University of Warsaw
Faculty of Mathematics, Informatics and Mechanics

Piotr Nayar

Bounds on sums of random vectors

PhD dissertation

Supervisor
prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz
Institute of Mathematics
University of Warsaw

December, 2013

Author's declaration:

aware of legal responsibility I hereby declare that I have written this dissertation myself and all the contents of the dissertation have been obtained by legal means.

....

date *Author's signature*

Supervisor's declaration:

the dissertation is ready to be reviewed

....

date *Supervisor's signature*

Oszacowania sum wektorów losowych

Piotr Nayar

Autoreferat rozprawy doktorskiej napisanej pod kierunkiem
prof. dra hab. Krzysztofa Oleszkiewicza

W skład rozprawy wchodzą cztery artykuły naukowe, które powstały podczas moich studiów doktoranckich na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Dotyczą one zagadnień związanych z oszacowaniami momentów i ogonów norm wektorów losowych.

W napisanych wspólnie z Tomaszem Tkoczem (obecnie doktorantem w University of Warwick) pracach [NT1] oraz [NT2] rozważaliśmy tzw. problem S-inequality. Mówiąc ogólnie, rozwiązanie tego zagadnienia dla pewnej miary borelowskiej μ prowadzi do optymalnych nierówności dla momentów norm wektorów losowych o rozkładzie μ. Nasze dociekania doprowadziły do rozwiązania zagadnienia dla pewnych szczególnych miar produktowych. Praca [NT1] została opublikowana w czasopiśmie Israel Journal of Mathematics. Praca [NT2] została przyjęta do druku i opublikowana w wersji elektronicznej w czasopiśmie Mathematische Nachrichten.

Artykuł [NO] dotyczy optymalnych stałych w nierównościach typu Chinczyna. Pracę napisałem wspólnie z prof. Krzysztofem Oleszkiewiczem. Definiujemy w niej ultra sub-gaussowskie wektory losowe i udowadniamy optymalne oszacowania pomiędzy parzystymi momentami sum niezależnych wektorów tego typu. Nasze rozważania obejmują, jako przypadek szczególny, klasyczną nierówność Chinczyna dla sum rademacherowych. Praca została opublikowana w czasopiśmie Positivity.

W pracy [N] rozważam niesymetryczną wersję twierdzenia FKN, pochodzącego w swojej pierwotnej wersji od E. Friedguta, G. Kalaia i A. Naora, [FKN]. Udało mi się wzmocnić pewne oszacowania pochodzące z pracy [JOW] i udowodnić analogiczny wynik w przypadku kostki symetrycznej i funkcji przyjmujących wartości w przedziale $[-1, 1]$. Uzyskane rezultaty bazują na nierównościach hiperkontrakcyjnych i nierównościach dla momentów i ogonów chaosów rademacherowych.

Poniżej opiszę szczegółowo udowodnione przeze mnie twierdzenia oraz ich związki z istniejącą literaturą przedmiotu.

S-inequality Rozważmy miarę borelowską μ na przestrzeni metrycznej (X, d). Dla $t > 0$ i zbioru borelowskiego A definiujemy t-otoczkę zbioru A, $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, A) < t\}$. Zagadnienie izoperymetryczne dla miary μ polega na wyznaczeniu wielkości $h_t(s) = \inf\{\mu(A_t) : \ \mu(A) = s\}$. W przypadku miary Lebesgue'a i przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$ powyższe infimum przyjmowane jest dla kul euklidesowych (klasyczna izoperymetria). Jeśli zatem $|A|$ oznacza n-wymiarową miarę Lebesgue'a zbioru A, zaś v_n jest objętością kuli euklidesowej o promieniu 1 w $\mathbb{R}^n$, to z warunku $|A| = |B|$, gdzie B jest kulą euklidesową, wynika $|A_t| \geq |B_t|$. Łatwo wywnioskować stąd nierówność

$$|A_t| \geq v_n \left((|A|/v_n)^{1/n} + t \right)^n .$$

Rozwiązanie zagadnienia izoperymetrycznego znane jest również dla standardowej miary Gaussa γ_n na $\mathbb{R}^n$, czyli miary z gęstością $\mathrm{d}\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}$, gdzie $|\cdot|$ jest normą euklidesową. W tym przypadku *optymalnymi* zbiorami nie są kule, lecz półprzestrzenie $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v < 1\}$, gdzie $v \in \mathbb{R}^n$ i $\cdot$ jest standardowym iloczynem skalarnym, patrz [SC] oraz [B]. Ze względu na rotacyjną niezmienniczość miary Gaussa możemy ograniczyć się do rozważania półprzestrzeni postaci $H^s = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 < s\}$. Zdefiniujmy funkcję $\Phi(s) = \gamma_1((-\infty, s))$. Z rozwiązania zagadnienia izoperymetrycznego wynika, że jeśli $\gamma_n(A) = \gamma_n(H^s) = \Phi(s)$, to $\gamma_n(A_t) \geq \gamma_n(H^{s+t}) = \Phi(s + t)$. Stąd

$$\gamma_n(A_t) \geq \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t). \tag{1}$$

Znane jest również rozwiązanie problemu izoperymetrycznego dla rotacyjnie niezmienniczej miary probabilistycznej σ_n na euklidesowej sferze jednostkowej S^{n-1} w $\mathbb{R}^n$, patrz [L]. Optymalnymi zbiorami są zbiory postaci $S^{n-1} \cap \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot v < 1\}$.

Oszacowania powyższego typu są niezwykle ważne z punktu widzenia tzw. koncentracji miary. Zdefiniujmy funkcję koncentracji miary μ,

$$\alpha_\mu(t) = \sup \{1 - \mu(A_t) : \ \mu(A) \geq 1/2\} .$$

Z (1) łatwo otrzymujemy $\alpha_{\gamma_n}(t) = 1 - \Phi(t) \leq \frac{1}{2} e^{-t^2/2}$. Powyższa nierówność implikuje koncentrację funkcji 1-lipschitzowskich $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\gamma_n \left(\{|F - \operatorname{Med} F| \geq t\} \right) \leq e^{-t^2/2},$$

gdzie $\operatorname{Med} F$ jest medianą funkcji F. Jest to podstawowe narzędzie w wielu zagadnieniach analizy i rachunku prawdopodobieństwa, np. w tzw. lokalnej teorii przestrzeni Banacha (dowód twierdzenia Dvoretzky'ego). Z zagadnieniem koncentracji miary wiążą się ważne nierówności funkcyjne, np. nierówność Poincaré, logarytmiczna nierówność Sobolewa, nierówność Cheegera, nierówność splotu infimum, czy nierówność Bobkowa.

Zagadnienie S-inequality jest koncepcyjnie zbliżone do problemu izoperymetrycznego. Niech μ będzie miarą borelowską na $\mathbb{R}^n$. Problem polega na znalezieniu wielkości

$$g_t(s) = \inf\{\mu(tA) : \ \mu(A) = s\}, \tag{2}$$

gdzie zbiór $tA = \{x \in \mathbb{R}^n : x = ta, \ a \in A\}$ jest tzw. dylatacją zbioru A. Zatem zamiast rozważania otoczek zbioru A patrzymy na jego jednokładne obrazy. Ze względu na jednorodność miary Lebesgue'a, mamy $|tA| = t^n|A|$, a zatem infimum we wzorze (2) jest dla niej przyjmowane przez wszystkie zbiory borelowskie o mierze s.

Z punktu widzenia zastosowań w powyższym zagadnieniu ważne jest sprecyzowanie klasy zbiorów $\mathcal{K}$, w której postawiony problem chcemy rozwiązać. Bardzo użyteczne jest rozwiązanie zagadnienia w klasie $\mathcal{K}$ wszystkich zbiorów symetrycznych wypukłych. Wprowadźmy następującą definicję.

Definicja 1. Niech μ będzie miarą borelowską. Powiemy, że μ spełnia S-inequality dla klasy zbiorów $\mathcal{K}$, jeśli dla każdego $A \in \mathcal{K}$ z warunku $\mu(A) = \mu(P)$ wynika nierówność $\mu(tA) \geq \mu(tP)$ dla wszystkich $t \geq 1$, gdzie P jest pasem, przez co w tym autoreferacie będziemy rozumieć zbiór postaci $P = \{|x_1| < L\}$.

Załóżmy dodatkowo, że pasy P należą do rodziny $\mathcal{K}$. Wówczas infimum we wzorze (2) jest osiągane przez pas P mający miarę s. W tej sytuacji pasy nazywamy zbiorami ekstremalnymi. Łatwo wówczas zauważyć, że jeśli $\mu(A) = \mu(P)$, to dla $0 < t \leq 1$ mamy $\mu(tA) \leq \mu(tP)$.

Okazuje się, że ekstremalność pasów w klasie $\mathcal{K}$ zbiorów symetrycznych wypukłych implikuje optymalne nierówności dla momentów dowolnych norm wektorów losowych o rozkładzie μ. Konkretnie, prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 1. Przypuśćmy, że probabilistyczna miara borelowska μ na $\mathbb{R}^n$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i spełnia S-inequality dla klasy $\mathcal{K}$ zbiorów symetrycznych wypukłych. Wówczas dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ i dla $p \geq q > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q},$$

gdzie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ jest wektorem losowym o rozkładzie μ oraz

$$C_{p,q} = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |x_1|^q \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}}.$$

Chciałbym tutaj uzasadnić to stwierdzenie, jako że jego dowód nie znajduje się w żadnej z publikacji wchodzących w skład rozprawy. Przedstawione poniżej rozumowanie pochodzi od S. Szarka. Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie taką liczbą rzeczywistą, że $\mathbb{E}\,\|X\|^p = \mathbb{E}|aX_1|^p$. Wówczas

$$p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}\left(\|X\| > t\right)\,\mathrm{d}t = p\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}\left(|aX_1| > t\right)\,\mathrm{d}t.$$

Funkcje $t \mapsto \mathbb{P}\left(\|X\| > t\right)$ oraz $t \mapsto \mathbb{P}\left(|aX_1| > t\right)$ są ciągłe, a zatem istnieje $t_0 > 0$, dla którego $\mathbb{P}\left(\|X\| > t_0\right) = \mathbb{P}\left(|aX_1| > t_0\right)$. Zbiory $\{\|x\| \le t_0\}$ oraz $\{|ax_1| \le t_0\}$ są symetryczne i wypukłe. Ponadto drugi zbiór jest pasem w $\mathbb{R}^n$. Stąd i z faktu, że μ spełnia S-inequality dla symetrycznych zbiorów wypukłych, mamy $\mu\left(t\{\|x\| \le t_0\}\right) \ge \mu\left(t\{|ax_1| \le t_0\}\right)$ dla $t \ge 1$, czyli $\mathbb{P}\left(\|x\| \le tt_0\right) \ge \mathbb{P}\left(|ax_1| \le tt_0\right)$. Wynika stąd, że dla $t \ge t_0$ jest $\mathbb{P}\left(\|x\| > t\right) \le \mathbb{P}\left(|ax_1| > t\right)$. Ponadto dla $0 < t \le t_0$ mamy $\mathbb{P}\left(\|x\| > t\right) \ge \mathbb{P}\left(|ax_1| > t\right)$. Zatem dla wszystkich $t > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^q - \left(\frac{t}{t_0}\right)^p\right)\left(\mathbb{P}\left(\|x\| > t\right) - \mathbb{P}\left(|ax_1| > t\right)\right) \ge 0.$$

Całkując tę nierówność stronami i korzystając z równości $\mathbb{E}\,\|X\|^p = \mathbb{E}|aX_1|^p$ otrzymujemy $\mathbb{E}\,\|X\|^q \ge \mathbb{E}|aX_1|^q$, czyli $(\mathbb{E}\,\|X\|^q)^{1/q} \ge |a|(\mathbb{E}|X_1|^q)^{1/q}$. Oczywiście mamy również $(\mathbb{E}\,\|X\|^p)^{1/p} = |a|(\mathbb{E}|X_1|^p)^{1/p}$. Stąd

$$(\mathbb{E}\,\|X\|^p)^{1/p} \le \frac{(\mathbb{E}|X_1|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}|X_1|^q)^{1/q}}(\mathbb{E}\,\|X\|^q)^{1/q},$$

co mieliśmy udowodnić.

Analogicznie możemy uzasadnić następujące stwierdzenie, dotyczące optymalnych oszacowań momentów sum niezależnych zmiennych losowych (jest to tzw. nierówność typu Chinczyna-Kahane'a).

Stwierdzenie 2. Przypuśćmy, że probabilistyczna miara μ na $\mathbb{R}$ jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a i dla wszystkich $n \ge 1$ miara produktowa μ^n spełnia S-inequality dla klasy $\mathcal{K}$ zbiorów symetrycznych wypukłych. Niech $S = \sum_{i=1}^n v_iX_i$, gdzie $X_1, X_2, \ldots, X_n$ są niezależne i mają rozkład μ oraz $v_1, v_2, \ldots, v_n$ są dowolnymi wektorami w przestrzeni Banacha $(E, \|\cdot\|)$. Wówczas dla $p \ge q > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_iX_i\right\|^p\right)^{1/p} \le C_{p,q}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_iX_i\right\|^q\right)^{1/q},$$

gdzie $C_{p,q} = (\mathbb{E}|X_1|^p)^{1/p}/(\mathbb{E}|X_1|^q)^{1/q}$.

Rozwiązanie problemu S-inequality w klasie zbiorów symetrycznych wypukłych jest znane jedynie dla standardowej miary Gaussa na $\mathbb{R}^n$. Jest to rezultat pochodzący od R. Latały i K. Oleszkiewicza, [LO]. W tym przypadku S-inequality jest spełnione, czyli optymalnymi zbiorami są pasy. Prowadzi to do oszacowania

$$\gamma_n(tA) \geq 2\Phi\left(t\Phi^{-1}\left(\frac{1+\gamma_n(A)}{2}\right)\right) - 1,$$

które jest analogiem nierówności (1). Dowód korzysta z rotacyjnej niezmienniczości miary Gaussa i z tzw. symetryzacji Ehrharda.

Znane są również ogólne oszacowania wielkości $\mu(A_t)$ dla miar logarytmicznie wklęsłych (log-wklęsłych). Miarę borelowską μ na $\mathbb{R}^n$ nazywamy log-wklęsłą, jeśli

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}, \qquad \lambda \in (0,1),$$

dla dowolnych zbiorów borelowskich A, B. Absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a miara μ jest log-wklęsła wtedy i tylko wtedy, gdy ma gęstość postaci $e^{-\Phi}$, gdzie $\Phi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, \infty]$ jest funkcją wypukłą. Jednym z najważniejszych przykładów miar log-wklęsłych są rozkłady jednostajne na ciałach wypukłych, czyli zbiorach zwartych wypukłych o niepustym wnętrzu. Innym przykładem jest standardowy rozkład gaussowski na $\mathbb{R}^n$.

Niech A będzie symetrycznym zbiorem wypukłym i niech μ będzie miarą log-wklęsłą. W pracy [B] C. Borell udowodnił następujące oszacowanie,

$$\mu(tA) \geq 1 - \mu(A)\left(\frac{1-\mu(A)}{\mu(A)}\right)^{\frac{t+1}{2}}, \quad t \geq 1.$$

Nierówność ta jest ciekawa jedynie dla zbiorów A spełniających warunek $\mu(A) > 1/2$. W pracy [G] O. Guédon udowodnił wzmocnioną wersję lematu Borella,

$$\mu(tA) \geq 1 - (1-\mu(A))^{\frac{t+1}{2}}, \quad t \geq 1.$$

Powyższe oszacowania prowadzą do nierówności typu Chinczyna-Kahane'a dla miar log-wklęsłych. Mówiąc precyzyjnie, dla dowolnej miary log-wklęsłej μ i dla dowolnej normy $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(\int \|x\|^p \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p} \leq 12\,\frac{p}{q}\left(\int \|x\|^q \, \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}, \quad 1 \leq q \leq p.$$

Wspólnie z Tomaszem Tkoczem rozważaliśmy zespoloną wersję zagadnienia S-inequality dla miary Gaussa. Zespolona miara Gaussa $\gamma_{\mathbb{C}^n}$ jest miarą z gęstością

$$\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|\Re z_i|^2 + |\Im z_i|^2)\right).$$

Jest to więc standardowa miara gaussowska na $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$. Odpowiednikiem zbiorów symetrycznych są tutaj zbiory *zaokrąglone*, czyli zbiory spełniające warunek $e^{i\theta}A = A$ dla wszystkich $\theta \in \mathbb{R}$. Cylindrem nazwiemy zbiór postaci $C = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| \leq L\}$. Możemy sformułować następującą hipotezę, postawioną przez A. Pełczyńskiego.

Hipoteza 1. Rozważmy klasę $\mathcal{K}$ wszystkich zaokrąglonych zbiorów wypukłych w $\mathbb{C}^n$. Dla zbioru $A \in \mathcal{K}$ rozważmy cylinder C spełniający warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$. Wówczas $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \geq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \leq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.

W pracy [T] T. Tkocz częściowo udowodnił tę hipotezę pokazując, że nierówność $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \leq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$, $0 < t \leq 1$ jest spełniona przy dodatkowym założeniu, że zbiór A spełnia warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) \leq 0,64$. Hipoteza w pełnej ogólności jest wciąż otwarta.

W artykule [NT1] zajęliśmy się klasą $\mathcal{K}_1$ wypukłych zbiorów 1-zaokrąglonych, czyli zbiorów wypukłych spełniających warunek

$$(z_1, \ldots, z_n) \in A \implies (e^{i\theta_1}z_1, \ldots, e^{i\theta_n}z_n) \in A, \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Jest to oczywiście klasa węższa niż klasa wszystkich zaokrąglonych zbiorów wypukłych. Klasa ta jest interesująca, gdyż zawiera ona kule w normach $\|\cdot\|$ spełniających warunek

$$\left\|(e^{i\theta_1}z_1, \ldots, e^{i\theta_n}z_n)\right\| = \|(z_1, \ldots, z_n)\|, \quad \theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}.$$

Udało nam się udowodnić Hipotezę 1 w klasie $\mathcal{K}_1$, a nawet w szerszej klasie wszystkich zupełnych obszarów Reinhardta, czyli zbiorów spełniających warunek

$$(z_1, \ldots, z_n) \in A \implies (w_1, \ldots, w_n) \in A, \quad \text{gdy } |w_i| \leq |z_i| \text{ dla } i = 1, \ldots, n.$$

Konkretnie, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 ([NT1], Theorem 1)**.** *Niech $\mathcal{R}$ będzie klasą wszystkich zupełnych obszarów Reinhardta w $\mathbb{C}^n$. Dla zbioru $A \in \mathcal{R}$ rozważmy cylinder C spełniający warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$. Wówczas $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \geq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \leq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.*

Strategia dowodu jest następująca. Korzystamy z prostej obserwacji.

Stwierdzenie 3 ([NT1], Proposition 1)**.** Niech $A \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem borelowskim i niech C będzie cylindrem spełniającym warunek $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$. Wówczas nierówność $\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA) \geq \gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)$ jest spełniona dla wszystkich $t \geq 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jednokładny obraz $\tilde{A}$ zbioru A spełnia $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(t\tilde{A})\big|_{t=1} \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(t\tilde{C})\big|_{t=1}$, gdzie $\tilde{C}$ jest cylindrem, dla którego $\gamma_{\mathbb{C}^n}(\tilde{A}) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(\tilde{C})$.

Zatem możemy ograniczyć się do dowodu nierówności $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA)\big|_{t=1} \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)\big|_{t=1}$. Następnie zauważamy, że

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tA)\Big|_{t=1} = 2n\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) - \int_A |z|^2 \, \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z).$$

Korzystając z warunku $\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) = \gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$ i wyrażając $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma_{\mathbb{C}^n}(tC)\big|_{t=1}$ w terminach $\gamma_{\mathbb{C}^n}(C)$ otrzymujemy równoważną wersję problemu,

$$\int_A |z|^2 \, \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z) \leq 2n\gamma_{\mathbb{C}^n}(A) + 2(1-\gamma_{\mathbb{C}^n}(A)) \ln\left(1-\gamma_{\mathbb{C}^n}(A)\right). \tag{3}$$

Kluczowym pomysłem jest sformułowanie funkcyjnej wersji nierówności (3) i przeprowadzenie dowodu indukcyjnego tej nierówności. Będzie nam potrzebne pojęcie entropii funkcji względem miary. Dla $g : X \to \mathbb{R}_+$ i miary probabilistycznej μ na X definiujemy

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) = \int_X g(x) \ln g(x) \, \mathrm{d}\mu(x) - \left(\int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu(x)\right) \ln \left(\int_X g(x) \, \mathrm{d}\mu(x)\right).$$

Wówczas prawdziwe jest następujące stwierdzenie.

Stwierdzenie 4 ([NT1], Lemma 2)**.** Niech $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ będzie funkcją ograniczoną spełniającą warunki

1) $g(e^{i\theta_1}z_1, \ldots, e^{i\theta_n}z_n) = g(z)$ dla $z \in \mathbb{C}^n$ i $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$,

2) dla dowolnych $w, z \in \mathbb{C}^n$ warunek $|w_k| \leq |z_k|$, $k = 1, \ldots, n$ implikuje $g(w) \leq g(z)$.

Wówczas

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_{\mathbb{C}^n}} g \leq \int_{\mathbb{C}^n} g(z) \left(\frac{|z|^2}{2} - n\right) \mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z).$$

Korzystając z powyższego stwierdzenia dla $g(z) = 1 - \mathbf{1}_A$ otrzymujemy nierówność (3). Dowód Stwierdzenia 4 opiera się na jednowymiarowym oszacowaniu entropii.

Lemat 1. Niech ν będzie probabilistyczną miarą borelowską na $\mathbb{R}_+$ i niech $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ będzie niemalejącą funkcją ograniczoną. Wtedy

$$\operatorname{Ent}_\nu f \le -\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,(1 + \ln \nu((x,\infty)))\,\mathrm{d}\nu(x). \tag{4}$$

Z Twierdzenia 1 i z dowodu Stwierdzenia 1 możemy łatwo wyprowadzić następujący wniosek.

Wniosek 1. Załóżmy, że $\|\cdot\|$ na $\mathbb{C}^n$ spełnia warunek

$$\left\|(e^{i\theta_1}z_1,\ldots,e^{i\theta_n}z_n)\right\| = \|(z_1,\ldots,z_n)\| \quad \theta_1,\ldots,\theta_n \in \mathbb{R}.$$

Wówczas dla dowolnych $p \ge q > 0$ mamy

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} \|z\|^p \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z)\right)^{1/p} \le C_{p,q}\left(\int_{\mathbb{C}^n} \|z\|^q \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}^n}(z)\right)^{1/q},$$

gdzie $C_{p,q} = \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^p \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}}(z)\right)^{1/p} / \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^q \,\mathrm{d}\gamma_{\mathbb{C}}(z)\right)^{1/q}$.

Okazuje się, że z Twierdzenia 1 wynika rozwiązanie problemu S-inequality dla symetrycznej miary wykładniczej, czyli miary z gęstością

$$\mathrm{d}\nu_n(x) = \frac{1}{2^n}\exp\left(-\sum_{i=1}^n |x_i|\right),$$

i klasy $\mathcal{I}$ wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$. Zbiór A nazywamy ideałem, jeśli $x \in A$ implikuje $[-|x_1|,|x_1|] \times \ldots \times [-|x_n|,|x_n|] \subseteq A$. W szczególności S-inequality jest spełnione dla wszystkich 1-symetrycznych zbiorów wypukłych w $\mathbb{R}^n$, czyli zbiorów wypukłych spełniających warunek

$$(x_1,\ldots,x_n) \in A \implies (\varepsilon_1 x_1,\ldots,\varepsilon_n x_n) \in A, \qquad \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,1\}.$$

Twierdzenie 2 ([NT1], Theorem 2)**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie klasą wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$. Dla zbioru $A \in \mathcal{I}$ rozważmy pas P spełniający warunek $\nu_n(A) = \nu_n(P)$. Wówczas $\nu_n(tA) \ge \nu_n(tP)$ dla wszystkich $t \ge 1$ oraz $\nu_n(tA) \le \nu_n(tP)$ dla wszystkich $0 < t \le 1$.*

Dowód polega na zamianie zmiennych i skorzystaniu z transportu miary. Ponownie możemy sformułować wniosek dotyczący oszacowania momentów norm.

Wniosek 2 ([NT1], Corollary 2)**.** Załóżmy, że $\|\cdot\|$ na $\mathbb{R}^n$ spełnia warunek

$$\|(\varepsilon_1 x_1, \ldots, \varepsilon_n x_n)\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\| \quad \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}.$$

Wówczas dla dowolnych $p \geq q > 0$ mamy

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|z\|^p \, \mathrm{d}\nu_n(z) \right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|z\|^q \, \mathrm{d}\nu_n(z) \right)^{1/q},$$

gdzie $C_{p,q} = (\Gamma(p+1))^{1/p} / (\Gamma(q+1))^{1/q}$.

W pracy [NT2] rozszerzyliśmy powyższe rezultaty na przypadek miar z gęstościami

$$\mathrm{d}\nu_p^n(x) = (c_p/2)^n \exp\left(-\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right), \qquad 0 < p \leq 1.$$

Twierdzenie 3 ([NT2], Theorem 1)**.** *Niech $\mathcal{I}$ będzie klasą wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$ i niech $p \in (0, 1]$. Dla zbioru $A \in \mathcal{I}$ rozważmy pas P spełniający warunek $\nu_p^n(A) = \nu_p^n(P)$. Wówczas $\nu_p^n(tA) \geq \nu_p^n(tP)$ dla wszystkich $t \geq 1$ oraz $\nu_n(tA) \leq \nu_n(tP)$ dla wszystkich $0 < t \leq 1$.*

Ponownie korzystając z prostej zamiany zmiennych udało nam się wywnioskować ten sam rezultat dla produktów symetrycznych rozkładów Weibulla ω_α i symetrycznych rozkładów Gamma λ_q,

$$\mathrm{d}\omega_\alpha(x) = \frac{1}{2}\alpha|x|^{\alpha-1}e^{-|x|^\alpha}\mathrm{d}x, \quad \alpha > 0, \qquad \mathrm{d}\lambda_q(x) = \frac{q}{2\Gamma(q)}|x|^{q-1}e^{-|x|}\mathrm{d}x, \quad q \geq 1.$$

Twierdzenie 3 dowodzi się indukcyjnie. Łatwo zauważyć ([NT2], Proposition 1), że S-inequality dla miary produktowej i klasy $\mathcal{I}$ wszystkich ideałów w $\mathbb{R}^n$ wystarczy dowodzić w przypadku $n = 2$. W tym przypadku rozważamy ideały generowane przez funkcje nierosnące $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, czyli zbiory postaci $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |y| \leq f(|x|)\}$. Wówczas nietrudno zauważyć, korzystając ze Stwierdzenia 3 i przeprowadzając prosty rachunek, że problem wykazania optymalności pasów równoważny jest następującej nierówności funkcyjnej,

$$\int \Phi(g) \, \mathrm{d}\mu_+ - \Phi\left(\int g \, \mathrm{d}\mu_+ \right) \leq \int_0^\infty g(x) \left(x^p - \frac{1}{p} \right) \mathrm{d}\mu_+(x), \tag{5}$$

gdzie

$$\Phi = S \circ T^{-1}, \quad T(u) = c_p \int_u^\infty e^{-x^p} \, \mathrm{d}x, \quad S(u) = c_p \int_0^u x^p e^{-x^p} \, \mathrm{d}x, \quad g = T \circ f$$

oraz μ_+ jest miarą na $\mathbb{R}_+$ z gęstością $c_p e^{-x^p}$. Dla $p = 1$ nierówność (5) jest równoważna z nierównością (4). Nierówność (5) jest prawdziwa dla wszystkich funkcji niemalejących $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Ze względu na to, że prawa strona (5) jest funkcjonałem liniowym, wystarczy wykazać, że prawa strona jest funkcjonałem wypukłym, a następnie sprawdzić nierówność dla funkcji postaci $g(x) = \mathbf{1}_{[a,\infty)}(x)$, $a > 0$. Dla tych funkcji w nierówności (5) mamy równość.

Aby pokazać wypukłość prawej strony, wystarczy skorzystać z następującego lematu.

Lemat 2 ([LO2], Lemma 4)**.** Niech $(\Omega, \mathcal{F}, \nu)$ będzie przestrzenią probabilistyczną. Załóżmy, że $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ spełnia $\Phi'' > 0$ oraz $(1/\Phi'')$ jest wklęsła. Dla $g : \Omega \to [0,1]$ definiujemy funkcjonał

$$\Psi_\Phi(g) = \int_\Omega \Phi(g)\, \mathrm{d}\nu - \Phi\left(\int_\Omega g\, \mathrm{d}\nu\right).$$

Wówczas funkcjonał Ψ_Φ jest wypukły, czyli

$$\Psi_\Phi(\lambda f + (1-\lambda)g) \leq \lambda\Psi_\Phi(f) + (1-\lambda)\Psi_\Phi(g).$$

Nierówności typu Chinczyna Rozważmy ciąg liczb $a_1, \ldots, a_n$ i niech $r_1, \ldots, r_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych Bernoulliego, czyli zmiennych losowych spełniających $\mathbb{P}(r_i = 1) = \mathbb{P}(r_i = -1) = 1/2$. Rozważmy sumę $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Zmienną losową S nazywamy chaosem rademacherowym pierwszego rzędu. Dla dowolnych $p > q > 0$ prawdziwa jest następująca nierówność, udowodniona po raz pierwszy przez Chinczyna, [K],

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq C_{p,q}(\mathbb{E}|S|^q)^{1/q}, \tag{6}$$

gdzie $C_{p,q}$ jest stałą niezależną od n i ciągu $a_1, \ldots, a_n$. Będziemy zakładali, że stała $C_{p,q}$ jest optymalną stałą w nierówności (6). Problem wyznaczenia stałych $C_{p,q}$ ma długą historię i został rozwiązany jedynie w kilku specjalnych przypadkach. Stałe $C_{2,q}$ i $C_{p,2}$ są znane. Są one ważne ze względu na fakt, że drugi moment zmiennej S ma szczególnie prostą postać, $\mathbb{E}S^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Stałe $C_{p,2}$ dla $p \geq 3$ wyznaczył Whittle, [Wh]. Stała $C_{2,1}$ została wyznaczona przez Szarka w pracy [S]. Stałe $C_{p,2}$ dla $p \in (2,3)$ oraz stałe $C_{2,q}$ dla $q \in (0,2)$ zostały wyznaczone przez Haagerupa, [H]. W przypadku gdy $p = 2$ lub $q = 2$, optymalne stałe $C_{p,q}$ zostały znalezione w ogólniejszej sytuacji (gdy zamiast symetrycznych zmiennych Bernoulliego rozważamy pewną klasę rotacyjnie niezmienniczych wektorów losowych w $\mathbb{R}^n$, zawierającą np. wektory rozłożone jednostajnie na sferach i kulach euklidesowych) przez Königa i Kwapienia, [KK], oraz Baernsteina i Culverhouse'a, [BC].

Optymalne stałe $C_{p,q}$ w nierówności (6), w przypadku gdy p i q są parzystymi liczbami naturalnymi oraz $q|p$, zostały wyznaczone przez W. Czerwińskiego w jego pracy magisterskiej, [C]. W pracy [NO], którą napisałem wspólnie z moim promotorem, prof. Krzysztofem Oleszkiewiczem, wyznaczone zostały stałe $C_{p,q}$ dla dowolnych parzystych p, q.

Twierdzenie 4. *Niech $p > q > 0$ będą liczbami całkowitymi parzystymi i niech $S = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i$. Wówczas*

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq \frac{\sqrt[p]{(p-1)!!}}{\sqrt[q]{(q-1)!!}} (\mathbb{E}|S|^q)^{1/q}.$$

W pracy [NO] definiujemy ultra sub-gaussowskie wektory losowe i dowodzimy nierówności typu Chinczyna dla sum niezależnych wektorów tego typu. Niech $\|\cdot\|$ będzie standardową normą euklidesową na $\mathbb{R}^d$ i niech G będzie standardowym wektorem gaussowskim w $\mathbb{R}^d$.

Definicja 2. Powiemy, że wektor losowy X o wartościach w $\mathbb{R}^d$ jest ultra sub-gaussowski, jeśli $X = 0$ p.n. lub X jest rotacyjnie niezmienniczy (symetryczny w przypadku $d = 1$), ma wszystkie momenty i ciąg $(a_i)_{i=0}^{\infty}$, $a_i = \mathbb{E}\|X\|^{2n} / \mathbb{E}\|G\|^{2n}$ jest log-wklęsły, czyli $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ dla $i \geq 1$.

Nietrudno zauważyć, że dla ciągu liczb dodatnich $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ spełniającego nierówność $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ dla $i \geq 1$ oraz warunek $a_0 = 1$, ciąg $(\sqrt[2i]{a_i})_{i=1}^{\infty}$ jest nierosnący. Wynika stąd, że ultra sub-gaussowski wektor X spełnia nierówność

$$(\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\|G\|^q)^{1/q}} (\mathbb{E}\|X\|^q)^{1/q} \tag{7}$$

dla parzystych liczb całkowitych $p > q > 0$. Ponadto, prawdziwy jest następujący lemat.

Lemat 3 ([NO], Lemma 2)**.** Niech X, Y będą niezależnymi ultra sub-gaussowskimi wektorami losowymi w $\mathbb{R}^d$. Wówczas $X + Y$ jest również ultra sub-gaussowskim wektorem losowym.

Dowód powyższego lematu opiera się na następującym twierdzeniu, pochodzącym od Walkupa, [W] (w naszej pracy podajemy nowy, krótki dowód tego twierdzenia).

Twierdzenie 5 ([NO], Theorem 1)**.** *Niech $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ oraz $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ będą log-wklęsłymi ciągami dodatnich liczb rzeczywistych. Wówczas ciąg $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ zadany wzorem*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}$$

jest również log-wklęsły.

Jako prosty wniosek z Lematu 3 i nierówności (7) otrzymujemy nierówność typu Chinczyna dla sum niezależnych ultra sub-gaussowskich wektorów losowych.

Twierdzenie 6 ([NO], Theorem 2)**.** *Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $p > q > 0$ będą parzystymi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciąg niezależnych ultra sub-gaussowskich zmiennych losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ w $\mathbb{R}^d$. Wówczas dla $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ prawdziwa jest nierówność*

$$(\mathbb{E}\,\|S\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\,\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|G\|^q)^{1/q}} (\mathbb{E}\,\|S\|^q)^{1/q}.$$

Przykłady ultra sub-gaussowskich zmiennych losowych możemy konstruować przy pomocy następującego lematu.

Lemat 4 ([NO], Lemma 3, Corollary 1, 2)**.** Załóżmy, że wektor losowy X w $\mathbb{R}^d$ i nieujemna zmienna losowa R są niezależne i $R \cdot X$ ma rozkład $\mathcal{N}(0, Id_d)$. Wówczas X jest ultra sub-gaussowskim wektorem losowym. W szczególności ultra sub-gaussowskimi wektorami losowymi są

a) wektory losowego rozłożone jednostajnie na sferach euklidesowych $r \cdot S^{d-1}$, $r > 0$ (w przypadku $d = 1$ mamy symetryczną zmienną losową przyjmującą wartości $\pm r$),

b) wektory losowego rozłożone jednostajnie na kulach euklidesowych $r \cdot B^d$, gdzie $r > 0$ i B^d jest kulą o promieniu 1 i środku w 0 (w przypadku $d = 1$ mamy zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[-r, r]$),

c) wektory losowe z gęstością $g_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{\alpha}+1)} \pi^{-d/2} e^{-\|x\|^\alpha}$, $\alpha > 2$.

Mamy zatem następujący wniosek.

Wniosek 3 ([NO], Theorem 3)**.** Niech d będzie dodatnią liczbą całkowitą i niech $p > q > 0$ będą parzystymi liczbami całkowitymi. Rozważmy ciąg niezależnych ultra sub-gaussowskich zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots, X_n$ w $\mathbb{R}^d$, rozłożonych na kulach lub sferach euklidsowych (niekoniecznie o środku w 0). Wówczas dla $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ prawdziwa jest nierówność

$$(\mathbb{E}\,\|S\|^p)^{1/p} \le \frac{(\mathbb{E}\,\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|G\|^q)^{1/q}} (\mathbb{E}\,\|S\|^q)^{1/q}.$$

Stała

$$\frac{(\mathbb{E}\,\|G\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|G\|^q)^{1/q}} = \left(\frac{\Gamma(\frac{p+d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{1/p} \left(\frac{\Gamma(\frac{q+d}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2})}\right)^{-1/q}$$

jest optymalna. Można się o tym przekonać rozważając ciąg $X_1, X_2, \dots$ zmiennych niezależnych o tym samym rozkładzie i korzystając z Centralnego Twierdzenia Granicznego przy $n \to \infty$. Dla $d = 1$ otrzymujemy Twierdzenie 4.

Problem wyznaczenia optymalnej stałej $C_{p,q}$ w nierówności Chinczyna dla dowolnych $p > q > 0$ wydaje się być bardzo trudny. Prawdziwa jest jednak następująca nierówność typu Chinczyna-Kahane'a.

Twierdzenie 7. *Niech $(F, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną i niech $v_1, \dots, v_n \in F$. Niech $r_1, \dots, r_n$ będzie ciągiem niezależnych symetrycznych zmiennych losowych Bernoulliego. Wówczas dla $p \ge q > 1$ mamy*

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i r_i\right\|^p\right)^{1/p} \le \sqrt{\frac{p-1}{q-1}} \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n v_i r_i\right\|^q\right)^{1/q}.$$

Powyższą nierówność można udowodnić korzystając z tzw. nierówności hiperkontrakcyjnej. Aby podać jej sformułowanie, rozważmy kostkę dyskretną $\{-1,1\}^n$ z miarą produktową $\mu_n = \left(\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}\right)^{\otimes n}$. Jest to miara jednostajna na $\{-1,1\}^n$. W przestrzeni liniowej funkcji $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ wprowadzamy strukturę przestrzeni Hilberta $L^2 = L^2(\mu_n)$ z iloczynem skalarnym $\langle f, g\rangle = \int fg \,\mathrm{d}\mu_n$ i z normą $\|f\| = \left(\int f^2 \,\mathrm{d}\mu_n\right)^{1/2}$. Jest to przestrzeń liniowa wymiaru 2^n. Dla $S \subset \{1, \dots, n\}$ definiujemy funkcje Walsha, $w_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$ oraz $w_\emptyset \equiv 1$. Zbiór funkcji $(w_S)_S$ ma moc 2^n i jest układem ortonormalnym w L^2, a zatem jest bazą L^2. Wynika stąd, że każdą funkcję $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ możemy przedstawić w postaci $f = \sum_S a_S w_S$, gdzie $(a_S)_S$ są pewnymi liczbami rzeczywistymi. Zbiór $(a_S)_S$ nazywamy spektrum funkcji f. Definiujemy operator $\mathcal{P}_t$ wzorem

$$\mathcal{P}_t\left(\sum_S a_S w_S\right) = \sum_S e^{-t|S|} a_S w_S,$$

gdzie $|S|$ jest mocą zbioru S. Bonami, Beckner i Gross udowodnili następującą nierówność (patrz [Bo, Be, Gr]),

$$\|\mathcal{P}_t f\|_p \leq \|f\|_q, \qquad t \geq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p-1}{q-1}\right),\ p > q > 1. \tag{8}$$

W szczególności, dla wszystkich $a_S \in \mathbb{R}$ prawdziwa jest nierówność

$$\left\|\sum_{S\subseteq[n]} (q-1)^{|S|/2} a_S w_S\right\|_2 \leq \left\|\sum_{S\subseteq[n]} a_S w_S\right\|_q. \tag{9}$$

Nierówność ta została uogólniona w pracy [Ol1] na przypadek niesymetryczny, w którym rozważamy kostkę $\{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n$ z miarą $\mu_n = (\beta\delta_{-\gamma} + \alpha\delta_{\gamma^{-1}})^{\otimes}$, gdzie $\alpha+\beta = 1$, $\alpha \in (0, 1/2)$ oraz $\gamma = \sqrt{\alpha/\beta}$. Przy tej normalizacji $\int x_i \,\mathrm{d}\mu_n = 0$ i $\int x_i x_j \,\mathrm{d}\mu_n = \delta_{i,j}$. W szczególności funkcje Walsha tworzą układ ortonormalny. Prawdziwa jest nierówność

$$\left\|\sum_{T\subseteq[n]} c_q(\alpha,\beta)^{|T|} a_T w_T\right\|_2 \leq \left\|\sum_{T\subseteq[n]} a_T w_T\right\|_q, \tag{10}$$

gdzie

$$c_q(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{\beta^{2-\frac{2}{q}} - \alpha^{2-\frac{2}{q}}}{\alpha\beta\left(\alpha^{-\frac{2}{q}} - \beta^{-\frac{2}{q}}\right)}}.$$

Łatwo zauważyć, że (9) jest szczególnym przypadkiem (10). Faktycznie, mamy

$$\sqrt{q-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} c_q\left(\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon\right).$$

Praca [N] nie dotyczy bezpośrednio szacowania momentów sum niezależnych zmiennych losowych, jednak Twierdzenie 7 oraz nierówność (10) odgrywają w niej kluczową rolę. W pracy [FKN] Friedgut, Kalai i Naor udowodnili, że w przypadku symetrycznym funkcja, której spektrum jest ε-skoncentrowane na pierwszych dwóch poziomach, czyli $\sum_{|S|>1} a_S^2 < \varepsilon^2$, jest $C\varepsilon$-bliska w normie L^2 jednej z funkcji $\pm x_i$ lub funkcji stałej. W pracy [JOW] autorzy udowodnili następującą optymalną wersję tego twierdzenia.

Twierdzenie 8 ([JOW], Theorem 5.3 i Theorem 5.8). *Niech $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ i $f = \sum_S a_S w_S$. Zdefiniujmy $\rho = \left(\sum_{|S|>1} a_S^2\right)^{1/2}$. Wówczas istnieje podzbiór $B \subseteq$*

$\{1,\ldots,n\}$ *spełniający* $|B| \leq 1$ *taki, że* $\sum_{|S|\leq 1, S\neq B} a_S^2 \leq C\rho^4 \ln(2/\rho)$ *oraz* $|a_B|^2 \geq 1-\rho^2-C\rho^4\ln(2/\rho)$*, gdzie* C *jest stałą uniwersalną.*

Ponadto, w przypadku niesymetrycznym, dla $f : \{-\gamma,\gamma^{-1}\}^n \to \{-1,1\}$ *istnieje* $k \in [n]$ *takie, że* $\left\| f - (a_\emptyset + a_{\{k\}} w_{\{k\}})\right\|_{L^2} \leq 8\sqrt{\rho}$.

Dowód powyższego twierdzenia korzysta z nierówności (9). W pracy [N], korzystając z nierówności (10), udowodniłem następującą wzmocnioną wersję drugiej części Twierdzenia 8.

Twierdzenie 9. *Niech* $f : \{-\gamma,\gamma^{-1}\} \to \{-1,1\}$ *oraz* $f = \sum_S a_S w_S$*. Zdefiniujmy* $\rho = \left(\sum_{|S|>1} a_S^2\right)^{1/2}$*. Wówczas istnieje* $k \in \{1,\ldots,n\}$ *oraz stała uniwersalna* $c_0 > 0$ *taka, że dla* $\rho\ln(e/\rho) < c_0\alpha$ *mamy*

$$\left\| f - (a_\emptyset + a_{\{k\}} w_{\{k\}})\right\|_{L^2} \leq 2\rho.$$

W drugiej części pracy [N] badałem funkcje określone na symetrycznej kostce dyskretnej i przyjmujące wartości w przedziale $[-1,1]$. Powiemy, że funkcja $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ jest afiniczna, jeśli $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, gdzie $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór wszystkich funkcji afinicznych określonych na kostce dyskretnej, zaś przez $\mathcal{A}_{[-1,1]} \subset \mathcal{A}$ zbiór funkcji afinicznych, przyjmujących na kostce wartości w zbiorze $[-1,1]$.

W pracy [JOW] autorzy podali nastepujący przykład. Niech $g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $g(x) = s^{-1}n^{-1/2}\sum_{i=1}^n x_i$. Oczywiście $g \in \mathcal{A}$. Zdefiniujmy $\phi(x) = -\mathbf{1}_{(-\infty,-1)}(x) + x\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ oraz $f = \phi\circ g$. Funkcja f ma wartości w zbiorze $[-1,1]$, ale nie musi być afiniczna. Autorzy udowodnili, że $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A}) = O(e^{-s^2/4})$ oraz $\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A}_{[-1,1]}) = \Theta(s^{-1})$. W [N] udowodniłem, że jest to najgorszy przypadek. Konkretniej, prawdziwe jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 10 ([N], Theorem 3)**.** *Niech* $f : \{-1,1\}^n \to [-1,1]$ *i niech* $\rho = \mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A})$*. Wówczas* $\mathrm{dist}_{L^2}(f,\mathcal{A}_{[-1,1]}) \leq \frac{18}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}$.

W dowodzie wykorzystuję Twierdzenie 7 oraz następujący lemat.

Lemat 5. ([HK], Theorem 1 i [Ol2], Theorem 1) Niech $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ i niech $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$, gdzie $r_1,\ldots,r_n$ są symetrycznymi niezależnymi zmiennymi Bernoulliego. Wówczas dla $t \geq 1$ mamy

$$\mathbb{P}\left(|S| \geq \|S\|_{L^2}\right) > \frac{1}{10} \qquad \text{oraz} \qquad (\mathbb{E}|S|^t)^{1/t} \geq \frac{1}{4}\sqrt{t}\Big(\sum_{i>t} a_i^2\Big)^{1/2}.$$

Podziękowania W pierwszej kolejności chciałbym podziękować mojemu promotorowi profesorowi Krzysztofowi Oleszkiewiczowi za jego pomoc i za rozmowy dotyczące matematyki i życia akademickiego. Dziękuję również mojemu promotorowi pomocniczemu Adamowi Osękowskiemu.

Pragnę również podziękować profesorowi Rafałowi Latale za zainteresowanie moimi badaniami naukowymi i za wiele pożytecznych dyskusji.

Dziękuję wszystkim osobom, które przyczyniły się do powstania artykułów, wchodzących w skład niniejszej rozprawy. W szczególności dziękuję profesorowi Stanisławowi Kwapieniowi, Olivierowi Guédonowi, Matthieu Fradeliziemu, Bernardowi Maureyowi i Radosławowi Adamczakowi.

Dziękuję mojej Rodzinie i Narzeczonej.

Chciałbym złożyć również podziękowania dla Piotra Bogusława Muchy, kierownika Środowiskowych Studiów Doktoranckich z Nauk Matematycznych, których byłem uczestnikiem. Dziękuję Narodowemu Centrum Nauki za wsparcie finansowe moich badań naukowych (grant NCN nr 2011/01/N/ST1/01839).

Literatura

[B] Borell, C., *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Invent. Math. 30 (1975), no. 2, 207-–216.

[BC] Baernstein, II, A., Culverhouse, R.C., *Majorization of sequences, sharp vector Khinchin inequalities, and bisubharmonic functions*, Stud. Math 152 (2002), 231—248.

[Be] Beckner, W., *Inequalities in Fourier analysis*, Annals of Math. 102 (1975), 159–182.

[Bo] Bonami, A., *Etude des coeffcients Fourier des fonctiones de $L_p(G)$*, Ann. Inst. Fourier 20 (1970), 335–402.

[C] Czerwiński, W., *Khinchine inequalities* (in Polish), University of Warsaw, Master thesis (2008).

[FKN] Friedgut, E., Kalai, G., Naor, A., *Boolean functions whose Fourier transform is concentrated on the first two levels*, Advances in Applied Mathematics 29, no. 3 (2002), 427-–437.

[G] Guédon, O., *Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent*, Mathematika 46, 1 (1999), 165–173.

[Gr] Gross, L., *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975), 1061–1083.

[H] Haagerup, U., *The best constants in the Khintchine inequality*, Stud. Math. 70 (1982), 231-–283.

[HK] Hitczenko, P., Kwapień, S., *On the Rademacher series*, Probability in Banach spaces, 9 (Sandjberg, 1993), 31—36, Progr. Probab., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.

[JOW] Jendrej, J., Oleszkiewicz, K., Wojtaszczyk, J.O., *On some extensions of the FKN theorem*, preprint.

[K] Khintchine, A., *Über dyadische Brüche*, Math. Z. 18 (1923), 109-–116.

[KK] König, H., Kwapień, S., *Best Khintchine type inequalities for sums of independent, rotationally invariant random vectors*, Positivity 5 (2001), 115—152.

[LO] Latała R., Oleszkiewicz K., *Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, Ann. Probab. 27 (1999), 1922–1938.

[LO2] Latała, R., Oleszkiewicz, K., *Between Sobolev and Poincaré*, Geometric Aspects of Functional Analysis, 147–168, Lecture Notes in Math., 1745, Springer, Berlin, 2000.

[L] Levy, P., *Problémes concrets d'analyse fonctionnelle. Avec un complément sur les fonctionnelles analytiques par F. Pellegrino.* Gauthier-Villars, Paris, 1951. 2d ed.

[NO] Nayar P., Oleszkiewicz K., *Khinchine type inequalities with optimal constants via ultra log-concavity*, Positivity, 16 (2012), 359–371.

[NT1] Nayar P., Tkocz T., *The unconditional case of the complex S-inequality*, Israel Journal of Mathematics, Vol. 197 1 (2013), 99–106.

[NT2] Nayar P., Tkocz T., *S-inequality for certain product measures*, Mathematische Nachrichten, online, 2013, DOI: 10.1002/mana.201200294

[N] Nayar, P., *FKN Theorem on the biased cube*, preprint, http://arxiv.org/pdf/1311.3179.pdf

[Ol1] Oleszkiewicz, K., *On a nonsymmetric version of the Khinchine-Kahane inequality*, Proceedings of the Stochastic Inequalities Conference (Barcelona 2002), Progress in Probab. 56, 157-–168, Birkhäuser Verlag Basel, 2003.

[Ol2] Oleszkiewicz, K., *On the Stein property of Rademacher sequences*, Prob. and Math. Stat., Vol. 16, Fasc. 1 (1996), 127—130

[S] Szarek, S., *On the best constant in the Khintchine inequality*, Stud. Math. 58 (1976), 197-–208.

[SC] Sudakov, V., Cirel'son, B., *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, (Russian) Problems in the theory of probability distributions, II. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) 41 (1974), 14-–24, 165.

[T] Tkocz, T., *Gaussian measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in* $\mathbb{C}^n$, Elect. Comm. in Probab. 16 (2011), 38–49.

[W] Walkup, D. W., *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probab. 13 (1976), 76–85.

[Wh] Whittle, P., *Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent random variables*, Theory Probab. Appl. 5 (1960), 302–305.

The unconditional case of the complex S-inequality

Piotr Nayar [*], Tomasz Tkocz [†]

Abstract

In this note we prove the complex counterpart of the S-inequality for complete Reinhardt sets. In particular, this result implies that the complex S-inequality holds for unconditional convex sets. As a by-product we also obtain the S-inequality for the exponential measure in the unconditional case.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 60G15; Secondary 60E15.
Key words and phrases. S-inequality, Gaussian measure, Exponential measure, Dilation, Complete Reinhardt set, Unconditional complex norm, Entropy.

1 Introduction

Studying various aspects of a Gaussian measure in a Banach space one often needs precise estimates on measures of balls and their dilations. This gives raise to the question how the function $(0, \infty) \ni t \mapsto \mu(tB)$ behaves. Here B is a convex and symmetric subset of some Banach space, i.e. an unit ball with respect to some norm, and μ is a Gaussian measure. Thanks to certain approximation arguments we may only deal with the simplest spaces, namely $\mathbb{R}^n$ or $\mathbb{C}^n$. In the former case the issue is well understood due to R. Latała and K. Oleszkiewicz. Denote by γ_n the standard Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$, i.e. the measure with the density at a point $(x_1, \ldots, x_n)$ equal to $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp\left(-x_1^2/2 - \ldots - x_n^2/2\right)$. In [LO1] it is shown that for a symmetric convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ and the strip $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq p\}$, where p is chosen so that $\gamma_n(K) = \gamma_n(P)$, we have

$$\gamma_n(tK) \geq \gamma_n(tP), \qquad t \geq 1.$$

This result is called *S-inequality.* The interested reader is also referred to the concise survey [Lat].

In the present note we would like to focus on S-inequality for sets which correspond to unit balls with respect to unconditional norms on $\mathbb{C}^n$. Some partial results concerning the general case has been recently obtained in [Tko].

Definitions and preliminary statements are provided in Section 2. Section 3 is devoted to the main result. It also contains a proof of a one-dimensional inequality, which bounds entropy, and seems to be the heart of the proof of our main theorem.

[*]Research partially supported by NCN Grant no. 2011/01/N/ST1/01839.
[†]Research partially supported by NCN Grant no. 2011/01/N/ST1/05960.

2 Preliminaries

We define the standard Gaussian measure ν_n on the space $\mathbb{C}^n$ via the formula

$$\nu_n(A) = \gamma_{2n}\left(\tau(A)\right), \qquad \text{for any Borel set } A \subset \mathbb{C}^n,$$

where $\mathbb{C}^n \overset{\tau}{\longmapsto} \mathbb{R}^{2n}$ is the bijection given by

$$\tau(z_1, \ldots, z_n) = (\mathfrak{Re} z_1, \mathfrak{Im} z_1, \ldots, \mathfrak{Re} z_n, \mathfrak{Im} z_n).$$

We adopt the notation $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Later on we will also extensively use the notion of the *entropy* of a function $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ with respect to a probability measure μ on a measurable space X

$$\mathrm{Ent}_\mu f = \int_X f(x) \ln f(x) \mathrm{d}\mu(x) - \left(\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) \right) \ln \left(\int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) \right). \quad (1)$$

We say that a closed subset K of $\mathbb{C}^n$ *supports the complex S-inequality*, *$S\mathbb{C}$-inequality* for short, if any its dilation $L = sK$, $s > 0$, and any *cylinder* $C = \{z \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| \le R\}$ satisfy

$$\nu_n(L) = \nu_n(C) \quad \Longrightarrow \quad \nu_n(tL) \ge \nu_n(tC), \quad \text{for } t \ge 1. \quad (2)$$

Note that the natural counterpart of S-inequality in the complex case is the following conjecture due to Prof. A. Pełczyński, which has already been discussed in [Tko].

Conjecture. *All closed subsets K of $\mathbb{C}^n$ which are* rotationally symmetric*, that is $e^{i\theta} K = K$ for any $\theta \in \mathbb{R}$, support $S\mathbb{C}$-inequality.*

In the present paper we are interested in the class $\mathfrak{R}$ of all closed sets in $\mathbb{C}^n$ which are *Reinhardt complete*, i.e. along with each point $(z_1, \ldots, z_n)$ such a set contains all points $(w_1, \ldots, w_n)$ for which $|w_k| \le |z_k|$, $k = 1, \ldots, n$ (consult for instance the textbook [Sh, I.1.2, pp. 8–9]). The key point is that this class contains all unit balls with respect to unconditional norms on $\mathbb{C}^n$. Recall that a norm $\|\cdot\|$ is said to be *unconditional* if $\|(e^{i\theta_1} z_1, \ldots, e^{i\theta_n} z_n)\| = \|z\|$ for all $z \in \mathbb{C}^n$ and $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$.

The goal is to prove that all sets from the class $\mathfrak{R}$ support $S\mathbb{C}$-inequality. Now we establish some general yet simple observations which allow us to reduce the problem to a one-dimensional entropy inequality.

Proposition 1. *A closed subset K of $\mathbb{C}^n$ supports $S\mathbb{C}$-inequality if and only if for any its dilation L and any cylinder C we have*

$$\nu_n(L) = \nu_n(C) \quad \Longrightarrow \quad \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nu_n(tL) \right|_{t=1} \ge \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \nu_n(tC) \right|_{t=1}. \quad (3)$$

Proof. We are only to show the interesting part that (3) implies (2) following the proof of [KS, Lemma 1]. Fix a dilation L of K and a cylinder C such that $\nu_n(L) = \nu_n(C)$. Let a function h be given by $\nu_n(tL) = \nu_n(h(t)C)$, $t \ge 1$. Then, by the assumption, we find

$$h(t) \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \nu_n(sC) \right|_{s=h(t)} = \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \nu_n(sh(t)C) \right|_{s=1} \le \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \nu_n(stL) \right|_{s=1} = t \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \nu_n(sL) \right|_{s=t}.$$

Yet, differentiating the equation which defines the function h we get $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\nu_n(sL)\big|_{s=t} = h'(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\nu_n(sC)\big|_{s=h(t)}$, thus $h(t) \leq th'(t)$. It means that the function $h(t)/t$ is nondecreasing, so $1 = h(1) \leq h(t)/t$ for $t \geq 1$. $\square$

For any closed set A the derivative of the function $t \mapsto \nu_n(tA)$ is easy to compute. Indeed,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu_n(tA)\bigg|_{t=1} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{tA} e^{-|z|^2/2}\mathrm{d}z\bigg|_{t=1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_A t^{2n}e^{-t^2|w|^2/2}\mathrm{d}w\bigg|_{t=1}\\ &= 2n\nu_n(A) - \int_A |z|^2\mathrm{d}\nu_n(z).\end{aligned}$$

Moreover, the integral of $|z|^2$ over a cylinder C may be expressed explicitly in terms of the measure $\nu_n(C)$. Namely,

$$\int_C |z|^2\mathrm{d}\nu_n(z) = 2(1-\nu_n(C))\ln(1-\nu_n(C)) + 2n\nu_n(C).$$

Combining these two remarks with the preceding proposition we obtain an equivalent formulation of the problem.

Proposition 2. *A closed subset K of $\mathbb{C}^n$ supports $S\mathbb{C}$-inequality if and only if for any its dilation L*

$$\int_L |z|^2\mathrm{d}\nu_n(z) \leq 2n\nu_n(L) + 2(1-\nu_n(L))\ln(1-\nu_n(L)). \tag{4}$$

3 Main result

We aim at proving the aforementioned main result, which reads as follows

Theorem 1. *Any set from the class $\mathfrak{R}$ supports $S\mathbb{C}$-inequality.*

We begin with a one-dimensional entropy inequality.

Lemma 1. *Let μ be a Borel probability measure on $\mathbb{R}_+$ and suppose $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ is a bounded and non-decreasing function. Then*

$$\mathrm{Ent}_\mu f \leq -\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\Big(1 + \ln\mu\left((x,\infty)\right)\Big)\mathrm{d}\mu(x). \tag{5}$$

Proof. Using homogeneity of both sides of (5), without loss of generality, we can assume that $\int_{\mathbb{R}_+} f\mathrm{d}\mu = 1$. Then we may rewrite the assertion of the lemma as follows

$$\int_{\mathbb{R}_+} \ln\left(f(x)\int_{(x,\infty)}\mathrm{d}\mu(t)\right)f(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq -1.$$

Introduce the probability measure ν on $\mathbb{R}_+$ with the density f with respect to μ. Thanks to the monotonicity of f we can bound the left hand side of the last inequality by

$$\int_{\mathbb{R}_+} \ln\Big(\nu\left((x,\infty)\right)\Big)\mathrm{d}\nu(x) = -\int_0^\infty\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}\mathbf{1}_{\{u \geq \nu((x,\infty))\}}(u,x)\mathrm{d}\nu(x).$$

Define the function

$$H(y) := \inf\{t \mid \nu((t,\infty)) \leq y\},$$

which is the *inverse* tail function, and observe that

$$\{(u,x) \mid u \geq \nu((x,\infty))\} \supset \{(u,x) \mid H(u) \leq x\},$$

as $u \geq \nu((H(u),\infty)) \geq \nu((x,\infty))$. This leads to

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}\mathbf{1}_{\{u\geq\nu((x,\infty))\}}(u,x)\mathrm{d}\nu(x) &\leq -\int_0^\infty \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u}\mathbf{1}_{\{H(u)\leq x\}}(u,x)\mathrm{d}\nu(x) \\ &= -\int_0^1 \nu([H(u),\infty))\frac{\mathrm{d}u}{u}. \end{aligned}$$

Since $u \leq \nu([H(u),\infty))$, we finally get the desired estimation. □

Now, for a certain class of functions, we establish the multidimensional version of inequality (5). For the simplicity, we formulate this result for the Gaussian measure.

Lemma 2. *Let $g\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ be a bounded function satisfying*

1) $g((e^{i\theta_1}z_1,\dots,e^{i\theta_n}z_n)) = g(z)$ for any $z\in\mathbb{C}^n$ and $\theta_1,\dots,\theta_n\in\mathbb{R}$,

2) for any $w,z\in\mathbb{C}^n$ the condition $|w_k|\leq|z_k|$, $k=1,\dots,n$ implies $g(w)\leq g(z)$.

Then

$$\mathrm{Ent}_{\nu_n} g \leq \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\left(\frac{|z|^2}{2}-n\right)\mathrm{d}\nu_n(z). \tag{6}$$

Proof. One piece of notation: for a fixed vector $r=(r_1,\dots,r_n)\in(\mathbb{R}_+)^n$ we denote $r^k=(r_1,\dots,r_{k-1},r_{k+1},\dots,r_n)\in(\mathbb{R}_+)^{n-1}$, and then define the functions

$$g_k^{r^k}(x) = g(r_1,\dots,r_{k-1},x,r_{k+1},\dots,r_n), \qquad k=1,\dots,n.$$

Notice that for a function $h\colon\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{R}_+$ obeying the property 1) we get

$$\int_{\mathbb{C}} h(z)\mathrm{d}\nu_1(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty h(re^{i\theta})e^{-r^2/2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^\infty h(r)\mathrm{d}\mu(r),$$

where μ denotes the probability measure on $\mathbb{R}_+$ with the density at r given by $re^{-r^2/2}$. Therefore

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\left(\frac{|z|^2}{2}-n\right)\mathrm{d}\nu_n(z) &= \int_{(\mathbb{R}_+)^n} g(r)\left(\frac{\sum_{k=1}^n r_k^2}{2}-n\right)\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(r) \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+)^n}\sum_{k=1}^n\left[\int_{\mathbb{R}_+} g_j^{r^j}(x)\left(\frac{x^2}{2}-1\right)\mathrm{d}\mu(x)\right]\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(r). \end{aligned}$$

Applying Lemma 1 for the function $g_j^{r^j}$ and the measure μ we obtain the estimation

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}^n} g(z)\left(\frac{|z|^2}{2}-n\right)\mathrm{d}\nu_n(z) &\geq \int_{(\mathbb{R}_+)^n}\sum_{k=1}^n \mathrm{Ent}_\mu\, g_j^{r^j}\,\mathrm{d}\mu^{\otimes n}(r) \\ &\geq \mathrm{Ent}_{\mu^{\otimes n}}\, g = \mathrm{Ent}_{\nu_n}\, g, \end{aligned}$$

where the last inequality follows from subadditivity of entropy (for example see [Led, Proposition 5.6]). □

Proof of Theorem 1. Fix $K \in \mathfrak{R}$. In order to show (4) we introduce the function $g(z) = 1 - \mathbf{1}_K(z)$. We adopt the standard convention that $0 \ln 0 = 0$, hence the desired inequality is equivalent to (6). Thus the application of Lemma 2 for the function g finishes the proof. $\square$

Theorem 1 immediately implies that the Cartesian products of cylinders support $S\mathbb{C}$-inequality. As a consequence, $S\mathbb{C}$-inequality possesses a tensorization property.

Corollary 1. *Assume sets $K_1 \subset \mathbb{C}^{n_1}, \ldots, K_\ell \subset \mathbb{C}^{n_\ell}$ support $S\mathbb{C}$-inequality. Then the set $K_1 \times \ldots \times K_\ell$ also supports $S\mathbb{C}$-inequality.*

Another consequence of the main theorem concerns the standard exponential measure λ_n on $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\mathrm{d}\lambda_n(x) = \frac{1}{2^n} e^{-|x|_1} \mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

where we denote $|(x_1, \ldots, x_n)|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. It turns out that certain subsets of $\mathbb{R}^n$ support the S-inequality for λ_n with *strips* as the optimal sets. To state the result a few definitions will be useful. We say that a set $K \subset (\mathbb{R}_+)^n$ is an *ideal* if along with any its point $x \in K$ it contains the cube $[0, x_1] \times \ldots \times [0, x_n]$. A set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called *unconditional* if $(\epsilon_1 x_1, \ldots, \epsilon_n x_n) \in K$ whenever $(x_1, \ldots, x_n) \in K$ and $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$. By an *unconditional ideal* K in $\mathbb{R}^n$ we mean the unconditional set K such that the set $K \cap (\mathbb{R}_+)^n$ is an ideal. For instance, any unconditional convex set is also an unconditional ideal.

Theorem 2. *For any closed unconditional ideal $K \subset \mathbb{R}^n$ and for any strip $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq p\}$, $p \geq 0$, we have*

$$\lambda_n(K) = \lambda_n(P) \quad \Longrightarrow \quad \forall t \geq 1 \ \lambda_n(tK) \geq \lambda_n(tP), \tag{7}$$

and, equivalently,

$$\lambda_n(K) = \lambda_n(P) \quad \Longrightarrow \quad \forall t \leq 1 \ \lambda_n(tK) \leq \lambda_n(tP). \tag{8}$$

Proof. The equivalence between (7) and (8) is straightforward. For instance, assume the latter does not hold. Then, there is $t_0 < 1$ such that $\lambda_n(t_0 K) > \lambda_n(t_0 P)$. We can find $s_0 < 1$ for which $\lambda_n(s_0 t_0 K) = \lambda_n(t_0 P)$. Using (7) we get a contradiction

$$\lambda_n(K) > \lambda_n(s_0 K) = \lambda_n\left(\frac{1}{t_0}(s_0 t_0 K)\right) \geq \lambda_n\left(\frac{1}{t_0}(t_0 P)\right) = \lambda_n(P) = \lambda_n(K).$$

Consider the mapping $F\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow (\mathbb{R}_+)^n$ given by the formula

$$F(z_1, \ldots, z_n) = (|z_1|, \ldots, |z_n|).$$

Observe that for an ideal $A \subset (\mathbb{R}_+)^n$, the set $F^{-1}(A)$ is Reinhardt complete and integrating using the polar coordinates we find that

$$\nu_n\left(F^{-1}(A)\right) = \int_A \prod_{i=1}^n r_i e^{-r_i^2/2} \mathrm{d}r_1 \ldots \mathrm{d}r_n.$$

Now, let us change the variables according to the mapping $G\colon (\mathbb{R}_+)^n \longrightarrow (\mathbb{R}_+)^n$,

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}(x_1^2, \ldots, x_n^2).$$

We obtain

$$\nu_n \left(F^{-1}(A)\right) = \int_{G(A)} e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \mathrm{d}x.$$

Since $G(A)$ is an ideal iff so is A, we infer that for any unconditional ideal $K \subset \mathbb{R}^n$

$$\lambda_n(K) = \nu_n(\widetilde{K}), \qquad \text{where} \qquad \widetilde{K} := G^{-1}F^{-1}\left(K \cap (\mathbb{R}_+)^n\right).$$

Moreover, for a strip $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_1| \leq p\}$, the set $\widetilde{P} \subset \mathbb{C}^n$ is a cylinder. Note also that $\widetilde{tK} = \sqrt{t}\widetilde{K}$. These observations combined with Theorem 1 yield the assertion. □

Following the method of [LO1, Corollary 3] we obtain the result concerning the comparison of moments.

Corollary 2. *Let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathbb{R}^n$ which is unconditional, i.e.*

$$\|(\epsilon_1 x_1, \ldots, \epsilon_n x_n)\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\|,$$

for any $x_j \in \mathbb{R}$ and $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$. Then for $p \geq q > 0$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \mathrm{d}\lambda_n(x)\right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \mathrm{d}\lambda_n(x)\right)^{1/q}, \tag{9}$$

where the constant

$$C_{p,q} = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mathrm{d}\lambda_1(x)\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^q \mathrm{d}\lambda_1(x)\right)^{1/q}} = \frac{(\Gamma(p+1))^{1/p}}{(\Gamma(q+1))^{1/q}}$$

is the best possible.

Proof. The proof hinges on the fact that a ball $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ \|x\| \leq t\}$ with respect to the norm $\|\cdot\|$ is a closed convex unconditional set, so that Theorem 2 can be applied. □

Acknowledgements

We would like to thank R. Adamczak for his remark regarding Lemma 1, which led to the present general formulation. We also thank B. Maurey for pointing out the change of variables used in the proof of Theorem 2.

The work was done while the second named author was participating in The Kupcinet-Getz International Summer Science School at the Weizmann Institute of Science in Rehovot, Israel.

References

[KS] S. Kwapień, J. Sawa, On some conjecture concerning Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets, *Studia Math.*, **105** (1993), no. 2, 173–187. MR1226627 (94g:60011)

[Lat] R. Latała, On some inequalities for Gaussian measures (English summary), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, 813–822, *Higher Ed. Press, Beijing*, 2002. MR1957087 (2004b:60055)

[LO1] R. Latała, K. Oleszkiewicz, Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets, *Ann. Probab.* **27** (1999), no. 4, 1922–1938. MR1742894 (2000k:60062)

[Led] M. Ledoux, The concentration of measure phenomenon. Mathematical Surveys and Monographs, 89. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2001. MR1849347 (2003k:28019)

[Sh] B. V. Shabat, Introduction to complex analysis. Part II. Functions of several variables. Translated from the third (1985) Russian edition by J. S. Joel. Translations of Mathematical Monographs, 110. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 1992. MR1192135 (93g:32001)

[Tko] T. Tkocz, Gaussian measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in $\mathbb{C}^n$, *Electron. Commun. Probab.* **16** (2011), 38–49. MR2763527 (Review)

Piotr Nayar
Institute of Mathematics, University of Warsaw,
Banacha 2,
02-097 Warszawa, Poland.
`nayar@mimuw.edu.pl`

Tomasz Tkocz
Institute of Mathematics, University of Warsaw,
Banacha 2,
02-097 Warszawa, Poland.
`tkocz@mimuw.edu.pl`

S-inequality for certain product measures

Piotr Nayar [*], Tomasz Tkocz [†]

Abstract

In the paper we prove the S-inequality for certain product probability measures and ideals in $\mathbb{R}^n$. As a result, for the Weibull and Gamma product distributions we derive concentration of measure type estimates as well as optimal comparison of moments.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 60G15; Secondary 60E15.
Key words and phrases. S-inequality, Dilation, Exponential distribution, Weibull distribution, Gamma distribution, Concentration of measure, Comparison of moments.

1 Introduction

The standard Gaussian measure γ_n on $\mathbb{R}^n$ has been thoroughly studied in a context of dilations of convex and symmetric sets (see [CFM, LO1]). For example, it is known that for such a set K in $\mathbb{R}^n$ we have the estimate

$$\gamma_n(tK) \geq \gamma_n(tP), \qquad t \geq 1,$$

where the set $P = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x_1| \leq p\}$ is a strip chosen so that $\gamma_n(P) = \gamma_n(K)$. This result is due to R. Latała and K. Oleszkiewicz [LO1] and it is called the S-inequality. A natural task is to find other examples of measures for which this type of bounds hold (cf. [Lat, Conjecture 5.1])? As a by-product of the investigations on the S-inequality in the complex case for the Gaussian measure initiated in [Tko], the authors have recently shown in [NT,

[*]Research partially supported by NCN Grant no. 2011/01/N/ST1/01839.
[†]Research partially supported by NCN Grant no. 2011/01/N/ST1/05960.

Theorem 2] that the exponential measure satisfies the S-inequality for ideals in $\mathbb{R}^n$ (for the definition of an ideal see Section 2). The aim of the present paper is to extend this result for the measures ν_p^n on $\mathbb{R}^n$ with densities

$$\mathrm{d}\nu_p^n(x) = (c_p/2)^n e^{-|x|_p^p}\mathrm{d}x, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

where we denote $|(x_1, \ldots, x_n)|_p = (\sum |x_i|^p)^{1/p}$ and $c_p = 1/\Gamma(1 + 1/p)$ is a normalization constant.

In Section 2 we present our main results. Section 3 is devoted to their proofs.

2 Results

We begin with a few definitions. For a Borel measure μ on $\mathbb{R}$ its product measure $\mu \otimes \ldots \otimes \mu = \mu^{\otimes n}$ is denoted by μ^n. We say that such a product measure μ^n on $\mathbb{R}^n$ *supports the S-inequality for a Borel set* $L \subset \mathbb{R}^n$ if for any its dilation $K = sL$, $s > 0$, and any strip $P = \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x_1| \leq p\}$ we have

$$\mu^n(K) = \mu^n(P) \quad \Longrightarrow \quad \mu^n(tK) \geq \mu^n(tP), \qquad \text{for } t \geq 1. \tag{2}$$

If we assume that the function $\Psi(x) = \mu([-x, x])$ is invertible for $x \geq 0$, we can write (2) as

$$\mu^n(tK) \geq \Psi\Big[t\Psi^{-1}\big(\mu(K)\big)\Big], \qquad \text{for } t \geq 1. \tag{3}$$

A set $K \subset \mathbb{R}^n$ is called an *ideal* if along with any its point $x \in K$ it contains the cube $[-|x_1|, |x_1|] \times \ldots \times [-|x_n|, |x_n|]$.

Now we are able to state the main result.

Theorem 1. *Let $p \in (0, 1]$. Then the measure ν_p^n defined in* (1) *supports the S-inequality for all ideals in $\mathbb{R}^n$.*

Thanks to simple coordinate-wise transport of measure argument we obtain the following corollary.

Corollary 1. *Let $\alpha > 0$ and $q \geq 1$. Define on $\mathbb{R}$ the symmetric Weibull measure ω_α with the parameter α and the symmetric Gamma measure λ_q with the parameter q by*

$$\mathrm{d}\omega_\alpha(x) = \frac{1}{2}\alpha|x|^{\alpha-1}e^{-|x|^\alpha}\mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\lambda_q(x) = \frac{1}{2\Gamma(q)}q|x|^{q-1}e^{-|x|}\mathrm{d}x. \tag{5}$$

Then the product measures ω_α^n and λ_q^n support the S-inequality for all ideals in $\mathbb{R}^n$.

The measures ω_α^n provide the examples of distributions supporting the S-inequality and having both log-concave and log-convex tails. Indeed, the tail function of the Weibull distribution is $\omega_p(\{|x| > t\}) = e^{-t^\alpha}$ which is log-convex for $\alpha \in (0,1)$ and log-concave for $\alpha \in (1,\infty)$.

The fact that a measure support the S-inequality for all ideals yields also the comparison of moments (see [NT, Corollary 2]). Here, the relevant result reads as follows.

Corollary 2. *Let $\|\cdot\|$ be a norm on $\mathbb{R}^n$ which is unconditional, i.e.*

$$\|(\epsilon_1 x_1, \ldots, \epsilon_n x_n)\| = \|(x_1, \ldots, x_n)\|$$

for any $x_j \in \mathbb{R}$ and $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$. Suppose a product Borel probability measure $\mu^n = \mu^{\otimes n}$ supports the S-inequality for all ideals in $\mathbb{R}^n$. Then for $p \geq q > 0$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p \mathrm{d}\mu^n(x)\right)^{1/p} \leq C_{p,q} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^q \mathrm{d}\mu^n(x)\right)^{1/q}, \tag{6}$$

where the constant

$$C_{p,q} = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}} |x|^q \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/q}}$$

is the best possible. In particular, we might take $\mu = \nu_p, \omega_\alpha, \lambda_q$, for $p \in (0,1]$, $\alpha > 0$, $q \geq 1$ (see (1), (4), (5)).

3 Proofs

3.1 Proof of Theorem 1

The theorem is trivial in one dimension. For higher dimensions the strategy of the proof is to reduce the problem to the two dimensional case where everything can be computed. This is done in the following proposition.

Proposition 1. *Let μ be a Borel probability measure on $\mathbb{R}$. Let $\mu^n = \mu^{\otimes n}$ be its product measure on $\mathbb{R}^n$. If μ^2 supports S-inequality for all ideals on $\mathbb{R}^2$ then for any $n \geq 2$ the measure μ^n supports S-inequality for all ideals on $\mathbb{R}^n$.*

Proof. We proceed by induction on n. Let us fix $n \geq 2$ and assume that μ^n supports S-inequality for all ideals in $\mathbb{R}^n$. We would like to show that μ^{n+1} supports S-inequality for all ideals in $\mathbb{R}^{n+1}$. To this end consider an ideal $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ and set $t \geq 1$. Thanks to Fubini's theorem

$$\mu^{n+1}(tK) = \int_{\mathbb{R}} \mu^n((tK)_x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu^n(tK_{x/t})\mathrm{d}\mu(x),$$

where $A_x = \{y \in \mathbb{R}^n,\ (y,x) \in A\}$ is a section of a set $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$ at a level $x \in \mathbb{R}$. For a set A let P_A denote a cylinder with a width w_A such that $\mu^n(A) = \mu^n(P_A)$. Since the section $K_{x/t}$ is an ideal in $\mathbb{R}^n$, by the induction hypothesis we obtain

$$\mu^{n+1}(tK) \geq \int_{\mathbb{R}} \mu^n\left(tP_{K_{x/t}}\right)\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} \mu\left([-tw_{K_{x/t}}, tw_{K_{x/t}}]\right)\mathrm{d}\mu(x).$$

For the simplicity denote the function $x \mapsto w_{K_x}$ by f. If we put $G_f \subset \mathbb{R}^2$ to be an ideal *generated* by f, i.e. $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |y| \leq f(x), x \in \mathbb{R}\}$, then its dilation tG_f is generated by the function $x \mapsto tf(x/t)$. Therefore

$$\int_{\mathbb{R}} \mu\left([-tw_{K_{x/t}}, tw_{K_{x/t}}]\right)\mathrm{d}\mu(x) = \mu^2(tG_f).$$

Yet, $\mu^2(G_f) = \mu^{n+1}(K)$, so taking the strip $P = [-w,w] \times \mathbb{R}^n$ with the same measure as K we see that the strip $[-w,w] \times \mathbb{R}$ has the same measure as G_f. Now the fact that μ^2 supports S-inequality implies $\mu^2(tG_f) \geq \mu^2(t([-w,w] \times \mathbb{R})) = \mu^{n+1}(tP)$. Thus we have shown that $\mu^{n+1}(tK) \geq \mu^{n+1}(tP)$, which completes the proof. $\square$

Thus it suffices to show the theorem when $n = 2$. Notice that any ideal $K \subset \mathbb{R}^2$ can be described by a nonincreasing function $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, namely

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq f(|x|)\right\}.$$

Fix such a function and take a strip $P = \{|x_1| \leq w\}$ such that $\nu_p^2(K) = \nu_p^2(P)$. To prove that ν_p^2 supports S-inequality for the ideal K it is enough to show that (see [NT, Proposition 1])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu_p^2(tK)\Big|_{t=1} \geq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu_p^2(tP)\Big|_{t=1}.$$

Let

$$M_p(K) = \int_K (|x|^p + |y|^p) \, \mathrm{d}\nu_p^2(x,y).$$

We have

$$\nu_p^2(tK) = \frac{c_p^2}{4} \int_{tK} e^{-(|x|^p+|y|^p)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{c_p^2}{4} \int_K t^2 e^{-t^p(|x|^p+|y|^p)} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

hence

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\nu_p^2(tK)\Big|_{t=1} = 2\nu_p^2(K) - pM_p(K).$$

Therefore we are to prove that $M_p(K) \le M_p(P)$. Define the functions $T : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, $S : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$

$$T(u) = c_p \int_u^\infty e^{-x^p} \, \mathrm{d}x, \qquad S(u) = c_p \int_0^u x^p e^{-x^p} \, \mathrm{d}x$$

and let μ_+ be the probability measure with density $c_p e^{-x^p}$ on $\mathbb{R}_+$. Note that

$$S(u) = c_p \frac{1}{p} \int_0^u x(-e^{-x^p})' \, \mathrm{d}x = -\frac{c_p}{p} u e^{-u^p} + \frac{1}{p}(1 - T(u)).$$

Thus $S(\infty) = 1/p$. We have

$$\begin{aligned}
M_p(K) &= c_p^2 \int_0^\infty \int_0^{f(x)} (x^p + y^p) e^{-x^p - y^p} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= c_p \int_0^\infty x^p e^{-x^p}(1 - T(f(x))) \, \mathrm{d}x + c_p \int_0^\infty S(f(x)) e^{-x^p} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p} - \int_0^\infty x^p T(f(x)) \, \mathrm{d}\mu_+(x) + \int_0^\infty S(f(x)) \, \mathrm{d}\mu_+(x).
\end{aligned}$$

Taking $f(x) = \infty$ for $x < w$ and $f(x) = 0$ for $x \ge w$ we obtain

$$\begin{aligned}
\int_P (|x|^p + |y|^p) \, \mathrm{d}\nu_p^2(x,y) &= \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} - S(w)\right) + \frac{1}{p}(1 - T(w)) \\
&= \frac{1}{p} + S(w) - \frac{1}{p} T(w).
\end{aligned}$$

Let $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\Phi = S \circ T^{-1}$ and $g : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$, $g = T \circ f$. We would like to prove

$$\int \Phi(g) \, \mathrm{d}\mu_+ - \int_0^\infty x^p g(x) \, \mathrm{d}\mu_+(x) \le S(w) - \frac{1}{p} T(w).$$

Observe that

$$\begin{aligned}\nu_p^2(K) &= c_p^2 \int_0^\infty \int_0^{f(x)} e^{-y^p - x^p} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty (1 - T(f(x))) \, \mathrm{d}\mu_+(x) = 1 - \int g \, \mathrm{d}\mu_+.\end{aligned}$$

Our assumption $\nu_p^2(K) = \nu_p^2(P)$ yields $\int g \, \mathrm{d}\mu_+ = T(w)$. Moreover,

$$S(w) = \Phi(T(w)) = \Phi\left(\int g \, \mathrm{d}\mu_+\right).$$

Our inequality can be therefore expressed in the following form

$$\int \Phi(g) \, \mathrm{d}\mu_+ - \Phi\left(\int g \, \mathrm{d}\mu_+\right) \le \int_0^\infty g(x)\left(x^p - \frac{1}{p}\right) \mathrm{d}\mu_+(x).$$

Note that $g : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ is nondecreasing. Summing up, to establish Theorem 1 it suffices to prove the following lemma.

Lemma 1. *Let $p \in (0,1]$ and let μ_+ be a measure with density $c_p e^{-x^p}$ supported on $\mathbb{R}_+$. Then for all nondecreasing functions $g : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ we have*

$$\int \Phi(g) \, d\mu_+ - \Phi\left(\int g \, d\mu_+\right) \le \int_0^\infty g(x)\left(x^p - \frac{1}{p}\right) d\mu_+(x). \tag{7}$$

In order to prove Lemma 1 we shall need a lemma due to R. Latała and K. Oleszkiewicz (see [LO2, Lemma 4] or [Wol, Theorem 1]). For convenience let us recall this result.

Lemma 2 (Latała–Oleszkiewicz)**.** *Let (Ω, ν) be a probability space and suppose that $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ has strictly positive second derivative and $1/\Phi''$ is concave. For a nonnegative function $g : \Omega \to [0,1]$ define a functional*

$$\Psi_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(g) \, d\nu - \Phi\left(\int_\Omega g \, d\nu\right). \tag{8}$$

Then Ψ_Φ is convex, namely

$$\Psi_\Phi(\lambda f + (1-\lambda) g) \le \lambda \Psi_\Phi(f) + (1-\lambda)\Psi_\Phi(g).$$

Now we show that our function $\Phi = S \circ T^{-1}$ satisfies the assumptions of Lemma 2.

Lemma 3. *The function* $\Phi = S \circ T^{-1} : [0,1] \to \mathbb{R}$ *satisfies* $\Phi'' > 0$ *and* $(1/\Phi'')'' \le 0$.

Proof. Let $T^{-1} = F$. Note that $F' = \frac{1}{T'(F)} = -\frac{1}{c_p} e^{F^p}$. We have

$$\Phi' = S'(F)F' = c_p F^p e^{-F^p} \left(-\frac{1}{c_p} e^{F^p} \right) = -F^p$$

and

$$\Phi'' = -pF^{p-1}F' = \frac{p}{c_p} F^{p-1} e^{F^p} > 0.$$

Moreover,

$$\begin{aligned} (1/\Phi'')' &= \frac{c_p}{p} \left(F^{1-p} e^{-F^p} \right)' \\ &= \frac{c_p}{p} \left((1-p)F^{-p} - pF^{1-p}F^{p-1} \right) e^{-F^p} F' = 1 - \frac{1-p}{p} F^{-p} \end{aligned}$$

and

$$(1/\Phi'')'' = (1-p)F^{-p-1}F' = -\frac{1-p}{c_p} F^{-p-1} e^{F^p} \le 0.$$

□

We are ready to give the proof of Lemma 1.

Proof of Lemma 1. Combining Lemmas 2 and 3 we see that the left hand side of (7) is a convex functional of g. The right hand side is linear in g and therefore we see that $\lambda g_1 + (1-\lambda) g_2$ satisfies (7) for every $\lambda \in [0,1]$ whenever g_1, g_2 satisfy (7). Due to an approximation argument it suffices to prove our inequality for nondecreasing right-continuous piecewise constant functions having finite number of values. Every such a function is a convex combination of a finite collection of functions of the form $g_a(x) = \mathbf{1}_{[a,\infty)}(x)$, where $a \in [0,\infty]$. Therefore it suffices to check (7) for the functions g_a. Since $\Phi(0) = S(\infty) = 1/p$ and $\Phi(1) = 0$ we have

$$\int \Phi(g_a) \, \mathrm{d}\mu_+ - \Phi \left(\int g_a \, \mathrm{d}\mu_+ \right) = \frac{1}{p} (1 - T(a)) - S(a)$$

and

$$\int_0^\infty g_a(x)\left(x^p - \frac{1}{p}\right) \mathrm{d}\mu_+(x) = \frac{1}{p} - S(a) - \frac{1}{p}T(a),$$

thus we have equality in (7). □

The proof of Theorem 1 is now complete.

3.2 Proof of Corollary 1

The idea behind Corollary 1 is that once a measure supports S-inequality for all ideals then so does its image under properly chosen transformation (cf. proof of [NT, Theorem 2]). Fix $p \in (0,1]$ and $\alpha > 0$. Consider the mapping $F\colon (\mathbb{R}_+)^n \longrightarrow (\mathbb{R}_+)^n$ given by the formula

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (x_1^\alpha, \ldots, x_n^\alpha).$$

We will use it to change the variables. So, take an ideal $K \subset \mathbb{R}^n$, the strip $P \subset \mathbb{R}^n$ such that $\nu_p^n(K) = \nu_p^n(P)$, and compute the measure of the dilation tK for some $t \geq 1$

$$\begin{aligned}\nu_p^n(tK) &= \left(\frac{c_p}{2}\right)^n \int_{tK} e^{-|x|_p^p} \mathrm{d}x = c_p^n \int_{tK\cap(\mathbb{R}_+)^n} e^{-\sum x_i^p} \mathrm{d}x \\ &= (\alpha c_p)^n \int_{F^{-1}(tK\cap(\mathbb{R}_+)^n)} \prod y_i^{\alpha-1} e^{-y_i^{\alpha p}} \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

In the first equality we have used the symmetries of ideals, while in the last one we have changed the variables putting $x = F(y)$. Introducing the measure $\mu_{p,\alpha}$ on $\mathbb{R}$ with density

$$\mathrm{d}\mu_{p,\alpha}(x) = \alpha c_p |x|^{\alpha-1} e^{-|x|^{\alpha p}} \mathrm{d}x,$$

we thus have seen that

$$\nu_p^n(tK) = \mu_{p,\alpha}(\widetilde{tK}),$$

where for an ideal A in $\mathbb{R}^n$ the set $\widetilde{A}$ denotes an ideal such that $\widetilde{A} \cap (\mathbb{R}_+)^n = F^{-1}(A \cap (\mathbb{R}_+)^n)$ (note it makes sense as F is monotone with respect to each coordinate). The point is that due to the homogeneity of F we have $\widetilde{tK} = t^{1/\alpha}\widetilde{K}$. Moreover, strips are mapped onto strips. Therefore

$$\mu_{p,\alpha}(t^{1/\alpha}\widetilde{K}) = \nu_p^n(tK) \geq \nu_p^n(tP) = \mu_{p,\alpha}(t^{1/\alpha}\widetilde{P}),$$

which means that $\mu_{p,\alpha}$ supports the S-inequality for the ideal $\widetilde{K}$. Since the ideal K is arbitrary, we conclude $\mu_{p,\alpha}$ supports the S-inequality for all ideals. To finish the proof notice that we recover Weibull and Gamma distribution setting respectively $p = 1$, $\alpha = 1/p$, i.e. $\omega_\alpha = \mu_{1,\alpha}$, $\lambda_q = \mu_{1/q,q}$.

Remark. We might use more general change of variables $y_i = V(x_i)$ for some increasing function $V\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $V(0) = 0$ and ask whether we will derive the S-inequality for other measures than $\mu_{p,\alpha}$ exploiting the above technique. Since we would like to have $\widetilde{tK} = u(t)\widetilde{K}$ for a monotone function u, we check it would imply that $V(st) = CV(s)V(t)$, and C is a constant. So V should be a power function yet this case has been studied in the above proof.

Acknowledgements

We would like to thank Prof. Krzysztof Oleszkiewicz for his useful comments.

References

[CFM] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, and B. Maurey, The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems, *J. Funct. Anal.* **214** (2004), no. 2, 410–427. MR2083308 (2005g:60064)

[Lat] R. Latała, On some inequalities for Gaussian measures, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, 813–822, *Higher Ed. Press, Beijing*, 2002. MR1957087 (2004b:60055)

[LO1] R. Latała, K. Oleszkiewicz, Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets, *Ann. Probab.* **27** (1999), no. 4, 1922–1938. MR1742894 (2000k:60062)

[LO2] R. Latała, K. Oleszkiewicz, Between Sobolev and Poincaré, *Geometric aspects of functional analysis*, 147–168, Lecture Notes in Math., 1745, Springer, Berlin, 2000.

[NT] P. Nayar, T. Tkocz, The unconditional case of the complex S-inequality, to appear in *Israel J. Math.*

[Tko] T. Tkocz, Gaussian measures of dilations of convex rotationally symmetric sets in $\mathbb{C}^n$, *Electron. Commun. Probab.* **16** (2011), 38–49. MR2763527 (2012a:60056)

[Wol] P. Wolff, Some remarks on functionals with the tensorization property, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **55** No. 3 (2007), 279–291.

Piotr Nayar
Institute of Mathematics, University of Warsaw,
Banacha 2,
02-097 Warszawa, Poland.
`nayar@mimuw.edu.pl`

Tomasz Tkocz
Institute of Mathematics, University of Warsaw,
Banacha 2,
02-097 Warszawa, Poland.
`tkocz@mimuw.edu.pl`

KHINCHINE TYPE INEQUALITIES WITH OPTIMAL CONSTANTS VIA ULTRA LOG-CONCAVITY

Piotr Nayar and Krzysztof Oleszkiewicz[1]

Abstract. We derive Khinchine type inequalities for even moments with optimal constants from the result of Walkup ([15]) which states that the class of log-concave sequences is closed under the binomial convolution. log-concavity and ultra log-concavity and Khinchine inequality and factorial moments

1. Introduction

Let $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ and let $r_1, r_2, \ldots, r_n$ be independent symmetric ± 1 random variables. The classical Khinchine inequality, [8], states that for any positive $p > q$ there exists a constant $C_{p,q}$ (which does not depend on n, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$) such that

$$(\mathbb{E}|S|^p)^{1/p} \leq C_{p,q} \cdot (\mathbb{E}|S|^q)^{1/q},$$

where $S = \sum_{i=1}^n \alpha_i r_i$.

There was a long pursuit for the optimal values of the constants $C_{p,q}$. The best values of $C_{p,2}$ for $p \geq 3$ were established by Whittle, [16] while the optimal $C_{2,1}$ constant was proved to be equal to $\sqrt{2}$ by Szarek, [14] (see also [12] for a short proof which extends to the normed linear space setting; this approach was later extended in [10] and [13]). Finally, Haagerup, [6], found best values of $C_{p,2}$ for all $p \in (2,3)$, and of $C_{2,q}$ for all $q \in (0,2)$, thus solving the part of the problem which is most important for applications since $ES^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$ is a quantity particularly easy to deal with. However, the general problem of finding optimal values of the constants $C_{p,q}$ is open and probably quite difficult. Its special case when both p and q are even numbers, and p is divisible by q, was settled by Czerwiński in his unpublished Master thesis, [4]. His method was based on some algebraic-combinatorial identities and does not seem to generalize to other situations. On the other hand, König and Kwapień, [9], and Baernstein and Culverhouse, [1], have obtained comparison of moments inequalities with best constants, similar in spirit to Haagerup's result but with the symmetric Bernoulli random variables replaced by some multidimensional rotationally invariant random vectors of special form (for example, uniformly distributed on spheres or balls). Again, as in Haagerup's approach, it was crucial for their main argument to work to have $p = 2$ or $q = 2$. In the present paper we establish the optimal values of $C_{p,q}$ for even $p > q > 0$ (the assumption of $q \Big| p$ no longer needed) both in the classical Khinchine inequality and its high-dimensional counterparts.

The main tool in our approach is Walkup's theorem (Theorem 1 of [15]) which states that the binomial convolution of two log-concave sequences is also log-concave:

Definition 1. *A sequence $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ of non-negative real numbers is called* log-concave *if $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ for $i \geq 1$ and the set $\{i \geq 0 \mid a_i > 0\}$ is an interval of integers.*

[1]Research of the second author partially supported by Polish MNiSzW Grant N N201 397437.

Theorem 1 (Walkup, [15]). *Let $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ and $(b_i)_{i=0}^{\infty}$ be two log-concave sequences of positive real numbers. Define*

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i}.$$

Then the sequence $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ is log-concave.

Using Liggett's terminology ([11]) we may also rephrase this to another statement: the class of ultra log-concave sequences is closed under standard convolution operation, where a sequence of positive numbers $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ is called *ultra log-concave* if and only if the sequence $(i! \cdot a_i)_{i=0}^{\infty}$ is log-concave.

There are at least three proofs of this theorem in the literature. Walkup's original proof is a bit difficult for non-experts whereas Liggett's proof, [11] is very elementary but quite long, as it covers a more general result than just Theorem 1. Recently, Gurvits, [5], published a short proof which, however, relies on the powerful Alexander-Fenchel inequalities for mixed volumes of convex bodies. For reader's convenience we provide yet another proof, more similar to Liggett's than to Walkup's, but shorter than Liggett's proof and very direct. We postpone it till Section 3.

2. Main results

Now we will present an application of Theorem 1. Let us denote the standard Euclidean norm on $\mathbb{R}^d$ by $\|\cdot\|$. In what follows we consider rotation invariance with respect to the same standard Euclidean structure. Furthermore, let G be a Gaussian random variable with the standard $\mathcal{N}(0,1)$ distribution while by $\mathbf{G}$ we denote an $\mathbb{R}^d$-valued Gaussian vector with the standard $\mathcal{N}(0, Id_d)$ distribution.

Lemma 1. *Let $\Pi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ be the projection to the first coordinate. For $p > 0$ assume that X is a rotation invariant $\mathbb{R}^d$-valued random vector with finite p-th moment. Then*

$$\frac{\mathbb{E}|\Pi X|^p}{\mathbb{E}|G|^p} = \frac{\mathbb{E}\|X\|^p}{\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^p}.$$

Proof. Let θ be a random vector uniformly distributed on the unit sphere of $(\mathbb{R}^d, \|\cdot\|)$ and independent of X. Since X is rotation invariant it has the same distribution as $\|X\|\cdot\theta$ and thus ΠX has the same distribution as $\|X\|\cdot\Pi\theta$. Therefore $\mathbb{E}|\Pi X|^p = \mathbb{E}\|X\|^p \cdot \mathbb{E}|\Pi\theta|^p$. The same argument used for $\mathbf{G}$ instead of X yields

$$\mathbb{E}|G|^p = \mathbb{E}|\Pi\mathbf{G}|^p = \mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^p \cdot \mathbb{E}|\Pi\theta|^p. \quad \square$$

Definition 2. *We will say that an $\mathbb{R}^d$-valued random vector X is* ultra sub-Gaussian *if either $X = 0$ a.s., or X is rotation invariant (i.e. symmetric if $d = 1$), has all moments finite, and the sequence $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ defined by $a_i = \mathbb{E}\|X\|^{2i}/\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^{2i}$ for $i \geq 1$, and $a_0 = 1$, is log-concave.*

Lemma 2. *If X and Y are independent ultra sub-Gaussian $\mathbb{R}^d$-valued random vectors then $X + Y$ is also ultra sub-Gaussian.*

Proof. If X or Y is equal to zero a.s. then the assertion is obvious. Let

$$a_i = \mathbb{E}\|X\|^{2i}/\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^{2i} = \mathbb{E}(\Pi X)^{2i}/\mathbb{E}G^{2i},$$
$$b_i = \mathbb{E}\|Y\|^{2i}/\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^{2i} = \mathbb{E}(\Pi Y)^{2i}/\mathbb{E}G^{2i},$$
$$c_i = \mathbb{E}\|X+Y\|^{2i}/\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^{2i} = \mathbb{E}(\Pi X + \Pi Y)^{2i}/\mathbb{E}G^{2i}$$

for $i \geq 1$, and let $a_0 = b_0 = c_0 = 1$. It remains to notice that

$$c_n = \frac{\mathbb{E}(\Pi X + \Pi Y)^{2n}}{\mathbb{E}G^{2n}} = \frac{1}{(2n-1)!!} \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{2i} \mathbb{E}(\Pi X)^{2i} \mathbb{E}(\Pi Y)^{2n-2i} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(2n)!!}{(2i)!!(2n-2i)!!} a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i},$$

where we have used the fact that ΠX and ΠY are independent and symmetric. The double factorial $N!!$ denotes the product of all positive integers which have the same parity as N and do not exceed N. We adopt the standard convention that $(-1)!! = 0!! = 1$. The assertion immediately follows from Theorem 1. $\square$

Lemma 3. *Assume that an $\mathbb{R}^d$-valued random vector X and a non-negative random variable R are independent, and that $R \cdot X$ has distribution $\mathcal{N}(0, Id_d)$. Then X is ultra sub-Gaussian.*

Proof. Clearly, X is rotation invariant. Note that for $p > 0$ we have

$$\mathbb{E}\|X\|^p \cdot \mathbb{E}R^p = \mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^p \in (0, \infty),$$

so that X has all moments finite and strictly positive. Let $a_i = \mathbb{E}\|X\|^{2i}/\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^{2i}$. By the Schwarz inequality for $i \geq 1$ we have

$$1/a_i^2 = (\mathbb{E}R^{2i})^2 \leq \mathbb{E}R^{2(i-1)} \cdot \mathbb{E}R^{2(i+1)} = 1/(a_{i-1}a_{i+1})$$

which proves that the sequence $(a_i)_{i=0}^{\infty}$ is log-concave. $\square$

Corollary 1. *Assume that X is a random vector uniformly distributed on*
i) the Euclidean sphere $r \cdot S^{d-1}$ (if $d = 1$ this is symmetric $\pm r$ distribution)
or
ii) the Euclidean ball $r \cdot B^d$
for some $r > 0$. Then X is ultra sub-Gaussian.

Proof. Distribution of any $\mathbb{R}^d$-valued random vector which is rotation invariant and unimodal (i.e. it has a rotation invariant density which is non-increasing as a function of distance to zero) can be expressed as an integral mean of measures uniformly distributed on balls with center in zero. Since the standard normal distribution $\mathcal{N}(0, Id_d)$ is rotation invariant and unimodal the corollary is established in the case ii).

For the reader's convenience, however, we provide an explicit description of this factorization. Let us denote the volume of the unit ball B^d by $v_d = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2}+1)$ and let $\varphi_d(s) = (2\pi)^{-d/2}e^{-s^2/2}$, i.e. $\varphi_d(\|x\|)$ is a density of $\mathcal{N}(0, Id_d)$. Furthermore, for $s > 0$ set $u_s(x) = v_d^{-1}s^{-d}1_{\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\leq s\}}$, so that u_s is a density of a random vector uniformly distributed on $s \cdot B^d$. Hence

$$\begin{aligned}\varphi_d(\|x\|) &= \int_{\|x\|}^{\infty} (-\varphi_d'(s))\, ds = \int_0^{\infty} 1_{\{x\in\mathbb{R}^d:\|x\|\leq s\}} s\varphi_d(s)\, ds \\ &= \int_0^{\infty} v_d s^{d+1}\varphi_d(s)u_s(x)\, ds.\end{aligned}$$

Thus the product of a random vector uniformly distributed on B^d with an independent positive random variable $\tilde{R}$ with density $v_d s^{d+1}\varphi_d(s)1_{(0,\infty)}(s)$ has distribution $\mathcal{N}N(0, Id_d)$. Setting $R = \tilde{R}/r$ ends the construction.

The case i) is simpler, it just suffices to note that

$$\mathbf{G} = \frac{\|\mathbf{G}\|}{r} \cdot r\frac{\mathbf{G}}{\|\mathbf{G}\|},$$

where the factors are independent, and the second of them is uniformly distributed on $r \cdot S^{d-1}$. $\square$

Corollary 2. *For $\alpha > 0$ let X be an $\mathbb{R}^d$-valued random vector with density*

$$g_X(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{\alpha}+1)}\pi^{-d/2}e^{-\|x\|^\alpha}.$$

If $\alpha > 2$ then X is ultra sub-Gaussian.

Proof. Let $\beta \in (0, \alpha)$ and let Y be an $\mathbb{R}^d$-valued random vector with density

$$g_Y(x) = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\Gamma(\frac{d}{\beta}+1)}\pi^{-d/2}e^{-\|x\|^\beta}.$$

It is a well-known fact that Y is a mixture of dilatations of X and thus (for $\beta = 2 < \alpha$) the assertion follows. For the sake of completeness we provide a detailed argument. Let Z be a standard positive β/α-stable random variable, so that $\mathbb{E}e^{-wZ} = e^{-w^{\beta/\alpha}}$ for every $w \geq 0$. Note that for $\mu > 0$ we have

$$\mathbb{E}Z^{-\mu} = \mathbb{E}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty e^{-tZ}t^{\mu-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}\mathbb{E}e^{-tZ}\,dt =$$

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-t^{\beta/\alpha}}\,dt = \frac{\alpha\Gamma(\alpha\mu/\beta)}{\beta\Gamma(\mu)}.$$

Let g_Z denote the density of Z and let W be a positive random variable independent of X with density

$$g_W(t) = \frac{\beta\Gamma(d/\alpha)}{\alpha\Gamma(d/\beta)}t^{-d/\alpha}g_Z(t).$$

We will prove that $W^{-1/\alpha}X$ has the same distribution as Y. Since both random vectors are rotation invariant it suffices to prove that $W^{-1/\alpha}\|X\|$ has the same distribution as $\|Y\|$ which immediately follows from the fact that the Laplace transforms of logarithms of these random variables are equal:

$$\mathbb{E}(W^{-1/\alpha}\|X\|)^\lambda = \mathbb{E}W^{-\lambda/\alpha}\cdot\mathbb{E}\|X\|^\lambda = \mathbb{E}\|Y\|^\lambda$$

for every $\lambda \geq 0$. Indeed, by a standard and direct computation we obtain $\mathbb{E}\|X\|^\lambda = \Gamma(\frac{\lambda+d}{\alpha})/\Gamma(d/\alpha)$ and $\mathbb{E}\|Y\|^\lambda = \Gamma(\frac{\lambda+d}{\beta})/\Gamma(d/\beta)$, whereas

$$\mathbb{E}W^{-\lambda/\alpha} = \frac{\beta\Gamma(d/\alpha)}{\alpha\Gamma(d/\beta)}\mathbb{E}Z^{-(\lambda+d)/\alpha} = \frac{\Gamma(d/\alpha)\Gamma(\frac{\lambda+d}{\beta})}{\Gamma(d/\beta)\Gamma(\frac{\lambda+d}{\alpha})}. \quad \square$$

Now we are in position to state and prove our main results:

Theorem 2. *Let n and d be positive integers and let $p > q \geq 2$ be even integers. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent $\mathbb{R}^d$-valued ultra sub-Gaussian random vectors. Then*

$$(\mathbb{E}\|S\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^q)^{1/q}}\cdot\mathbb{E}(\|S\|^q)^{1/q}$$

where $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Theorem 3. *Let n and d be positive integers and let $p > q \geq 2$ be even integers. Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent $\mathbb{R}^d$-valued random vectors and assume that each of them is either uniformly distributed on a Euclidean sphere or uniformly distributed on a Euclidean ball. Then*

$$(\mathbb{E}\|S\|^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^q)^{1/q}}\cdot\mathbb{E}(\|S\|^q)^{1/q}$$

where $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

The constant $(\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^p)^{1/p}/(\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^q)^{1/q} = \left(\Gamma(\frac{p+d}{2})\right)^{\frac{1}{p}} \left(\Gamma(\frac{q+d}{2})\right)^{-\frac{1}{q}} \left(\Gamma(\frac{d}{2})\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}$ is obviously optimal, as indicated by the example of i.i.d. centered X_i's with $n \to \infty$ (by the Central Limit Theorem). For $d = 1$ this is the classical Khinchine inequality.

Proof of Theorems 2 and 3. Without loss of generality we may and will assume that all the spheres and balls mentioned in the assumptions of Theorem 3 are centered at zero, i.e. X_i's are rotationally invariant. Indeed, it suffices to notice that $S - \mathbb{E}S = \sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)$ is rotation invariant and thus $\|S\|$ has the same distribution as $\|(S - \mathbb{E}S) + \|\mathbb{E}S\| \cdot \theta\|$, where θ is uniformly distributed on the unit sphere and independent of S. Thus by increasing number of variables by one we have reduced the problem to the case of rotationally invariant random vectors. Corollary 1 allows us to deduce Theorem 3 from Theorem 2.

Now it is enough to note that S is ultra log-concave by Lemma 2, so that the sequence $(a_k)_{k=0}^\infty$ given by $a_k = \mathbb{E}\|S\|^{2k}/\mathbb{E}\|\mathbf{G}\|^{2k}$ (with $a_0 = 1$) is log-concave. By multiplying inequalities $a_k^{2k} \geq a_{k-1}^k a_{k+1}^k$ for $k = 1, 2, \ldots, s$ we deduce that the sequence $(a_s^{1/s})_{s=1}^\infty$ is non-increasing. In particular, $a_{p/2}^{2/p} \leq a_{q/2}^{2/q}$ which is equivalent to the assertion of Theorem 2. □

3. Proof of Walkup's theorem

We assume that $\binom{n}{k} = 0$ for $k < 0$ and $k > n$, where $n \geq 0$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Let us also set $a_i = b_i = 0$ for $i < 0, i \in \mathbb{Z}$.

Lemma 4. *Let $n \geq 1$ and $k \leq n$ be non-negative integers. Then*

$$\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i} \geq \binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1} \tag{1}$$

for $0 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$.

Proof. For $i = 0$ the inequality (1) is obvious. For $i > 0$ it is equivalent to

$$(n-k+i)(k-i+1) \geq i(n+1-i).$$

Since $n \geq k$ and $i \leq k/2$ we have

$$(n-k+i)(k-i+1) - i(n+1-i) = (n-k)(k-2i+1) \geq 0. \qquad \square$$

Lemma 5. *For $n \geq 1$, $k \leq n$ and $0 \leq i \leq \lfloor k/2 \rfloor$ consider a sequence*

$$s_i = 2\binom{n}{i}\binom{n}{k-i} - \binom{n-1}{i}\binom{n+1}{k-i} - \binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i}.$$

Then the sequence $(\operatorname{sgn}(s_i))_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor}$ is non-decreasing.

Proof. After some simple reductions we get

$$\operatorname{sgn}(s_i) = \operatorname{sgn}\left[\frac{2n}{n+1} - \frac{n-i}{n-k+i+1} - \frac{n-k+i}{n+1-i}\right].$$

Let $m = n - k \geq 0$. We have

$$\frac{n-i}{n-k+i+1} + \frac{n-k+i}{n+1-i} = \frac{m+n+1}{m+i+1} - 1 + \frac{m+n+1}{n+1-i} - 1 = \frac{(m+n+1)(m+n+2)}{(m+i+1)(n+1-i)} - 2$$

therefore it suffices to notice that the function $i \mapsto (m+i+1)(n+1-i)$ is positive and non-decreasing on $[0, k/2]$. □

Lemma 6. *Let $(s_i)_{i=0}^n, (l_i)_{i=0}^n$ be two sequences of real numbers. Assume that $0 \leq l_1 \leq l_2 \ldots \leq l_n$, $\sum_{i=0}^n s_i = 0$ and the sequence $(\operatorname{sgn}(s_i))_{i=0}^n$ is non-decreasing. Then $\sum_{i=0}^n s_i l_i \geq 0$*

Proof. Let $i_0 = \min\{0 \le i \le n \mid s_i \ge 0\}$. Then
$$\sum_{i=0}^{n} s_i l_i = \sum_{i<i_0} s_i l_i + \sum_{i\ge i_0} s_i l_i \ge l_{i_0} \sum_{i<i_0} s_i + l_{i_0} \sum_{i\ge i_0} s_i = 0. \quad \square$$

Before we give a proof of Theorem 1, let us make some remarks. Let $(a_i)_{i=0}^{\infty}, (b_i)_{i=0}^{\infty}$ be log-concave. Fix $1 \le i \le j$. Observe that

$$a_i a_j \ge a_{i-1} a_{j+1}, \qquad \text{for } 0 \le i \le j. \tag{2}$$

Indeed, it suffices to consider the case when a_{i-1} and a_{j+1} are positive. Then $\{i-1, i, \ldots, j, j+1\} \subset \{k \ge 0 \mid a_k > 0\}$. By multiplying the inequalities $a_k^2 \ge a_{k-1} a_{k+1}$ for $k = i, \ldots, j$ and dividing by $a_i a_{i+1}^2 \cdot \ldots a_{j-1}^2 a_j > 0$ we arrive at (2). Note that we have used the fact that $\{k \ge 0 \mid a_k > 0\}$ is an interval of integers.

If $0 \le i \le j$ and $0 \le k \le l$ then from (2) we get
$$(a_i a_j - a_{i-1} a_{j+1})(b_k b_l - b_{k-1} b_{l+1}) \ge 0,$$
therefore

$$a_i a_j b_k b_l + a_{i-1} a_{j+1} b_{k-1} b_{l+1} \ge a_i a_j b_{k-1} b_{l+1} + a_{i-1} a_{j+1} b_k b_l, \qquad 0 \le i \le j, 0 \le k \le l. \tag{3}$$

For fixed k, n, $k \le n$ we will use the notation $L_i = a_i a_{k-i} b_{n-i} b_{n-k+i}$ and $R_i = a_i a_{k-i} b_{n-i+1} b_{n-k+i-1}$. Note that $L_i = L_{k-i}$ and $L_{-1} = 0$.

Proof of Theorem 1. It is easy to check that the set $\{i \ge 0 \mid c_i > 0\}$ is an interval of integers. Therefore, for $n \ge 1$ we have to prove the inequality
$$\sum_{\substack{i=0,\ldots,n \\ j=0,\ldots,n}} \binom{n}{i}\binom{n}{j} a_i a_j b_{n-i} b_{n-j} \ge \sum_{\substack{i=0,\ldots,n+1 \\ j=0,\ldots,n-1}} \binom{n+1}{i}\binom{n-1}{j} a_i a_j b_{n+1-i} b_{n-1-j}.$$

It suffices to prove that

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n}{k-i} a_i a_{k-i} b_{n-i} b_{n-k+i} \ge \sum_{i=0}^{k} \binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i} a_i a_{k-i} b_{n+1-i} b_{n-1-k+i} \tag{4}$$

for $k = 0, \ldots, 2n$. Inequality (4) for $k \ge n$ and a pair $((a_i)_{i=0}^{\infty}, (b_i)_{i=0}^{\infty})$ is equivalent to (4) for $\tilde{k} = 2n - k \le n$ and a pair $((b_i)_{i=0}^{\infty}, (a_i)_{i=0}^{\infty})$, so we can consider only $k \le n$.

For $i = 0, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor$ we have $i \le k-i$ and $n-k+i \le n-i$, therefore (3) yields
$$\begin{aligned}\binom{n+1}{k-i+1}&\binom{n-1}{i-1}(a_i a_{k-i} b_{n-i} b_{n-k+i} + a_{i-1} a_{k-i+1} b_{n-i+1} b_{n-k+i-1}) \\ &\ge \binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}(a_i a_{k-i} b_{n-i+1} b_{n-k+i-1} + a_{i-1} a_{k-i+1} b_{n-i} b_{n-k+i}).\end{aligned}$$

Moreover, using Lemma 4 and (2) we have
$$\begin{aligned}&\left[\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i} - \binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}\right] a_i a_{k-i} b_{n-i+1} b_{n-k+i-1} \\ &\qquad \le \left[\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i} - \binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}\right] a_i a_{k-i} b_{n-i} b_{n-k+i}.\end{aligned}$$

We can rewrite these inequalities in the form of

$$\binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}(L_i + L_{i-1}) \ge \binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}(R_i + R_{k-i+1}) \tag{5}$$

and
(6)
$$\left[\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i}-\binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}\right]L_i \geq \left[\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i}-\binom{n+1}{k-i+1}\binom{n-1}{i-1}\right]R_i$$
for $i = 0, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor$. Note that if k is odd then $L_{\lfloor k/2 \rfloor} = R_{\lfloor k/2 \rfloor+1}$. In order to estimate the RHS of (4) we add (5) and (6) for $i = 0, \ldots, \lfloor k/2 \rfloor$, and the equality
$$\binom{n-1}{\lfloor k/2 \rfloor}\binom{n+1}{k-\lfloor k/2 \rfloor}L_{\lfloor k/2 \rfloor} = \binom{n-1}{\lfloor k/2 \rfloor}\binom{n+1}{k-\lfloor k/2 \rfloor}R_{\lfloor k/2 \rfloor+1}$$
in the case of k odd. We arrive at
$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i}R_i \leq \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor-1}\left[\binom{n-1}{i}\binom{n+1}{k-i}+\binom{n+1}{i}\binom{n-1}{k-i}\right]L_i$$
$$+\,\theta_k\left[\binom{n-1}{\lfloor k/2 \rfloor}\binom{n+1}{k-\lfloor k/2 \rfloor}+\binom{n+1}{\lfloor k/2 \rfloor}\binom{n-1}{k-\lfloor k/2 \rfloor}\right]L_{\lfloor k/2 \rfloor},$$
where $\theta_k = 1/2$ if k is even and $\theta_k = 1$ when k is odd. Since the LHS of (4) is equal to
$$\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor-1} 2\binom{n}{i}\binom{n}{k-i}L_i \quad + \quad 2\theta_k\binom{n}{\lfloor k/2 \rfloor}\binom{n}{k-\lfloor k/2 \rfloor}L_{\lfloor k/2 \rfloor},$$
it suffices to prove the inequality
$$\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor-1} s_i L_i \quad + \quad \theta_k s_{\lfloor k/2 \rfloor} L_{\lfloor k/2 \rfloor} \quad \geq \quad 0.$$
We have
$$\sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor-1} s_i \quad + \quad \theta_k s_{\lfloor k/2 \rfloor} \; = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} s_i = \; 0$$
and $0 \leq L_0 \leq L_1 \leq \ldots \leq L_{\lfloor k/2 \rfloor}$. To finish the proof it suffices to use Lemma 5 and Lemma 6. $\square$

Remark 1. *Consider sequences* $(a_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots)$ *and* $(b_n)_{n=0}^{\infty} = (1, 1, 1, \ldots)$ *and note that the binomial convolution of this sequences is not log-concave. Therefore, without the second assumption in the Definition (1) it is impossible to prove Walkup's Theorem.*

4. Inequalities for factorial moments

For a positive integer n and any real number x we define the Pochhammer symbol $(x)_n = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-n+1)$, with $(x)_0 = 1$, and in a standard way we put $\binom{x}{n} = (x)_n/n!$. Let n be a non-negative integer and let X be a nonnegative random variable X with $\mathbb{E}|X|^n < \infty$. Then $\mathbb{E}(X)_n$ is called the nth factorial moment of X.

Definition 3. *Let* $\kappa \in \mathbb{R}$. *We will say that a nonnegative integer-valued random variable* X *is* κ-good *if the sequence* $\mathbb{E}e^{\kappa X}(X)_n$ *for* $n \geq 0$ *is log-concave (we assume that all the expectations are finite).*

Lemma 7. *If* X *and* Y *are independent* κ*-good random variables then* $X+Y$ *is also* κ*-good.*

Proof. Multiplying the obvious identity
$$e^{\kappa(X+Y)}\binom{X+Y}{k} = \sum_{i=0}^{k} e^{\kappa X}\binom{X}{i}\cdot e^{\kappa Y}\binom{Y}{k-i}$$

by $k!$ we arrive at

$$e^{\kappa(X+Y)}(X+Y)_k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} e^{\kappa X}(X)_i \cdot e^{\kappa Y}(Y)_{k-i}.$$

To finish the proof it suffices to take expectation of both sides of this equality, use Theorem 1 and independence of X and Y. $\square$

Now we can conclude with the following inequality:

Theorem 4. *Let $\kappa \in \mathbb{R}$ and let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be independent κ-good random variables (e.g. $\{0,1\}$ Bernoulli random variables) and let p be a positive integer. Then for $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ we have*

$$(\mathbb{E}e^{\kappa S}(S)_p)^2 \geq \mathbb{E}e^{\kappa S}(S)_{p-1} \cdot \mathbb{E}e^{\kappa S}(S)_{p+1}.$$

Since $\lim_{\kappa \to -\infty} e^{-\kappa p}\mathbb{E}e^{\kappa X}(X)_p = p! \cdot \mathbb{P}(X = p)$ the case of $\kappa \to -\infty$ refers to the ultra log-concavity of the sequence $\mathbb{P}(X = p)$ which was carefully investigated and successfully applied for example in a recent paper of Johnson, [7]. In fact, the log-concavity of the sequence $\mathbb{E}e^{\kappa S}(S)_p$ may be easily deduced from the ultra log-concavity of the sequence $\mathbb{P}(S = p)$, which in particular covers the case of Bernoulli sums. However, sometimes the sequence $\mathbb{E}(X)_p$ or, more generally, $\mathbb{E}(X)_p e^{\kappa X}$ may be log-concave even though the sequence $\mathbb{P}(X = p)$ is not ultra log-concave.

5. Tail to moments log-concavity trick

We finish with a discussion of a result of Borell ([3], formulated there in a slightly different and more general setting) which, in fact, can be traced back to the work of Barlow, Marshall, and Proschan ([2], p. 384) although there it appears with a slighlty restricting additional assumption. It is very standard by now and has many different proofs, some of them very simple, but still we think that it may be of some interest to provide yet another argument, especially because it is quite similar in spirit to the one we used in our proof of Walkup's theorem.

Theorem 5 ([2], [3])**.** *Assume that $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ is a log-concave function (i.e. $\log\varphi$ is concave). Then also $\Psi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ defined by*

$$\Psi(q) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty t^{q-1}\varphi(t)\,dt$$

is log-concave.

Proof. It suffices to prove that $\Psi(q)^2 \geq \Psi(q-\varepsilon)\Psi(q+\varepsilon)$ for $q > \varepsilon > 0$, which obviously follows from

$$\frac{1}{\Gamma(q)^2} \int_0^t s^{q-1}(t-s)^{q-1}\varphi(s)\varphi(t-s)\,ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\Gamma(q-\varepsilon)\Gamma(q+\varepsilon)} \int_0^t s^{q-\varepsilon-1}(t-s)^{q+\varepsilon-1}\varphi(s)\varphi(t-s)\,ds$$

by integration over $t > 0$ and using the Fubini theorem.

Since φ is log-concave the function $s \mapsto \varphi(s)\varphi(t-s)$ is non-decreasing on $(0, t/2]$ and non-increasing on $[t/2, t)$. Also, it is obviously symmetric with respect to $t/2$. Hence it suffices to prove that

$$\frac{1}{\Gamma(q)^2} \int_a^{t-a} s^{q-1}(t-s)^{q-1}\,ds \geq \frac{1}{\Gamma(q-\varepsilon)\Gamma(q+\varepsilon)} \int_a^{t-a} s^{q-\varepsilon-1}(t-s)^{q+\varepsilon-1}\,ds$$

for $0 < a < t/2$, which upon using the homogeneity reduces to proving that

$$f(\alpha) = B(q-\varepsilon, q+\varepsilon)\int_\alpha^{1-\alpha} w^{q-1}(1-w)^{q-1}dw - B(q,q)\int_\alpha^{1-\alpha} w^{q-\varepsilon-1}(1-w)^{q+\varepsilon-1}dw$$

is non-negative for $\alpha \in [0, 1/2]$. Obviously, $f(0) = f(1/2) = 0$. Now it is enough to notice that $f'(\alpha) > 0$ if and only if

$$\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^\varepsilon + \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^\varepsilon > 2B(q-\varepsilon, q+\varepsilon)/B(q,q). \tag{7}$$

The left hand side of (7) is decreasing in α, so that there exists some $\alpha_0 \in (0, 1/2)$ such that f is increasing on $[0, \alpha_0]$ and then decreasing on $[\alpha_0, 1/2]$. Thus $f \geq 0$ on $[0, 1/2]$ and the proof is finished. □

The following well known corollary follows (note that it reveals some intriguing similarity to a way in which we used Walkup's theorem to derive the Khinchine inequalities):

Corollary 3. *Assume that Z is a positive random variable with log-concave tails, i.e. the function $\varphi(t) = \mathbb{P}(Z > t)$ is log-concave on $(0, \infty)$. Let $\mathcal{N}E$ be an exponential random variable with parameter 1. Then*

$$(\mathbb{E}Z^p)^{1/p} \leq \frac{(\mathbb{E}\mathcal{N}E^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\mathcal{N}E^q)^{1/q}} \cdot (\mathbb{E}Z^q)^{1/q}$$

for all $p > q > 0$.

The constant $(\mathbb{E}\mathcal{N}E^p)^{1/p}/(\mathbb{E}\mathcal{N}E^q)^{1/q} = \Gamma(p+1)^{1/p}/\Gamma(q+1)^{1/q}$ obviously cannot be improved in general since $\mathcal{N}E$ has log-concave tails.

Proof. From Theorem 5 we infer that $\Psi : [0, \infty) \to (0, \infty)$ defined by

$$\Psi(q) = \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty t^{q-1}\varphi(t)\,dt = \frac{\mathbb{E}Z^q}{\mathbb{E}\mathcal{N}E^q}$$

for $q > 0$, and by $\Psi(0) = 1$, is log-concave (it is an easy exercise to check that Ψ is right-continuous at zero). Hence $g(q) = \log\Psi(q)$ is concave with $g(0) = 0$, so that $q \mapsto g(q)/q$ is a non-increasing function on $(0, \infty)$, which is equivalent to the assertion of Corollary 3. □

Acknowledgements. We are grateful to Matthieu Fradelizi and Olivier Guédon for pointing to us the article of Walkup, and for their help in tracing some other references.

References

[1] Baernstein, II, A., Culverhouse, R. C.: *Majorization of sequences, sharp vector Khinchin inequalities, and bisubharmonic functions*, Studia Math. 152, 231-248 (2002)

[2] Barlow, R. E., Marshall, A. W., Proschan, F.: *Properties of probability distributions with monotone hazard rate*, Ann. Math. Statist. 34, 375-389 (1963)

[3] Borell, C.: *Complements of Lyapunov's inequality*, Math. Ann. 205, 323-331 (1973)

[4] Czerwiński, W.: *Khinchine inequalities* (in Polish), University of Warsaw, Master Thesis, 2008

[5] Gurvits, L.: *A short proof, based on mixed volumes, of Liggett's theorem on the convolution of ultra-logconcave sequences*, Electron. J. Combin. 16, Note 5 (2009)

[6] Haagerup, U.: *The best constants in the Khintchine inequality*, Studia Math. 70, 231-283 (1982)

[7] Johnson, O.: *Log-concavity and the maximum entropy property of the Poisson distribution*, Stoch. Process. Appl. 117, 791-802 (2007)

[8] Khintchine, A.: *Über dyadische Brüche*, Math. Z. 18, 109-116 (1923)

[9] König, H., Kwapień, S.: *Best Khintchine type inequalities for sums of independent, rotationally invariant random vectors*, Positivity 5, 115-152 (2001)

[10] Kwapień, S., Latała, R., Oleszkiewicz, K.: *Comparison of moments of sums of independent random variables and differential inequalities*, J. Funct. Anal. 136, 258-268 (1996)

[11] Liggett, T. M.: *Ultra logconcave sequences and negative dependence*, J. Combin. Theory Ser. A 79, 315-325 (1997)

[12] Latała, R., Oleszkiewicz, K.: *On the best constant in the Khinchin-Kahane inequality*, Studia Math. 109, 101-104 (1994)

[13] Oleszkiewicz, K.: *Comparison of moments via Poincaré-type inequality*, in *Advances in stochastic inequalities (Atlanta, GA, 1997)*, Contemp. Math. 234, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 135-148 (1999)

[14] Szarek, S.: *On the best constant in the Khintchine inequality*, Studia Math. 58, 197-208 (1976)

[15] Walkup, D. W.: *Pólya sequences, binomial convolution and the union of random sets*, J. Appl. Probab. 13, 76-85 (1976)

[16] Whittle, P.: *Bounds for the moments of linear and quadratic forms in independent random variables*, Theory Probab. Appl. 5, 302-305 (1960)

Piotr Nayar, Institute of Mathematics, University of Warsaw, ul. Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland,,

E-mail address: nayar@mimuw.edu.pl

Krzysztof Oleszkiewicz, Institute of Mathematics, University of Warsaw, ul. Banacha 2, 02-097 Warsaw, Poland;, Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, ul. Śniadeckich 8, 00-956 Warsaw, Poland,

E-mail address: koles@mimuw.edu.pl

FKN Theorem on the biased cube

Piotr Nayar *

Abstract

In this note we consider Boolean functions defined on the discrete cube $\{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n$ equipped with a product probability measure $\mu^{\otimes n}$, where $\mu = \beta\delta_{-\gamma}+\alpha\delta_{\gamma^{-1}}$ and $\gamma = \sqrt{\alpha/\beta}$. We prove that if the spectrum of such a function is concentrated on the first two Fourier levels, then the function is close to a certain function of one variable.

Moreover, in the symmetric case $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ we prove that if a $[-1,1]$-valued function defined on the discrete cube is close to a certain affine function, then it is also close to a $[-1,1]$-valued affine function.

2010 Mathematics Subject Classification. Primary 42C10; Secondary 60E15.
Key words and phrases. Boolean functions, Walsh-Fourier expansion, FKN Theorem

1 Introduction and notation

Let $\alpha, \beta > 0$ with $\alpha + \beta = 1$ and $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$. We consider the discrete cube $\{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n$ equipped with the L_2 structure given by the product probability measure $\mu_n = \mu^{\otimes n}$, where $\mu = \beta\delta_{-\gamma} + \alpha\delta_{\gamma^{-1}}$ and $\gamma = \sqrt{\alpha/\beta}$. For $f, g : \{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n \to \mathbb{R}$ the standard scalar product $\langle f, g\rangle = \int fg \, \mathrm{d}\mu_n$ induces the norm $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. We also define the L_p norm, $\|f\|_p = \left(\int |f|^p \, \mathrm{d}\mu_n\right)^{1/p}$. Let $[n] = \{1, 2\ldots, n\}$. For $T \subseteq [n]$ and $x = (x_1, \ldots, x_n)$ let $w_T(x) = \prod_{i\in T} x_i$ and $w_\emptyset \equiv 1$. Note that we have $\int x_i \, \mathrm{d}\mu_n = 0$ and $\int x_i x_j \, \mathrm{d}\mu_n = \delta_{ij}$. It follows that $(w_T)_{T\subseteq[n]}$ is an orthonormal basis of $L_2(\{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n, \mu_n)$.

*Research partially supported by NCN Grant no. 2011/01/N/ST1/01839.

Therefore, every function $f : \{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n \to \mathbb{R}$ admits the unique expansion $f = \sum_{T\subset[n]} a_T w_T$. The functions w_T are sometimes called the Walsh-Fourier functions. If the function f is $\{-1, 1\}$-valued then it is called Boolean.

The Fourier analysis of Boolean functions plays an important role in many areas of research, including learning theory, social choice, complexity theory and random graphs, see e.g. [O1] and [O2]. One of the most important analytic tools in this theory is the so-called hypercontractive Bonami-Beckner-Gross inequality, see [Bo], [Be], [G1] and [G2] for a survey on this topic. This inequality has been used in the celebrated papers by J. Kahn, G. Kalai and N. Linial, [KKL], and E. Friedgut, [F]. It can be stated as follows. Take $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ and $q \in [1, 2]$. Then we have

$$\left\| \sum_{T\subseteq[n]} (q-1)^{|T|/2} a_T w_T \right\|_2 \le \left\| \sum_{T\subseteq[n]} a_T w_T \right\|_q \tag{1}$$

for every choice of $a_T \in \mathbb{R}$. This inequality has been generalized in [Ol1] to the non-symmetric case. Namely, the following inequality holds true,

$$\left\| \sum_{T\subseteq[n]} c_q(\alpha,\beta)^{|T|} a_T w_T \right\|_2 \le \left\| \sum_{T\subseteq[n]} a_T w_T \right\|_q , \tag{2}$$

where

$$c_q(\alpha,\beta) = \sqrt{\frac{\beta^{2-\frac{2}{q}} - \alpha^{2-\frac{2}{q}}}{\alpha\beta\left(\alpha^{-\frac{2}{q}} - \beta^{-\frac{2}{q}}\right)}}.$$

One can easily check that (1) is a special case of (2), namely $\sqrt{q-1} = \lim_{\varepsilon\to 0} c_q(\frac{1}{2}-\varepsilon, \frac{1}{2}+\varepsilon)$. Moreover, it is easy to see that $c_q(\alpha,\beta) \in [0, 1]$.

In [FKN] the authors proved the following theorem, which is now called the FKN Theorem. Suppose $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ and we have a Boolean function f whose Fourier spectrum is concentrated on the first two levels, say $\sum_{|T|>1} a_T^2 < \varepsilon^2$. Then f is $C\varepsilon$-close in the L_2 norm to the constant function or to one of the functions $\pm x_i$. The authors gave two proofs of this theorem. One of them contained an omission which was fixed by G. Kindler and S. Safra in their unpublished paper, [KS], see also [K]. In [JOW] the authors gave a proof of the following version of the FKN Theorem.

Theorem 1 ([JOW], Theorem 5.3 and Theorem 5.8)**.** *Let $f = \sum_T a_T w_T$ be the Walsh-Fourier expansion of a function $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ and let $\rho = \left(\sum_{|T|>1} a_T^2\right)^{1/2}$. Then there exists $B \subseteq [n]$ with $|B| \le 1$ such that $\sum_{|T|\le 1, T\neq B} a_T^2 \le C\rho^4 \ln(2/\rho)$ and $|a_B|^2 \ge 1 - \rho^2 - C\rho^4 \ln(2/\rho)$, where C is a universal constant.*

Moreover, in the non-symmetric case, $f : \{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n \to \{-1,1\}$, there exists $k \in [n]$ such that $\left\| f - (a_\emptyset + a_{\{k\}} w_{\{k\}}) \right\| \le 8\sqrt{\rho}$.

This theorem is sharp, up to the universal constant C. In the proof the inequality (1) has been used. However, in the non-symmetric case one can ask for a better bound involving bias parameter α. In this note we use inequality (2) to prove such an extension of the FKN Theorem. Namely, we have

Theorem 2. *Let $f = \sum_T a_T w_T$ be the Walsh-Fourier expansion of a function $f : \{-\gamma, \gamma^{-1}\}^n \to \{-1,1\}$ and let $\rho = \left(\sum_{|T|>1} a_T^2\right)^{1/2}$. Then there exists $k \in [n]$ and a universal constant $c_0 > 0$ such that for $\rho \ln(e/\rho) < c_0 \alpha$ we have*

$$\left\| f - (a_\emptyset + a_{\{k\}} w_{\{k\}}) \right\| \le 2\rho.$$

Our proof of Theorem 2, which is given in the Section 2, is a straightforward application of the ideas used in the proof of Theorem 5.3 in [JOW].

In the Section 3 we consider the case $\gamma = 1$ and we deal with the problem concerning $[-1,1]$-valued functions defined on the cube $\{-1,1\}^n$ with uniform product probability measure. A function $f : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ is called *affine* if $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$, where $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ and $x = (x_1, \ldots, x_n)$. We will denote the set of all affine functions by $\mathcal{A}$. Moreover, let $\mathcal{A}_{[-1,1]} \subset \mathcal{A}$ stands for the set of all affine $[-1,1]$-valued functions. Note that $f \in \mathcal{A}_{[-1,1]}$ if and only if $\sum_{i=0}^n |a_i| \le 1$. The function $f(x) = x_i$ will be denoted by r_i, $i = 1, \ldots, n$. Let us also notice that if f is $[-1,1]$-valued then $|a_T| = |\mathbb{E} w_T f| \le \mathbb{E}|w_T f| \le 1$.

In [JOW] the authors gave the following example. Take $g : \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ given by $g(x) = s^{-1} n^{-1/2} \sum_{i=1}^n x_i$. Note that $g \in \mathcal{A}$. Define $\phi(x) = -\mathbf{1}_{(-\infty,-1)}(x) + x\mathbf{1}_{[-1,1]}(x) + \mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ and take $f = \phi \circ g$. Clearly, f is $[-1,1]$-valued but may not be affine. The authors proved that $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}_{L^2}(f, \mathcal{A}) = O(e^{-s^2/4})$ and $\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}_{L^2}(f, \mathcal{A}_{[-1,1]}) = \Theta(s^{-1})$.

Here we prove that this is the worst case. Namely, we have the following theorem.

Theorem 3. *Let us take* $f : \{-1,1\}^n \to [-1,1]$ *and define* $\rho = \mathrm{dist}_{L^2}(f, \mathcal{A})$. *Then* $\mathrm{dist}_{L_2}(f, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \le \frac{18}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}$.

In this paper we use the $\{-1,1\}$-valued function $\mathrm{sgn}(x) = -\mathbb{I}_{(-\infty,0)}(x) + \mathbb{I}_{[0,\infty)}(x)$. By C we denote a universal constant that may vary from one line to another.

2 Proof of Theorem 2

Here we give a proof of Theorem 2.

Proof. Let k be given by Theorem 1. Let $h = f - (a_\emptyset + a_{\{k\}}x_k)$ and $\tilde{h} = f - \mathrm{sgn}(a_\emptyset + a_{\{k\}}x_k)$. Moreover, let $d = \|h\|$. Note that for every $u \in \mathbb{R}$ and $\varepsilon \in \{-1,1\}$ we have $|u - \mathrm{sgn}(u)| \le |u - \varepsilon|$. Therefore,

$$|\varepsilon - \mathrm{sgn}(u)| \le |\varepsilon - u| + |u - \mathrm{sgn}(u)| \le 2|u - \varepsilon|.$$

It follows that $|\tilde{h}| \le 2|h|$. Thus, using the fact that $\tilde{h}$ is $\{-2,0,2\}$-valued, we have

$$\mathbb{P}(\tilde{h} \ne 0) = \frac{1}{4}\|\tilde{h}\|^2 \le \|h\|^2 = d^2.$$

Let us consider the expansion $\tilde{h} = \sum_T \tilde{a}_T w_T$. Clearly, $\tilde{a}_T = a_T$ for $T \ne \emptyset, \{k\}$. Using (2) we obtain

$$\begin{aligned} 4d^{4/q} &\ge 4\mathbb{P}(\tilde{h} \ne 0)^{2/q} = \|\tilde{h}\|_q^2 = \left\|\sum_T \tilde{a}_T w_T\right\|_q^2 \ge \left\|\sum_T c_q(\alpha,\beta)^{|T|}\tilde{a}_T w_T\right\|_2^2 \\ &= \sum_T c_q(\alpha,\beta)^{2|T|}\tilde{a}_T^2 \ge c_q(\alpha,\beta)^2 \sum_{|T|\le 1} \tilde{a}_T^2, \end{aligned}$$

where $q \in [1,2]$. We arrive at

$$\sum_{|T|\le 1,\ T\ne\emptyset,\{k\}} \tilde{a}_T^2 \le \sum_{|T|\le 1} \tilde{a}_T^2 \le \frac{4d^{4/q}}{c_q(\alpha,\beta)^2} = 4d^{4/q}\alpha\beta \cdot \frac{\alpha^{-\frac{2}{q}} - \beta^{-\frac{2}{q}}}{\beta^{2-\frac{2}{q}} - \alpha^{2-\frac{2}{q}}}.$$

Let $p = \frac{\beta}{\alpha} \in (1,\infty)$ and $x = p^{2/q} \in [p, p^2]$. Then we have

$$4d^{4/q}\alpha\beta\frac{\alpha^{-\frac{2}{q}} - \beta^{-\frac{2}{q}}}{\beta^{2-\frac{2}{q}} - \alpha^{2-\frac{2}{q}}} = 4d^{\frac{2\ln x}{\ln p}}\alpha\beta\frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{\beta^2}{x} - \alpha^2} = 4d^{\frac{2\ln x}{\ln p}}p\frac{x-1}{p^2 - x} \le 4d^{\frac{2\ln x}{\ln p}}p\frac{p^2-1}{p^2-x}.$$

Without loss of generality, taking sufficiently small $c_0 > 0$, we can assume that $\rho \le \frac{1}{64 \cdot 9}$. From Theorem 1 we obtain $d \le 8\sqrt{\rho} \le \frac{1}{3} \le \frac{1}{e}$. Therefore, $\frac{1}{\ln(1/d)} \in [0,1]$ and we can take $x = p^{2-\frac{1}{\ln(1/d)}}$. Then

$$4d^{\frac{2\ln x}{\ln p}} p \frac{p^2-1}{p^2-x} = 4e^2 d^4 \frac{p^2-1}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{\ln p}{\ln(1/d)}}}.$$

For $c_0 \in (0,1)$ the condition $\rho \ln(e/\rho) \le c_0 \alpha$ clearly implies $\rho \le \alpha$. Since $d \le 8\sqrt{\rho} \le \min\{\frac{1}{3}, 8\sqrt{\alpha}\}$, then one can easily check that there exists a constant c_1 such that $0 \le \frac{\ln p}{\ln(1/d)} \le c_1$. There exists a constant c_2 such that for all $s \in [0, c_1]$ we have $\frac{1}{1-e^{-s}} \le \frac{c_2}{s}$. Thus,

$$4e^2 d^4 \frac{p^2-1}{p} \cdot \frac{1}{1-e^{-\frac{\ln p}{\ln(1/d)}}} \le 8c_0 e^2 d^4 \frac{p-1}{\ln p} \ln(1/d) \le C \frac{d^4 \ln(1/d)}{\alpha \ln(1/\alpha)}.$$

We arrive at

$$\sum_{|T|\le 1,\ T\neq\emptyset,\{k\}} \tilde{a}_T^2 \le C \frac{d^4 \ln(1/d)}{\alpha \ln(1/\alpha)} \le \frac{C}{\alpha} \cdot d^4 \ln(1/d).$$

We have

$$\begin{aligned} d^2 &= \left\| f - (a_\emptyset + a_{\{k\}} x_k) \right\|^2 = \|f\|^2 + \left\| a_\emptyset + a_{\{k\}} x_k \right\|^2 - 2 \left\langle f, a_\emptyset + a_{\{k\}} x_k \right\rangle \\ &= 1 + a_\emptyset^2 + a_{\{k\}}^2 - 2(a_\emptyset^2 + a_{\{k\}}^2) = 1 - a_\emptyset^2 + a_{\{k\}}^2. \end{aligned}$$

Thus, $a_\emptyset^2 + a_{\{k\}}^2 = 1 - d^2$ and we can write

$$\sum_{|T|\le 1} a_T^2 \le a_\emptyset^2 + a_{\{k\}}^2 + \frac{C}{\alpha} \cdot d^4 \ln(1/d) = 1 - d^2 + \frac{C}{\alpha} \cdot d^4 \ln(1/d).$$

It follows that

$$\rho^2 = \sum_{|T|>1} a_T^2 = 1 - \sum_{|T|\le 1} a_T^2 \ge d^2 - \frac{C}{\alpha} \cdot d^4 \ln(1/d).$$

Since from Theorem 1 we know that $\rho \le d \le 8\sqrt{\rho}$, we obtain

$$\frac{C}{\alpha} \cdot d^2 \ln(1/d) \le \frac{64C}{\alpha} \rho \ln(1/\rho) \le 64Cc_0 \le \frac{3}{4},$$

assuming that $\rho \ln(e/\rho) \leq c_0\alpha$ and $c_0 > 0$ is sufficiently small. Therefore,

$$\rho^2 \geq d^2 - \frac{C}{\alpha} \cdot d^4 \ln(1/d) \geq d^2 - \frac{3}{4}d^2 = \frac{1}{4}d^2.$$

It follows that $d \leq 2\rho$. □

Remark. The condition $\rho \ln(e/\rho) \leq c_0\alpha$ cannot be replaced by $\rho \leq \alpha$. Indeed, if we take $f : \{-\gamma, \gamma^{-1}\}^2 \to \{-1, 1\}$ given by

$$f(x_1, x_2) = 2(\beta - \sqrt{\beta\alpha}x_1)(\beta - \sqrt{\beta\alpha}x_2) - 1,$$

see the remark after the proof of Theorem 5.8 in [JOW], then we obtain $\rho = 2\alpha\beta$ and $d = 2\beta^{3/2}\alpha^{1/2}$. Thus $d = \sqrt{2\rho}\beta \geq \sqrt{\rho/2}$.

3 Proof of Theorem 3

We need the following lemma due to P. Hitczenko and S. Kwapień.

Lemma 1. *([HK], Theorem 1 and [Ol2], Theorem 1) Let $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$ and let us take $S : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$ given by $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Then for $t \geq 1$ we have*

$$\mathbb{P}\left(|S| \geq \|S\|\right) > \frac{1}{10} \tag{3}$$

and

$$\|S\|_t \geq \frac{1}{4}\sqrt{t}\Big(\sum_{i>t} a_i^2\Big)^{1/2}. \tag{4}$$

We give a proof of Theorem 3.

Proof of Theorem 3 . Step 1. If $f = \sum_T a_T w_T$ then $\mathrm{dist}_{L_2}(f, \mathcal{A}) = \|f - S\|$, where $S = \sum_{|T|\leq 1} a_T w_T$. For every $u \in [-1, 1]$ we have $|x - u| \geq |x - \phi(x)|$ for all $x \in \mathbb{R}$. Taking $x = S$ and $u = f$ we obtain $\mathbb{E}(|S| - 1)_+^2 = \|S - \phi(S)\|^2 \leq \|S - f\|^2 \leq \rho^2$. For all $g \in \mathcal{A}_{[-1,1]}$ we have

$$\|g - f\| \leq \|g - S\| + \|S - f\| \leq \|g - S\| + \rho.$$

Therefore,

$$\mathrm{dist}_{L_2}(f, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \leq \mathrm{dist}_{L_2}(S, \mathcal{A}_{[-1,1]}) + \rho. \tag{5}$$

It suffices to prove that $\mathbb{E}(|S|-1)_+^2 \leq \rho^2$ implies an appropriate bound on $\mathrm{dist}_{L_2}(S, \mathcal{A}_{[-1,1]})$, whenever $S = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i r_i$, where $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

Step 2. Suppose that for all $n \geq 1$ we can prove that $\mathbb{E}(|S|-1)_+^2 \leq \rho^2$ implies $\mathrm{dist}_{L_2}(S, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \leq M$ for some $M > 0$, assuming that $a_0 = 0$. Then we can deal with the case $a_0 \neq 0$ as follows. Let us take $\tilde{S} : \{-1,1\} \times \{-1,1\}^n \to \mathbb{R}$ given by $\tilde{S} = a_0 x_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i$. Clearly, $\mathbb{E}(|\tilde{S}|-1)_+^2 = \mathbb{E}(|S|-1)_+^2 \leq \rho^2$. We can find a $[-1,1]$-valued function $\tilde{S}_0 = b_0 x_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i$ such that $\left\| \tilde{S} - \tilde{S}_0 \right\| \leq M$. Take $S_0 = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i$. Now it suffices to observe that the function S_0 is $[-1,1]$-valued and to notice that $\left\| \tilde{S} - \tilde{S}_0 \right\| = \|S - S_0\|$.

Step 3. Take $S = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Without loss of generality we can assume that $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq 0$. Let $\tau = \max\{t \geq 1 : \sum_{i=1}^t a_i \leq 1\}$. Clearly, $\tau \geq 1$. If f is already in $\mathcal{A}_{[-1,1]}$ then there is nothing to prove. Therefore we can assume that $\tau < n$. We can also assume that $\rho \leq 1/3$, since otherwise we have

$$\mathrm{dist}_{L_2}(f, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \leq \mathrm{dist}_{L_2}(f, 0) = \|f\| \leq 1 \leq \frac{18}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}.$$

Let $A = \{|S| \geq \frac{1}{2} \|S\|_t\}$. For $t \geq 1$ we have

$$\mathbb{E}|S|^t = \mathbb{E}|S|^t \mathbf{1}_A + \mathbb{E}|S|^t \mathbf{1}_{A^c} \leq \sqrt{\mathbb{E}|S|^{2t}} \sqrt{\mathbb{P}(A)} + \frac{1}{2^t} \mathbb{E}|S|^t.$$

Since by the Khinchine inequality we have $(\mathbb{E}|S|^{2t})^{1/2t} \leq \sqrt{\frac{2t-1}{t-1}} (\mathbb{E}|S|^t)^{1/t}$, we obtain

$$\mathbb{P}\left(|S| \geq \frac{1}{2} \|S\|_t\right) \geq \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^2 \frac{(\mathbb{E}|S|^t)^2}{\mathbb{E}|S|^{2t}} \geq \frac{1}{4} \frac{(\mathbb{E}|S|^t)^2}{\mathbb{E}|S|^{2t}} \geq \frac{1}{4} \left(\frac{t-1}{2t-1}\right)^t.$$

By the Chebyshev inequality we obtain

$$\mathbb{P}(|S| \geq 1 + \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(|S|-1)_+^2}{\varepsilon^2} \leq \frac{\rho^2}{\varepsilon^2}, \tag{6}$$

for all $\varepsilon > 0$. Let $t \geq 1$ and assume that $\|S\|_t > 2$. Take $\varepsilon = \frac{1}{2} \|S\|_t - 1 > 0$. We obtain

$$\frac{1}{4} \left(\frac{t-1}{2t-1}\right)^t \leq \mathbb{P}\left(|S| \geq \frac{1}{2} \|S\|_t\right) \leq \frac{\rho^2}{\left(\frac{1}{2} \|S\|_t - 1\right)^2}.$$

It follows that

$$\|S\|_t \le 2 + 4\rho \left(\frac{2t-1}{t-1}\right)^{t/2}$$

which is also true in the case $\|S\|_t \le 2$. From inequality (4) we obtain

$$\frac{1}{4}\sqrt{t}\Big(\sum_{i>t} a_i^2\Big)^{1/2} \le \|S\|_t \le 2 + 4\rho \left(\frac{2t-1}{t-1}\right)^{t/2}. \tag{7}$$

We consider the case $\tau \ge \frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho) \ge 1$. Let us now take $t = \frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho) \ge 2 > 1$ and define $S_1 = \sum_{i\le \frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho)} a_i r_i$. Notice that $\sum_{i\le \frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho)} a_i \le \sum_{i\le\tau} a_i \le 1$. Thus, $S_1 \in \mathcal{A}_{[-1,1]}$. Moreover, since $t \ge 2$, we have $\rho\left(\frac{2t-1}{t-1}\right)^{t/2} \le \rho 3^{t/2} = 1$ and therefore by (7) we have

$$\mathrm{dist}_{L_2}(S, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \le \|S - S_1\| = \left(\sum_{i>\frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho)} a_i^2\right)^{1/2} \le \frac{24}{\sqrt{\frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho)}}.$$

In this case (5) yields

$$\mathrm{dist}_{L_2}(f, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \le \frac{24}{\sqrt{\frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho)}} + \rho \le \frac{18}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}.$$

Step 4. We are to deal with the case $\tau < \frac{2}{\ln 3}\ln(1/\rho)$. Let us take $S_2 = \sum_{i\ge\tau+2} a_i r_i$. From inequality (3) we have

$$\mathbb{P}\left(|S| \ge \sum_{i\le\tau+1} a_i + \|S_2\|\right) \ge \frac{1}{2^{\tau+1}}\mathbb{P}\left(|S_2| \ge \|S_2\|\right) \ge \frac{1}{2^{\tau+1}}\cdot\frac{1}{10} \ge \frac{1}{20}\rho^{\frac{2\ln 2}{\ln 3}}.$$

Note that $\sum_{i\le\tau+1} a_i > 1$. Therefore, from inequality (6) we obtain

$$\mathbb{P}\left(|S| \ge \sum_{i\le\tau+1} a_i + \|S_2\|\right) \le \frac{\rho^2}{\left(\sum_{i\le\tau+1} a_i + \|S_2\| - 1\right)^2}.$$

It follows that

$$\sum_{i\le\tau+1} a_i + \|S_2\| - 1 \le \sqrt{20}\rho^{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}.$$

Take $S_1 = \sum_{i=1}^{\tau} a_i r_i + (1-(a_1+\ldots+a_\tau))r_{\tau+1}$. Clearly, $S_1 \in \mathcal{A}_{[-1,1]}$. Moreover,

$$\begin{aligned}\|S - S_1\| &= \left((1-(a_1+\ldots+a_\tau)-a_{\tau+1})^2 + \|S_2\|^2\right)^{1/2} \\ &\le |a_1+\ldots+a_\tau+a_{\tau+1}-1| + \|S_2\| \le \sqrt{20}\rho^{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}}.\end{aligned}$$

Therefore, from (5) we have

$$\mathrm{dist}_{L_2}(f, \mathcal{A}_{[-1,1]}) \le \sqrt{20}\rho^{1-\frac{\ln 2}{\ln 3}} + \rho \le \frac{18}{\sqrt{\ln(1/\rho)}}.$$

□

Remark. If we perform our calculation with $\ln(2.03)$ instead of $\ln 3$ we will obtain the theorem with a constant $14,5$ instead of 18.

Acknowledgements

I would like to thank Prof. Krzysztof Oleszkiewicz for his useful comments.

References

[Be] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Annals of Math. 102 (1975), 159–182.

[Bo] A. Bonami, *Etude des coefficients Fourier des fonctiones de $L_p(G)$*, Ann. Inst. Fourier 20 (1970), 335–402.

[F] E. Friedgut, *Boolean functions with low average sensitivity depend on few coordinates*, Combinatorica 18 (1998), 27–35.

[FKN] E. Friedgut, G. Kalai and A. Naor, *Boolean functions whose Fourier transform is concentrated on the first two levels*, Advances in Applied Mathematics 29, no. 3 (2002), 427–437.

[G1] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. 97 (1975) 1061–1083.

[G2] L. Gross, *Hypercontractivity, logarithmic sobolev inequalities and applications: a survey of surveys*, preprint (2005).

[HK] P. Hitczenko, S. Kwapień, *On the Rademacher series*, Probability in Banach spaces, 9 (Sandjberg, 1993), 31–36, Progr. Probab., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1994.

[JOW] J. Jendrej, K. Oleszkiewicz, J.O. Wojtaszczyk, *On some extensions of the FKN theorem*, preprint.

[KKL] J. Kahn, G. Kalai and N. Linial , *The influence of variables on Boolean functions*, in Proc. 29-th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 68–80, 1988.

[K] G. Kindler, *Property Testing, PCP and Juntas*, PhD thesis, Tel Aviv University, 2002.

[KS] G. Kindler and S. Safra, *Noise-resistant boolean functions are juntas*, preprint, 2002.

[O1] R. O'Donnell, *Analysis of Boolean Functions*, http://analysisofbooleanfunctions.org, 2013.

[O2] R. O'Donnell, *Some topics in analysis of boolean functions*, Proceedings of the 40th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, pp. 569–578 (2008).

[Ol1] K. Oleszkiewicz, *On a nonsymmetric version of the Khinchine-Kahane inequality*, Proceedings of the Stochastic Inequalities Conference (Barcelona 2002), Progress in Probab. 56, 157–168, Birkhäuser Verlag Basel, 2003.

[Ol2] Oleszkiewicz, K., *On the Stein property of Rademacher sequences*, Prob. and Math. Stat., Vol. 16, Fasc. 1 (1996), 127–130

Piotr Nayar*, `nayar@mimuw.edu.pl`

*Institute of Mathematics, University of Warsaw,
Banacha 2,
02-097 Warszawa,
Poland.

Warwick, 9.12.2013 r.

OŚWIADCZENIE

Ja, niżej podpisany, Tomasz Tkocz, doktorant Instytutu Matematyki Uniwersytetu Warwick, oświadczam, że jestem współautorem następujących artykułów naukowych

P. Nayar, T. Tkocz, *S-inequality for certain product measures,* ukaże się w Math. Nachr.
P. Nayar, T. Tkocz, *The unconditional case of the complex S-inequality,* Israel J. Math. **197** (2013), no. 1, 99–106.

Oświadczam ponadto, że artykuły te powstały jako rezultat moich wspólnych badań prowadzonych z panem Piotrem Nayarem. Ponieważ pracowaliśmy wspólnie, oceniłbym wkład każdego z współautorów do każdego z wyżej wymienionych artykułów na jednakowy.

Z poważaniem,

Tomasz Tkocz

Tomasz Tkocz

Warszawa, 9 grudnia 2013

Krzysztof Oleszkiewicz
Instytut Matematyki
Uniwersytetu Warszawskiego
Ul. Banacha 2
02-097 Warszawa

Oświadczenie o współautorstwie

Oświadczam, że opublikowany w *Positivity* 16 (2012), 359–371 artykuł naukowy *Khinchine type inequalities with optimal constants via ultra log-concavity* napisałem we współpracy z mgr. Piotrem Nayarem, a udział każdego ze współautorów oceniam na 50%. Jak to zwykle bywa w przypadku prac matematycznych powstających w wyniku długotrwałej wymiany pomysłów, dokładne rozdzielenie wkładu autorów jest trudne do przeprowadzenia. Pan Nayar samodzielnie przeprowadził nowy dowód twierdzenia Walkupa (rozdział trzeci; moja rola ograniczała się do paru drobnych sugestii), natomiast mój udział przeważa w pobocznych wątkach pracy – rozdziałach czwartym i piątym.

Krzysztof Oleszkiewicz