarzyszona z równaniami płynu mikropolarnego z okresowymi warunkami brzegowymi spełnia założenia tego twierdzenia.

Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ półgrupą operatorów działających na X. Zbiór $\mathbb{A}$ nazywamy zbiorem niezmienniczym jeżeli $\forall t > 0$ $S(t)\mathbb{A} = \mathbb{A}$,

Mówimy, że zbiór $\mathbb{A}$ przyciąga jednostajnie zbiór $\mathcal{B}$, jeżeli dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje t_ε takie, że $\forall t > t_\varepsilon$, $S(t)\mathcal{B} \in \mathcal{O}^\varepsilon(\mathbb{A})$, gdzie $\mathcal{O}^\varepsilon(\mathbb{A})$ jest sumą wszystkich kul o środkach w zbiorze $\mathbb{A}$ i promieniach ε.

Mówimy, że $\mathbb{A}$ przyciąga zbiory ograniczone jeżeli przyciąga jednostajnie wszystkie zbiory ograniczone w X.

Atraktorem globalnym nazywamy zwarty zbiór niezmienniczy $\mathbb{A} \subset X$, który przyciąga zbiory ograniczone.

Mówimy, że zbiór $\mathcal{B}$ jest pochłaniający, jeżeli dla każdego zbioru organiczonego $\mathcal{B}_0 \subset X$ istnieje $t_1(\mathcal{B}_0)$ takie, że $\forall t > t_1(\mathcal{B}_0)$, $S(t)\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$.

Zbiór $\omega-$graniczny zbioru $\mathcal{B} \subset X$ definiujemy jako $\omega(\mathcal{B}) = \bigcap_{s\geq 0} \overline{\bigcup_{t\geq s} S(t)\mathcal{B}}$.

Mówimy, że operatory $S(t)$ są jednostajnie zwarte dla dużych t, jeżeli dla każdego zbioru ograniczonego $\mathcal{B}$ istnieje t_2, które być może zależy od $\mathcal{B}$ ($t_2 = t_2(\mathcal{B})$) takie, że $\bigcup_{t\geq t_2} S(t)\mathcal{B}$ jest prezwarty w X, co oznacza, że zbiór $\overline{\bigcup_{t\geq t_2} S(t)\mathcal{B}}$ jest zwarty w X.

Twierdzenie 4.1 ([44]). *Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ będzie półgrupą działającą na X taką, że dla każdego $t > 0$ operatory $S(t)$ są ciągłe w X. Załóżmy, że istnieje ograniczony zbiór pochłaniający $\mathcal{B} \subset X$, a operatory $S(t)$ są jednostajnie zwarte dla dużych t.*

Wtedy $\mathbb{A} = \omega(\mathcal{B})$ atraktorem globalnym. Ponadto jeżeli przekształcenie $t \to S(t)u_0$ jest ciągłe z $\mathbb{R}_+$ w X dla każdego $u_0 \in X$, to $\mathbb{A}$ jest spójny.

4.2.1 Istnienie atraktora

W tym podrozdziale pokażemy istnienie atraktora globalnego dla półgrupy związanej z równaniami płynu mikropolarnego z okresowym warunkiem brzegowym.

Twierdzenie 4.2. *Niech $Q = (0, L)^2$, niech siły i momenty zewnętrzne będą niezależne od czasu oraz $(f, g) \in \mathcal{H} = H \times \dot{H}^0_{per}$. Wtedy istnieje globalny atraktor $\mathbb{A}_{\nu_r}$ dla półgrupy $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ w $\mathcal{H}$ stowarzyszonej z równaniami płynu mikropolarnego. Atraktor ten jest ograniczony w przestrzeni $\mathcal{V}$.*

Dowód. W naszym przypadku niech $X = \mathcal{H} = H \times \dot{H}^0_{per}$. W Rozdziale 3 pokazaliśmy, że dla dowolnego ustalonego $t > 0$ przekształcenie $S(t)$ jest ciągłe w $\mathcal{H}$. W celu udowodnienia istnienia atraktora pokażemy istnienie zbiorów pochłaniających w $\mathcal{H}$ oraz w $\mathcal{V}$. Istnienie zbioru pochłaniającego w $\mathcal{V}$ oraz fakt, że każdy zbiór ograniczony w $\mathcal{V}$ jest prezwarty w $\mathcal{H}$ implikuje jednostajną zwartość operatorów $S(t)$ dla dużych t.

Zbiór pochłaniający w $\mathcal{H}$

Ponieważ siły i momenty zewnętrzne są niezależne od czasu, więc z nierówności (4.2) wynika, że

$$|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2 \leq e^{-k_2 t}\left(|u_0|^2 + |\omega_0|^2\right) + k_2^{-2}\left(|f|^2 + |g|^2\right). \tag{4.21}$$

Zatem

$$\limsup_{t\to\infty}\left(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2\right) \leq k_2^{-2}\left(|f|^2 + |g|^2\right).$$

Oznaczmy $\rho_0^2 = k_2^{-2}(|f|^2 + |g|^2)$. Wtedy dla każdego $\rho > \rho_0$ kula $\mathcal{B}(0,\rho)$ w $\mathcal{H}$ jest zbiorem pochłaniającym - dla każedgo $(u_0, \omega_0) \in \mathcal{H}$ istnieje $t_0 > 0$ takie że

$$(u(t), \omega(t)) \in \mathcal{B}(0,\rho) \text{ dla każdego } t > t_0. \tag{4.22}$$

Ponadto dla każdej kuli $\mathcal{B}(0,r) \subset \mathcal{H}$ istnieje $t_0 = t_0(r)$ takie, że $S(t)\mathcal{B}(0,r) \subset \mathcal{B}(0,\rho)$. To dowodzi istnienia zbioru pochłaniającego w $\mathcal{H}$ dla półgrupy $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Zbiór pochłaniający w $\mathcal{V}$

Ponieważ siły i momenty są niezależne od czasu, więc z nierówności (4.17) wynika, że dla odpowiednio dużych t zachodzi

$$||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 \leq \hat{c}_1(|f|^2 + |g|^2)\exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3(|f|^2 + |g|^2)^2\right).$$

To dowodzi istnienia zbioru pochłaniającego w $\mathcal{V}$ i kończy dowód twierdzenia. □

4.2.2 Wymiar atraktora

Na początku przypomnimy pojęcia wymiaru Hausdorffa i wymiaru fraktalnego zbioru, potem pokażemy, że atraktory $\mathbb{A}_{\nu_r}, \nu_r \geq 0$ związane z równaniami (1.11)-(1.13) mają skończony wymiar Hausdorffa i wymiar fraktalny. Wymiary te mogą być oszacowane przez stałe zależne od danych: f, g, ν, α i obszaru przepływu Q ale niezależne od lepkości mikrorotacyjnej ν_r.

Niech (X, ρ) będzie przestrzenią metryczną a Y będzie zwartym podzbiorem X. d-wymiarową miarę Hausdorffa zbioru Y definiujemy następująco:

$$\mu_H^d = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf\left\{\sum_i r_i^d \colon r_i \leq \varepsilon \text{ oraz } Y \subset \bigcup_i B(x_i, r_i)\right\}\right],$$

gdzie $B(x_i, r_i)$ jest kulą o środku x_i i promieniu r_i, a infimum jest brane po wszystkich skończonych pokryciach zbioru Y. Wymiar Hausdorffa zbioru Y, $d_H(Y)$ określamy jako kres dolny zbioru liczb d, dla których d-wymiarowa miara Hausdorffa jest równa zero, tj.

$$d_H(Y) = \inf_{d>0}\{d\colon d_H(Y) = 0\}.$$

Teraz zdefiniujemy wymiar fraktalny zbioru Y. Załóżmy, że $\bar{Y}$ jest zbiorem zwartym. Niech $\varepsilon > 0$, przez $n_Y(\varepsilon)$ oznaczamy minimalną liczbę kul w X o promieniu ε potrzebnych do pokrycia zbioru Y. Wymiarem fraktalnym zbioru Y określamy następująco

$$d_F(Y) = \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log n_Y(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

przy czym dopuszczamy możliwość żeby powyższa granica miała wartość $+\infty$.

Przytoczymy kilka własności zdefiniowanych powyżej wymiarów. Wymiar fraktalny zbioru zwartego jest zawsze niemniejszy od jego wymiaru Hausdorffa. Wymiar Hausdorffa jest stabilny względem przeliczalnych sum zbiorów tzn.

$$d_H\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Y_k\right) \le \sup_k d_H(Y_k),$$

podczas gdy wymiar fraktalny tylko względem sum skończonych. Przykładem może być zbiór $Y = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$, którego wymiar Hausdorffa wynosi 0, a wymiar fraktalny jest większy niż 1/2. Z drugiej strony pokazano, że każdy zwarty zbiór o skończonym wymiarze fraktalnym mniejszym od d, d całkowite, można w sposób ciągły sparametryzować za pomocą $k > 2d+1$ parametrów. Więcej szczegółów można znaleźć w np. książkach [10, 37, 44].

Twierdzenie 4.3. *Istnieje stała C_0, która posiada następującą własność. Jeżeli N jest liczbą całkowitą taką, że*

$$N - 1 < 2C_0 \left(\frac{|Q|}{k_1^3 k_2}\right)^{1/2} \left(|f|^2 + |g|^2\right)^{1/2} \le N, \tag{4.23}$$

gdzie $|Q| = L^2$ jest wielkością obszaru przepływu, k_1, k_2 są jak w (3.15), to wymiary Hausdorffa zbiorów $\mathbb{A}_{\nu_r}$, $\nu_r \ge 0$ są mniejsze lub równe N, a ich wymiary fraktalne są mniejsze lub równe $2N$.

Dowód. Dowód twierdzenia opiera się na badaniu ewolucji n-wymiarowych równoległościanów w przestrzeni fazowej i znalezieniu n takiego, że objętość każdego n-wymiarowego równoległościanu maleje w czasie. Będziemy rozpartywać przepływ zlinearyzowany w otoczeniu atraktora. W tym celu musimy stwierdzić, że półgrupa generowana przez równanie jest jednostajnie różniczkowalna.

Definicja 4.1. *Mówimy, że półgrupa $\{S(t)\}$ jest jednostajnie różniczkowalna na $\mathbb{A}$ jeżeli dla każdego $\bar{u} \in \mathbb{A}$ istnieje liniowy operator $\Lambda(t, \bar{u})$ taki, że dla każdego $t \ge 0$ spełniony jest warunek*

$$\sup_{\bar{u},\bar{v}\in\mathbb{A};||\bar{u}-\bar{v}||_{\mathcal{H}}\le\varepsilon} \frac{||S(t)\bar{v} - S(t)\bar{u} - \Lambda(t,\bar{u})(\bar{v}-\bar{u})||_{\mathcal{H}}}{||\bar{v}-\bar{u}||_{\mathcal{H}}} \to 0, \ \textit{przy } \varepsilon \to 0$$

oraz

$$\sup_{\bar{u}\in\mathbb{A}} ||\Lambda(t,\bar{u})||_{op} < \infty \ \textit{dla każdego } t \ge 0.$$

Półgrupa związana z równaniami płynu mikropolarnego jest jednostajnie różniczkowalna. Wynika to z rozważań podobnych do tych w [44].

Procedura wyznaczania wymiaru atraktora, z której będziemy korzystać, została opisana w [44]. Będziemy analizować zmiany objętości n-wymiarowych równoległościanów w otoczeniu atraktora poddanych działaniu półgrupy. W punkcie $\bar{u}_0$ należącym do atraktora budujemy n-wymiarowy równoległościan rozpięty na infinitezymalnych wektorach ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, które ewoluują zgodnie z równaniem zlinearyzowanym (w tym miejscu potrzebna jest jednostajna różniczkowalność półgrupy). Niech $V_n(t)$ oznacza objętość tego równoległościanu w chwili t. Równanie opisujące zmiany objętości w czasie ma postać

$$\frac{d}{dt} \ln V_n(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left[M^{-1} \frac{dM}{dt} \right],$$

gdzie M jest macierzą o elementach $m_{ij} = (\xi_i, \xi_j)$, a Tr oznacza ślad macierzy. Wprowadzając zależny od czasu ortonormalny układ wektorów $\varphi_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, który rozpina przestrzeń $\operatorname{Span}\{\xi_1(t), \ldots, \xi_n(t)\}$, możemy przedstawić elementy macierzy M i M^{-1} korzystając z reprezentacji wektorów $\xi_i(t)$ w bazie $\{\varphi_j(t)\}$. Prowadzi to do następującej równości

$$\frac{d}{dt} \ln V_n(t) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i, L\varphi_i),$$

gdzie L jest operatorem liniowym odpowiadającym linearyzacji równania. Stąd wynika, że

$$V_n(t) = V_n(0) \exp \left(\int_0^t (\varphi_i(s), L\varphi_i(s)) \, ds \right).$$

Biorąc supremum (po wszystkich warunkach początkowych $\bar{u}_0 \in \mathbb{A}$ oraz wszystkich układach ortonormalnych) zmian objętości w czasie szukamy takiego n, aby ta objętość malała eksponencjalnie w czasie. W rozważanym kontekście definiujemy wielkości

$$q_N(t) = \sup_{\bar{u}_0 \in \mathbb{A}} \sup \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Tr} F'(S(\tau)\bar{u}_0) \circ Q_N(\tau) \, d\tau \colon \xi_i \in \mathcal{H},\ [\xi_i] \leq 1,\ i = 1, \ldots, N \right\},$$

$$q_N = \limsup_{t \to \infty} q_N(t),$$

gdzie F' jest różniczką półgrupy związanej z równaniami płynu mikropolarnego, a Q_N rzutem z $\mathcal{H}$ na przestrzeń rozpiętą przez $\{\varphi_i\}$. Z ogólnej teorii przedstawionej w [44] wynika, że jednostajne wykładniki Lapunova μ_j spełniają nierówność $\mu_1 + \ldots + \mu_m \leq q_m$. Ponadto, jeżeli dla pewnego N mamy $q_N < 0$, to wymiar Hausdorffa i wymiar fraktalny atraktora $\mathbb{A}$ są skończone. Następujące twierdzenie zapewnia oszacowanie wymiaru fraktalnego oraz wymiaru Hausdorffa atraktora związanego z równaniami płynu mikropolarnego

Twierdzenie 4.4 ([44]). *Niech $\mathbb{A}$ będzie zbiorem niezmienniczym dla półgrupy $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Niech operatory $S(t)$ będą jednostajnie różniczkowalne na $\mathbb{A}$. Jeżeli dla pewnego $N \geq 1$ spełniona jest nierówność*

$$\mu_1 + \ldots + \mu_{N+1} < 0,$$

to spełnione są nierówności

$$\mu_{N+1} < 0, \quad \frac{\mu_1 + \ldots + \mu_N}{|\mu_{N+1}|} < 1$$

oraz

1. *wymiar Hausdorffa zbioru $\mathbb{A}$ jest mniejszy bądź równy*

$$n + \frac{(\mu_1 + \ldots + \mu_N)_+}{|\mu_{N+1}|};$$

2. *wymiar fraktalny zbioru $\mathbb{A}$ jest mniejszy bądź równy*

$$(n+1)\left\{\max_{1\leq j\leq N} 1 + \frac{(\mu_1 + \ldots + \mu_j)_+}{|\mu_1 + \ldots + \mu_{N+1}|}\right\}.$$

Wprowadźmy pewne oznaczenia. Niech $\bar{u}_i = (u_i, \omega_i) \in \mathcal{H}$ (lub $\mathcal{V}$) dla $i = 1, 2$. Wprowadzamy następujące iloczyny skalarne i normy w $\mathcal{H}$ i $\mathcal{V}$

$$[\bar{u}_1, \bar{u}_2] = (u_1, u_2) + (\omega_1, \omega_2), \quad [\bar{u}] = [\bar{u}, \bar{u}]^{1/2}$$

dla wszystkich $\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathcal{H}$ oraz

$$[[\bar{u}_1, \bar{u}_2]] = (\nabla u_1, \nabla u_2) + (\nabla\omega_1, \nabla\omega_2), \quad [[\bar{u}]] = [[\bar{u}, \bar{u}]]^{1/2}$$

dla wszystkich $\bar{u}, \bar{u}_1, \bar{u}_2 \in \mathcal{V}$.

Definiujemy formę trójliniową B na $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ poprzez

$$B(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3) = b(u_1, u_2, u_3) + b_1(u_1, \omega_2, \omega_3)$$

i wiążemy z B dwuliniowy, ciągły operator $\mathcal{B}$ z $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ w $\mathcal{V}'$ następująco

$$\langle \mathcal{B}(\bar{u}_1, \bar{u}_2), \phi \rangle = B(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \phi) \quad \bar{u}_1, \bar{u}_2, \phi \in \mathcal{V}.$$

Definiujemy dwuliniowe formy R i a na $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$ przez

$$\begin{aligned} R(\bar{u}_1, \bar{u}_2) &= -2\nu_r(\operatorname{rot}\omega_1, u_2) - 2\nu_r(\operatorname{rot} u_1, \omega_2) + 4\nu_r(\omega_1, \omega_2), \\ a(\bar{u}_1, \bar{u}_2) &= (\nu + \nu_r)(\nabla u_1, \nabla u_2) + \alpha(\nabla\omega_1, \nabla\omega_2) \end{aligned}$$

i wiążemy z nimi liniowe, ciągłe operatory z $\mathcal{V}$ w $\mathcal{V}'$ w następujący sposób

$$\langle \mathcal{R}(\bar{u}), \phi \rangle = R(\bar{u}, \phi), \quad \langle \mathcal{A}(\bar{u}), \phi \rangle = a(\bar{u}, \phi), \quad \bar{u}, \phi \in \mathcal{V}.$$

Niech $G = (f, g) \in \mathcal{H}$. Wtedy słaba forma równań (1.11)-(1.13) (por. [41]) ma postać

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u(t), \varphi(t)) + (\nu + \nu_r)(\nabla u(t), \nabla \varphi(t)) &+ b(u(t), u(t), \varphi) \\ &= 2\nu_r(\operatorname{rot} \omega(t), \varphi) + (f, \varphi), \\ \frac{d}{dt}(\omega(t), \psi) + \alpha(\nabla \omega(t), \nabla \psi) + b_1(u(t), \omega(t), \psi) &+ 4\nu_r(\omega(t), \psi) \\ &= 2\nu_r(\operatorname{rot} u, \psi) + (g(t), \psi),\end{aligned} \tag{4.24}$$

dla każdego $\varphi \in V$ i $\psi \in \dot{H}^1_{per}(Q)$. Równości powyższe należy rozumieć w sensie dystrybucji skalarnych na $(0, \infty)$. Równania (4.24) możemy napisać następującej formie

$$\frac{d}{dt}[\bar{u}, \phi] + a(\bar{u}, \phi) + B(\bar{u}, \bar{u}, \phi) + R(\bar{u}, \phi) = [G, \phi],$$

gdzie $\bar{u} = (u, \omega), \phi = (\varphi, \psi)$ albo w postaci funkcjonalnej

$$\frac{d}{dt}\bar{u} + \mathcal{A}(\bar{u}) + \mathcal{B}(\bar{u}, \bar{u}) + \mathcal{R}(\bar{u}) = G.$$

W celu oszacowania wymiaru atraktora skupimy się na problemie zlinearyzowanym wokół $\bar{u}$

$$\frac{d}{dt}U = F'(\bar{u})U,$$

gdzie $F'(\bar{u}) = -\mathcal{A}(U) - \mathcal{B}(\bar{u}, U) - \mathcal{B}(U, \bar{u}) + \mathcal{R}(U)$ jest różniczką operatora $S(t)$.

Teraz naszym celem będzie oszacowanie z góry śladu

$$\operatorname{Tr} F'(\bar{u}) \circ Q_N = \sum_{i=1}^{N} [F'(\bar{u})\varphi_j, \varphi_j], \tag{4.25}$$

gdzie $\varphi_j = \varphi_j(\tau)$, $j = 1, \ldots, N$ jest ortonormalną w $\mathcal{H}$ bazą podprzestrzeni $Q_N(\tau)\mathcal{H} = \operatorname{Span}\{U_1(\tau), \ldots, U_N(\tau)\}$, $Q_N(\tau, \xi_1, \ldots, \xi_N)$ jest rzutem prostopadłym w $\mathcal{H}$ na przestrzeń rozpiętą przez $U_j(\tau)$, $j = 1, \ldots, N$, a U_j są rozwiązaniami równania zlinearyzowanego, tj. spełniają równania

$$\frac{d}{dt}U_j = F'(\bar{u})U_j, \quad U_j(0) = \xi_j, \quad \text{dla } j = 1, \ldots, N.$$

Ponieważ $B(\bar{u}, \varphi_j, \varphi_j) = 0$, więc

$$[F'(\bar{u})\varphi_j, \varphi_j] = -a(\varphi_j, \varphi_j) - B(\varphi_j, \bar{u}, \varphi_j) - R(\varphi_j, \varphi_j).$$

Oznaczmy $\varphi_j = (v_j, z_j)$. Wtedy mamy

$$\begin{aligned}-\sum_{i=1}^{N} a(\varphi_j, \varphi_j) &= -(\nu + \nu_r)\sum_{i=1}^{N} ||v_j||^2 - \alpha \sum_{i=1}^{N} ||z_j||^2, \\ -\sum_{i=1}^{N} B(\varphi_j, \bar{u}, \varphi_j) &= -\sum_{i=1}^{N} b(v_j, u, v_j) - \sum_{i=1}^{N} b_1(v_j, \omega, z_j)\end{aligned}$$

oraz

$$-\sum_{i=1}^{N} R(\varphi_j,\varphi_j) = 2\nu_r \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{rot} z_j, v_j) + 2\nu_r \sum_{i=1}^{N} (\operatorname{rot} v_j, z_j) - 4\nu_r \sum_{i=1}^{N} |z_j|^2.$$

Rozważmy teraz operator $a + R$:

$$\begin{aligned} a(\varphi_j,\varphi_j) + R(\varphi_j,\varphi_j) = &(\nu+\nu_r)((v_j,v_j))^2 + \alpha((z_j,z_j))^2 \\ &-2\nu_r(\operatorname{rot} z_j, v_j) - 2\nu_r(\operatorname{rot} v_j, z_j) + 4\nu_r|z_j|^2. \end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości (2.9) oraz nierówności Schwartza i Younga otrzymujemy

$$2\nu_r(\operatorname{rot} z_j, v_j) + 2\nu_r(\operatorname{rot} v_j, z_j) = 4\nu_r(\operatorname{rot} z_j, v_j) \le \nu_r||v_j||^2 + 4\nu_r|z_j|^2,$$

zatem

$$a(\varphi_j,\varphi_j) + R(\varphi_j,\varphi_j) \ge \nu((v_j,v_j)) + \alpha((z_j,z_j)) \ge k_1[[\varphi_j,\varphi_j]] \quad \forall \varphi_j \in V,$$

gdzie $k_1 = \min\{\nu,\alpha\}$ (jak w (3.15)). Stąd wnioskujemy, że

$$-\sum_{i=1}^{N} \big(a(\varphi_j,\varphi_j) + R(\varphi_j,\varphi_j)\big) \le -k_1 \sum_{i=1}^{N} [[\varphi_j,\varphi_j]]^2.$$

Formę trójliniową b szacujemy następująco

$$\left|\sum_{i=1}^{N} b(v_j,u,v_j)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} \int_Q (v_j\cdot\nabla)uv_j\,dx\right| \le \int_Q |\nabla u(x,t)|\rho_1(x,t)\,dx,$$

gdzie

$$\rho_1(x,t) = \sum_{i=1}^{N} |v_j(x,t)|^2.$$

Formę b_1 szacujemy podobnie

$$\left|\sum_{i=1}^{N} b_1(v_j,u,z_j)\right| = \left|\sum_{i=1}^{N} \int_Q (v_j\cdot\nabla)uz_j\,dx\right| \le \int_Q |\nabla u(x,t)|\rho_1(x,t)^{1/2}\rho_2(x,t)^{1/2}\,dx,$$

gdzie

$$\rho_1(x,t) = \sum_{i=1}^{N} |z_j(x,t)|^2.$$

Forma B spełnia więc następującą nierówność

$$\left|\sum_{i=1}^{N} B(\varphi_j,\bar{u},\varphi_j)\right| \le \int_Q \left(|\nabla u|\rho_1 + |\nabla\omega|\rho_1^{1/2}\rho_2^{1/2}\right)dx.$$

Oznaczając $\rho = \rho_1 + \rho_2$, korzystając z nierówności Cauchy'ego oraz Schwartza dostajemy

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{N} B(\varphi_j, \bar{u}, \varphi_j)\right| &\leq \int_Q (\rho|\nabla u| + \rho|\nabla\omega|)\, dx \\
&\leq \left(\int_Q \rho^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_Q (|\nabla u| + |\nabla\omega|)^2\, dx\right)^{1/2} \\
&\leq |\rho| \left(2\int_Q |\nabla u|^2 + |\nabla\omega|^2\, dx\right)^{1/2} \\
&= \sqrt{2}|\rho| \cdot [[\bar{u}]].
\end{aligned}$$

Z powyższych oszacowań wynika, że

$$\operatorname{Tr} F'(\bar{u}(\tau)) \circ Q_N(\tau) \leq -k_1 \sum_{i=1}^{N} [[\varphi_j(\tau)]]^2 + \sqrt{2}|\rho(\tau)| \cdot [[\bar{u}(\tau)]]. \tag{4.26}$$

Ponieważ rodzina $\{\varphi_j(\tau)\}_{j=1}^{N}$ jest ortonormalna w $\mathcal{H}$, więc rodzina odpowiadających jej par (v_j, z_j) jest ortonormalna w $L^2(Q)^{2\times 2}$. Możemy zatem użyć uogólnionej nierówności Sobolewa-Lieba-Thirringa ([44]) i napisać

$$|\rho(\tau)|^2 \leq C_0 \sum_{i=1}^{N} \left(||v_j||^2 + ||z_j||^2\right) = C_0 \sum_{i=1}^{N} [[\varphi_j(\tau)]]^2, \tag{4.27}$$

dla pewnej stałej C_0.

Zauważmy, że $\int_Q \rho(x,t)\, dx = N$. Dzięki nierówności Schwartza mamy

$$N^2 \leq |Q| \cdot |\rho|^2,$$

gdzie $|Q| = L^2$ jest wielkością obszaru przepływu, a biorąc pod uwagę (4.27) dostajemy

$$\sum_{i=1}^{N} [[\varphi_j(\tau)]]^2 \geq \frac{N^2}{C_0|Q|}. \tag{4.28}$$

Drugi wyraz prawej strony (4.26) szacujemy używając nierówności Younga oraz nierówności (4.27) i (4.28). Mamy

$$\sqrt{2}|\rho| \cdot [[\bar{u}]] \leq \frac{k_1}{2C_0}|\rho|^2 + \frac{C_0}{k_1}[[\bar{u}]]^2 \leq \frac{k_1}{2} \sum_{i=1}^{N} [[\varphi_j]]^2 + \frac{C_0}{k_1}[[\bar{u}]]^2.$$

Z powyższych rozważań wynika, że

$$\operatorname{Tr} F'(\bar{u}(\tau)) \circ Q_N(\tau) \leq -\frac{k_1}{2}\frac{N^2}{C_0|Q|} + \frac{C_0}{k_1}[[\bar{u}]]^2. \tag{4.29}$$

Niech $\bar{u}_0 = (u_0, \omega_0) \in \mathbb{A}$, $\bar{u}(\tau) = S(\tau)\bar{u}_0$. Oznaczmy

$$q_N(t) = \sup_{\bar{u}_0 \in \mathbb{A}} \sup \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Tr} F'(S(\tau)\bar{u}_0) \circ Q_N(\tau)\, d\tau \colon \xi_i \in \mathcal{H},\ [\xi_i] \leq 1,\ i = 1, \dots, N \right\},$$

$$q_N = \limsup_{t \to \infty} q_N(t).$$

Z nierówności (4.29) wnioskujemy, że

$$q_N \leq -\frac{k_1}{2C_0|Q|} N^2 + \frac{C_0}{k_1}\gamma, \tag{4.30}$$

gdzie

$$\gamma = \lim_{t \to \infty} \sup_{\bar{u}_0 \in \mathbb{A}} \frac{1}{t} \int_0^t [[S(\tau)\bar{u}_0]]^2\, d\tau.$$

Możemy oszacować γ w zależności od parametrów używając nierówności (3.16)

$$\frac{d}{dt}(|u(t)|^2 + |\omega(t)|^2) + k_1 \left(||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 \right) \leq k_2^{-1} \left(|f|^2 + |g|^2 \right)$$

i postępując podobnie jak przy wyprowadzaniu nierówności (4.4). Mamy więc

$$\frac{1}{t} \int_0^t [[S(t)\bar{u}_0]]^2 \leq \frac{1}{k_1 k_2}[G]^2 + \frac{1}{t}\frac{1}{k_1}[\bar{u}_0]^2,$$

skąd wynika, że

$$\gamma \leq \frac{1}{k_1 k_2}[G]^2.$$

Wstawiając powyższe oszacowanie do (4.30) otrzymujemy

$$q_N \leq -\frac{k_1}{2C_0|Q|} N^2 + \frac{C_0}{k_1^2 k_2}[G]^2. \tag{4.31}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\kappa_1 = \frac{k_1}{2C_0|Q|}, \qquad \kappa_2 = \frac{C_0}{k_1^2 k_2}[G]^2,$$

możemy przepisać (4.31) w postaci

$$q_N \leq -\kappa_1 N^2 + \kappa_2.$$

Z ogólnej teorii przedstawionej w [44] wynika, że jednostajne wykładniki Lapunova μ_j spełniają nierówność

$$\mu_1 + \dots + \mu_j \leq -\kappa_1 j^2 + \kappa_2, \qquad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Z Lematu VI.2.2 w [44] wynika, że dla N spełniających

$$N - 1 < \left(\frac{2\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{1/2} \leq N,$$

jednostajne wykładniki Lapunova μ_j spełniają $\mu_1 + \dots \mu_N < 0$, co kończy dowód. $\square$

4.3 Harmoniki determinujące

Pojęcie harmonik determinujących pojawia się, gdy rozpatrujemy rozwinięcie rozwiązania w szereg Fouriera. Nasuwa się pytanie czy zbieżność do siebie pewnej liczby kolejnych harmonik dwóch różnych rozwiązań implikuje takie samo zachowanie pozostałych harmonik, i w konsekwencji całych rozwiązań. Odpowiedź twierdzącą dla równań Naviera-Stokesa uzyskali Foias i Prodi w [11]. W kolejnych pracach usiłowano jak najlepiej oszacować liczbę harmonik potrzebnych do zdeterminowania zachowania się przepływu. Aktualnie najlepsze oszacowania wyprowadzono w [13] dla równań z zerowym warunkiem brzegowym i w [25] dla okresowych warunków brzegowych. Liczbę harmonik determinujących dla dwuwymiarowych równań płynu mikropolarnego z warunkiem Dirichleta na brzegu oszacowano w [40].

Rozważmy dwa rozwiązania równań płynu mikropolarnego w dwuwymiarowym obszarze (u_1, ω_1) i (u_2, ω_2) ($u_i = (u_i^1(x,t), u_i^2(x,t))$ i $\omega_i = \omega_i(x,t)$) odpowiadające dwóm, być może różnym, parom sił i momentów zewnętrznych (f_1, g_1) i (f_2, g_2). Dokładniej rzecz ujmując (u_1, ω_1) i (u_2, ω_2) spełniają równania

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u_1 + (u_1 \cdot \nabla)u_1 + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega_1 + f_1, \tag{4.32}$$

$$\operatorname{div} u_1 = 0, \tag{4.33}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \alpha\Delta\omega_1 + (u_1 \cdot \nabla)\omega_1 + 4\nu_r\omega_1 = 2\nu_r \operatorname{rot} u_1 + g_1 \tag{4.34}$$

oraz

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u_2 + (u_2 \cdot \nabla)u_2 + \nabla q = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega_2 + f_2, \tag{4.35}$$

$$\operatorname{div} u_2 = 0, \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} - \alpha\Delta\omega_2 + (u_2 \cdot \nabla)\omega_2 + 4\nu_r\omega_2 = 2\nu_r \operatorname{rot} u_2 + g_2, \tag{4.37}$$

z odpowiednimi ciśnieniami $p = p(x,t)$ i $q = q(x,t)$. Warunek brzegowy jest okresowy dla obu problemów. Ponadto zakładamy, że zewnętrzne siły i momenty mają takie samo zachowanie asymptotyczne dla dużych czasów, mianowicie

$$||f_1(t) - f_2(t)||_{V'} + ||g_1(t) - g_2(t)||_{\dot{H}^{-1}_{per}} \to 0 \text{ dla } t \to \infty. \tag{4.38}$$

W [25] i [40] zakładano, że siły (i momenty) zbiegają do siebie w normie L^2. W tej rozprawie osłabiliśmy ten warunek i zakładamy zbieżność w $V' \times \dot{H}^{-1}_{per}$.

Definicja 4.2. *Mówimy, że pierwsze m harmonik związanych z P_m i P_m^1 determinuje przepływ jeżeli warunek*

$$\int_Q \left(|P_m u_1(x,t) - P_m u_2(x,t)|^2 + |P_m^1 \omega_1(x,t) - P_m^1 \omega_2(x,t)|^2\right) dx \to 0 \ \ dla \ t \to \infty, \tag{4.39}$$

wraz z warunkiem (4.38) *na siły i momenty implikują*

$$\int_Q \left(|Q_m u_1(x,t) - Q_m u_2(x,t)|^2 + |Q_m^1 \omega_1(x,t) - Q_m^1 \omega_2(x,t)|^2\right) dx \to 0 \ \textit{dla}\ t \to \infty, \tag{4.40}$$

gdzie $|\cdot|$ *oznacza normę w* $L^2(Q)$

Oszacujemy liczbę m harmonik determinujących w zależności od asymptotycznej wielkości sił i momentów mierzonej w normach V' i $\dot{H}^{-1}_{per}$, odpowiednio tzn. od wielkości $\tilde{F}_{-1}$ zdefiniowanej w (4.1).

Twierdzenie 4.5. *Załóżmy, że* $m \in \mathbb{N}$ *spełnia nierówność*

$$m \geq \frac{16\nu_r^2 k_1^2 + 8c_1^2 \tilde{F}_{-1}^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}.$$

gdzie $\tilde{F}_{-1}$ *jest asymptotyczną wielkością sił i momentów zewnętrznych zdefiniowaną w* (4.1). *Wtedy pierwsze* m *harmonik determinuje w sensie Definicji 4.2 dwuwymiarowy przepływ płynu mikropolarnego z okresowymi warunkami brzegowymi.*

Dowód. Będziemy stosować metodę opisaną w [17], polegającą na wyprowadzeniu nierówności różniczkowej dla tunkcji $t \to \xi(t)$, $\xi(t) = |Q_m u(t)|^2 + |Q_m^1 \omega(t)|^2$ a następnie zastosowaniu uogólnionego lematu Gronwalla (Lemat 2.1). Rozważmy rozwiązania (u_1, ω_1) układu (4.32) - (4.34) i (u_2, ω_2) układu (4.35) - (4.37), z okresowymi warunkami brzegowymi oraz siłami i momentami zewnętrznymi spełniającymi (4.38). Aałóżmy ponadto, że zachodzi (4.39). Pokażemy, że jeżeli m jest dostatecznie duże, to spełniony jest warunek (4.40). W tym celu oznaczmy $u = u_1 - u_2$, $\omega = \omega_1 - \omega_2$, $f = f_1 - f_2$ oraz $g = g_1 - g_2$.

Pisząc równania płynu mikropolarnego w formie funkcjonalnej dla pary rozwiązań (u_1, ω_1) i (u_2, ω_2) (por. (2.12)) oraz odejmując je stronami otrzymujemy

$$u_t + (\nu + \nu_r)Au + B(u, u_1) + B(u_2, u) = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f, \tag{4.41}$$

$$\omega_t + \alpha A_1 \omega + B_1(u, \omega_1) + B_1(u_2, \omega) + 4\nu_r \omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g, \tag{4.42}$$

odpowiednio. Najpierw zajmiemy się równaniem (4.41). Po pomnożeniu go przez $Q_m u$ i scałkowaniu po Q mamy

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Q_m u|^2 + (\nu + \nu_r)\|Q_m u\|^2 + b(u, u_1, Q_m u) &+ b(u_2, u, Q_m u) \\ &= 2\nu_r(\operatorname{rot}\omega, Q_m u) + (f, Q_m u).\end{aligned} \tag{4.43}$$

Wyrazy liniowe prawej strony (4.43) szacujemy następująco

$$(f, Q_m u) \leq ||f||_{V'}||Q_m u|| \leq \frac{\nu + 2\nu_r}{4}||Q_m u||^2 + \frac{1}{\nu + 2\nu_r}||f||^2_{V'},$$

$$\begin{aligned}2\nu_r(\operatorname{rot}\omega, Q_m u) &= 2\nu_r[(P_m \operatorname{rot}\omega, Q_m u) + (Q_m \operatorname{rot}\omega, Q_m u)] \leq 2\nu_r|Q_m \operatorname{rot}\omega| \cdot |Q_m u| \\ &\leq \frac{\alpha}{8}||Q_m^1 \omega||^2 + \frac{8\nu_r^2}{\alpha}|Q_m u|^2,\end{aligned}$$

wykorzystując równość $(P_m \operatorname{rot} \omega, Q_m u) = 0$. Korzystając z liniowości formy b ze względu na pierwszą współrzędną oraz własności (2.6) możemy napisać

$$b(u, u_1, Q_m u) = b(P_m u, u_1, Q_m u) + b(Q_m u, u_1, Q_m u) \tag{4.44}$$

oraz

$$b(u_2, u, Q_m u) = b(u_2, P_m u, Q_m u). \tag{4.45}$$

Używając własności (2.5) oszacowań (2.8) oraz nierówności Younga wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} b(P_m u, u_1, Q_m u) &\le c_1 |P_m u|^{1/2} ||P_m u||^{1/2} |u_1|^{1/2} ||u_1||^{1/2} ||Q_m u||, \\ b(Q_m u, u_1, Q_m u) &\le c_1 |Q_m u| \cdot ||Q_m u|| \cdot ||u_1|| \\ &\le \frac{\nu + \nu_r}{8} ||Q_m u||^2 + \frac{2c_1^2}{\nu + \nu_r} |Q_m u|^2 ||u_1||^2, \\ b(u_2, P_m u, Q_m u) &\le c_1 |u_2|^{1/2} ||u_2||^{1/2} |P_m u|^{1/2} ||P_m u||^{1/2} ||Q_m u||. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Teraz zajmiemy się równaniem (4.42). Po pomnożeniu go skalarnie przez $Q_m^1 \omega$ w $\dot{H}^0_{per}$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |Q_m^1 \omega|^2 + \alpha ||Q_m^1 \omega||^2 + b_1(u, u_1, Q_m^1 \omega) &+ b(u_2, u, Q_m^1 \omega) \\ &= 2\nu_r (\operatorname{rot} u, Q_m^1 \omega) + (g, Q_m^1 \omega). \end{aligned} \tag{4.47}$$

Wyrazy prawej strony szacujemy analogicznie do wyrazów prawej strony równania (4.43)

$$\begin{aligned} (g, Q_m^1 \omega) &\le \frac{\alpha}{4} ||Q_m^1 \omega||^2 + \frac{1}{\alpha} ||g||^2_{H^{-1}}, \\ 2\nu_r (\operatorname{rot} u, Q_m^1 \omega) &= 2\nu_r (Q_m^1 \operatorname{rot} u, Q_m^1 \omega) \le \frac{\nu_r}{4} ||Q_m u||^2 + 4\nu_r |Q_m^1 \omega|^2, \end{aligned}$$

a wyrazy z formą b_1 szacujemy następująco

$$\begin{aligned} b_1(P_m u, \omega_1, Q_m^1 \omega) &\le c_1 |P_m u|^{1/2} ||P_m u||^{1/2} |\omega_1|^{1/2} ||\omega_1||^{1/2} ||Q_m^1 \omega||, \\ b_1(Q_m u, \omega_1, Q_m^1 \omega) &\le c_1 |Q_m u|^{1/2} ||Q_m u||^{1/2} ||\omega_1|| \cdot |Q_m^1 \omega|^{1/2} ||Q_m^1 \omega||^{1/2} \\ &\le \frac{c_1 ||\omega_1||}{2} \left(|Q_m u| \cdot ||Q_m u|| + |Q_m^1 \omega| \cdot ||Q_m^1 \omega|| \right) \\ &\le \frac{\nu + \nu_r}{8} ||Q_m u||^2 + \frac{c_1^2 ||\omega_1||^2}{2(\nu + \nu_r)} |Q_m u|^2 + \frac{\alpha}{8} ||Q_m^1 \omega||^2 + \frac{c_1^2 ||\omega_1||^2}{2\alpha} |Q_m^1 \omega|^2, \\ b_1(u_2, P_m^1 \omega, Q_m^1 \omega) &\le c_1 |u_2|^{1/2} ||u_2||^{1/2} ||Q_m^1 \omega|| \cdot |P_m^1 \omega|^{1/2} ||P_m^1 \omega||^{1/2}. \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami równań (4.43) i (4.47) oraz użyciu powyższych oszacowań otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(|Q_m u|^2 + |Q_m^1 \omega|^2 \right) &+ k_1 \left(||Q_m u||^2 + ||Q_m^1 \omega||^2 \right) \\ &- \left(|Q_m u|^2 + |Q_m^1 \omega|^2 \right) \left(\frac{16\nu_r^2}{\alpha} + \frac{4c_1^2}{k_3} \left(||u_1||^2 + ||\omega_1||^2 \right) \right) \le \beta(t), \end{aligned} \tag{4.48}$$

gdzie

$$
\begin{aligned}
\beta(t) =& c_1(|P_m u|^{1/2}||P_m u||^{1/2}|u_1|^{1/2}||u_1||^{1/2}||Q_m u|| + |u_2|^{1/2}||u_2||^{1/2}|P_m u|^{1/2}||P_m u||^{1/2}||Q_m u|| \\
& +|P_m u|^{1/2}||P_m u||^{1/2}|\omega_1|^{1/2}||\omega_1||^{1/2}||Q_m^1 \omega|| + |u_2|^{1/2}||u_2||^{1/2}||Q_m^1\omega|| \cdot |P_m^1 \omega|^{1/2}||P_m^1\omega||^{1/2}) \\
& + \frac{1}{\nu + 2\nu_r}||f||^2_{V'} + \frac{1}{\alpha}||g||^2_{H^{-1}}, \\
k_3 =& \min(\nu + \nu_r, \alpha).
\end{aligned}
$$

Rozwiązania są organiczone jednostajnie ze względu na t zarówno w normie przestrzeni $\mathcal{H}$ jak i w normie przestrzeni $\mathcal{V}$. To łącznie z założeniem (4.39) implikuje, że wszystkie wyrazy zawierające $|P_m u|$ oraz $|P_m^1 \omega|$ dążą do zera przy $t \to \infty$. Ponadto z założenia (4.38) wynika, że wyrazy zawierające siły i momenty również dążą do zera przy $t \to \infty$. Zatem $\beta(t) \to 0$ przy $t \to \infty$. Teraz skorzystamy z nierówności $\lambda_{m+1}|Q_m u|^2 \le ||Q_m u||^2$ oraz $\lambda_{m+1}|Q_m^1\omega|^2 \le ||Q_m^1\omega||^2$ w celu zapisania nierówności (4.48) w formie pozwalającej na skorzystanie z uogólnionego Lematu Gronwalla (Lemat 2.1). Po ich zastosowaniu (4.48) przyjmuje postać

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left(|Q_m u|^2 + |Q_m^1 \omega|^2\right) \\
& \qquad + \left(|Q_m u|^2 + |Q_m^1\omega|^2\right) \cdot \left(k_1 \lambda_{m+1} - \frac{4c_1^2}{k_3}\left(||u_1||^2 + ||\omega_1||^2\right) - \frac{16\nu_r^2}{\alpha}\right) \le \beta.
\end{aligned} \tag{4.49}
$$

Oznaczając

$$
\begin{aligned}
\xi(t) &= |Q_m u|^2 + |Q_m^1 \omega|^2, \\
\gamma(t) &= k_1\lambda_{m+1} - \frac{4c_1^2}{k_3}\left(||u_1||^2 + ||\omega_1||^2\right) - \frac{16\nu_r^2}{\alpha},
\end{aligned}
$$

możemy przepisać (4.49) w postaci

$$
\frac{d\xi}{dt} + \gamma\xi \le \beta.
$$

Aby oszacować liczbę harmonik determinujących pozostaje tylko sprawdzić założenia uogólnionego Lematu Gronwalla. Aby sprawdzić założenie (2.13) tego lematu szacujemy z dołu wyrażenie $\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \gamma(s)\, ds$. Korzystamy z oszacowaia (4.19). Mamy

$$
\begin{aligned}
\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \gamma(s)\, ds \ge& k_1\lambda_{m+1} - \frac{16\nu_r^2}{\alpha} - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \frac{2c_1^2}{k_3}\left(||u_1(s)||^2 + ||\omega_1(s)||^2\right) ds \\
\ge& k_1\lambda_{m+1} - \frac{16\nu_r^2}{\alpha} - \frac{8c_1^2}{k_1^2 k_3}\tilde{F}^2_{-1}.
\end{aligned}
$$

Założenie (2.13) jest więc spełnione dla wartości własnych λ_m spełniających nierówność

$$
\lambda_{m+1} \ge \frac{16\nu_r^2}{\alpha k_1} + \frac{8c_1^2}{k_3 k_1^3}\tilde{F}^2_{-1}. \tag{4.50}
$$

W [6] pokazano, że $\lambda_m \sim d\lambda_1 m$, dokładniej rzecz ujmując pokazano, że granica

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{\lambda_1 m} > 0$$

istnieje. Możemy zatem sprowadzić (4.50) do postaci

$$m \geq \frac{16\nu_r^2 k_1^2 + 4c_1^2 \tilde{F}_{-1}^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}. \tag{4.51}$$

Łatwo sprawdzić, że jeżeli m spełnia nierówność (4.51) to pozostałe założenia Lematu 2.1 są również spełnione. Dowód twierdzenia jest więc zakończony. $\square$

Zbadamy jak rozkład sił i momentów na harmonikach wpływa na oszacowanie liczby harmonik determinujących. Rozważania te zostały zainspirowane artykułem J.C. Robinsona [39], w którym zbadany został wpływ rozkładu siły na harmonikach na wymiar atraktora dla równań Naviera-Stokesa. Załóżmy, że siły i momenty należą do $L^\infty(0,\infty,\mathcal{H})$ oraz ich asymptotyczna wielkość w normie $\mathcal{H}$ jest ustalona i wynosi $\tilde{F} = \limsup_{t\to\infty}\left(|f(t)|^2 + |g(t)|^2\right)^{1/2}$. Rozpatrzymy kilka przypadków, a wszystkie obliczenia przeprowadzimy tylko dla sił, ponieważ te dla momentów są analogiczne.

1. Załóżmy, że siły i momenty rozłożone są dokładnie na dwóch harmonikach o numerach n i N oraz, że

   $$|f_n|^2 = |f_N|^2 = \frac{|f|^2}{2}.$$

   Wtedy

   $$||f||_{V'}^2 = \frac{|f|^2}{2}\left(\frac{1}{\lambda_n} + \frac{1}{\lambda_N}\right) \sim |f|^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N}\right),$$

   co po wstawieniu do (4.50) daje

   $$m \geq \frac{16\nu_r^2}{d\lambda_1 \alpha k_1} + \frac{8c_1^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}\tilde{F}^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{N}\right).$$

   Liczba harmonik determinujących zależy od odwrotności numerów harmonik, w których działają siły i momenty. Stąd wniosek, że *w im mniejszych skalach działają siły i momenty, tym mniejsza liczba harmonik potrzebna do zdeterminowania przepływu w sensie Definicji 4.2.*

2. Załóżmy teraz, że siły i momenty są rozłożone na pewnej, skończonej liczbie harmonik, tzn.

   $$f = \sum_{k=n}^{N} f_k w_k,$$

oraz, że nie wiemy nic na temat wielkości sił w poszczególnych skalach (w szczególności może być $f_k = 0$ dla pewnych $k \in \{n+1, \ldots, N-1\}$). Wtedy spełnione są wynikające bezpośrednio z definicji normy w V' nierówności

$$\frac{1}{\lambda_N}|f|^2 \leq ||f||_{V'} \leq \frac{1}{\lambda_n}|f|^2,$$

z których wynika, że

$$\frac{1}{\lambda_N}\tilde{F}^2 \leq \tilde{F}_{-1}^2 \leq \frac{1}{\lambda_n}\tilde{F}^2. \tag{4.52}$$

Po wstawieniu nierówności (4.52) do oszacowania (4.51) dostajemy

$$m \geq \frac{16\nu_r^2}{d\lambda_1 \alpha k_1} + \frac{8c_1^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}\tilde{F}_{-1}^2 \geq \frac{16\nu_r^2}{d\lambda_1 \alpha k_1} + \frac{8c_1^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}\frac{\tilde{F}^2}{\lambda_N}.$$

W tym przypadku na oszacowanie liczby harmonik determinujących ma tylko numer pierwszej, największej skali, w której działają siły i momenty. Czym jest ona mniejsza (a jej numer większy), tym mniejsza liczba harmonik potrzebna do zdeterminowania przepływu.

3. Załóżmy, że wielkość sił jest rozłożona równomiernie na pierwszych n harmonikach, tj. $|f_k|^2 = (1/n)|f|_{L^2}^2$. Wtedy zachodzi następująca równość

$$\frac{||f||_{V'}^2}{|f|^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^{-1}.$$

Ponieważ mamy zależność $\lambda_k \sim k$ więc $\tilde{F}_{-1} \sim n^{-1/2}(\ln n)^{1/2}\tilde{F}$ i mamy następujące oszacowanie na liczbę harmonik determinujących

$$m \geq \frac{16\nu_r^2}{d\lambda_1 k_3 k_1} + \frac{8c_1^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}\tilde{F}^2 n^{-1/2}(\ln n)^{1/2}.$$

4. Załóżmy, że siły i momenty działają w pierwszych n harmonikach i norma harmoniki rośnie liniowo wraz ze wzrostem jej numeru

$$|f_k|^2 = \frac{2||f||_{L^2}^2}{n(n+1)} \cdot k$$

dla $k = 1, \ldots, n$. Mamy więc

$$||f||_{V'}^2 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda_k}\frac{2k||f||_{L^2}^2}{n(n+1)} = \frac{2||f||_{L^2}^2}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\lambda_k}.$$

Ponieważ $\lambda_k \sim k$, więc

$$||f||_{V'}^2 \sim \frac{||f||_{L^2}^2}{(n+1)}.$$

Powyższy warunek razem z oszacowaniem (4.51) implikuje

$$m \geq \frac{16\nu_r^2}{d\lambda_1 k_3 k_1} + \frac{8c_1^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3}\frac{c\tilde{F}^2}{n+1}.$$

5. Załóżmy teraz, że siły i momenty działają w pierwszych n harmonikach i norma harmoniki maleje liniowo wraz ze wzrostem jej numeru, tj.

$$|f_k|^2 = \frac{2||f||^2_{L^2}}{n(n+1)} \cdot (n+1-k).$$

Ponieważ $\lambda_k \sim k$, więc mamy

$$\begin{aligned} ||f||^2_{V'} &= \frac{2||f||^2_{L^2}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1-k}{\lambda_k} \approx \frac{2||f||^2_{L^2}}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n+1}{k} - 1 \right) \\ &\approx \frac{2||f||^2_{L^2}}{n(n+1)} [(n+1)\ln n - n]. \end{aligned}$$

Z oszacowania (4.51) możemy wnioskować, że

$$m \geq \frac{16\nu_r^2}{d\lambda_1 k_3 k_1} + \frac{8c_1^2}{d\lambda_1 k_3 k_1^3} \frac{2\tilde{F}^2}{n(n+1)} [(n+1)\ln n - n].$$

Powyższe rozważania pokazują, że im większa liczba skal, w których działają siły i momenty tym mniejsza liczba harmonik potrzebnych do zdeterminowania przepływu w sensie Definicji 4.2 (przypadki 3, 4 i 5). Podobny efekt powoduje działanie tylko w małych skalach tzn. im większą liczbę falową ma skala, w której zaczyna się działanie sił i momentów tym mniej harmonik potrzeba do zdeterminowania przepływu (przypadki 1 i 2). Może być to związane z tym, że w małych skalach odpowiadających dużym liczbom falowym efekt tłumienia energii przez lepkość jest mocniejszy niż w dużych skalach. Ponadto liczba harmonik determinujących zależy w dużym stopniu od rozłożenia wielkości sił i momentów w poszczególnych skalach (przypadki 4 i 5).

4.4 Węzły determinujące

Dane pochodzące z eksperymentów fizycznych są zbierane z pomiarów dokonywanych w pewnej liczbie punktów w obszarze przepływu. Nasuwa się pytanie, w ilu punktach musimy dokonać pomiaru, żeby wystarczająco dobrze opisać przepływ. Związane z tym problemem pojęcie węzłów determinujących zostało wprowadzone przez C. Foiasa i R. Temama w [14] w kontekscie równań Naviera-Stokesa. Zbiór punktów w obszarze przepływu nazywamy zbiorem węzłów determinujących, gdy spełniony jest następujący warunek: jeżeli różnica pomiędzy dwoma rozwiązaniami w punktach pomiarowych dąży do zera gdy czas dąży do nieskończoności, to różnica pomiędzy rozwiązaniami także dąży do zera jednostajnie w całym obszarze przepływu. Najnowsze i najlepsze oszacowanie najmniejszej liczby węzłów determinujących dla równań z okresowym warunkiem brzegowym zostało wyprowadzone w [25]. Dobre oszacowanie liczby węzłów determinujących ma znaczenie w modelowaniu numerycznym, ponieważ węzły te są dobrymi kandydatami na węzły w metodzie elementu skończonego [4].

Rozważmy dwa różne rozwiązania (u_1, ω_1) i (u_2, ω_2) równań płynu mikropolarnego spełniające równania

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u_1 + (u_1 \cdot \nabla)u_1 + \nabla p = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega_1 + f_1, \tag{4.53}$$

$$\operatorname{div} u_1 = 0, \tag{4.54}$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial t} - \alpha\Delta\omega_1 + (u_1 \cdot \nabla)\omega_1 + 4\nu_r\omega_1 = 2\nu_r \operatorname{rot} u_1 + g_1 \tag{4.55}$$

oraz

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - (\nu + \nu_r)\Delta u_2 + (u_2 \cdot \nabla)u_2 + \nabla q = 2\nu_r \operatorname{rot} \omega_2 + f_2, \tag{4.56}$$

$$\operatorname{div} u_2 = 0, \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial t} - \alpha\Delta\omega_2 + (u_2 \cdot \nabla)\omega_2 + 4\nu_r\omega_2 = 2\nu_r \operatorname{rot} u_2 + g_2, \tag{4.58}$$

odpowiadające dwóm, być może różnym, parom sił i momentów zewnętrznych (f_1, g_1) i (f_2, g_2) odpowiednio. Odpowiadające im ciśnienia to $p = p(x,t)$ i $q = q(x,t)$. Podobnie jak w poprzednim podrozdziale zakładamy, że siły i momenty zewnętrzne mają takie samo zachowanie asymptotyczne, tzn.

$$\int_Q \left(|f_1(x,t) - f_2(x,t)|^2 + |g_1(x,t) - g_2(x,t)|^2 \right) dx \to 0 \text{ dla } t \to \infty, \tag{4.59}$$

jednak tutaj zakładamy mocniejszą zbieżność (w L^2 zamiast w H^{-1}). Rozważmy zbiór N punktów pomiarowych, zwanych dalej węzłami, i oznaczmy go symbolem Σ,

$$\Sigma = \{x^1, x^2, \ldots, x^N\}.$$

Zakładamy, że te punkty są jednostajnie rozmieszczone w kwadracie Q w następującym sensie: niech kwadrat Q będzie pokryty przez N jednakowych kwadratów $Q_1, \ldots, Q_N$ i w każdym kwadracie znajduje się dokładnie jeden punkt $x^i \in Q_i$.

Zakładamy, że oba przepływy mają takie samo zachowanie asymptotyczne w punktach pomiarowych. Ten warunek może być zapisany w następującej postaci

$$\max_{i=1,\ldots,N} |u_1(x^i,t) - u_2(x^i,t)| \to 0, \text{ dla } t \to \infty \tag{4.60}$$

oraz

$$\max_{i=1,\ldots,N} |\omega_1(x^i,t) - \omega_2(x^i,t)| \to 0, \text{ dla } t \to \infty. \tag{4.61}$$

Chcemy oszacować liczbę punktów pomiarowych konieczną do zdeterminowania asymptotycznego zachowania się przepływu w następującym sensie:

Definicja 4.3. *Zbiór Σ nazywamy zbiorem węzłów determinujących, jeżeli warunki* (4.60), (4.61) *razem z warunkami na siły i momenty* (4.59) *implikują*

$$\int_Q \left(|u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 + |\omega_1(x,t) - \omega_2(x,t)|^2\right) dx \to 0 \ \text{dla}\ t \to \infty, \tag{4.62}$$

tzn. takie samo asymptotyczne zachowanie się przepływów w punktach pomiarowych implikuje, że przepływy zachowują się asymptotcznie tak samo w całym obszarze.

Pokażemy, że warunki (4.60), (4.61) i (4.59) implikują zbieżność rozwiązań w silniejszej normie związanej z enstrofią tzn., że w istocoe

$$\int_Q \left(|\nabla u_1(x,t) - \nabla u_2(x,t)|^2 + |\nabla \omega_1(x,t) - \nabla \omega_2(x,t)|^2\right) dx \to 0 \text{ dla } t \to \infty.$$

Dla $\varphi = u$ oraz $\varphi = \omega$ oznaczamy

$$\eta(\varphi) = \max_{1 \le i \le N} |\varphi(x^i)|.$$

W dowodzie istnienia skończonego zbioru węzłów determinujących będziemy używać dwóch lematów. Jeden z nich to wykorzystany już w poprzednim podrozdziale uogólniony lemat Gronwalla, drugi to następujący lemat przedstawiony w [25]

Lemat 4.2. *Niech obszar Q będzie pokryty przez N identycznych kwadratów. Rozważmy zbiór $\Sigma = \{x^1, \dots x^N\}$ punktów w Q, rozmieszczonych po jednym w każdym kwadracie. Wtedy dla każdego pola wektorowego W z $D(A)$ i dla pewnej stałej c zachodzą następujace nierówności:*

$$|w|^2 \le \frac{c}{\lambda_1}\eta(w)^2 + \frac{c}{\lambda_1^2 N^2}|Aw|^2, \tag{4.63}$$

$$||w||^2 \le cN\eta(w)^2 + \frac{c}{\lambda_1 N}|Aw|^2, \tag{4.64}$$

$$||w||^2_{L^\infty(Q)} \le cN\eta(w)^2 + \frac{c}{\lambda_1 N}|Aw|^2. \tag{4.65}$$

Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem tego podrozdziału.

Twierdzenie 4.6. *Niech obszar $Q = (0, L)^2$ będzie pokryty przez N jednakowych kwadratów $Q_1, \dots, Q_N$. Rozważmy zbiór $\Sigma = \{x^1, \dots, x^N\}$ punktów w Q rozmieszczonych po jednym w każdym kwadracie, $x^i \in Q_i$ dla $1 \le i \le N$. Niech f_1 i f_2 będą dwoma siłami należącymi do $L^\infty(0, \infty; H)$, a g_1 i g_2 momentami zewnętrznymi z $L^\infty(0, \infty; \dot{H}^0_{per})$, spełniającymi warunek* (4.59).

Wtedy zbiór Σ jest zbiorem węzłów determinujących w sensie Definicji 4.3 dla dwuwymiarowych równań płynu mikropolarnego z okresowymi warunkami brzegowymi przy założeniu, *że*

$$N > \frac{c}{k_1\lambda_1}\left\{ \frac{16\nu_r^2}{\alpha} + \left(\frac{c_1^2(4+10\lambda_1^2)}{k_1^3\lambda_1^2} + \frac{64c_1^2\nu_r^2}{k_1^3k_2\alpha} \right)\tilde{F}^2 \right. \tag{4.66}$$
$$\left. +\hat{c}_1\tilde{F}^4\exp(\hat{c}_2+\hat{c}_3\tilde{F}^4)\left(\frac{248c_1^4}{\lambda_1k_1^4k_2} + \frac{16c_1^4}{\nu\alpha k_1^4k_2}\tilde{F}^2 \right) \right\},$$

gdzie $\tilde{F}$ *jest zdefiniowane w* (4.1), $\hat{c}_i$ *w* (4.7), *a* k_1 *i* k_2 *w* (3.15).

Dowód. Plan dowodu jest następujący: najpierw wyprowadzimy nierówność różniczkową dla funkcji $t \to ||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2$, potem przekształcimy ją tak, aby można było skorzystać z warunków (4.60) oraz (4.61) i zastosować uogólniony lemat Gronwalla (Lemat 2.2). Oszacowanie na N będzie wynikało z warunku (2.13). Oznaczmy $u = u_1 - u_2$, $f = f_1 - f_2$, etc. Pisząc równania (4.53) i (4.56) w postaci funkcjonalnej i odejmując je stronami otrzymujemy

$$u_t + (\nu+\nu_r)Au + B(u,u_1) + B(u_2,u) = 2\nu_r \operatorname{rot}\omega + f. \tag{4.67}$$

Biorąc iloczyn skalarny równania (4.67) i Au w H, dostajemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u(t)||^2 + (\nu+\nu_r)|Au|^2 = 2\nu_r(\operatorname{rot}\omega, Au) + (f,Au) - b(u,u_1,Au) - b(u_2,u,Au). \tag{4.68}$$

Wyrazy prawej strony (4.68) szacujemy przy pomocy nierówności (2.8) i nierówności Younga:

$$\begin{aligned}
2\nu_r(\operatorname{rot}\omega, Au) &\le \nu_r|Au|^2 + \nu_r||\omega||^2,\\
(f,Au) &\le \frac{\nu}{8}|Au|^2 + \frac{2}{\nu}|f|^2,\\
b(u,u_1,Au) &\le c_1|u|^{1/2}||u_1||\cdot|Au|^{3/2} \le \frac{\nu}{8}|Au|^2 + \frac{54c_1^4}{\nu^3}|u|^2||u_1||^4,\\
b(u_2,u,Au) &\le c_1|u_2|^{1/2}|Au_2|^{1/2}||u||\cdot|Au| \le \frac{\nu}{8}|Au|^2 + \frac{2c_1^2}{\nu}|u_2|\cdot|Au_2|\cdot||u||^2.
\end{aligned}$$

Używając powyższych oszacowań w (4.68) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u||^2 + \frac{5\nu}{8}|Au|^2 \le \nu_r||\omega||^2 + \frac{2}{\nu}|f|^2 + \frac{54c_1^4}{\nu^3}|u|^2||u_1||^4 + \frac{2c_1^2}{\nu}|u_2|\cdot|Au_2|\cdot||u||^2. \tag{4.69}$$

Z równaniami na mikrorotację (4.55) i (4.58) będziemy postępować w podobny sposób. Pisząc je w postaci funkcjonalnej i odejmując je od siebie dostajemy

$$\omega_t + \alpha A_1\omega + B_1(u,\omega_1) + B_1(u_2,\omega) + 4\nu_r\omega = 2\nu_r \operatorname{rot} u + g. \tag{4.70}$$

Mnożąc (4.70) przez $A_1\omega$ i całkując po Q otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\omega||^2 + \alpha|A_1\omega|^2 &+ b_1(u,\omega,A_1\omega) + b_1(u_2,\omega,A_1\omega) + 4\nu_r||\omega||^2\\
&= 2\nu_r(\operatorname{rot} u, A_1\omega) + (g, A_1\omega).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Wyrazy nieliniowe szacujemy następująco

$$
\begin{aligned}
b_1(u,\omega_1,A_1\omega) &\le c_1|u|^{1/2}|Au|^{1/2}||\omega_1||\cdot|A_1\omega| \le \frac{\alpha}{8}|A_1\omega|^2+\frac{2c_1^2}{\alpha}|u|\cdot|Au|\cdot||\omega_1|^2\\
&\le \frac{\alpha}{8}|A_1\omega|^2+\frac{\nu}{8}|Au|^2+\frac{8c_1^4}{\alpha^2\nu}|u|^2||\omega_1||^4,\\
b_1(u_2,\omega,A_1\omega) &\le c_1|u_2|^{1/2}|Au_2|^{1/2}||\omega||\cdot|A_1\omega| \le \frac{\alpha}{8}|A_1\omega|^2+\frac{2c_1^2}{\alpha}|u_2|\cdot|Au_2|\cdot||\omega||^2,
\end{aligned}
$$

a wyrazy prawej strony (4.71) podobnie do analogicznych wyrazów w równaniu (4.68)

$$
\begin{aligned}
2\nu_r(\operatorname{rot} u, A_1\omega) &\le \frac{\alpha}{8}|A_1\omega|^2+\frac{8\nu_r^2}{\alpha}||u||^2,\\
(g,A_1\omega) &\le \frac{\alpha}{8}|A_1\omega|^2+\frac{2}{\alpha}|g|^2.
\end{aligned}
$$

Używając powyższych oszacowań w (4.71) wnioskujemy, że

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\omega||^2+\frac{\alpha}{2}|A_1\omega|^2+4\nu_r||\omega||^2 &\le \frac{8\nu_r^2}{\alpha}||u||^2+\frac{2c_1^2}{\alpha}|u_2|\cdot|Au_2|\cdot||\omega||^2\\
&+\frac{2}{\alpha}|g|^2+\frac{\nu}{8}|Au|^2+\frac{8c_1^4}{\alpha^2\nu}|u|^2||\omega_1||^4.
\end{aligned}
\tag{4.72}
$$

Dodając równania (4.69) i (4.72) do siebie otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(||u||^2+||\omega||^2\right)+\frac{k_1}{2}\left(|Au|^2+|A_1\omega|^2\right) &\le \frac{2}{k_1}\left(|f|^2+|g|^2\right)+\frac{8\nu_r^2}{\alpha}||u||^2\\
&+\frac{c_1^2}{k_1}|u_2|\cdot|Au_2|\left(||u||^2+||\omega||^2\right)+\frac{62c_1^4}{k_1^3}|u|^2||\omega_1||^4,
\end{aligned}
\tag{4.73}
$$

gdzie $k_1=\min\{\nu,\alpha\}$ (jak w (3.15)). Z Lematu 4.2 wynika nierówność

$$
|Au|^2 \ge \frac{\lambda_1 N}{c}||u||^2-\lambda_1 N^2\eta(u)^2 \tag{4.74}
$$

oraz podobna nierówność dla ω

$$
|A_1\omega|^2 \ge \frac{\lambda_1 N}{c}||\omega||^2-\lambda_1 N^2\eta(\omega)^2. \tag{4.75}
$$

Nierówność Poincaré implikuje

$$
\frac{4c_1^4}{\alpha^2\nu}|u|^2||\omega||^4 \le \frac{4c_1^4}{\alpha^2\nu\lambda_1}||u||^2||\omega||^4. \tag{4.76}
$$

Biorąc pod uwagę nierówności (4.74) – (4.76), z oszacowania (4.73) wnioskujemy dalej, że

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(||u||^2+||\omega||^2)&+(||u||^2+||\omega||^2)\\
&\cdot\left(\frac{\lambda_1 k_1 N}{c}-\frac{16\nu_r^2}{\alpha}-\frac{124c_1^4}{\lambda_1 k_1^3}||\omega_1||^4-\frac{2c_1^2}{k_1}\left(|u_2|^2+|Au_2|^2\right)\right)\\
&\le \frac{4}{k_1}\left(|f|^2+|g|^2\right)+\lambda_1 N^2(\eta(u)^2+\eta(\omega)^2).
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

Oznaczając

$$\gamma(t) = \frac{\lambda_1 k_1 N}{c} - \frac{16\nu_r^2}{\alpha} - \frac{124c_1^4}{\lambda_1 k_1^3}||\omega_1||^4 - \frac{2c_1^2}{k_1}\left(|u_2|^2 + |Au_2|^2\right),$$
$$\beta(t) = \frac{4}{k_1}\left(|f|^2 + |g|^2\right) + \lambda_1 N^2(\eta(u)^2 + \eta(\omega)^2),$$
$$\xi(t) = ||u||^2 + ||\omega||^2,$$

możemy napisać (4.77) w postaci

$$\frac{d\xi}{dt} + \gamma\xi \leq \beta.$$

$\beta(t)$ zbiega do zera dla $t \to \infty$. Założenie (2.15) Lematu 2.1 jest zatem spełnione. W celu sprawdzenia założenia (2.13) napiszmy

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \gamma(s)\, ds \geq & \frac{k_1\lambda_1 N}{c} - \frac{16\nu_r^2}{\alpha} \\ & - \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \left(\frac{124c_1^4}{\lambda_1 k_1^3}||\omega_1(s)||^4 + \frac{2c_1^2}{k_1}\left(|u_2(s)|^2 + |Au_2(s)|^2\right)\right) ds.\end{aligned} \tag{4.78}$$

Zajmijmy się teraz oszacowniem poszczególnych składników całki po prawej stronie. Mamy:

$$\begin{aligned}\frac{124c_1^4}{\lambda_1 k_1^3}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} ||\omega_1(s)||^4\, ds &\leq \frac{124c_1^4}{\lambda_1 k_1^3}\hat{c}_1\tilde{F}^2 \exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4\right) \cdot \frac{1}{T}\int_t^{t+T} ||\omega_1(s)||^2\, ds \\ &\leq \frac{248c_1^4}{\lambda_1 k_1^4 k_2}\hat{c}_1\tilde{F}^4 \exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4\right),\end{aligned}$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z nierówności (4.8) a druga z nierówności (4.4). Drugi składnik oszacujemy korzystając z nierówności (4.16) i (4.20)

$$\frac{2c_1^2}{k_1}\frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left(|u_2|^2 + |Au_2|^2\right) ds \leq \left(\frac{c_1^2(4+10\lambda_1^2)}{k_1^3\lambda_1^2} + \frac{64c_1^2\nu_r^2}{k_1^3 k_2\alpha}\right)\tilde{F}^2 + \frac{16c_1^4\hat{c}_1}{\nu\alpha k_1^4 k_2}\tilde{F}^6 \exp\left(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4\right).$$

Wstawiając powyższe oszacowania do nierówności (4.78) otrzymujemy

$$\begin{aligned}\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{T}\int_t^{t+T} \gamma(s)\, ds \geq & \frac{k_1\lambda_1 N}{c} - \frac{16\nu_r^2}{\alpha} - \left(\frac{c_1^2(4+10\lambda_1^2)}{k_1^3\lambda_1^2} + \frac{64c_1^2\nu_r^2}{k_1^3 k_2\alpha}\right)\tilde{F}^2 \\ & - \hat{c}_1\tilde{F}^4 \exp(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4)\left(\frac{248c_1^4}{\lambda_1 k_1^4 k_2} + \frac{16c_1^4}{\nu\alpha k_1^4 k_2}\tilde{F}^2\right).\end{aligned}$$

Zatem, jeżeli

$$\begin{aligned}N \geq & \frac{c}{k_1\lambda_1}\left\{\frac{16\nu_r^2}{\alpha} + \left(\frac{c_1^2(4+10\lambda_1^2)}{k_1^3\lambda_1^2} + \frac{64c_1^2\nu_r^2}{k_1^3 k_2\alpha}\right)\tilde{F}^2\right. \\ & \left. + \hat{c}_1\tilde{F}^4 \exp(\hat{c}_2 + \hat{c}_3\tilde{F}^4)\left(\frac{248c_1^4}{\lambda_1 k_1^4 k_2} + \frac{16c_1^4}{\nu\alpha k_1^4 k_2}\tilde{F}^2\right)\right\},\end{aligned}$$

to warunek (2.13) jest spełniony. Łatwo sprawdzić, że jeżeli N spełnia powyższą nierówność, to założenie (2.14) również jest spełnione. Z uogólnionego Lematu Gronwall'a wnioskujemy, że $||u(t)||^2 + ||\omega(t)||^2 \to 0$ przy $t \to \infty$, co kończy dowód. $\square$

4.5 Własności rozwiązań w klasach Gevrey'a

Pokażemy, że analityczne rozwiązania równań płynu mikropolarnego można opisać dokładnie za pomocą skończonej liczby parametrów tzn. wykażemy istnienie węzłów natychmiastowo determinujących (*instantaneously determining nodes*) czyli takiego zbioru k punktów $\mathbf{x} = \{x_1, \ldots, x_k\}$ w obszarze przepływu Q, że istnieje jednoznaczne odwzorowanie z $\mathbb{A}_{\nu_r}$ w $\mathbb{R}^{3k}$ dane przez

$$E_{\mathbf{x}} \colon \bar{u} \in \mathbb{A} \to (\bar{u}(x_1), \bar{u}(x_2), \ldots, \bar{u}(x_k)) \in \mathbb{R}^{3k}$$

pomiędzy atraktorem $\mathbb{A}_{\nu_r}$ i jego obrazem. Innymi słowy możemy wskazać jednoznacznie trajektorię na atraktorze znając wartości prędkości i rotacji cząstek w pewnej chwili czasu w punktach zbioru $\mathbf{x}$.

Twierdzenie 4.7. *Niech $\mathbb{A}_{\nu_r}$ będzie atraktorem związanym z półgrupą $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ stowarzyszoną z równaniami płynu mikropolanego (1.18)-(1.20) z okresowym warunkiem brzegowym (1.22). Załóżmy, że $k > 32 d_f(\mathbb{A}_{\nu_r})$, gdzie $d_f(\mathbb{A}_{\nu_r})$ jest wymiarem fraktalnym zbioru $\mathbb{A}_{\nu_r}$. Wtedy dla prawie każdego (względem $2k$-wymiarowej miary Lebesgue'a) zbioru k węzłów*

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \quad x_j \in \Omega,$$

wartości $\bar{u}(x_j)$ jednoznacznie determinują funkcję $\bar{u} \in \mathbb{A}_{\nu_r}$.

W celu wykazania istnienia zbioru węzłów natychmiastowo determinujących posłużymy się następującym twierdzeniem z [18]

Twierdzenie 4.8. *Niech $Q = (0, L)^n$, $n \in \mathbb{N}$, niech $\mathbb{A}$ zwartym podzbiorem $[L^2(Q)]^m$, który dla pewnego $\tau > 0$, jest ograniczony w przestrzeni Gevrey'a $D(e^{\tau A^{1/2}})$ (zdefiniowanej w podrozdziale 3.3), gdzie $A = -\Delta$. Załóżmy ponadto, że wymiar fraktalny $d_f(\mathbb{A})$ zbioru $\mathbb{A}$ jest skończony. Wtedy, przy założeniu, że $k > 16 n d_f(\mathbb{A})$, przekształcenie*

$$E_{\mathbf{x}} \colon \mathbb{A} \ni u \mapsto (u(x_1), \ldots, u(x_k)) \in \mathbb{R}^{mk}$$

jest 1−1 ze zbioru $\mathbb{A}$ na jego obraz zawarty w $\mathbb{R}^{mk}$ dla prawie każdego (względem nk-wymiarowej miary Lebesgue'a) zbioru k węzłów $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k)$, $x_j \in Q$.

Dowód Twierdzenia 4.7. W podrozdziale 4.2 pokazaliśmy istnienie globalnego atraktora oraz oszacowaliśmy jego wymiar fraktalny spełnia nierówność

$$d_f(\mathbb{A}_{\nu_r}) \le C\tilde{F},$$

dla pewnej stałej C. Z rozważań w podrozdziale 3.3, poświęconych rozwiązaniom w klasach Gevrey'a, wynika, że dla pewnego M zachodzi $||\bar{u}||_\tau \le M$, gdzie $\bar{u}$ jest analitycznym rozwiązaniem równań płynu mikropolarnego z Twierdzenia 3.4. Zatem atraktor jest jednostajnie ograniczony w $D(e^{\tau\mathcal{A}^{1/2}})$. Możemy więc zastosować Twierdzenie 4.8, co kończy dowód. □

Okazuje się, że węzły natychmiastowo determinujące są również determinujące w sensie Definicji 4.3.

Wniosek 4.1 (Wniosek 9 w [18]). *"Niech będą spełnione założenia Twierdzenia 4.8. Załóżmy ponadto, że $\mathbb{A}_{\nu_r}$ przyciąga w normie L^∞ (dla dowolnej trajektorii układu $\bar{u}$ oraz każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $T > 0$, że dla $t > T$ $\bar{u}(t) \in \mathcal{O}^\varepsilon(\mathbb{A}_{\nu_r})$, gdzie $\mathcal{O}^\varepsilon(\mathbb{A}_{\nu_r})$ jest sumą kul w $L^\infty(Q)$ o środkach w $\mathbb{A}_{\nu_r}$ i promieniach ε). Wtedy prawie każdy zbiór k węzłów determinuje przepływ w sensie Definicji 4.3, jeżeli $k > 32d_f(\mathbb{A}_{\nu_r})$." Z powyższego wniosku wynika, że węzły natychmiastowo determinujące (instantaneously determining nodes) są również determinujące asymptotycznie tzn. w sensie Definicji 4.3.*

Dowód. Weźmy zbiór węzłów natychmiastowo determinujących $\mathbf{x}$ i rozważmy atraktor $\mathbb{A}_{\nu_r}$ jako podzbiór w L^∞. Lemat 4 w [18] gwarantuje, że odwzorowanie identycznościowe na atraktorze $\mathrm{Id}\colon L^2 \supset \mathbb{A} \to \mathbb{A} \subset L^\infty$ jest ciągłe z L^2 w L^∞. Z tego wynika, że $\mathbb{A}_{\nu_r}$ jest zwartym podzbiorem L^∞.

Zauważmy, że przekształcenie $E_\mathbf{x}$ z atraktora w $\mathbb{R}^{3k}$ zadane przez

$$\bar{u} \mapsto E_\mathbf{x}(\bar{u}) = (\bar{u}(x_1), \ldots, \bar{u}(x_k))$$

jest ciągłe. Ponieważ jest również $1-1$, a $\mathbb{A}_{\nu_r}$ jest zwarty, więc przekształcenie z $E_x(\mathbb{A}_{\nu_r})$ w $\mathbb{A}_{\nu_r})$ dane przez $E_\mathbf{x}^{-1}$ jest ciągłe. Z tego wynika, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje δ (którą możemy wybrać tak aby $\delta \le \varepsilon$), taka, że jeżeli $\bar{u}, \bar{v} \in \mathbb{A}_{\nu_r}$ oraz

$$\sup_j |\bar{u}(x_j) - \bar{v}(x_j)| \le \delta$$

to

$$||\bar{u} - \bar{v}||_\infty \le \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Załóżmy, że $\bar{u}(x,t)$ i $\bar{v}(x,t)$ są rozwiązaniami, które mają takie samo zachowanie asymptotyczne w tych węzłach. Ponieważ $\mathbb{A}_{\nu_r}$ jest atraktorem, więc dla każdego $\delta > 0$ istnieje $T > 0$ takie, że

$$dist_{L^\infty}(\bar{u}(x,t), \mathbb{A}_{\nu_r}) \le \frac{1}{3}\delta, \quad dist_{L^\infty}(\bar{v}(x,t), \mathbb{A}_{\nu_r}) \le \frac{1}{3}\delta$$

oraz

$$\sup_j |\bar{u}(x_j,t) - \bar{v}(x_j,t)| \leq \frac{1}{3}\delta$$

dla wszystkich $t \geq T$. Z tego wynika, że istnieją funkcje $\bar{u}^*$ oraz $\bar{v}^*$ leżące na atraktorze, takie że

$$||\bar{u}^* - \bar{u}||_\infty \leq \frac{1}{3}\delta, \quad ||\bar{v}^* - \bar{v}||_\infty \leq \frac{1}{3}\delta \tag{4.79}$$

oraz

$$|\bar{u}^*(x_j,t) - \bar{v}^*(x_j,t)| \leq \delta \quad \text{dla } 1 \leq j \leq k,$$

i w konsekwencji $||\bar{u}^*(t) - \bar{v}^*(t)||_\infty \leq \frac{1}{3}\varepsilon$. Łącząc to z (4.79) mamy

$$||\bar{u}(t) - \bar{v}(t)||_\infty \leq \varepsilon$$

dla wszystkich $t \geq T$, co kończy dowód. □

Z powyższych rozważań wynika, że przy dodatkowych założeniach na siły i momenty zewnętrzne można poprawić oszacowanie (4.66) *liczby węzłów determinujących w sensie Definicji 4.3. Jednak te dodatkowe założenia są bardzo mocne, mianowicie zakładamy, że siły i momenty są analityczne względem zmiennej przestrzennej oraz, że są niezależne od czasu. Drugi warunek pociąga za sobą, że siły i momenty muszą być takie same dla obu przepływów aby spełnione było założenie* (4.59).

Rozdział 5

Oszacowania drabinowe

Oszacowania drabinowe to oszacowania wiążące ewolucję N-tych seminorm rozwiązań z seminormami innego rzędu. Tego typu oszacowania dla równań Naviera-Stokesa wyprowadzono w [2]. W tej pracy pokazano również, że w przypadku dwuwymiarowym z oszacowań tych wynika, że funkcje należące do atraktora są gładkie (klasy C^∞ względem zmiennej przestrzennej). W [3] z takich oszacowań wyprowadzono hierarchię skal długości w przepływach turbulentnych. Powyższe wyniki zebrano w książce [7]. Oszacowania drabinowe posłużyły również C.R. Doeringowi i J.D. Gibbonowi do badania regularności rozwiązań równań Naviera-Stokesa w trójwymiarowym obszarze przepływu. W [8] pokazali oni, że rozwiązania równań Naviera-Stokesa posiadają dwojakie zachowanie się w czasie, długie spokojne okresy są przedzielone krótkimi aktywnymi okresami, podczas których występują duże fluktuacje prędkości, dalekie od wartości średniej. Pokazano, że w "dobrych" okresach rozwiązania są ograniczone i regularne, podczas gdy w "złych" okresach mogą pojawiać się osobliwości. Ponadto udowodniono, że stosunek długości okresów "dobrych" do "złych" rośnie wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa.

5.1 Twierdzenie drabinowe dla płynów mikropolarnych

Celem tego podrozdziału jest wyprowadzenie nierówności opisujących ewolucję seminorm rozwiązania równań płynu mikropolarnego (Twierdzenie 5.1 str. 76).

Będziemy chcieli powiązać ewolucję normy $N-$tych pochodnych rozwiązania z normą pochodnych niższego rzędu. W tym celu musimy zdefiniować pochodne pól prędkości i mikrorotacji rzędu $N \geq 1$. Dla funkcji skalarnej ψ definiujemy

$$|D^N\psi|^2 = \sum_{|n|=N} \left| \frac{\partial^N \psi}{\partial^{n_1} x_1 \dots \partial^{n_3} x_3} \right|^2, \quad \text{gdzie } |n| = n_1 + n_2 + n_3.$$

Innymi słowy $|D^N\psi|^2$ jest sumą kwadratów norm pochodnych $N-$tego rzędu.

W celu wyprowadzenia oszacowań drabinowych chcemy nadać równaniu na mikrorotację strukturę podobną do struktury równania na prędkość tj. dla u i ω mieć spełnione tożsamości (5.4) i (5.5). W przypadku dwuwymiarowym, który rozważamy w tej rozprawie, nie jest to oczywiste, ponieważ dla przepływu w dwóch wymiarach pole mikrorotacji ma tylko jedną współrzędną $\omega = \omega_3(x_1, x_2, t)$, tak samo jak pole momenów zewnętrznych $g = g_3(x_1, x_2, t)$. Nie możemy więc dla tych pól zdefiniować dywergencji, ani tym bardziej stwierdzić, bądź założyć, że jest ona równa 0, jak ma to miejsce dla pola prędkości i pola sił zewnętrznych. Z tym problemem możemy sobie poradzić dzięki pomysłowi, żeby rozpatrywać przepływ dwuwymiarowy jako szczególny przypadek przepływu trójwymiarowego. Rozważmy przepływ w trzech wymiarach pamiętając o założeniach potrzebnych do zredukowania go do dwuwymiarowego: pola zewnętrzne oraz sam ruch nie zależą od x_3, mianowicie zakładamy, że składowa prędkości u_3 jest zerowa oraz że osie obrotu cząstek płynu są prostopadłe do płaszczyzny (x_1, x_2). Powyższe warunki powodują, że pola u, p, ω przyjmują postać $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), 0)$, $p = p(x,t)$, $\omega = (0, 0, \omega_3(x,t))$, siły i momenty zewnętrzne mają postać $f = (f_1(x,t), f_2(x,t), 0)$ oraz $g = (0, 0, g_3(x,t))$, gdzie $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{Q} = (0, L)^3$. Tutaj w sztuczny sposób wstawiamy zależność od x_3, aby wszystkie pola wektorowe były trójwymiarowe. Dzięki temu nie ma już problemu ze zdefiniowaniem dywergencji dla pól mikrorotacji i momentów zewnętrznych. Ponadto z powyższych założeń wynika, że $\operatorname{div} \omega = 0$ oraz $\operatorname{div} g = 0$, co pozwala na uzyskanie struktury równania na rotację zbliżonej do struktury równania na prędkość, i w efekcie tożsamości (5.4) i (5.5).

Dla pól wektorowych $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$ i $\omega = (\omega_1(x,t), \omega_2(x,t), \omega_3(x,t))$ będziemy rozpatrywać normy ich N-tych pochodnych w L^2. Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$H_N^u = \sum_{i=1}^{3} \int_Q |D^N u_i|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{3} \int_Q \sum_{|n|=N} \left| \frac{\partial^N u_i(x)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|^2 dx, \tag{5.1}$$

$$H_N^\omega = \sum_{i=1}^{3} \int_Q |D^N \omega_i|^2 \, dx = \sum_{i=1}^{3} \int_Q \sum_{|n|=N} \left| \frac{\partial^N \omega_i(x)}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|^2 dx, \tag{5.2}$$

$$H_N = H_N^u + H_N^\omega. \tag{5.3}$$

Dwie pierwsze wielkości będą nam potrzebne do przeprowadzenia oszacowań dla równań na prędkość i rotację, a trzecia, żeby zebrać te oszacowania razem.

Operatory Δ, ∇ oraz rot pojawiają się w równaniach płynu mikropolarnego, popatrzmy jakie relacje występują między nimi. Ponieważ rozpatrujemy przepływ z okresowymi warunkami brzegowymi oraz wiemy, że $\nabla \cdot \varphi = 0$ dla $\varphi = u, \omega$, więc zachodzą poniższe równości

$$\int_Q |\operatorname{rot} \varphi|^2 \, dx = \int_Q |\nabla \varphi|^2 \, dx = \int_Q |D\varphi|^2 \, dx = H_1^\varphi. \tag{5.4}$$

Stosując indukcję względem N można udowodnić następującą tożsamość (por. [7])

$$H_N^{\varphi} = \int\limits_Q |D^N \varphi|^2 \, dx = \int\limits_Q |\operatorname{rot}^N \varphi|^2 \, dx. \tag{5.5}$$

Dzięki temu widzimy, że choć opreatory D, ∇ i rot nie są równoważne sobie punktowo, to są równoważne po przyłożeniu normy L^2. Nie jest to jednak prawdą dla dowolnych przestrzeni L^p. Weźmy $p = \infty$ i popatrzmy na $||\operatorname{rot} u||_\infty$ i $||Du||_\infty$. Okazuje się, że $||\operatorname{rot} u||_\infty \neq ||Du||_\infty$. Dzieje się tak ponieważ $||Du||_\infty$ zawiera normę wszystkich pochodnych wszystkich współrzędnych wektora u, podczas gdy w $||\operatorname{rot} u||_\infty$ część pochodnych nie występuje ze względu na sposób, w jaki jest zdefiniowany operator rot.

Zdefiniujmy seminormy związane z siłami i momentami działającymi na płyn następująco:

$$\Phi_N^f = \int\limits_Q |D^N f|^2 \, dx, \tag{5.6}$$

$$\Phi_N^g = \int\limits_Q |D^N g|^2 \, dx, \tag{5.7}$$

$$\Phi_N = \Phi_N^f + \Phi_N^g, \tag{5.8}$$

gdzie bez straty ogólności możemy przyjąć, że $\nabla \cdot f = 0$, zaś $\nabla \cdot g = 0$ ze względu na założenia przyjęte w celu zredukowania przepływu do dwóch wymiarów. Zakładamy, że układ jest autonomiczny oraz, że siły i momenty zewnętrzne mają skończone rozwinięcia w szeregi Fouriera

$$f(x) = \sum_{k=1}^{k_{max}} f_k w_k(x), \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{k_{max}} g_k \rho_k(x).$$

Wtedy istnieje najmniejsza skala, w której działają $\lambda_f = 2\pi/k_{max}$. W celu dołączenia sił i momentów do oszacowań pomnożymy Φ_N przez $\tau = L^2(2k_1)^{-1}$. Możemy teraz zdefiniować

$$F_N = H_N + \tau^2 \Phi_N.$$

F_N zawiera normy $N-$tych pochodnych trzech składowych prędkości oraz rotacji i dodatkowo trzech składowych sił oraz momentów. Zdefiniujmy jeszcze jedną skalę długości λ_0 zależną od wielkości obszaru przepływu L i najmniejszej skali w jakiej działają siły i momenty λ_f:

$$\lambda_0^{-2} = L^{-2} + \lambda_f^{-2}.$$

Dla każdej funkcji $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ przez $\dot{h}$ będziemy oznaczać $\frac{d}{dt}h$. Poniższe twierdzenie jest głównym wynikiem tego rozdziału.

Twierdzenie 5.1. *Dla dwuwymiarowego przepływu płynu mikropolarnego z okresowymi warunkami brzegowymi, dla $1 \leq s \leq N$ zachodzą następujące nierówności:*

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq -k_1 \frac{F_N^{1+1/s}}{F_{N-s}^{1/s}} + (c_N ||D\bar{u}||_\infty + k_1 \lambda_0^{-2}) F_N,$$
$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \geq -k_4 F_{N+1} - (c_N ||D\bar{u}||_\infty + k_1 \lambda_0^{-2}) F_N,$$

gdzie $k_1 = \min(\nu, \alpha)$, a $k_4 = \max(\nu, \alpha)$.

Dowód. Najpierw ułożymy równania na H_N^u oraz H_N^ω i zrobimy odpowiednie szacowania, a potem dodamy je aby otrzymać nierówności na H_N i dalej na F_N.

Po przyłożeniu do równań operatora rot^N oraz pomnożeniu ich skalarnie przez $\operatorname{rot}^N u$ i $\operatorname{rot}^N \omega$, odpowiednio, otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\dot{H}_N^u = \int_Q (\operatorname{rot}^N u) \cdot [\operatorname{rot}^N ((\nu + \nu_r)\Delta u - (u \cdot \nabla) u - \nabla p + 2\nu_r \operatorname{rot} \omega + f)]\, dx, \tag{5.9}$$

$$\frac{1}{2}\dot{H}_N^\omega = \int_Q (\operatorname{rot}^N \omega) \cdot [\operatorname{rot}^N (\alpha \Delta \omega - (u \cdot \nabla)\omega - 4\nu_r \omega + 2\nu_r \operatorname{rot} u + g)]\, dx, \tag{5.10}$$

gdzie $\cdot$ oznacza iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$.

Najpierw zajmiemy się równaniem (5.9). Będziemy po kolei szacować wyrazy z prawej strony. W celu oszacowania wyrazu z laplasjanem skorzystamy z następującej tożsamości wspomnianej w Rozdziale 2

$$\int_Q \operatorname{rot} u \cdot v\, dx = \int_Q u \cdot \operatorname{rot} v\, dx \tag{5.11}$$

oraz z faktu, że $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u) = -\Delta u + \nabla(\operatorname{div} u)$. Wyraz z laplasjanem możemy więc zapisać w następujący sposób (korzystając z tego, że $\operatorname{div} u = 0$)

$$\begin{aligned}(\nu + \nu_r) \int_Q (\operatorname{rot}^N u) \cdot (\operatorname{rot}^N \Delta u)\, dx &= -(\nu + \nu_r) \int_Q (\operatorname{rot}^N u) \cdot (\operatorname{rot}^{N+2} u)\, dx \\ &= -(\nu + \nu_r) H_{N+1}^u.\end{aligned} \tag{5.12}$$

Zauważmy, że (5.12) jest równością, to pozwoli nam (razem z analogiczną równością (5.14) dla ω) na szacowanie pochodnej H_N zarówno z góry jak i z dołu.

Wyraz nieliniowy szacujemy podobnie jak w [7] (w podobny sposób będziemy szacować wyraz nieliniowy w równaniu (5.10), więc w tym miejscu pominiemy rachunki) i otrzymujemy

$$|\mathrm{NL}u| \leq \tilde{c}_N H_N^u ||Du||_\infty \leq \tilde{c}_N H_N ||D\bar{u}||_\infty,$$

ponieważ $H_N^u \leq H_N$ oraz $||Du||_\infty \leq ||D\bar{u}||_\infty$, gdzie $\bar{u} = (u, \omega) \in \mathcal{H}$.

Po zastosowaniu do wyrazu z ciśnieniem tożsamości (2.9) i scałkowaniu go przez części mamy

$$\int_Q (\operatorname{rot}^N u) \cdot \nabla p \, dx = \int_Q u \cdot (\operatorname{rot}^N \nabla p) \, dx = \int_Q \operatorname{div} u \cdot \operatorname{rot}^N p \, dx = 0,$$

ponieważ $\operatorname{div} u = 0$.

Po zastosowaniu nierówności Cauchy'ego-Schwartza do wyrazu zawierającego siły otrzymujemy

$$\left| \int_Q (\operatorname{rot}^N u) \cdot (\operatorname{rot}^N f) \, dx \right| \leq (H_N^u)^{1/2} (\Phi_N^f)^{1/2}.$$

Do szacowania wyrazu z $\operatorname{rot} \omega$ użyjemy tożsamości (5.11) oraz nierówności Cauchy'ego-Schwartza i Younga

$$\begin{aligned} 2\nu_r \left| \int_Q (\operatorname{rot}^N u) \cdot (\operatorname{rot}^{N+1} \omega) \, dx \right| &= 2\nu_r \left| \int_Q (\operatorname{rot}^{N+1} u) \cdot (\operatorname{rot}^N \omega) \, dx \right| \\ &\leq 2\nu_r (H_{N+1}^u)^{1/2} (H_N^\omega)^{1/2} \leq \frac{\nu_r}{2} H_{N+1}^u + 2\nu_r H_N^\omega. \end{aligned}$$

Po wstawieniu powyższych oszacowań do (5.9) otrzymujemy

$$\frac{1}{2} \dot{H}_N^u \leq -(\nu + \nu_r/2) H_{N+1}^u + c_N H_N ||D\bar{u}||_\infty + 2\nu_r H_N^\omega + (H_N^u)^{1/2} (\Phi_N^f)^{1/2}. \tag{5.13}$$

Teraz zajmiemy się równaniem na rotację (5.10). Będziemy z nim postępować podobnie jak z równaniem (5.9). Tak jak poprzednio przy szacowniu wyrazu z laplasjanem skorzystamy z (5.11), z faktu że $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \omega) = -\Delta\omega + \nabla(\operatorname{div} \omega)$ oraz $\operatorname{div} \omega = 0$ (z założeń na przepływ)

$$\alpha \int_Q (\operatorname{rot}^N \omega) \cdot (\operatorname{rot}^N \Delta\omega) \, dx = -\alpha H_{N+1}^\omega. \tag{5.14}$$

Zwróćmy uwagę na to, że zarówno (5.14) jak i (5.12) to równości. To będzie potrzebne do szacowania pochodniej H_N od dołu.

Wyraz nieliniowy zapiszemy przy użyciu operatora D. Dzięki temu łatwiej będzie go oszacować,

$$|NL\omega| = \left| \int_Q (D^N \omega) \cdot (D^N [-(u \cdot \nabla)\omega]) \, dx \right|.$$

Wyraz $D^N (u \cdot \nabla)\omega$ rozwijamy z reguły Leibniza, mamy więc

$$|NL\omega| \leq \left| \sum_{l=0}^{N} \sum_{i,j=1}^{3} \tilde{c}_N^l \int_Q (D^N \omega_i)(D^l u_j)(D^{N+1-l} \omega_i) \, dx \right|.$$

Pierwszy wyraz tej sumy (dla $l = 0$) to po prostu $b_1(u, D^N\omega, D^N\omega)$. Z własności ortogonalności formy b_1 (2.6) wynika, że jest on równy zero, więc w dalszym ciągu rozumowania sumowanie będziemy zaczynać od $l = 1$. Oznaczmy

$$H_N^{u_i} = \int\limits_Q \left| \frac{\partial^N u_i}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|^2 dx \quad \text{oraz} \quad H_N^{\omega_i} = \int\limits_Q \left| \frac{\partial^N \omega_i}{\partial x_1^{n_1} \partial x_2^{n_2} \partial x_3^{n_3}} \right|^2 dx.$$

Korzystając z uogólnionej nierówności Höldera dostajemy

$$\begin{aligned} |NL\omega| &\le \left| \sum_{l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{3} \tilde{c}_N^l \int\limits_Q (D^N\omega_i)(D^l u_j)(D^{N+1-l}\omega_i)\, dx \right| \\ &\le \left| \sum_{l=1}^{N} \sum_{i,j=1}^{3} \tilde{c}_N^l (H_N^{\omega_i})^{1/2} \left(\int\limits_Q |D^l u_j|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_Q |D^{N+1-l}\omega_i|^q\, dx \right)^{1/q} \right| \\ &\le 2^N \sum_{i,j=1}^{3} (H_N^{\omega_i})^{1/2} \sum_{l=1}^{N} ||D^l u_j||_p ||D^{N+1-l}\omega_i||_q. \end{aligned} \tag{5.15}$$

W ostatniej linijce 2^N jest sumą współczynników w rozwinięciu Lebniza N-tej pochodnej iloczynu funkcji a $||\cdot||_p$ oznacza normę w $L^p(Q)$. Na razie nie określamy p i q, ponieważ w każdym wyrazie sumy będą one dobierane oddzielnie. Ważne jest to, że $1/p + 1/q = 1/2$. Do oszacowania wyrazu $||D^l u_j||_p ||D^{N+1-l}\omega_i||_q$ będziemy używać nierówności Gagliardo-Nirenberga [7]

$$||D^j f||_p \le c||D^m f||_r^a ||f||_q^{1-a}, \tag{5.16}$$

gdzie $1 \le p, q \le \infty$, j i m są liczbami naturalnymi spełniającymi $0 \le j < m$, d wymiarem obszaru przepływu oraz spełniony jest warunek

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{d} + a\left(\frac{1}{r} - \frac{m}{d}\right) + \frac{1-a}{q}.$$

Oznaczmy

$$A_j = Du_j, \quad B_i = D\omega_i.$$

Mamy więc $D^l u_j = D^{l-1}A_j$. Z nierówności G-N wnioskujemy, że

$$||D^{l-1}A_j||_p \le c||D^{N-1}A_j||_2^a ||A_j||_\infty^{1-a}. \tag{5.17}$$

Dla $l < N$ wybieramy $a = \frac{l-1}{N-1}$, wtedy $p = 2\frac{N-1}{l-1}$ oraz $ap = 2$. Z (5.17) wynika, że

$$||D^{l-1}A_j||_p \le c||D^{N-1}A_j||_2^{2/p} ||A_j||_\infty^{1-2/p}$$

oraz

$$||D^l u_j||_p \le ||D^N u_j||_2^{2/p} ||Du_j||_\infty^{1-2/p}.$$

Z definicji B_i mamy $D^{N+1-l}\omega_i = D^{N-l}B_i$. Z nierówności G-N otrzymujemy

$$||D^{N-l}B_i||_q \leq c||D^{N-1}B_i||_2^b||B_i||_\infty^{1-b}. \tag{5.18}$$

Dla $l < N$ wybieramy $b = \frac{N-l}{N-1}$, wtedy $q = 2\frac{N-1}{N-l}$ oraz $bq = 2$. Nierówność (5.18) implikuje

$$||D^{N-l}B_i||_q \leq c||D^{N-1}B_i||_2^{2/q}||B_i||_\infty^{1-2/q}$$

oraz

$$||D^{N-l+1}\omega_i||_q \leq c||D^N\omega_i||_2^{2/q}||D\omega_i||_\infty^{1-2/q}.$$

Pokażemy teraz jak szacuje się każdy wyraz sumy (5.15) dla $l < N$

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_Q (D^N\omega_i)\,(D^l u_j)(D^{N+1-l}\omega_i)\,dx\right| \\
&\qquad\leq c(H_N^{\omega_i})^{1/2}||D^N u_j||_2^{2/p}||Du_j||_\infty^{1-2/p}||D^N\omega_i||_2^{2/q}||D\omega_i||_\infty^{1-2/q} \\
&\qquad\leq c(H_N^{\omega})^{1/2}(H_N^u)^{1/p}(H_N^{\omega})^{1/q}||Du||_\infty^{1-2/p}||D\omega||_\infty^{1-2/q} \\
&\qquad\leq cH_N||D\bar{u}||_\infty.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

W trzeciej linijce skorzystaliśmy z następujących nierówności $H_N^{\omega_i} \leq H_N^{\omega}$, $H_N^{u_j} \leq H_N^u$ oraz $||D\varphi||_\infty \leq ||D\bar{u}||_\infty$, gdzie $\varphi = u, \omega$ a w czwartej z $H_N^{\omega} \leq H_N$, $H_N^u \leq H_N$ oraz ze wspomnianego wcześniej faktu, że $1/p + 1/q = 1/2$.

W wyrazie dla $l = N$ wybieramy $p = 2$, $q = \infty$ i otrzymujemy (bez korzystania z nierówności G-N)

$$(H_N^{\omega_i})^{1/2}||D^N u_j||_2||D\omega_i||_\infty \leq (H_N)^{1/2}(H_N^u)^{1/2}||D\bar{u}||_\infty \leq H_N||D\bar{u}||_\infty. \tag{5.20}$$

Po wstawieniu oszacowań (5.19) i (5.20) do (5.15) otrzymujemy

$$|\mathrm{NL}\omega| \leq \tilde{c}_N H_N||D\bar{u}||_\infty.$$

Dostaliśmy więc takie samo oszacowanie wyrazu nieliniowego jak w (5.9).

Z tożsamości (5.5) wynika, że

$$4\nu_r \int\limits_Q (\mathrm{rot}\,^N\omega)\cdot(\mathrm{rot}\,^N\omega)\,dx = 4\nu_r H_N^{\omega}.$$

Po zastosowaniu nierówności Cauchy'ego-Schwartza do wyrazu z momentami mamy

$$\left|\int\limits_Q (\mathrm{rot}\,^N\omega)\cdot(\mathrm{rot}\,^N g)\,dx\right| \leq (H_N^{\omega})^{1/2}(\Phi_N^g)^{1/2}.$$

Wyraz z $\operatorname{rot} u$ szacujemy podobnie do wyrazu z $\operatorname{rot}\omega$

$$2\nu_r\left|\int\limits_Q(\operatorname{rot}^N\omega)\cdot(\operatorname{rot}^{N+1}u)\,dx\right|\leq 2\nu_r(H^u_{N+1})^{1/2}(H^\omega_N)^{1/2}\leq\frac{\nu_r}{2}H^u_{N+1}+2\nu_r H^\omega_N.$$

Po wstawieniu powyższych oszacowań do (5.10) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\dot{H}^\omega_N\leq-\alpha H^\omega_{N+1}+\tilde{c}_N H_N||Du||_\infty-2\nu_r H^\omega_N+\frac{\nu_r}{2}H^u_{N+1}+(H^\omega_N)^{1/2}(\Phi^g_N)^{1/2}. \tag{5.21}$$

Teraz dodajemy do siebie równania (5.13) i (5.21) otrzymując

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\dot{H}_N\leq&-\nu H^u_{N+1}-\alpha H^\omega_{N+1}+\tilde{c}_N H^u_N||D\bar{u}||_\infty+\tilde{c}_N H_N||D\bar{u}||_\infty\\&+(H^u_N)^{1/2}(\Phi^f_N)^{1/2}+(H^\omega_N)^{1/2}(\Phi^g_N)^{1/2}.\end{aligned} \tag{5.22}$$

Oznaczmy $k_1=\min(\nu,\alpha), c_N=2\tilde{c}_N$. Ponieważ $H^\varphi_N\leq H_N$ dla $\varphi=u$ lub $\varphi=\omega$, więc z nierówności (5.22) wynika, że

$$\frac{1}{2}\dot{H}_N\leq-k_1H_{N+1}+c_N H_N||D\bar{u}||_\infty+(H^u_N)^{1/2}(\Phi^f_N)^{1/2}+(H^\omega_N)^{1/2}(\Phi^g_N)^{1/2}. \tag{5.23}$$

Mamy już szacowania na $\dot{H}_N$, ale zależą one od H_{N+1}. Żeby uzyskać zależność $\dot{H}_N$ od H_s dla $s\leq N$ możemy wykorzystać nierówności pomiędzy H_N dla różnych N, które pokażemy w następującym lemacie.

Lemat 5.1. *[7] Niech $1\leq s\leq N$ oraz $r\geq 1$. H_N zdefiniowane w (5.3) spełniają poniższe nierówności*

$$H_N\leq H_{N+r}^{\frac{s}{r+s}}H_{N-s}^{\frac{r}{r+s}}. \tag{5.24}$$

Dowód. Dowód przeprowadzimy za pomocą indukcji. Najpierw zrobimy indukcję względem s a potem względem r. Niech $v=(u,\omega)$. Zdefiniujmy M_N następująco

$$M_N=\int\limits_Q|D^Nv|^2\,dx.$$

Po scałkowaniu przez części i zastosowaniu nierówności Cauchy'ego-Schwartza otrzymujemy

$$M_N\leq\left(\int\limits_Q|D^{N-1}v|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_Q|D^{N+1}v|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Stąd mamy

$$M_N\leq M^{1/2}_{N+1}M^{1/2}_{N-1}, \tag{5.25}$$

zauważmy, że powyższa nierówność jest również prawdziwa dla każdej współrzędnej z osobna. Teraz pokażemy, że dla każdego $s\geq 1$ zachodzi

$$M_s\leq M_{s+1}^{\frac{s}{s+1}}M_0^{\frac{1}{s+1}}. \tag{5.26}$$

Z (5.25) wynika, że (5.26) zachodzi dla $s = 1$. Załóżmy, że (5.26) zachodzi dla pewnego $s > 1$, wtedy

$$M_{s+1} \leq M_{s+2}^{1/2} M_s^{1/2} \leq M_{s+2}^{1/2} M_{s+1}^{\frac{s}{2(s+1)}} M_0^{\frac{1}{2(s+1)}}.$$

Pierwsza nierówność wynika z (5.25) a druga z (5.26). Zatem

$$M_{s+1} \leq M_{s+2}^{\frac{s+1}{s+2}} M_0^{\frac{1}{s+2}}.$$

Teraz wykażemy, że dla dowolnych s, r z rozważanego zakresu zachodzi

$$M_s \leq M_{s+r}^{\frac{s}{s+r}} M_0^{\frac{r}{s+r}}. \tag{5.27}$$

Z (5.26) wynika, że (5.27) jest prawdziwe dla $1 \leq s \leq N$ i $r = 1$. Załóżmy, że (5.27) zachodzi dla pewnego $r > 1$. Mamy wtedy

$$M_s \leq M_{s+r}^{\frac{s}{s+r}} M_0^{\frac{r}{s+r}} \leq M_{s+r+1}^{\frac{s}{s+r+1}} M_0^{\frac{r+1}{s+r+1}}.$$

Druga nierówność wynika z (5.26). Dzięki zasadzie indukcji (5.27) jest prawdziwe dla wszystkich s, r.

Udowodniliśmy, że (5.27) zachodzi dla $M_s = |D^s v|^2$. Podstawmy teraz $v_i = D^{N-s} u_i$ dla $i = 1, \ldots, 3$ oraz $v_i = D^{N-s} \omega_{i-3}$ dla $i = 4, \ldots, 6$. Wtedy $M_s = H_N$ oraz $M_0 = H_{N-s}$, a nierówność (5.27) przepisuje się w postaci

$$H_N \leq H_{N+r}^{\frac{s}{s+r}} H_{N-s}^{\frac{r}{s+r}}. \tag{5.28}$$

Dowód lematu jest więc zakończony. Zauważmy, że nierówności analogiczne do (5.28) zachodzą dla F_N. □

Wybór $r = 1$ w powyższym lemacie daje odpowiednie oszacowanie. Zatem dla dowolnego $1 \leq s \leq N$ zachodzi

$$\frac{1}{2}\dot{H}_N \leq -k_1 \frac{H_N^{1+1/s}}{H_{N-s}^{1/s}} + c_N H_N ||D\bar{u}||_\infty + 2(H_N)^{1/2}(\Phi_N)^{1/2}. \tag{5.29}$$

Mamy już oszacowania na H_N. Chcielibyśmy jednak włączyć do tych nierówności siły i momenty tzn. wyprowadzić nierówności na F_N. Wróćmy zatem do (5.23). Dodajmy i odejmijmy po prawej stronie $k_1 \tau^2 \Phi_{N+1}$. Z definicji F_N wynika, że $H_N \leq F_N$, a ponieważ rozważamy układ autonomiczny, więc $\dot{H}_N = \dot{F}_N$. Zatem z (5.23) wynika

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq -k_1 H_{N+1} - k_1 \tau \Phi_{N+1} + c_N F_N ||D\bar{u}||_\infty + 2F_N^{1/2}\Phi_N^{1/2} + k_1 \tau^2 \Phi_{N+1}.$$

Ponieważ $F_{N+1} = H_{N+1} + \tau \Phi_{N+1}$, więc mamy

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq -k_1 F_{N+1} + c_N F_N ||D\bar{u}||_\infty + 2F_N^{1/2}\Phi_N^{1/2} + k_1 \tau^2 \Phi_{N+1}.$$

Z definicji F_N wynika, że $F_N \geq \tau^2\Phi_N$, zatem

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq -k_1 F_{N+1} + (c_N||D\bar{u}||_\infty + 2\tau^{-1} + F_N^{-1}k_1\tau^2\Phi_{N+1})F_N. \tag{5.30}$$

Z definicji F_N i Φ_N można wyprowadzić nierówność

$$k_1 F_N^{-1}\tau^2\Phi_{N+1} + 2\tau^{-1} \leq k_1\lambda_0^{-2}.$$

Po wstawieniu jej do (5.30) otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq -k_1 F_{N+1} + (c_N||D\bar{u}||_\infty + k_1\lambda_0^{-2})F_N.$$

Możemy dla F_N wykorzystać nierówności (5.24) i uzyskać nierówność podobną do (5.29)

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq -k_1\frac{F_N^{1+1/s}}{F_{N-s}^{1/s}} + (c_N||D\bar{u}||_\infty + k_1\lambda_0^{-2})F_N. \tag{5.31}$$

Dzięki temu, że wyrazach z Laplasjanem mamy równość, możemy szacować $\dot{F}_N$ również od dołu. Oznaczmy $k_4 = \max(\nu, \alpha)$. Mamy wtedy

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \geq -k_4 F_{N+1} - (c_N||D\bar{u}||_\infty + k_1\lambda_0^{-2})F_N.$$

Nie mamy jednak oszacownia na $-k_4F_{N+1}$ od dołu, zależnego od F_s dla $s \leq N$. Z tego powodu nie możemy się pozbyć F_{N+1} z prawej strony powyższej nierówności. □

Oszacowania tego typu służą do badania regularności rozwiązań równań Naviera-Stokesa w trzech wymiarach [8]. Za ich pomocą definiuje się skale długości w przepływach turbulentnych [3, 7]. Ponadto, z nierówności (5.31) można wyciągnąć pewne wnioski dotczące regularności rozwiązań. Z nierówności Gagliardo-Nirenberga (5.16) wnioskujemy, że

$$||D\bar{u}||_\infty \leq cF_N^{a/2}F_1^{(1-a)/2},$$

gdzie $a = \frac{3}{2(N-1)}$. Wybierając w nierówności (5.31) $s = N-1$ otrzymujemy

$$\frac{1}{2}\dot{F}_N \leq F_N\left(-k_1\frac{F_N^{1+1/(N-1)}}{F_1^{1/(N-1)}} + C_N F_N^{\frac{3}{4(N-1)}}F_1^{1/2-\frac{3}{4(N-1)}} + k_1\lambda_0^{-2}\right).$$

Ponieważ mamy oszacowanie od góry i od dołu na F_1, więc możemy spojrzeć na prawą stronę powyższej nierówności jak na wielomian zmiennej $F_N^{(4(N-1))^{-1}}$. Wykładnik przy wyrazie ujemnym jest wyższy niż przy dodatnim, ponadto dla $F_N = 0$ wielomian ten ma wartość dodatnią. Z tego wnioskujemy, że ma on co najmniej jeden pierwiastek dodatni i w największym pierwiastku znak zmienia się z dodatniego na ujemny. Stąd wnioskujemy, że dla każdego N

$$\limsup_{t\to\infty} F_N(t) < \infty.$$

Z powyższej nierówności, możemy wnioskować, że w dwuwymiarowym przepływie z gładkimi danymi nie mogą się pojawić żadne osobliwości. W sytuacji, gdy rozpatrujemy ogólny przepływ w trzech wymiarach, nie mamy ograniczenia na F_1, więc nie możemy nic wnioskować na temat regularności rozwiązań.

Rozdział 6

Podsumowanie

Na początku podsumujemy uzyskane wyniki, a potem porównamy je z analogicznymi wynikami dla równań Naviera-Stokesa i równań płynu mikropolarnego z różnymi warunkami brzegowymi aby zbadać, w jaki sposób wybór modelu i obecność brzegu wpływa na w liczbę stopni swobody przepływu.

W rozprawie uzyskaliśmy następujące wyniki:

1. Korzystając z metody Faedo-Galerkina, udowodniliśmy istnienie słabych i silnych rozwiązań równań płynu mikropolarnego na dwuwymiarowym torusie.

2. Stosując metodę kompleksyfikacji, pokazaliśmy istnienie rozwiązań analitycznych zarówno względem czasu, jak i przestrzeni.

3. Stosując klasyczne twierdzenie o istnieniu atraktora dla półgrupy przekształceń pokazaliśmy istnienie globalnego atraktora dla przepływu z punktu 1.

4. Badając jednostajne wykładniki Lapunova, oszacowaliśmy wymiar atraktora z punktu 3. w zależności od danych i parametrów opisujących przepływ.

5. Oszacowaliśmy liczbę harmonik i węzłów determinujących przepływ z punktu 1. oraz natychmiastowo determinujących przepływ z punktu 2.

6. Wyprowadziliśmy oszacowania drabinowe norm N-tych pochodnych rozwiązań z punktu 1. przy założeniu, że siły i momenty są gładkie.

Wyniki te wiążą się z pewnymi nierozwiązanymi jeszcze problemami, np. istnieniem globalnych w czasie, regularnych rozwiązań równań płynu mikropolarnego w obszarze trójwymiarowym (znane są tylko wyniki częściowe np. [45]).

Porównując uzyskane oszacowania dochodzimy do wniosku, że jedne sposoby opisu asymptotyki przepływu wydają się być lepsze od innych w tym sensie, że wymagają mniejszej liczby parametrów. Najlepszy pod tym względem wydaje się być atraktor, ponieważ jego wymiar fraktalny jest proporcjonalny do $\tilde{F}$, a każdy zbiór o wymiarze fraktalnym mniejszym niż d, d całkowite, można w sposób ciągły sparametryzować za pomocą $2d + 1$ parametrów. Problemem związanym z taką parametryzacją jest to, że parametry, którymi opisujemy atraktor nie są związane z wielkościami fizycznymi opisującymi przepływ. Jednak gdy rozpatrujemy rozwiązania analityczne z punktu 2. to trajektorię na atraktorze da się opisać za pomocą wartości prędkości i mikrorotacji w pewnej ilości punktów należących do obszaru przepływu. To daje jasną interpretację fizyczną parametrów opisujących przepływ.

Zróbmy teraz krótkie porównanie otrzymanych wyników z podobnymi wynikami dla równań Naviera-Stokesa i równań płynu mikropolarnego z warunkami brzegowymi: okresowym i Dirichleta.

1. Istnienie rozwiązań: zastosowana metoda Faedo-Galerkina pozwoliła nam na uzyskanie istnienia rozwiązań w przestrzeniach, które są naturalnym, dostosowanym do równań, rozszerzeniem przestrzeni, w których istnieją rozwiązania równań Naviera-Stokesa. Uzyskane wyniki są więc w pewnym sensie optymalne.

2. Rozwiązania w przestrzeniach Gevreya - udało nam się uogólnić wynik z [15] na szerszą klasę równań.

3. Oszacowanie wymiaru globalnego atraktora ($\sim \tilde{F}$) jest takie samo jak dla równań płynu mikropolarnego i równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu i gorsze od oszacowania ($\sim F^{2/3}(1 + \log F)^{1/3}$, gdzie F jest wielkością sił; $F = ||f||_{L^2}$) dla równań Naviera-Stokesa z okresowym warunkiem brzegowym.

4. Uzyskaliśmy oszacowanie liczby harmonik determinujących przepływ takiego samego rzędu $c\tilde{F}^2 + c(\nu_r)$ jak dla równań płynu mikropolarnego z warunkiem Dirichleta na brzegu. Oszacowanie to jest tego samego rzędu co dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu i gorsze niż dla równań Naviera-Stokesa z okresowym warunkiem brzegowym (cF, gdzie F jest asymptotyczną wielkością sił; $F = \limsup_{t\to\infty} ||f(t)||_{L^2}$). Jest to spowodowane brakiem własności (2.7) dla formy b_1. Gdy $\nu_r \to 0$ to $c(\nu_r) \to 0$, więc można stwierdzić, że ν_r odpowiada za wzajemny wpływ pól prędkości i rotacji na siebie. Dla $\nu_r = 0$ mamy oszacowanie takie jak dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu.

5. Oszacowanie liczby węzłów determinujących przepływ, eksponencjalne względem wielkości sił, jest dużo gorsze od analogicznego wyniku dla równań Naviera-Stokesa z okresowym warunkiem brzegowym (cF) i porównywalne z wynikiem dla równań Naviera-Stokesa z warunkiem Dirichleta na brzegu, które też jest eksponencjalne [17].

6. Oszacowania drabinowe - dzięki pomysłowi, żeby rozpatrywać przepływ dwuwymiarowy jako trójwymiarowy, niezależny od x_3, udało nam się uzyskać strukturę równania na mikrorotację podobną do struktury równania na prędkość. Dzięki temu uzyskaliśmy oszacowania drabinowe (z dokładnością do stałych i dostosowanej do równań płynu mikropolarnego definicji H_N i F_N) takie same jak oszacowania dla równań Naviera-Stokesa uzyskane w [7].

Niektóre wyniki pracy są opublikowane w artykułach [41, 42].

Bibliografia

[1] S. Agmon, *Lectures on Elliptic Boundary Value Problems*, Elsevier, New York, 1965.

[2] M.V. Bartucelli, C.R. Doering, J.D. Gibbon, *Ladder theorems for the 2D and 3D Navier-Stokes equations*, Nonlinearity 4, 531–542, 1991.

[3] M.V. Bartucelli, C.R. Doering, J.D. Gibbon, S.J.A. Malham, *Length scales in solutions of the Navier-Stokes equations*, Nonlinearity 6, 549–568, 1993.

[4] L.C. Berselli, *Intorno ad alcune questioni di meccanica di fluidi, an italian summary of the Ph.D. Thesis*, Bollettino della unione matematica italiana, Serie A: la matematica nella societa e nella cultura. Serie VIII. III-A, 271–274, 2000.

[5] B. Cockburn, D.A. Jones, E.S. Titi, *Estimating the number of asymptotic degrees of freedom for nonlinear dissipative systems*, Mathematics of Computation 66(219), 1073–1087, 1997.

[6] P. Constantin, C. Foias, *Navier-Stokes equation*, University of Chicago Press, 1988.

[7] C.R. Doering, J.D. Gibbon, *Applied analysis of the Navier-Stokes equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[8] C.R. Doering, J.D. Gibbon, *Intermittency and Regularity Issues in 3D Navier-Stokes Turbulence*, Arch. Rational Mech. Anal. 177, 115–150, 2005.

[9] A.C. Eringen, *Theory of micropolar fluids*, J. Math. Mech. 16, 1–18, 1966.

[10] K. Falconer, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.

[11] C. Foias, G. Prodi, *Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 39, 1–34, 1967.

[12] C. Foias, R. Temam, *Some analytic and geometric properties of the solution of the evolution Navier-Stokes equations*, J. Math. Pures et Appl. 58, 339–368, 1979.

[13] C. Foias, O.P. Manley, R. Temam, Y.M. Treve, *Asymptotic analysis of the Navier-Stokes equations*, Physica D 9, 157–188, 1983.

[14] C. Foias, R. Temam, *Determination of the solutions of the Navier-Stokes equations by a set of nodal values*, Math. Comp. 43, 117–133, 1984.

[15] C. Foias, R. Temam, *Gevrey Class Regularity for the Solutions of Navier Stokes Equations*, Journal of Functional Analysis 87, 359–369, 1989.

[16] C. Foias, E. Olson, *Finite fractal dimension and Hölder-Lipschitz parametrization*, Indiana Univ. Math. J. 45, 603–616, 1996.

[17] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Turbulence*, Cambridge University Press, 2001.

[18] P.K. Fritz, J.C. Robinson, *Paramertising the attractor of two-dimensional Navier-Stokes equations with a finite number of nodal values*, Physica D 148, 201–220, 2001.

[19] E. Hille, R.S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups. rev. ed.*, American Mathematical Society, Providence, R. I., 1957.

[20] B.R. Hunt, V.Y. Kaloshin *Regularity of embeddings of infinite-dimensional fractal sets into finite-dimensional spaces*, Nonlinearity 12, 1263–1275, 1999.

[21] A.A. Ilyin, *Lieb-Thirring integral inequalities and their applications to attractors of the Navier-Sokes equations*, English transl. in Sb. Math 196, 2005.

[22] A.A. Ilyin, A Miranville A, E.S. Titi, *Small viscosity sharp estimate for the global attractor of the 2-D damped-driven Navier-Stokes equations*, Commun. Math. Sci., 2, 403–426, 2004.

[23] A.A. Ilyin, E.S. Titi, *Sharp estimates for the number of degrees of freedom for the damped-driven 2D Navier-Stokes Equations*, J. Nonlinear Sci. 16, 233–253, 2006.

[24] D.A. Jones, E.S. Titi, *Determining finite volume elements for the 2D Navier-Stokes equations*, Physica D 60, 165–174, 1992.

[25] D.A. Jones, E.S. Titi, *Upper bounds on the number of determining modes, nodes and volume elements for Navier-Stokes equations*, Indiana Univ. Math. J. 42, 875–887, 1993.

[26] F. John, *Partial Differential Equations,* 4^{th} *edition*, Springer Verlag, New York, 1982.

[27] A.N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, translated from the Russian by V. Levin. Turbulence and stochastic processes: Kolmogorov's ideas 50 years on. Proc. Roy. Soc. London Ser. A 434, 9–13, 1991.

[28] A.N. Kolmogorov, *On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible viscous liquid*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 31 (1941), 538–541; English transl., Selected works of A.N. Kolmogorov, vol. I: Mathematics and mechanics 319–323, Kluwer, Dordrecht, 1991.

[29] R.H. Kraichnan, *Inertial ranges in two-dimensional turbulence*, Phys. Fluids 10, 1417–1423, 1967.

[30] O.A. Ladyzhenskaya, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Revised English edition, translated from the Russian by Richard A. Silverman, Gordon and Breach Science Publishers, New York-London, 1963.

[31] O.A. Ladyzhenskaya, *On the dynamical system generated by the Navier-Stokes equations*, English translation, J. Soviet Math. 3, 1972.

[32] L. Landau, E. Lifshitz, *Méchanique des Fluides, Physique Théorique*, tome 6, Éditions Mir, Moscow, 1971.

[33] G. Łukaszewicz, *Long time behavior of 2D micropolar fluid flows*, Math. Comp. Modelling 34, 487–509, 2001.

[34] R. Mañé, *On the dimension of the compact invariant sets of certain nonlinear maps*, Lecture Notes in Math. 898, 230–242, Springer Verlag, New York, 1981.

[35] A.S. Popel, *On the hydrodynamics of suspensions*, Izviestiya Akademii Nauk SSSR 4, 24–30, 1969. (in Russian).

[36] A.S. Popel, S.A. Regirer, P.I. Usick, *A continuum model of blood flow*, Biorheology 11, 427–437, 1974.

[37] J.C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, 2001.

[38] J.C. Robinson, *A rigorous treatment of 'experimental' observations for the two-dimensional Navier-Stokes equations*, Royal Society of London Proceedings A 457, 1007–1020, 2001.

[39] J.C. Robinson, *Low dimensional attractors arise from forcing at small scales*, Physica D 181, 39–44, 2003.

[40] P. Szopa, *Determining Modes for 2-D Micropolar Fluid Flows*, Math. Comp. Modelling 42, 1079–1088, 2005.

[41] P. Szopa, *On Existence of Solutions for 2-D Micropolar Fluid Flows with Periodic Boundary Conditions*, Math. Meth. Appl. Sci. 30, 331–346, 2007.

[42] P. Szopa, *Finite-Dimensionality of 2-D Micropolar Fluid Flows with Periodic Boundary Conditions*, przyjęty w Applicationes Mathematicae.

[43] R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Nonlinear Functional Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1995.

[44] R. Temam, *Infinite Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics, 2^{nd} edition*, Springer Verlag, New York, 1997.

[45] N. Yamaguchi, *Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain*, Math. Meth. Appl. Sci. 28, 1507–1526, 2005.