

Uniwersytet Warszawski  
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Michał Zakrzewski

Asymptotyka rozwiązań  
meromorficznych równań  
różniczkowych i funkcji  
tworzących dla wielokrotnych  
wartości zeta

Praca doktorska

Praca wykonana pod kierunkiem  
**Prof. Henryka Żołądka**  
Instytut Matematyki MIMUW

Luty 2011

**Oświadczenie autora rozprawy:**

oświadczam, że niniejsza rozprawa została napisana przeze mnie samodzielnie.

Data

Podpis autora pracy

**Oświadczenie kierującego pracą :**

niniejsza rozprawa jest gotowa do oceny przez recenzentów.

Data

Podpis kierującego pracą

## Streszczenie

W niniejszej rozprawie zajmujemy się badaniem meromorficznych równań różniczkowych zwyczajnych. Większość z nich wywodzi się z teorii tzw. liczb okresowych, a w szczególności wielokrotnych wartości zeta. W Rozdziałach 1 i 2 badamy szczegółowe własności równań różniczkowych związanych z funkcjami tworzącymi  $f_2$  i  $f_3$  odpowiadającymi ciągom  $\zeta(\{2\}^n)$  oraz  $\zeta(\{3\}^n)$ , uzyskując nowe dowody znanych w analitycznej teorii liczb tożsamości, jak też nowe rezultaty dotyczące (hipotetycznego) równania różniczkowego związanego z  $\zeta(3)$ , gdzie  $\zeta$  oznacza funkcję zeta Riemanna. W ostatnim Rozdziale 3 dowodzimy nowych, ogólnych twierdzeń, służących analizie asymptotycznej meromorficznych równań różniczkowych zwyczajnych.

## Słowa kluczowe

Równania Hipergeometryczne, Meromorficzne równania różniczkowe zwyczajne, wielokrotne wartości zeta, metoda WKB, aproksymacja fazy stacjonarnej, zjawisko Stokes'a

## Klasyfikacja tematyczna

33C05, 33C10, 33C15, 11M32, 34E20, 34M03, 34M60



# Spis treści

<b>Wprowadzenie</b> . . . . .	5
<b>1. Analiza asymptotyczna równania dla funkcji tworzącej związanej z <math>\zeta(2)</math></b> . . . . .	13
1.1. Rozwiązania w otoczeniu punktów osobliwych . . . . .	17
1.2. Rozwinięcia asymptotyczne przybliżeń typu Bessela . . . . .	19
1.3. Rozwinięcia WKB . . . . .	23
1.4. Operatory Stokes'a . . . . .	35
<b>2. Analiza asymptotyczna równania dla funkcji tworzącej związanej z <math>\zeta(3)</math></b> . . . . .	41
2.1. Rozwiązania w otoczeniu punktów osobliwych . . . . .	43
2.2. Rozwinięcia asymptotyczne hipergeometrycznych funkcji konfluentnych typu Bessela i aproksymacja fazy stacjonarnej . . . . .	46
2.3. Rozwinięcia WKB . . . . .	49
2.4. Operatory Stokes'a . . . . .	57
2.5. Uwagi końcowe . . . . .	66
2.6. Inne równanie hipergeometryczne związane z $\zeta(3)$ . . . . .	67
<b>3. Uogólnienie Metody WKB</b> . . . . .	71
3.1. Wstęp . . . . .	71
3.2. Uogólnione twierdzenie o normalizacji oraz uogólnione operatory Stokes'a . . . . .	75
3.3. Równoważność z funkcjami konfluentnymi . . . . .	81
3.4. Uogólnione rozwinięcia WKB . . . . .	84
3.5. Przykład zastosowania do równań na funkcje tworzące dla $\zeta(2)$ i $\zeta(3)$ oraz innych równań związanych z wielokrotnymi wartościami zeta . . . . .	91
<b>A. Aproksymacja fazy stacjonarnej</b> . . . . .	93
<b>B. Relacja ortogonalności, splot i wzory całkowe</b> . . . . .	97
B.1. Reprezentacje całkowe funkcji hipergeometrycznych . . . . .	97
B.2. Wielokrotne polilogarytmy i uogólnione całki Drinfeld-Kontsevicha . . . . .	99

<b>C. Zachowanie rozwiązań meromorficznych równań liniowych w otoczeniu punktów osobliwych i funkcje konfluentne</b>	101
C.1. Równanie Bessela: przypadek niezdegenerowany	103
C.2. Równanie Bessela: przypadek zdegenerowany	104
C.3. Metoda Frobeniusa	105
C.4. Konfluentne funkcje hipergeometryczne	106
C.5. Monodromia	106
<b>Bibliografia</b>	109

# Wprowadzenie

Tematem tej pracy jest badanie własności asymptotycznych równań różniczkowych zwyczajnych<sup>1</sup>

$$\sum_{i=0}^n a_i(t, \lambda) \frac{d^i x(t, \lambda)}{dt^i} = 0, \quad (2)$$

gdzie  $x \in \mathbb{C}$  a  $\lambda \in \mathbb{C}$  jest parametrem, oraz układów równań różniczkowych zwyczajnych

$$\dot{x}(t) = A(t, \lambda) x(t), \quad (3)$$

gdzie  $x \in \mathbb{C}$ ,  $A \in \text{end}(\mathbb{C}^n)$  i  $\dot{x}$  oznacza pochodną wektora  $x$  ze względu na 'czas', który zazwyczaj będzie oznaczany przez  $t$ . Ogólnie  $t \in S$ , gdzie  $S$  jest pewną powierzchnią Riemanna. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że Wyrazy macierzy  $A$  są funkcjami meromorficznymi  $A \in \text{end}(\mathbb{C}^n) \otimes \mathbb{C}(t)$ . Dodatkowo zakładać będziemy, że zarówno szukane funkcje, jak i współczynniki mogą zależeć od parametru  $\lambda$ . Typowym przykładem będzie równanie

$$(T + \lambda^{|p|})x = 0, \quad (4)$$

gdzie  $p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$ ,  $|p| = p_1 + \dots + p_k$  oraz

$$T := (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{p_1-1} \dots (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{p_k-1}, \quad (5)$$

przy odpowiednich założeniach na  $0 < p_j \in \mathbb{Z}$ , przy czym  $p_k \geq 2$ . Jest ono związane z funkcją tworzącą dla tzw. **wielokrotnych wartości zeta**, które definiujemy jako sumy szeregów postaci

$$\zeta(p_1, \dots, p_k) := \sum_{0 < n_1 < \dots < n_k} n_1^{-p_1} \dots n_k^{-p_k}. \quad (6)$$

W pracy [100] jest podana konstrukcja funkcji tworzącej dla MZV, która jest rozwiązaniem zagadnienia własnego (4) operatora (5). Dokładniej: jeśli  $x(t, \lambda)$  jest rozwiązaniem (unormowanym i holomorficznym w zerze) równania  $(T + \lambda^{|p|})x = 0$ , to wówczas

$$x(1, \lambda) = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \zeta(\{p_1, \dots, p_k\}^m) \lambda^{|p|m}, \quad (7)$$

<sup>1</sup>W dalszym ciągu, dla uproszczenia notacji, będziemy często pisać

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i x}{dt^i}, \quad \text{lub} \quad \sum_{i=0}^n a_i \partial_t^i x, \quad \text{zamiast} \quad \sum_{i=0}^n a_i(t, \lambda) \frac{d^i x(t, \lambda)}{dt^i} \quad (1)$$

oraz  $\dot{x} = Ax$ , zamiast  $\dot{x}(t) = A(t, \lambda) x(t)$ .

gdzie (powtórzenie ciągu  $\{p_1, \dots, p_k\}$  występuje  $m$  razy)

$$\zeta(\{p_1, \dots, p_k\}^m) := \zeta(p_1, \dots, p_k, \dots, p_1, \dots, p_k). \quad (8)$$

Liczbę  $|p|$  we wzorze (6) będziemy nazywać **wagą** wielokrotnej wartości zeta (lub ogólniej polilogarytmu), zaś mianem jej (jego) **głębokości** określimy wartość  $k$ .

Naturalną sytuacją, w której pojawiają się inne, podobne równania Picarda-Fuchsa jest badanie własności cykli algebraicznych w rozmaitościach zespolonych. Jest to związane z tzw. algebrą okresów, których szczególnym przypadkiem są właśnie wielokrotne wartości zeta. Więcej szczegółów na ten temat można znaleźć w [62] oraz w pracach Goncharova [41] i [41] oraz Goncharova i Manina [44], gdzie szczególny nacisk położony jest na rozwijanie odpowiedniej teorii motywicznej.

Warto wspomnieć, że wielokrotne wartości zeta pojawiły się po raz pierwszy w pracach Leonarda Eulera. Uzyskał on min. wzory na wartości funkcji  $\zeta$  w dodatnich liczbach parzystych, wykorzystując rozwinięcie funkcji sinus w szereg potęgowy oraz, z drugiej strony, przedstawienie jej w postaci iloczynu. Zachodzi

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \zeta(\{2\}^n) \lambda^{2n} \\ &= \prod \left( 1 - \frac{\lambda^2}{n^2} \right) \\ &= \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(\pi \lambda)^{2n}}{(2n+1)!}, \end{aligned} \quad (9)$$

skąd, po porównaniu współczynników, otrzymujemy

$$\zeta(\{2\}^n) = \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!}. \quad (10)$$



Odnotujmy jeszcze inne funkcje tworzące:

$$f_4(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda^4}{n^4}\right) \quad (11)$$

$$= \prod \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \prod \left(1 + \frac{\lambda^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \cdot \frac{\sinh \pi \lambda}{\pi \lambda}$$

$$f_6(\lambda) = \prod \left(1 - \frac{\lambda^6}{n^6}\right) \quad (12)$$

$$= \prod \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \prod \left(1 - \frac{\mu \lambda^2}{n^2}\right) \prod \left(1 - \frac{\mu^2 \lambda^2}{n^2}\right)$$

$$= \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \cdot \frac{\sin \mu \pi \lambda}{\pi \lambda} \cdot \frac{\sin \mu^2 \pi \lambda}{\pi \lambda}$$

gdzie  $\mu = (-1+i\sqrt{3})/2$ . Z rozwinięcia (9) można też obliczyć  $\zeta(2m)$ . Mamy, na przykład,

$$\begin{aligned} \zeta(2)^2 &= \sum_{k,n>0} n^{-2} k^{-2} \\ &= \left( \sum_{k>n} + \sum_{k=n} + \sum_{k<n} \right) n^{-2} k^{-2} \\ &= \zeta(4) + 2\zeta(2, 2). \end{aligned} \quad (13)$$

Podobne relacje, które wynikają ze wzoru włączeń i wyłączeń z kombinatoryki, można podać także dla wielu innych wielokrotnych wartości zeta.

W korespondencji z Goldbachem, Euler podał także inne, nietrywialne<sup>2</sup> relacje na wielokrotne wartości zeta z dwoma argumentami.

Należy dodać, że wielokrotne wartości zeta są obecnie przedmiotem intensywnego badania, przy użyciu bardzo różnorodnych metod. Warto tu przytoczyć min. prace [15], [16], [25], [25], [41], [42], [48], [77], [62], [80], [94], [99] oraz [50].

---

<sup>2</sup>Euler uzyskał na przykład wzory

$$\zeta(1, m) = m \zeta(m+1) - \sum_{j=1}^{m-2} \zeta(j+1) \zeta(m-j), \quad (14)$$

gdzie  $m > 2$  oraz

$$\zeta(1, 2) = \zeta(3), \quad (15)$$

które zostały uogólnione dopiero w drugiej połowie XX wieku.

Jednym ze sposobów badania asymptotyki (układów) równań różniczkowych zwyczajnych jest tzw. **metoda WKB** (lub **aproksymacja WKB**). Polega ona na przedstawieniu hipotetycznego rozwiązania równania (1).

$$x(t) = \lambda^\alpha e^{\lambda S(t)} \sum_{k \geq 0} \psi_k(t) \lambda^{-k}. \quad (16)$$

Podstawienie tego wyrażenia do równania, prowadzi do algebraicznego różniczkowego równania na 'działanie'  $S$  oraz rodziny 'prostych' równań na współczynniki  $\psi_n$ . Zilustrujemy metodę WKB następującym przykładem.

**Przykład 0.0.1** *Rozważmy zagadnienie własne  $(T + \lambda^{|p|})\phi = 0$  dla operatora (5), gdzie  $|p| = p_1 + \dots + p_k$ . Stosując metodę WKB, otrzymujemy następujące równanie na działanie:*

$$t^{|p|-k}(1-t)^k [\dot{S}(t)]^{|p|} + 1 = 0. \quad (17)$$

*Nie zwracając uwagi na dalsze wyrazy asymptotyki i przechodząc z  $t$  do granicy  $t = 1$  otrzymujemy wzór*

$$\begin{aligned} S(1) &= \mu^j \int_0^1 (1-u)^{1/k-1} u^{(k-1)/k-1} du \\ &= B\left(\frac{1}{k}, \frac{k-1}{k}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

gdzie  $B(x, y)$  oznacza funkcję Beta Eulera. Ze wzoru

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(y+x)} \quad (19)$$

oraz z formuły Eulera na odbicie dla funkcji  $\Gamma$ , otrzymujemy

$$S(1) = \frac{\pi}{\sin \pi/k}. \quad (20)$$

Stąd wynika, że funkcje generujące MZV powinny mieć w pierwszym przybliżeniu postać

$$\sum_m \mu^m \exp\left(\mu^m \frac{\pi x}{\sin \pi/k}\right), \quad (21)$$

gdzie  $\mu$  oznacza tu pierwiastek pierwotny z jednoścni stopnia  $|p|$ .

Pozwala to na przykład uzasadnić fakt, iż we wzorze Broadhursta<sup>3</sup> mamy do czynienia z parametrem przeskalowanym o  $\sqrt{2}$  w stosunku do regularnego rozwiązania równania na MZV związanej z operatorem  $(1-t)\partial_t(t\partial_t)^3$ .

---

<sup>3</sup>Patrz (2.36)

Warto odnotować w tym miejscu, że w przypadku równania na funkcję tworzącą ciąg  $\zeta(\{2\}^n)$ , metody asymptotyczne pozwalają uzyskać wzory  $\zeta(\{2\}^n) = \pi^{2n}/(2k+1)!$ . W przypadku  $\zeta(\{p\}^n)$ , gdzie  $p > 2$  jest liczbą pierwszą, podobne wzory nie są znane i nie wiadomo nawet, czy liczby te są przestępne, ale wzór (21) zachodzi dla każdego  $k$ . Co więcej,

$$\frac{\pi}{\sin \pi/k} \in \overline{\mathbb{Q}}(\pi), \quad (22)$$

skąd widać, że w pierwszym asymptotycznym przybliżeniu, funkcja tworząca ciągów wielokrotnych wartości zeta ma zawsze współczynniki<sup>4</sup> postaci  $\pi^n \times q$ , gdzie  $q$  jest liczbą algebraiczną.

W analizie rodziny równań (5) istotną rolę może odgrywać tzw. **zjawisko Stokes'a**, które w przypadku funkcji tworzących związanych z  $\zeta(2)$  oraz  $\zeta(3)$  zostało opisane w pracach [95] i [97].

Poniżej omówimy ważne pojęcia występujące w dalszych częściach tej pracy.

Klasyczna funkcja hipergeometryczna Eulera-Gaussa ma postać

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix} \middle| t \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u)_n (v)_n t^n}{(w)_n n!}, \quad (23)$$

gdzie  $(x)_n := x(x+1)\dots(x+n-1)$  oznacza **symbol Pochhammera**. Zazwyczaj rozpatruje się ją osobno od przypadku ogólnego (24), z racji przysługujących jej dodatkowych, silnych własności, z których być może najważniejszą jest to, że każde równanie Picarda-Fuchsa drugiego rzędu na  $\mathbb{C}P^1$ , które posiada co najwyżej trzy punkty osobliwe, daje się sprowadzić do równania, które spełnia (23).

W dalszym ciągu, oprócz klasycznej funkcji hipergeometrycznej Eulera-Gaussa (23), ważną będzie także ogólnia funkcja hipergeometryczna

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} u_1, \dots, u_p \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \middle| t \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1)_n (u_2)_n \dots (u_p)_n t^n}{(v_1)_n (v_2)_n \dots (v_q)_n n!}. \quad (24)$$

Powyższa funkcja spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\begin{aligned} & [t(D_t + u_1)(D_t + u_2)\dots(D_t + u_p) \\ & - D_t(D_t + v_1 - 1)\dots(D_t + v_q - 1)] x = 0, \end{aligned}$$

gdzie  $D := t\partial_t$  oznacza operator Eulera.

---

<sup>4</sup>Zachodzi nawet silniejszy fakt: współczynniki funkcji tworzącej są elementami  $\dot{\mathbb{Q}}(\pi) \subset \overline{\mathbb{Q}}(\pi)$ , gdzie  $\dot{\mathbb{Q}}$  oznacza granicę odwrotną systemu ciał cyklotomicznych.

Ważną rolę przy badaniu własności wielokrotnych wartości zeta oraz związanych z nimi równań różniczkowych odgrywają **wielokrotne polilogarytmy** oraz ich reprezentacje całkowe za pomocą tzw. **całki Drinfeldda-Kontsevicha** (patrz [94])

$$I_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_{|p|}}(t) := \int_T \frac{dt_1}{A_{\epsilon_1}(t_1)} \cdots \frac{dt_k}{A_{\epsilon_{|p|}}(t_{|p|})}, \quad (25)$$

gdzie  $T = \{(t_1, t_2, \dots, t_{|p|}) \in \mathbb{R}^k : 0 < t_1 < \dots < t_{|p|} < t < 1\}$ ,  $\epsilon_i \in \{0, 1\}$  oraz  $A_0(s) = s$  i  $A_1(s) = 1 - s$ . Ponadto zakładamy, że  $\epsilon_1 = 1$  i  $\epsilon_{|p|} = 0$ .

Dla ciągów  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)$  postaci  $(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ , gdzie każdy z podciągów  $(1, 0, \dots, 0)$  ma  $p_j$  elementów, dostajemy

$$\begin{aligned} I_{\{1,0,\dots,0\},\{1,0,\dots,0\},\dots,\{1,0,\dots,0\}}(t) &=: \text{Li}_{p_1,\dots,p_r}(t) \\ &= \sum_{0 < n_1 < \dots < n_r} \frac{t^{n_r}}{n_1^{p_1} n_2^{p_2} \dots n_r^{p_r}}, \end{aligned} \quad (26)$$

czyli wielokrotny polilogarytm. Dla  $t = 1$  jest on równy  $\zeta(p_1, \dots, p_r)$  (patrz (6)).

Nieco szerzej omawiamy całki podobne do (25) w Paragrafie B.2, w Dodatku B.

Omówimy teraz pokrótce zawartość poszczególnych rozdziałów i podstawowe wyniki tej rozprawy.

W Rozdziale 1 rozważamy równanie

$$(1-t)\partial_t t \partial_t x + \lambda^2 x = 0, \quad (27)$$

związane z funkcją tworzącą  $f_2$ , ciągu  $\zeta(\{2\}^n)$ . Okazuje się, że funkcja hipergeometryczna

$$\begin{aligned} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (-\lambda)_n}{(n!)^2} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{Li}_{\{2\}^n}(t) \lambda^{2n} \end{aligned} \quad (28)$$

jest funkcją tworzącą dla polilogarytmów  $\text{Li}_{\{2\}^n}(t)$ , a jej wartość w  $t = 1$  jest funkcją tworzącą  $f_2(\lambda)$  dla wielokrotnych wartości zeta  $\zeta(\{2\}^n)$ .

W celu zbadania własności tego równania, stosujemy metody asymptotyczne, jak tzw. aproksymacja WKB, operatory Stokes'a oraz aproksymacja fazy stacjonarnej. Z wykorzystaniem tego aparatu, podajemy dwa

nowe dowody słynnego wzoru Eulera  $\zeta(2) = \pi^2/6$ . Patrz Wniosek 1.3.1 i Twierdzenie 1.4.1.

W Rozdziale 2 zajmujemy się analizą równania

$$(1-t)\partial_t(t\partial_t)^2x + \lambda^3x = 0, \quad (29)$$

którego analityczne w otoczeniu zera rozwiązanie  $x_1(t, \lambda) = 1 + O(t)$ , ewaluowane w punkcie  $t = 1$ , wyznacza funkcję tworzącą  $f_3$  ciągu  $\zeta(\{3\}^n)$ , analogicznie jak w rozdziale 1. Stosujemy następnie aproksymację WKB do badania bazy rozwiązań asymptotycznych powyższego równania hipergeometrycznego, dla  $\lambda \sim \infty$  i obliczamy odpowiednie operatory Stokes'a. W kolejnym etapie dowodzi się, iż funkcja  $f_3$ , przy  $\lambda \sim \infty$ , także wyraża się za pomocą odpowiednich rozwinięć WKB, podlegających zjawisku Stokes'a. Stąd otrzymujemy, że  $f_3$  spełnia liniowe równanie różniczkowe szóstego rzędu, z nieregularnym punktem osobliwym w nieskończoności (patrz Twierdzenie 2.4.1).

Rozdział 3 poświęcony jest badaniu układów liniowych równań różniczkowych

$$\dot{x}(t) = A(t, \lambda)x(t), \quad (30)$$

gdzie  $x \in \mathbb{C}^n$ , dla zespolonego parametru  $\lambda \sim \infty$ . Dowodzimy istnienia analogonów operatorów Stokes'a dla odpowiednich rozwinięć WKB (Twierdzenie 3.2.1). Te macierze w ogólności mogą zależeć od parametru, jednak przy pewnych naturalnych założeniach, można wykazać, że mają one wyrazy stałe (Twierdzenie 3.3.1). W dalszej części dowodzimy uogólnienie twierdzenia Hukuhary-Levelta-Turritina o formalnej redukcji układu w otoczeniu nieregularnego punktu osobliwego do postaci normalnej, z rozgałęzioną reparametryzacją zmiennej czasowej (Twierdzenie 3.4.1). W ostatniej części rozdziału, otrzymane wyniki są zastosowane do pewnych równań hipergeometrycznych, związanych z funkcjami tworzącymi wielokrotne wartości zeta.

W końcu rozprawy umieściliśmy trzy dodatki. Dodatek A poświęcony jest aproksymacji fazy stacjonarnej. W Dodatku B podajemy wzory całkowe dla funkcji hipergeometrycznych oraz omawiamy całki Drinfelda-Kontsevicha. Dodatek C zawiera podstawowe fakty o teorii meromorficznych równań różniczkowych zwyczajnych.

## Podziękowania

Autor chciałby wyrazić serdeczne podziękowania dla Profesora Henryka Żołądka, bez pomocy którego ta rozprawa nigdy by nie powstała.



# Rozdział 1

## Analiza asymptotyczna równania dla funkcji tworzącej związanej z $\zeta(2)$

W tym rozdziale będziemy badać równanie

$$(1-t)\partial_t t\partial_t x + \lambda^2 x = 0, \quad (1.1)$$

ze szczególną uwagą skierowaną na sytuację, kiedy  $\lambda \sim \infty$ . Podobnie jak inne równania na funkcje tworzące wielokrotne wartości zeta, może być ono zinterpretowane jako zagadnienie własne  $(T + \lambda^2 I)x = 0$  dla operatora  $T = (1-t)\partial_t t\partial_t$ . Jest to szczególny przypadek (klasycznego) równania hipergeometrycznego Gaussa i jego jedyne rozwiązanie, holomorphyczne w otoczeniu zera, ma postać

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda)_n (-\lambda)_n}{(n!)^2} t^n = 1 - \lambda^2 t + \frac{\lambda^2 t}{4} - \dots \quad (1.2)$$

Zachowanie asymptotyczne rozwiązań równania (1.1) zostało szczegółowo zbadane w pracy [95]. W tym rozdziale przedstawimy główne zawarte w niej wyniki.

Główną motywacją dla opisanego asymptotyki rozwiązań (1.1) była obserwacja [100], iż dobrze znany wzór

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| 1\right) = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda}, \quad (1.3)$$

może zostać wyprowadzony bezpośrednio z równania (1.1). Dowód tego faktu opiera się na analizie (1.1) dla  $\lambda \sim \infty$ , przy użyciu rowinięć quasiklasycznych WKB (patrz Rozdział 3) oraz tzw. operatorów Stokes'a.

Równanie (1.1) stanowi (w pewnym sensie) model testujący dla teorii rozwiniętej w dalszych częściach tej rozprawy, a w szczególności w Rozdziale 3.

Przestrzeń rozwiązań równania (1.1) jest dwuwymiarowa, z bazą  $\{x_1, x_2\}$ , która w otoczeniu zera posiada przedstawienie

$$x_1(t, \lambda) = 1 + O(t) \quad (1.4)$$

$$x_2(t, \lambda) = \log(\lambda^2 t) \cdot x_1(t) + w_2(t, \lambda), \quad (1.5)$$

gdzie  $w_2$  jest kielkiem funkcji analitycznej w zerze. W otoczeniu  $s = 1 - t$  baza rozwiązań przyjmuje postać

$$x'_1(s, \lambda) = \lambda^2 s + O(s^2) \quad (1.6)$$

$$x'_2(s, \lambda) = \log(\lambda^2 s) \cdot x'_1(s) + w'_2(s, \lambda), \quad (1.7)$$

gdzie  $w'_2 = -1 + O(s)$  jest kielkiem funkcji analitycznej w zerze, której współczynniki (względem  $s$ ) można efektywnie wyznaczyć. W otoczeniu jedynki zachodzi relacja

$$x_1(t, \lambda) = a_1(x)x'_1(1 - t, \lambda) + a_2(x)x'_2(1 - t, \lambda), \quad (1.8)$$

i otrzymujemy wzór (współczynniki przy wyrazie wolnym  $w_2$  jest równy  $-1$ )

$$x_1(1, \lambda) = -a_2(\lambda). \quad (1.9)$$

Metoda WKB pozwala znaleźć (formalne) rozwiązania asymptotyczne

$$g_0^-(t, \lambda) = (-i\lambda)^{-1/2} e^{-i\lambda S(t)} \sum_{j \geq 0} \psi_j(t) \cdot (-i\lambda)^{-j}, \quad (1.10)$$

$$g_0^+(t, \lambda) = (i\lambda)^{-1/2} e^{i\lambda S(t)} \sum_{j \geq 0} \psi_j(t) \cdot (i\lambda)^{-j}, \quad (1.11)$$

gdzie działanie  $S$  dane jest wzorem<sup>1</sup>

$$S(t) = \int_0^t u^{-1/2} (1 - u)^{-1/2} du, \quad (1.12)$$

a współczynniki  $\psi_j$  spełniają równania różniczkowe liniowe pierwszego rzędu, którym więcej miejsca poświęcimy w dalszych paragrafach tego rozdziału.

Jesli w równaniu (1.1) dokonamy podstawienia  $\tau = \lambda^2 t$ , to otrzymamy wiodący składnik postaci

$$\partial_\tau \tau \partial_\tau y + y = 0, \quad (1.13)$$

ze względu na  $\lambda \rightarrow \infty$  i przy ograniczonym  $\tau$ . Rozwiązania równania wyrażają się przez funkcje Bessela. Ich asymptotyka jest dobrze znana (patrz np. [1], [8] i [31]) i w pierwszym przybliżeniu oddaje zachowanie asymptotyczne rozwiązań (1.1). Podobnie możemy postąpić w przypadku układu  $x' = (x'_1, x'_2)$  wokół  $t = 1 = 1 - s$ , otrzymując równanie

$$\tau \partial_\tau^2 y' + y' = 0, \quad \tau = \lambda^2 s, \quad (1.14)$$

<sup>1</sup>W literaturze utrwalilo się nazywanie całek tej postaci mianem **niekompletnej funkcji Beta**.



które także posiada rozwiązania, wyrażające się poprzez funkcje Bessela. Analiza własności rozwinięcia asymptotycznego rozwiązań (1.1) polega następnie na porównaniu ich pierwszych przybliżeń WKB (tzn.  $y_j$  oraz  $y'_j$ ).

Szeregi asymptotyczne często bywają rozbieżne.<sup>2</sup> Tak też jest w przypadku rozwinięcia WKB dla równania (1.1). Przeszkoda ta może zostać pokonana w następujący sposób. Stosując metodę WKB zapisujemy rozwiązanie  $x_1$  za pomocą szeregów asymptotycznych  $g_0^\pm$  wokół  $t = 0$ , a następnie przedstawiamy  $g_0^\pm$  wokół  $t = 1$ , w bazie  $\{x'_1, x'_2\}$ . W ten sposób uzyskujemy relacje między rozwiązaniami

$$x_1(t, \lambda) = a_1(\lambda^{-1}) x'_1 + a_2(\lambda^{-1}) x'_2 \quad (1.16)$$

$$x_2(t, \lambda) = b_1(\lambda^{-1}) x'_1 + b_2(\lambda^{-1}) x'_2, \quad (1.17)$$

wokół poszczególnych punktów osobliwych.

Mimo, iż rozwinięcia  $g_0^\pm$  są tylko szeregami asymptotycznymi, możliwe jest znalezienie analogicznych rozwiązań<sup>3</sup>  $g^\pm$ , które są analityczne, jeśli ograniczymy się do odpowiednich sektorów asymptotycznych wokół  $\infty \in \mathbb{C}P^1$ . Relacje zachodzące pomiędzy bazami  $g^\pm$  i  $g_0^\pm$  dają się przedstawić wzorami

$$g^+(t, \lambda) = c_+(\lambda^{-1}) g_0^+(t, \lambda), \quad (1.18)$$

$$g^-(t, \lambda) = c_-(\lambda^{-1}) g_0^-(t, \lambda), \quad (1.19)$$

gdzie  $c_\pm(\lambda^{-1}) = 1 + O(\lambda^{-1})$  są pewnymi szeregami asymptotycznymi. Wykażemy dalej, że  $c_+ = c_- =: c$ , i  $c$  jest funkcją<sup>4</sup> parzystą, a ponadto zachodzi wzór

$$x_1 = \frac{g^+ + g^-}{\sqrt{\pi}}. \quad (1.20)$$

W dowodzie użyjemy teorii sprowadzania układów równań różniczkowych do postaci normalnej oraz całek oscylujących. Dalej będziemy zakładać, że  $t \sim 0$  lub  $t \sim 1$  i  $\lambda \sim \infty$ .

Rozwiązania WKB dla równania (1.13), przy  $\tau \rightarrow \infty$ , przyjmują postać

$$G^-(\tau) = \tau^{-1/4} e^{-2i\sqrt{\tau}} \left[ 1 + O(\tau^{-1}) \right], \quad (1.21)$$

$$G^+(\tau) = \tau^{-1/4} e^{2i\sqrt{\tau}} \left[ 1 + O(\tau^{-1}) \right]. \quad (1.22)$$

<sup>2</sup>Na przykład sławna **aproksymacja Stirlinga** dla funkcji  $\Gamma$

$$\log \Gamma(x) \sim \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x - x + \frac{\log 2\pi}{2} + \sum_{n>0} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)x^{2n-1}}, \quad (1.15)$$

gdzie  $B_n$  jest  $n$ -ta liczbą Bernoulliego, jest rozbieżna w każdym punkcie  $x \neq \infty$ .

<sup>3</sup>Dalsze szczegóły na ten temat znajdują się w Rozdziale 3.

<sup>4</sup>Zachodzi więc lepsze oszacowanie asymptotyczne  $c(\lambda^{-1}) = 1 + O(\lambda^{-2})$ .

Są one formalne, ale w odpowiednich sektorach wokół nieskończoności pochodzą od funkcji analitycznych. Przecięcia sektorów są niepuste i pozwalają na wyznaczenie "macierzy przejścia", czyli tzw. **operatorów Stokes'a**.

Rozwiązania WKB dla (1.14), przy  $\tau \rightarrow \infty$ , są postaci

$$H^+(\tau) = \tau^{1/4} e^{2i\sqrt{\tau}} \left[ 1 + O(\tau^{-1}) \right], \quad (1.23)$$

$$H^-(\tau) = \tau^{1/4} e^{-2i\sqrt{\tau}} \left[ 1 + O(\tau^{-1}) \right]. \quad (1.24)$$

W przypadku równania (1.1) zachodzi jeszcze jedna ważna relacja dualności pomiędzy rozwiązaniami wokół punktów osobliwych:

$$x'_1(1-t, \lambda) = (1-t) \partial_t x_1(1-t, \lambda), \quad (1.25)$$

$$x'_2(1-t, \lambda) = (1-t) \partial_t x_2(1-t, \lambda). \quad (1.26)$$

Posługując się powyższymi tożsamościami możemy wyznaczyć współczynnik  $a_2$  w (1.16).

Istnieje jednak też inna metoda, która może posiadać uogólnienie na inne równania postaci (4). Analiza zjawiska Stokes'a wokół  $t = 0$  oraz  $t = 1$ , pozwala zauważyć, że  $a_2$  także posiada przedstawienie w postaci szeregów WKB  $\lambda^{-1} e^{i\pi\lambda} [1 + O(\lambda^{-1})]$  oraz  $\lambda^{-1} e^{-i\pi\lambda} [1 + O(\lambda^{-1})]$ , dla których operatory Stokes'a są trywialne. Stąd, szeregi te są zbieżne i przedstawiają funkcje jednowartościowe wokół  $\lambda = \infty$ .<sup>5</sup> Wówczas łatwo już zauważyć, że

$$\frac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda} \cdot a_2(\lambda) \quad (1.27)$$

jest funkcją całkowitą i ograniczoną, a zatem - na mocy Twierdzenia Liouville'a - stałą.

W dalszych paragrafach tego rozdziału wyznaczymy rozwiązania podstawowe równania (1.1). Następnie podamy wzory całkowe na funkcje typu Bessela będące rozwiązaniami przybliżeń asymptotycznych (1.13) i (1.14) oraz wykorzystamy do ich zbadania metodę fazy stacjonarnej. W ostatnich paragrafach opiszemy rozwinięcia WKB dla (1.1) i zbadamy związane z nimi zjawisko Stokes'a.

---

<sup>5</sup>Patrz Twierdzenie 1.4.1.

## 1.1. Rozwiązania w otoczeniu punktów osobliwych

W pobliżu  $t = 0$ , mamy jedno rozwiązanie holomorficzne równania (1.1), którego rozwinięcie można znaleźć podstawiając do (1.1) szereg

$$1 + \sum_{n>0} c_n t^n. \quad (1.28)$$

W ten sposób otrzymujemy równanie rekurencyjne

$$(n+1)^2 c_{n+1} + (\lambda^2 - n^2) c_n = 0. \quad (1.29)$$

Zatem pierwsze rozwiązanie jest postaci

$$x_1(t, \lambda) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right). \quad (1.30)$$

Pierwiastek  $\alpha = 0$  równania charakterystycznego dla  $x \sim t^\alpha$  jest dwukrotny, skąd wynika, że drugie, liniowo niezależne rozwiązanie będzie zawierać logarytm. Zapisując  $\tilde{x}_2(t, \lambda) = w_2(t, \lambda) + x_1(t, \lambda) \log t$  i podstawiając do (1.1), otrzymujemy<sup>6</sup>

$$\tilde{x}_2(t, \lambda) = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) \log t + \dots \quad (1.31)$$

Jeśli rozpatrzmy teraz  $x_1$  i  $\tilde{x}_2$  jako funkcje od  $\lambda$  i zapiszemy je w formie szeregów

$$x_1(t, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \hat{x}_{1,n}(t) \lambda^n, \quad (1.32)$$

$$\tilde{x}_2(t, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \hat{x}_{2,n}(t) \lambda^n, \quad (1.33)$$

to możemy łatwo zauważyć, że współczynniki  $\hat{x}_{1,n}$  oraz  $\hat{x}_{2,n}$  spełniają równania

$$(t\partial_t)^2 \hat{x}_{i,0}(t, \lambda) = 0, \quad (1.34)$$

$$(1-t)\partial_t \hat{x}_{i,n} = \hat{x}_{i,n-1}, \quad (1.35)$$

przy warunkach początkowych

$$\hat{x}_{1,0}(t) = 1, \quad (1.36)$$

$$\hat{x}_{2,0}(t) = \log t. \quad (1.37)$$

Równania (1.34) posiadają zatem rozwiązania postaci

$$\hat{x}_{1,n} = \int_0^t \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\hat{x}_{1,n-1}(t_2) dt_2}{1-t_2} = \text{Li}_{\{2\}^n}(t), \quad (1.38)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{2,n} &= \int_0^t \frac{dt_1}{t_1} \int_0^{t_1} \frac{\hat{x}_{2,n-1}(t_2) dt_2}{1-t_2} \\ &= \log t \cdot \text{Li}_{\{2\}^n}(t) - 2 \sum_{j=1}^n \text{Li}_{\{2\}^{j-1,3,\{2\}^{n-j}}}(t), \end{aligned} \quad (1.39)$$

<sup>6</sup>Wzór na rozwiązanie można otrzymać od razu, stosując wzory na rozwiązania równania hipergeometrycznego dla przypadku nietypowego, gdy parametry różnią się o liczbę całkowitą.

gdzie  $\text{Li}_{\{2\}^k}$  oznacza wielokrotny polilogarytm<sup>7</sup> i zapis  $\{2\}^k$  jest skrótem dla  $\{2, 2, \dots, 2\}$ , przy czym  $k$  występuje  $n$  razy. W szczególności

$$\text{Li}_2(t) = \sum_{n>0} \frac{t^n}{n^2}. \quad (1.40)$$

Stąd  $\zeta(\{2\}^k) = \text{Li}_{\{2\}^k}(1)$  i w szczególności  $\zeta(2) = \text{Li}_2(1)$ .

**Uwaga 1.1.1** *Podstawiając  $t = 1$  otrzymujemy znany wzór*

$$\hat{x}_{1,n} = \zeta(\{2\}^n) \quad (1.41)$$

*oraz interesującą nową formułę*

$$\hat{x}_{2,n} = -2 \sum_{j=1}^n \zeta(\{2\}^{j-1}, 3, \{2\}^{n-j}), \quad (1.42)$$

*która po podstawieniu do drugiego rozwiązania równania (1.1) i przesuwaniu szeregu, pozwala otrzymać wzór*

$$\hat{x}_2(1) = 2f_2(\lambda) \cdot \sum_{n>0} \zeta(2n+1) \lambda^{2n}. \quad (1.43)$$

*Tak więc równanie (1.1) na funkcję tworzącą  $\zeta(\{2\}^n)$  zawiera w sobie także informacje o funkcji tworzącej wartości funkcji zeta Riemanna w punktach nieparzystych. Ta informacja nie pociąga jednak za sobą większych konsekwencji ze względu na to, że opisane powyżej drugie rozwiązanie równania (1.1) jest określone jedynie z dokładnością do cechowania  $\tilde{x}_2(t, \lambda) \mapsto \tilde{x}_2(t, \lambda) + g(\lambda)x_1(t, \lambda)$ .*

Wyborem drugiego rozwiązania, jak się okazuje bardziej naturalnym ze względu na badanie własności asymptotycznych, jest

$$x_2(t, \lambda) = x_1(t, \lambda) \cdot \log(\lambda^2 t) + w_2(t, \lambda). \quad (1.44)$$

Wokół  $t = 1$  będziemy używać zmiennej  $s := 1 - t$ . Odnosząc się teraz do równania (1.1) będziemy mieli na myśli jego postać przy  $t = 1 - s$ :

$$s \partial_s (1 - s) \partial_s x' + \lambda^2 x' = 0. \quad (1.45)$$

Rozwiązania równania (1.45) mają postać

$$x'_1(s, \lambda) = \lambda^2 s - \dots, \quad (1.46)$$

$$x'_2(s, \lambda) = \log \lambda^2 s \cdot x'_1(s, \lambda) + w'_2(s, \lambda), \quad (1.47)$$

---

<sup>7</sup>Informacje na temat wielokrotnych polilogarytmów, ich uogólnień oraz reprezentacji w postaci całek typu Drinfeld-Kontsewicha zostały zebrane w Paragrafie B.2 Rozdziału B.

gdzie  $w'_2$  jest analityczna w otoczeniu  $s = 0$ .

Na koniec opiszemy relacje, jaka zachodzi między rozwiązaniami równania (1.1) w otoczeniu punktów osobliwych  $t = 0$  i  $t = 1$ .

**Stwierdzenie 1.1.1** *Funkcja  $f$  jest rozwiązaniem równania (1.1) wtedy i tylko wtedy, gdy  $h := s\partial_s f$  jest rozwiązaniem (1.45). W szczególności mamy*

$$x'_1(s, \lambda) = -s\partial_s x_1(s, \lambda), \quad (1.48)$$

$$x'_2(s, \lambda) = -s\partial_s x_2(s, \lambda). \quad (1.49)$$

Ponadto, dla  $s \sim 0$ , zachodzi  $x'_2(s, \lambda) = -x_1(s, \lambda) + O(s)$ .

*Dowód.* Podstawiając  $h$  do równania (1.45), otrzymujemy

$$s\partial_s(1-s)\partial_s h + \lambda^2 h = s\partial_s \left[ (1-s)\partial_s s\partial_s g + \lambda^2 g \right]. \quad (1.50)$$

Do zakończenia dowodu należy zauważyć, że z uwagi na niezależność funkcji  $s\partial_s x_1$  oraz  $s\partial_s x_2$ , tworzą one bazę rozwiązań równania (1.45).  $\square$

## 1.2. Rozwinięcia asymptotyczne przybliżeń typu Bessela

Dla  $\lambda \sim \infty$  wielkość  $\lambda^r + q(\lambda)$ , gdzie  $q \in \mathbb{C}[\lambda]$  jest stopnia mniejszego od  $r$ , jest asymptotycznie równoważna z  $\lambda^r$ . Dla  $\lambda \sim \infty$  równanie (1.29) przybiera więc postać

$$c_{n+1} \sim - \left( \frac{\lambda}{n+1} \right)^2 c_n, \quad (1.51)$$

co przy  $c_0 = 1$  daje rozwinięcie

$$\sum_{n \geq 0} c_n t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{\lambda^{2n} t^n}{(n!)^2} = J_0(2\lambda \sqrt{t}) = y_1(\tau), \quad (1.52)$$

gdzie  $\tau = \lambda^2 t$ , zaś  $J_\alpha$  jest funkcją Bessela<sup>8</sup> rzędu  $\alpha$ , określoną wzorem (patrz [1], [31] i [8])

$$J_\alpha(x) = \left( \frac{x}{2} \right)^\alpha \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1) n!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2n}. \quad (1.53)$$

---

<sup>8</sup>Funkcje Bessela pojawiły się po raz pierwszy w pracach Daniela Bernoulliego, który zastosował je przy rozwiązywaniu cząstkowych równań różniczkowych, w których występuje operator Laplace. Jeśli chcemy przedstawić Laplasjan we współrzędnych biegunowych na płaszczyźnie (lub cylindrycznych w przestrzeni), to po rozdzieleniu zmiennych, w naturalny sposób pojawiają się funkcje Bessela  $J_n$ , gdzie  $n \in \mathbb{Z}$ . W układzie współrzędnych sferycznych w  $\mathbb{R}^3$  występują także funkcje  $J_{n+1/2}$ . Swoją nazwę zawdzięczają funkcje  $J_\alpha$  Friedrichowi Besselowi, który zbadał ich uogólnienia dla  $\alpha \in \mathbb{C}$ , a także podał ich reprezentacje całkowe.

Funkcja  $y_1$  spełnia równanie typu Bessela (1.13).

Podobnie jak w przypadku równania hipergeometrycznego (1.1), drugie, niezależne liniowo rozwiązanie (1.13) zawiera czynnik logarytmiczny

$$y_2(\tau) = y_1(\tau) \cdot \log \tau + \tilde{y}_2(\tau), \quad (1.54)$$

gdzie<sup>9</sup>  $\tilde{y}_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ .

Podobnie wokół  $t = 1 = 1 - s$ , mamy jedno rozwiązanie holomorfczne (równania (1.14) typu Bessela) i jedno z osobliwością logarytmiczną:

$$y'_1(\tau) = \sqrt{\tau} J_1(2\sqrt{\tau}), \quad (1.55)$$

$$y'_2(\tau) = y'_1(\tau) \log \tau + \tilde{y}'_2(\tau), \quad (1.56)$$

gdzie  $\tilde{y}'_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  i tym razem  $\tau = \lambda^2 s$ .

Powyższa konstrukcja jest przypadkiem szczególnym dużo ogólniejszej sytuacji. Z Twierdzenia 3.3.1 z Rozdziału 3, mamy

**Stwierdzenie 1.2.1** *Istnieją takie następujące  $2 \times 2$  macierze  $\mathcal{H}_0(t, \lambda^{-1})$  i  $\mathcal{H}_1(t, \lambda^{-1})$ , określone i analityczne w pewnym otoczeniu  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ , że*

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \mathcal{H}_0 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} x'_1 & x'_2 \end{bmatrix} \mathcal{H}_0 = \begin{bmatrix} y'_1 & y'_2 \end{bmatrix}. \quad (1.58)$$

**Uwaga 1.2.1** *Niech*

$$\mathcal{F}_0 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ \dot{x}_1 & \dot{x}_2 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathcal{G}_0 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

będą macierzami fundamentalnymi zwiqzanymi z bazami  $\{x_1, x_2\}$  oraz  $\{y_1, y_2\}$ . Mamy wówczas

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{F}_0^{-1} \mathcal{G}_0. \quad (1.60)$$

*Sytuacja analogiczna ma miejsce dla baz  $\{x'_1, x'_2\}$  oraz  $\{y'_1, y'_2\}$ .*

W pracy [96] zostało dowiedzione twierdzenie o analityczności operatorów  $\mathcal{H}_i$  ze względu na  $t$  oraz  $\lambda^{-1}$ . Powrócimy do tego zagadnienia w Rozdziale 3 (patrz Twierdzenie 3.3.1).

Do zbadania asymptotyki równań typu Bessela wykorzystuje się ich reprezentacje całkowite. Poniższy wynik należy do klasyki (wzór (1.2.2) został odkryty przez Bessela) analizy asymptotycznej. Przypomnimy jednak jego dowód, ze względu na analogie z ogólniejszymi sytuacjami rozpatrywanymi poniżej.

<sup>9</sup>Przez  $\mathcal{O}(U)$ , gdzie  $U \subset \mathbb{C}$ , oznaczamy przestrzeń funkcji holomorfcznych na  $U$ .

**Stwierdzenie 1.2.2 (Wzór Shläffiego)** *Zachodzi następujący wzór*

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin t - \alpha t)} dt - \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x \sinh t - \alpha t} dt. \quad (1.61)$$

W szczególności, dla  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , mamy

$$J_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x \sin t - \alpha t)} dt. \quad (1.62)$$

*Dowód.* Na mocy twierdzenia o residuach, dla  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , mamy

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1) n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \quad (1.63)$$

$$= \operatorname{res}_{t=0} t^{-\alpha-1} \left( \sum_{m \geq 0} \frac{(tx)^m}{2^m m!} \right) \cdot \left( \sum_{n \geq 0} \frac{(x/t)^n}{2^n n!} \right) \quad (1.64)$$

$$= \int_{\gamma} t^{-\alpha} \sum_{m, n \geq 0} \frac{(tx)^m (x/t)^n}{2^{m+n} m! n!} \frac{dt}{t} \quad (1.65)$$

$$= \int_{\gamma} t^{-\alpha} e^{x(t-1/t)/2} \frac{dt}{t}, \quad (1.66)$$

gdzie  $\gamma$  jest krzywą zamkniętą, dyfeomorficzną z okręgiem jednostkowym. Przyjmując  $\gamma(t) = e^{it}$  otrzymujemy (1.62).

Aby uogólnić teraz wzór (1.62) na niecałkowite wartości parametru  $\alpha$ , należy wybrać krzywą  $\gamma$  tak, aby obiegała zarówno punkt  $t = 0$ , ale zaczynała i kończyła się w  $t = -\infty$ . Taki kontur może być sparametryzowany wokół zera przez  $e^{it}$ , a wzdłuż prostej urojonej przez  $e^{-t}$ .  $\square$

Wyżej naszkicowany dowód jest standardowy w teorii funkcji specjalnych. Więcej szczegółów można znaleźć w książkach [1], [8], [31] oraz [90].

**Stwierdzenie 1.2.3** *Drugie, niezależne liniowo rozwiązanie równania typu Bessela (C.0.1), wyraża się za pomocą całki*

$$y_2(\tau) + \gamma y_1(\tau) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t e^{2i\sqrt{\tau} \sin t} dt - 2 \int_0^{\infty} e^{-2\sqrt{\tau} \sinh t} dt, \quad (1.67)$$

gdzie  $\gamma$  jest stałą Eulera-Mascheroniego.

*Dowód.* Uzasadnienie wzoru (1.67) opiera się na zaburzeniu równania

$$\left[ \left( \tau \frac{d}{d\tau} \right)^2 + \tau \right] x = 0, \quad (1.68)$$

przy użyciu małego parametru  $\epsilon$ , do postaci

$$\left[ \left( \tau \frac{d}{d\tau} \right)^2 + \tau - \frac{\epsilon^2}{4} \right] x = 0, \quad (1.69)$$

a następnie przejściu do granicy  $\epsilon \rightarrow 0$  w wyrażeniu

$$\frac{(J_\epsilon(2\sqrt{\tau}) - J_{-\epsilon}(2\sqrt{\tau}))}{\epsilon}. \quad (1.70)$$

Jednym rozwiązaniem jest całka (1.61) wyrażająca  $J_0$ , a drugim, niezależnym liniowo z  $J_0$ , funkcja określona w (1.67).  $\square$

Więcej szczegółów na temat funkcji Bessela znajduje się w C.1 i C.2.

Dysponując odpowiednimi wzorami całkowymi skorzystamy z **metody fazy stacjonarnej** (patrz rozdział A) w celu znalezienia pierwszych przybliżeń asymptotycznych dla rozwiązań równania (1.1). Funkcja  $\sin t$  ma w przedziale  $(-\pi, \pi)$  dwa punkty krytyczne  $t = \pi/2$  oraz  $t = -\pi/2$  w których zachodzi, odpowiednio

$$\frac{d^2 \sin}{dt^2}(\pi/2) = -1 \quad \text{oraz} \quad \frac{d^2 \sin}{dt^2}(-\pi/2) = 1. \quad (1.71)$$

Stosując wzór fazy stacjonarnej do całki oscylującej (1.62) otrzymujemy

$$J_0(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} [\exp(i(x - \pi/4)) + \exp(-i(x - \pi/4))] \quad (1.72)$$

oraz

$$y_1(\tau) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} [\exp(i(2\sqrt{\tau} - \pi/4)) + \exp(-i(2\sqrt{\tau} - \pi/4))]. \quad (1.73)$$

Stąd otrzymujemy wzór asymptotyczny dla funkcji (1.67):

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2i\tau^{1/4}} [\exp(i(2\sqrt{\tau} - \pi/4)) - \exp(-i(2\sqrt{\tau} - \pi/4))]. \quad (1.74)$$

W analogiczny sposób wyznaczamy wzory na rozwiązania asymptotyczne równań w otoczeniu  $t = 1 - s = 1$ . Mamy

$$y_1'(\tau) \sim \frac{\tau^{1/4}}{2i\sqrt{\pi}} [\exp(i(2\sqrt{\tau} - \pi/4)) - \exp(-i(2\sqrt{\tau} - \pi/4))], \quad (1.75)$$

$$y_2'(\tau) \sim -\frac{\sqrt{\pi}\tau^{1/4}}{2} [\exp(i(2\sqrt{\tau} - \pi/4)) + \exp(-i(2\sqrt{\tau} - \pi/4))],$$

gdzie  $\tau = \lambda^2 s$ .

**Uwaga 1.2.2** *Metoda fazy stacjonarnej ma zasadnicze zastosowanie w sytuacji, gdy mamy do czynienia z fazami rzeczywistymi. W przypadku zespolonym wkład pewnych składników musi zostać pominięty. Związane jest to z tzw. zjawiskiem Stokes'a dyskutowanym dalej w Paragrafie 1.4 oraz bardziej szczegółowo w Rozdziale 3.*



### 1.3. Rozwiązania WKB

Jedną z metod quasiklasycznych fizyki kwantowej jest rozwiązywanie równań takich jak zagadnienie własne operatora (5) przy użyciu szeregów WKB.<sup>10</sup> Przypomnijmy, że poszukujemy rozwiązania WKB postaci

$$x \sim e^{\lambda S(t)} \cdot \psi(t, \lambda). \quad (1.76)$$

W wypadku zastosowania tej metody do równania (1.1) otrzymujemy równanie typu Hamiltona-Jacobiego na 'działanie'

$$t(1-t)\dot{S}^2 = -1, \quad (1.77)$$

którego rozwiązaniami są tzw. **niekompletne całki typu beta**

$$S = \pm i \int_0^t \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}}. \quad (1.78)$$

Tak więc otrzymujemy dwa rozwiązania asymptotyczne  $e^{\pm i\lambda S(t)}\psi_{\pm}(t, \lambda)$ . W dalszym ciągu skupimy się na rozwiązaniu  $e^{i\lambda S(t)}\psi_+(t, \lambda)$ ; analiza dla  $e^{-i\lambda S(t)}\psi_-(t, \lambda)$  jest analogiczna. Przez  $\sqrt{\pm i}$  będziemy rozumieć  $e^{\pm i\pi/4}$ .

Mamy

$$g_0^{\pm}(t, \lambda) \sim e^{\pm i\lambda S(t)} \times \frac{1}{\pm\sqrt{-i\lambda}} \left\{ \psi_0(t) + \sum_{j>0} \psi_j(t)(\mp i\lambda)^{-j} \right\}. \quad (1.79)$$

Współczynniki  $\psi_j$  spełniają 'równania transportu'

$$2(t\dot{S})\dot{\psi}_0 + \frac{d(t\dot{S})}{dt}\psi_0 = 0, \quad (1.80)$$

$$2(t\dot{S})\dot{\psi}_j + \frac{d(t\dot{S})}{dt}\psi_j = \frac{d(t\dot{\psi}_{j-1})}{dt}. \quad (1.81)$$

Wybieramy rozwiązanie powyższego równania jednorodnego w postaci

$$\psi_0(t) = t^{1/4}(1-t)^{-1/4} \quad (1.82)$$

i wprowadzamy nową zmienną  $u = 1/\psi_0(t)$ . Mamy

$$t = \frac{u^4}{1+u^4} \quad \text{oraz} \quad \frac{d}{dt} = \frac{(1+u^4)^2}{4u^3} \frac{d}{du}. \quad (1.83)$$

Będziemy stosować notację  $\tilde{\psi}_j(u) = \psi_j(t)$ , na odpowiednie współczynniki szeregu. Funkcje  $\tilde{\psi}$  spełniają równania

$$\frac{d\tilde{\psi}_j}{du} + \frac{1}{u}\tilde{\psi}_j = \frac{1}{8u^2} \frac{d}{du} \left( u(1+u^4) \frac{d\tilde{\psi}_{j-1}}{du} \right). \quad (1.84)$$

<sup>10</sup>Szczegóły można znaleźć w Rozdziale 3, gdzie znajdują się też stosowne odniesienia do literatury.

Rozwiązania dają się zapisać w postaci

$$\tilde{\psi}_j = L \tilde{\psi}_{j-1}, \quad L \phi := \frac{1}{8u} \int_{u_0}^u w^{-1} \frac{d}{dw} \left( w(1+w^4) \frac{d\phi}{dw} \right) dw. \quad (1.85)$$

W ten sposób wyznaczamy kolejne współczynniki

$$\tilde{\psi}_1 = -\frac{u^{-3} + 3u}{16}, \quad (1.86)$$

$$\tilde{\psi}_2 = \frac{9u^{-5} - 15u}{512}, \quad (1.87)$$

$$\tilde{\psi}_3 = -\frac{15(5u^{-7} + 7u^5)}{2 \cdot 8^4} - \frac{45(5u^{-3} + 3u)}{2 \cdot 8^4}, \quad (1.88)$$

...

Ogólnie zachodzi wzór

$$\psi_j(t) = \sum_m c_{j,j-4m} A_{j-4}(t), \quad (1.89)$$

dla pewnych wyznaczalnych rekurencyjnie współczynników  $c_{j,k}$  i gdzie ciąg  $A_n = A_n(t)$  jest określony relacją rekurencyjną

$$T A_{2n+1}(t) = -\frac{n(n-2)}{8(n+1)} A_{2n+3}(t) - \frac{n(n-2)}{8(n-3)} A_{2n-1}(t). \quad (1.90)$$

Przyjeliśmy tu  $A_1 = 0$ , dzięki czemu mamy jednoznacznie wyznaczone  $A_j$ . Rozwiązania równań transportu otrzymane za pomocą operatora  $T$  są szczególnej postaci. Nie zawierają one składnika z  $u^{-1}$ , proporcjonalnego do  $\tilde{\psi}_0$ .

Równanie (1.13), typu Bessela (względem zmiennej  $\tau$ ) także może być rozwiązane metodą WKB. Otrzymane szeregi formalne przyjmują postać

$$G^+(\tau) \sim e^{2i\sqrt{\tau}} \tau^{-1/4} \sum_{j \geq 0} a_j (-i\sqrt{\tau})^{-j}, \quad (1.91)$$

$$G^-(\tau) \sim e^{-2i\sqrt{\tau}} \tau^{-1/4} \sum_{j \geq 0} a_j (\sqrt{\tau})^{-j}. \quad (1.92)$$

względem  $\tau \sim \infty$ , gdzie  $a_0 = 1$ . Podobne szeregi ( $b_0 = 1$ )

$$H^+(\tau) \sim e^{2i\sqrt{\tau}} \tau^{1/4} \sum_{j \geq 0} b_j (-i\sqrt{\tau})^{-j} \quad (1.93)$$

$$H^-(\tau) \sim e^{-2i\sqrt{\tau}} \tau^{1/4} \sum_{j \geq 0} b_j (\sqrt{\tau})^{-j}. \quad (1.94)$$

względem  $\tau \sim \infty$ , zadają formalne rozwiązania WKB równania (1.14). Współczynniki  $a_j$  oraz  $b_j$  wyznacza się za pomocą odpowiedniej rekurencji.

**Definicja 1.3.1** Szeregi  $g_0^\pm$  nazwiemy *testowymi rozwiązaniami WKB* równania (1.1). Wykorzystując swobodę wyboru, zakładamy jak wyżej, że  $\psi_j$  nie zawierają  $u^{-1}$ , dla  $j > 0$ .

Formalne szeregi  $G^\pm$  i  $H^\pm$  nazywać będziemy *rozwiązaniami WKB* równań, odpowiednio (1.13) i (1.14).

**Wzory całkowe dla równania hipergeometrycznego.** Dla zastosowania metody fazy stacjonarnej należy znaleźć odpowiednie wzory na rozwiązania równania (1.1) w postaci całek oscylujących.

**Stwierdzenie 1.3.1** *Zachodzi wzór*

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left( \frac{1 + u\sqrt{t}}{1 + u^{-1}\sqrt{t}} \right)^\lambda \frac{du}{u}, \quad (1.95)$$

gdzie  $\gamma$  jest krzywą o indeksie jednostkowym względem zera.

*Dowód.* Analogiczny jak w przypadku wzoru całkowego dla funkcji Bessela. Zamiast szeregów definiujących  $e^{-tu^{-1}}$  i  $e^{tu}$  rozważamy szeregi potęgowe dla funkcji  $(1 + u^{-1}\sqrt{t})^{-x}$  oraz  $(1 + u\sqrt{t})^x$ .  $\square$

Następujący wynik jest uogólnieniem wzoru Schlöfliego.

**Stwierdzenie 1.3.2** *Dla  $\operatorname{Re}(w - v) > 0$  zachodzi wzór*

$$\begin{aligned} & \frac{t^{(w-1)/2} \Gamma(w-v)}{\Gamma(1-v)\Gamma(w)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix} \middle| t \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + e^{is}\sqrt{t})^{w-v-1} (1 + e^{-is}\sqrt{t})^{-u} e^{i(1-w)s} ds \\ &+ \frac{\sin(w+u)}{\pi} \int_0^{t^{-1/2}} (1 - s\sqrt{t})^{w-v-1} (1 - s^{-1}\sqrt{t})^{-u} s^{-w} ds. \end{aligned} \quad (1.96)$$

*Dowód.* Analog wzoru Eulera dla funkcji  ${}_2F_1$  ma postać

$$\begin{aligned} & t^{(w-1)/2} \frac{\Gamma(w-v)}{\Gamma(1-v)\Gamma(w)} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix} \middle| t \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (1 + s\sqrt{t})^{w-v-1} (1 + s^{-1}\sqrt{t})^{-u} s^{-w} ds, \end{aligned} \quad (1.97)$$

gdzie  $\gamma$  jest krzywą o indeksie jednostkowym względem zera, o końcu i początku w punkcie  $s = -t^{-1/2}$  (patrz [95]). Wzór ze Stwierdzenia (1.3.2) otrzymujemy z (1.97) poprzez rozbitcie na dwie całki (pierwsza po okręgu jednostkowym, druga po odcinkach  $s \in (1, t^{-1/2})$  i  $s \in (1, t^{-1/2})$ , przy uwzględnieniu różnicy argumentu wokół punktu osobliwego), a następnie dokonanie odpowiedniej zamiany zmiennych.  $\square$

**Stwierdzenie 1.3.3** *Drugie liniowo niezależne rozwiązanie  $\hat{x}_2(t, \lambda)$  równania (1.1) posiada reprezentację całkową*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{1+u\sqrt{t}}{1+u^{-1}\sqrt{t}} \right)^{\lambda} \log \left( \frac{1+u\sqrt{t}}{u^2(1+u^{-1}\sqrt{t})} \right) \frac{du}{u} \\ & - \int_1^{t^{-1/2}} \left( \frac{1-u\sqrt{t}}{1-u^{-1}\sqrt{t}} \right)^{\lambda} \left\{ \frac{\pi\lambda}{\pi} \log \left( \frac{1+u\sqrt{t}}{u^2(1+u^{-1}\sqrt{t})} \right) + 3 \cos \pi\lambda \right\} \frac{du}{u}. \end{aligned} \quad (1.98)$$

*Dowód.* Podobnie jak w wypadku równania Bessela, zaburzamy równanie (1.1) do postaci

$$t \left[ (1-t) \partial_t t \partial_t x + \lambda^2 \right] x - \epsilon^2 x = 0 \quad (1.99)$$

i przechodzimy do granicy wyrażenia

$$\frac{x_{\epsilon} - x_{-\epsilon}}{2\epsilon}, \quad (1.100)$$

gdzie  $x_{\epsilon}, x_{-\epsilon}$  stanowią bazę rozwiązań równania (1.99). Szczegóły można znaleźć w [95].  $\square$

**Uwaga 1.3.1** *Składnik analityczny  $w_2(t, \lambda)$  w (1.5), ma postać*

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \epsilon + \lambda, \epsilon - \lambda \\ 1 + 2\epsilon \end{matrix} \middle| t \right) \Big|_{\epsilon=0}. \quad (1.101)$$

Ponadto, ze wzoru<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d \log \Gamma(1 + \lambda)}{d\lambda} &= \frac{d\Gamma(1 + \lambda)}{d\lambda} \frac{1}{\Gamma(1 + \lambda)} \\ &= -\gamma - \sum_{n>0} (-1)^n \zeta(1 + n) \lambda^n \end{aligned} \quad (1.104)$$

oraz z równania (1.43) w Uwadze 1.1.1, otrzymujemy zależność

$$\hat{x}_2 = \tilde{x}_2 + 2 \left( \frac{d \log \Gamma(1 + \lambda)}{d\lambda} - \frac{d \log \Gamma(1)}{d\lambda} \right) \cdot x_1 \quad (1.105)$$

<sup>11</sup>Tutaj  $\gamma$  oznacza **stałą Eulera–Mascheroniego**, którą po raz pierwszy wprowadził L. Euler (w roku 1735) w pracy *De Progressionibus harmonicis observationes*, jako granicę przy  $n \rightarrow \infty$  wyrażenia

$$-\log n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} =: -\log n + H_n. \quad (1.102)$$

Do jej oznaczenia Euler użył pierwotnie litery  $C$ . Ten sam symbol został także wykorzystany przez G. M. Fichtenholtza w jego podręczniku do analizy. Nietrudno pokazać, że  $(d\Gamma/d\lambda)(1) = -\gamma$ . Warto wspomnieć też o eleganckim wzorze

$$\gamma = \sum_{n>1} (-1)^n \frac{\zeta(n)}{n}, \quad (1.103)$$

łąającym  $\gamma$  z wartościami funkcji  $\zeta$  w liczbach całkowitych. Stała  $\gamma$  występuje także w wielu innych, nieoczekiwanych sytuacjach i jest przedmiotem intensywnych badań. Do tej pory nie udało się jednak nawet stwierdzić, czy jest ona algebraiczna.

oraz

$$\hat{x}_2(1, \lambda) = 2f_2(\lambda) \cdot \sum_{n>0} \zeta(2n) \lambda^{2n-1}. \quad (1.106)$$

Ale  $-x^{-1}\pi \cot \pi x$  jest funkcją tworzącą ciąg  $2\zeta(2n)$ . Stąd

$$\hat{x}_2(1, \lambda) = -\frac{\cos \pi \lambda}{\lambda} + \lambda^{-1} f_2(\lambda), \quad (1.107)$$

co pociąga za sobą fakt, iż funkcja

$$\check{x}_2(t, \lambda) := \hat{x}_2(t, \lambda) - \lambda^{-1} x_1(t, \lambda), \quad (1.108)$$

także jest rozwiązaniem równania (1.1), niezależnym z  $x_1$  i takim, że

$$\check{x}_2(1, \lambda) = -\frac{\cos \pi \lambda}{\lambda}. \quad (1.109)$$

Istnieje też naturalna relacja wiążąca  $\hat{x}$  z  $x_2 = \tilde{x}_2 + x_1 \log \lambda$ . Ze wzoru Stirlinga wynika, że

$$\frac{d \log \Gamma(1 + \lambda)}{d\lambda} \sim \log \lambda + \frac{1}{2\lambda} \quad \text{przy} \quad \lambda \sim \infty, \quad (1.110)$$

skąd

$$\tilde{w}_2 \sim x_2 + 2\gamma \cdot x_1. \quad (1.111)$$

Wszystkie cztery funkcje,  $x_2$ ,  $\tilde{x}_2$ ,  $\hat{x}_2$  i  $\check{x}_2$  opisane powyżej, są równie ciekawymi kandydatami na (niezależne z  $x_1$ ) rozwiązania równania (1.1).

Wzory ze Stwierzeń 1.3.1 oraz 1.3.3 są w postaci całek oscylujących z fazą

$$\phi(v) = -i \left\{ \log(1 + v\sqrt{t}) - \log(1 + v^{-1}\sqrt{t}) \right\}, \quad (1.112)$$

której (niezdegenerowanymi) punktami krytycznymi są  $v_+ = -\sqrt{t} - i\sqrt{1-t}$  oraz  $v_- = -\sqrt{t} + i\sqrt{1-t}$ , z wartościami krytycznymi równymi odpowiednio

$$\phi_+ = i \log \left( \frac{1 - iu^2}{1 + iu^2} \right) = S(t) \quad (1.113)$$

oraz

$$\phi_- = -i \log \left( \frac{1 - iu^2}{1 + iu^2} \right) = -S(t), \quad (1.114)$$

gdzie<sup>12</sup>  $u = t^{1/4}(1-t)^{-1/4}$  i  $S(t)$  jest rozwiązaniem równania Hamiltona-Jacobiego dla rozwinięcia WKB związanego z (1.1). Podstawiając  $v =$

---

<sup>12</sup>Patrz (1.83).

$v_{\pm}e^{iz}$  (dla małych  $z$ ) do wyrażenia (1.112) na fazę, dostajemy  $\phi = \phi_{\pm} \cdot \pm u^2 z^2 + \dots$ . Stąd wiodący składnik asymptotyki jest postaci

$$e^{\pm i\lambda S} \frac{1}{2\pi} \int e^{\pm i\lambda u^2 z^2} dz \sim \frac{1}{\mp 2u\sqrt{i\pi\lambda}} e^{\pm i\lambda S}. \quad (1.115)$$

Wyznaczenie dalszych wyrazów asymptotyki także jest (teoretycznie) możliwe, przy czym kilka pierwszych wyrazów zostało wypisanych w [95]). Pomocna była tu analogia z obliczaniem momentów całek gaussowskich, gdzie dla gaussowskiej zmiennej losowej  $X$  mamy

$$\langle X^n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int e^{-x^2} x^n dx = (n-1)!! 2^{-n/2}, \quad (1.116)$$

dla  $n \in 2\mathbb{Z}$  oraz  $\langle X^n \rangle = 0$  dla nieprzystych  $n$ .

**Stwierdzenie 1.3.4** *Mamy*

$$x_1 \sim \frac{C(\lambda^{-2})(g_0^+ + g_0^-)}{2\sqrt{\pi}} = \frac{g^+ + g^-}{2\sqrt{\pi}}, \quad (1.117)$$

gdzie  $C \neq \text{const}$  jest szeregiem formalnym o współczynnikach całkowitych, postaci

$$C = 1 + \frac{5}{256} \frac{1}{\lambda^2} + \dots \quad (1.118)$$

Dowód Stwierdzenia (1.3.4) opiera się na rozwinięciu wyrażenia

$$i\lambda(\phi - \phi_{\pm}) \quad (1.119)$$

w szereg względem potęg  $\lambda^{-1/2}$  i porównaniu odpowiednich współczynników. Szczegóły można znaleźć w [95]).

**Definicja 1.3.2** *Formalne rozwinięcia*

$$g^+(t, \lambda) = C(\lambda^{-2})g_0^+(t, \lambda), \quad (1.120)$$

$$g^-(t, \lambda) = C(\lambda^{-2})g_0^-(t, \lambda), \quad (1.121)$$

będziemy nazywać **podstawowymi rozwiązaniami WKB** równania (1.1).

Rozważmy teraz rozwiązanie  $\hat{x}_2$  równania ze Stwierdzenia 1.3.3. Wzór całkowy ze Stw. 1.3.3 ma dwa składniki, z których tylko całka po okręgu jest istotna przy analizie własności asymptotycznych, przy użyciu aproksymacji fazy stacjonarnej.

Mamy zatem do czynienia z całką oscylującą

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi i} \int e^{i\lambda\phi(v)} [i\phi(v) - 2 \log v] \frac{dv}{v} \\ &= -i \int e^{i\lambda\phi(v)} a(v) \frac{dv}{v}, \end{aligned} \quad (1.122)$$

z taką samą, jak poprzednio fazą, ale z inną amplitudą

$$a(v) = \frac{i}{2\pi} (\phi(v) + 2 \log v). \quad (1.123)$$

Wprowadźmy rozkład  $I := I_+ + I_-$ , gdzie  $I_{\pm}$  odpowiadają wkładom pochodzącym od punktów krytycznych  $v_{\pm}$  fazy  $\phi$ . Zapisując

$$a(v_{\pm} e^{iz}) = \frac{\mp i}{2} - \frac{\lambda}{2\pi} (\phi - \phi_{\pm}) - \frac{iz}{\pi}, \quad (1.124)$$

otrzymujemy dalszy rozkład

$$I_{\pm} = J_{\pm} + K_{\pm} + L_{\pm}, \quad (1.125)$$

odpowiadający powyższemu rozkładowi amplitudy na powyższe składniki.

**Stwierdzenie 1.3.5** *Zachodzi wzór asymptotyczny*

$$\hat{x}_2 \sim -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ D_+(\lambda^{-1}) g_0^+ - D_-(\lambda^{-1}) g_0^- \right\}, \quad (1.126)$$

gdzie  $D_{\pm}(\lambda^{-1})$  są szeregami formalnymi spełniającymi

$$D_+(\lambda^{-1}) + D_-(\lambda^{-1}) = 2C(\lambda^{-2}). \quad (1.127)$$

*Dowód.* Mamy  $J_{\pm} = \pm i\pi C(\lambda^{-2}) g_0^{\pm}$ . Udowodnimy, że  $K_+ + K_-$  oraz  $L_+ + L_-$  są proporcjonalne do  $g_0^+ + g_0^-$ , co wystarczy dla wykazania prawdziwości stwierdzenia. W tym celu wystarczy pokazać, że całki gaussowskie w  $K_{\pm}$  i  $L_{\pm}$  mają odpowiednie współczynniki przy  $u^{-1}$ .

W całce odpowiadającej  $L_{\pm}$ , rozwijając  $e^{\omega}$ , gdzie  $\omega(z)$  zawiera wyrazy rzędów  $> 2$  w rozwinięciu  $i\lambda\phi(v_{\pm} e^{iz})$  i porównując potęgi przy jednomianach  $u^n \lambda^n$ , otrzymujemy, że nie występuje zależność od znaku  $\pm$ . Bardziej szczegółowe obliczenia można znaleźć w [95].

Zauważmy, że

$$e^{\mp i\lambda S} K_{\pm} = -\frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda(\phi - \phi_{\pm})} \lambda(\phi - \phi_{\pm}) dz \quad (1.128)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{2\pi} \int e^{i\lambda(\phi - \phi_{\pm})} dz \\ &= \frac{i}{2\sqrt{\pi}} \frac{\partial}{\partial \lambda} C(\lambda^{-2}) \left\{ u^{-1} (\pm i\lambda)^{-1/2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (1.129)$$

Współczynnik przy  $u^{-1}(\pm i\lambda)^{-1/2}$  jest równy

$$\frac{i}{2\sqrt{\pi}} \left\{ -2\lambda^{-3} \frac{\partial C(\lambda^{-2})}{\partial \lambda} - \frac{1}{2} C(\lambda^{-2}) \lambda^{-1} \right\} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}\lambda} \quad (1.130)$$

i nie zależy od znaku  $\pm$ .

Nieco dokładniejsze obliczenia pozwalają wyznaczyć  $K_+ + K_- + L_+ + L_- = [(2\sqrt{\pi}\lambda)^{-1} + \dots] \cdot (g_0^+ + g_0^-)$ .  $\square$

**Uwaga 1.3.2** *Analogiczna procedura może być przeprowadzona w przypadku analizy równania  $[s\partial_s(1-s)\partial_s + \lambda^2]x = 0$ . Z porównania rozwinięć asymptotycznych, otrzymujemy wówczas wzory*

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{D_+ e^{i\pi\lambda} + D_- e^{-i\pi\lambda}}{\lambda(D_+ + D_-)} x'_1 - \frac{2C}{(D_+ + D_-)} \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \hat{x}'_2, \\ \hat{x}_2 &= \frac{i\pi(D_+^2 e^{i\pi\lambda} - D_-^2 e^{-i\pi\lambda})}{\lambda C(D_+ + D_-)} x'_1 + \frac{D_+ e^{i\pi\lambda} + D_- e^{-i\pi\lambda}}{\lambda(D_+ + D_-)} \hat{x}'_2, \end{aligned} \quad (1.131)$$

pozwalające na powiązanie rozwiązań w otoczeniu  $t = 0$  oraz  $s = 0 = 1-t$ . Przy tym, przy dowodzie powyższych wzorów, własność dualności, czyli Stw. 1.1.1, jest istotnie wykorzystana.

Powyższy fakt jest konsekwencją Stwierdzenia 1.3.5. Poniżej podajemy pierwszy z dwóch nowych dowodów formuły dla funkcji tworzącej ciągu  $\zeta(\{2\}^n)$ .

**Wniosek 1.3.1** *Współczynnik  $a_2$  w (1.16), czyli*

$$\frac{-2C}{D_+ + D_-} \cdot \frac{\sin \pi\lambda}{\lambda} \quad (1.132)$$

we wzorze (1.131) jest równy

$$-\frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \quad (1.133)$$

Zatem

$$f_2(\lambda) = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}. \quad (1.134)$$

**Redukcja do postaci normalnej.** Sprowadzimy teraz równanie (1.1) do postaci układu w formie normalnej. Podstawiając  $x_1 = z_1$  oraz  $z_2 = \lambda^{-1}\dot{x}_1$ , otrzymujemy

$$\dot{z} = Az, \quad (1.135)$$



gdzie  $A(t, \lambda) = \lambda A_1(t) + A_0(t)$  i

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -t^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ t^{-1}(1-t)^{-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.136)$$

Pierwszym krokiem jest diagonalizacja  $A_1$ . Niech

$$\eta_1 = \frac{i}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad (1.137)$$

$$\eta_2 = -\frac{i}{\sqrt{t(1-t)}}, \quad (1.138)$$

będą wartościami własnymi  $A_1$ . W dalszym ciągu będziemy pisać  $\eta_1 =: \eta_+$ ,  $\eta_2 =: \eta_-$  lub po prostu  $\pm\eta$ .

Podstawmy

$$q := \eta_1 z_1 + z_2, \quad (1.139)$$

$$p := \eta_2 z_1 + z_2, \quad (1.140)$$

gdzie  $z_2 := \dot{z}_1/\lambda$ . Mamy

$$\dot{q} := \eta \lambda p - \frac{1}{4} \left( \frac{3}{t} - \frac{1}{1-t} \right) p - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) q, \quad (1.141)$$

$$\dot{p} := -\eta \lambda q - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) p - \frac{1}{4} \left( \frac{3}{t} - \frac{1}{1-t} \right) q. \quad (1.142)$$

Z ogólnej teorii (patrz [34] oraz [46], a także Rozdział 3) wynika, że powyższy układ może być zdiagonalizowany za pomocą szeregu tzw. **przekształceń przycinania**. Dokonamy teraz odpowiednich początkowych przekształceń, dla porównania otrzymanej formy normalnej z rezultatami otrzymanymi wcześniej za pomocą aproksymacji fazy stacjonarnej oraz z analogicznymi rezultatami dla analizy asymptotycznej równania (1.1) w otoczeniu  $t = 1$ .

Podstawmy

$$q = q_1 + b(t, \lambda) \cdot p_1, \quad (1.143)$$

$$p = c(t, \lambda) \cdot q_1 + p_1, \quad (1.144)$$

gdzie

$$b(t, \lambda) = \sum_{j>0} b_j \lambda^{-j}, \quad (1.145)$$

$$c(t, \lambda) = \sum_{j>0} c_j \lambda^{-j}, \quad (1.146)$$

spodziewając się otrzymać rozdzielony układ postaci

$$\dot{q}_1 = \lambda \eta q_1 + q_1 \sum_{j \geq 0} B_j \lambda^{-j}, \quad (1.147)$$

$$\dot{p}_1 = -\lambda \eta p_1 + p_1 \sum_{j \geq 0} C_j \lambda^{-j}. \quad (1.148)$$

Równania na  $b_j$ ,  $c_j$ ,  $B_j$  i  $C_j$ , otrzymane w rezultacie powyższego podstawienia dają się rozwiązać i w rezultacie otrzymujemy

$$-b_1(t) = c_1(t) = \frac{i}{8t^{1/2}(1-t)^{1/2}}, \quad (1.149)$$

$$b_2(t) = c_2(t) = \frac{1-2t}{32t(1-t)}, \quad (1.150)$$

...

oraz

$$B_0(t) = C_0(t) = -\frac{3-4t}{t(1-t)}, \quad (1.151)$$

$$-B_1(t) = C_1(t) = -\frac{i}{32t^{3/2}(1-t)^{3/2}}, \quad (1.152)$$

$$B_2(t) = C_2(t) = -\frac{1-2t}{128t^2(1-t)^2}, \quad (1.153)$$

...

Ogólne rozwiązanie układu (1.147) mają postać

$$p_1 = K_1(\lambda) \frac{e^{i\lambda S(t)}}{t^{3/4}(1-t)^{1/4}} \times \exp \left\{ -i \frac{u^2 - u^{-2}}{16\lambda} - \frac{u^4 + 2 + u^{-4}}{512\lambda^2} + \dots \right\}, \quad (1.154)$$

$$q_1 = K_2(\lambda) \frac{e^{-i\lambda S(t)}}{t^{3/4}(1-t)^{1/4}} \times \exp \left\{ i \frac{u^2 - u^{-2}}{16\lambda} - \frac{u^4 + 2 + u^{-4}}{512\lambda^2} + \dots \right\}, \quad (1.155)$$

gdzie  $K_1$  i  $K_2$  są dowolne i  $u = t^{1/4}(1-t)^{-1/4}$ , jak wyżej. Podstawiając otrzymany wynik do wzorów (1.143), a następnie do wzoru na  $x_1$ , wyznaczamy

$$x_1 = K_1 \tilde{g}_1 + K_2 \tilde{g}_2, \quad (1.156)$$

gdzie

$$\tilde{g}^\pm = \left( 1 + \frac{5}{256\lambda^2} + O(\lambda^{-4}) \right) g_0^\pm, \quad (1.157)$$

zaś  $g_0^\pm$  są testowymi rozwiązaniami WKB równania (1.1).

**Uwaga 1.3.3** Szeregi  $\tilde{g}^\pm$  są także rozwiązaniami WKB, które wydają się być ważniejsze niż rozwiązania główne  $g^\pm$ , gdyż są one nie tylko szeregami formalnymi, ale są zbieżne w odpowiednich sektorach płaszczyzny (patrz [13], [14] oraz Rozdział 3). Relacja między  $\tilde{g}^\pm$  oraz  $g^\pm$ , którą możemy opisać za pomocą równości

$$\tilde{g}^\pm = \tilde{C} g^\pm, \quad (1.158)$$

gdzie  $\tilde{C} \in \mathbb{C}[[\lambda^{-1}]]$ . Nie wiadomo, czy  $\tilde{C} = 1$  (patrz 1.3.4). Układ (1.147) wydaje się być bardziej naturalny niż rozwinięcia WKB także z tego powodu, że te ostatnie są związane z warunkiem początkowym  $S(0) = 0$ .

Wiadomo natomiast, że szeregi w (1.147) są rozbieżne, a rozwinięcia WKB są jedynie formalne. G. Birkhoff, jako pierwszy udowodnił, że takie układy mogą być zdiagonalizowane analitycznie w pewnych sektorach, jakie rozważaliśmy już wcześniej i jakie opisujemy w ogólnej sytuacji w Rozdziale 3. Poniżej naszkicujemy schemat dowodu twierdzenia Birkhoffa na przykładzie, który był w pewnej mierze motywacją do podjęcia badań nad przypadkiem ogólnym z Rozdziału 3.

Najpierw dokonamy podstawienia

$$q = q_1 + U(t) \cdot p_1, \quad (1.159)$$

$$p = V(t) \cdot q_1 + p_1, \quad (1.160)$$

tak, aby sprowadzić układ (1.135) do postaci normalnej

$$\dot{w}_1 = B w_1, \quad w_1 = \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix}, \quad (1.161)$$

gdzie

$$B = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & B_2(t) \end{bmatrix}. \quad (1.162)$$

Jeśli wyjściowy układ oznaczymy przez

$$\dot{w} = A w, \quad w = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}, \quad (1.163)$$

to otrzymamy następujące wzory wiążące wyrazy macierzowe w  $A$  i  $B$ :

$$B_1 = A_{11} - V A_{21}, \quad (1.164)$$

$$B_2 = U A_{12} + A_{22}, \quad (1.165)$$

skąd

$$\dot{U} = U A_{12} + U(A_{11} - A_{22}) - U^2 A_{21}, \quad (1.166)$$

$$\dot{V} = U A_{21} + V(A_{11} - A_{21}) - V^2 A_{21}. \quad (1.167)$$

Te równania można zastąpić równoważnymi równaniami całkowymi

$$U(t) = \int_{\gamma_1(t)} e^{P(t)-P(s)} \{A_{12}(s) + U^2(s) A_{21}(s)\} ds, \quad (1.168)$$

$$V(t) = \int_{\gamma_2(t)} e^{-P(t)+P(s)} \{A_{21}(s) + V^2(s) A_{12}(s)\} ds, \quad (1.169)$$

gdzie

$$P(t) = \int_0^t \{A_{11}(s) - A_{22}(s)\} ds = 2i\lambda S(t) + \dots \quad (1.170)$$

zaś drogi  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są odpowiednio dobrane w płaszczyźnie  $s$  i obie mają koniec w  $t$ .

Określmy teraz dwa obszary ( $u$  i  $d$ , odpowiednio od angielskich słów *up* i *down*)

$$D_u := \{t \in W : \operatorname{Im} xS(t) > -\alpha, \\ \operatorname{Im} [\pi - xS(t)] > -\alpha, |\lambda| > \epsilon^{-1}\}, \quad (1.171)$$

$$D_d := \{t \in W : \operatorname{Im} xS(t) < \alpha, \\ \operatorname{Im} [\pi - xS(t)] < \alpha, |\lambda| > \epsilon^{-1}\}, \quad (1.172)$$

gdzie  $0 < \epsilon$ ,  $\epsilon \sim 0$ ;  $\alpha > 0$  jest ustaloną stałą oraz

$$W := \{t \in \mathbb{C} : \epsilon < \operatorname{Re} t < 1 - \epsilon, |\operatorname{Im} t| < \epsilon \cdot \operatorname{Re} t(1 - \operatorname{Re} t)\}. \quad (1.173)$$

Drogi  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  zależą od tego, do których obszarów  $D_u$  i  $D_d$  należy  $(t, \lambda)$ . Na przykład, jeśli  $(t, \lambda) \in D_u$ , to kontur  $\gamma_1$  zaczyna się w pewnym punkcie  $s_0$ , gdzie  $|s_0| < \epsilon$  i kończy się, jak już wspomniano, w  $s = t$ . Między  $s_0$  i  $t$  spełniona musi być nierówność

$$\operatorname{Im} [xS(t) - xS(s)] > 0. \quad (1.174)$$

Wówczas analityczność rozwiązań asymptotycznych może zostać dowiedziona przy pomocy zasady odwzorowań zwięzających zastosowanej do (1.168). Sytuacja w  $D_d$  jest analogiczna. Więcej szczegółów można znaleźć w [89], [101] oraz [96].

Rozwiązanie układu diagonalnego (1.161) i podstawienie do równania wyjściowego daje analog wzoru

$$x_1 = K_1 \tilde{g}^+ + K_2 \tilde{g}^-, \quad (1.175)$$

w postaci

$$x_1 = K_1 \tilde{g}_u^+ + K_2 \tilde{g}_u^-, \quad \text{oraz} \quad x_1 = K_1 \tilde{g}_d^+ + K_2 \tilde{g}_d^- \quad (1.176)$$

gdzie  $g_u$  i  $g_d$  są związane z obszarami  $D_u$  i  $D_d$ . Odnotujmy, że tutaj także 'stałe' mogą zależeć od  $\lambda$ . Dokonując odpowiedniej normalizacji funkcji  $\tilde{g}_{u/d}^\pm$ , dostajemy

$$x_1 = \frac{\tilde{g}_u^+ + \tilde{g}_u^-}{2\sqrt{\pi}} = \frac{\tilde{g}_d^+ + \tilde{g}_d^-}{2\sqrt{\pi}}, \quad (1.177)$$

dla  $\lambda > 0$ ,  $1 > t > 0$ . Otrzymaliśmy zatem następujący wynik:

**Stwierdzenie 1.3.6** *Istnieją rozwiązania WKB  $g_u$ , analityczne w  $D_u$  oraz  $g_d$  analityczne w  $D_d$ , których formalne szeregi asymptotyczne są takie same, jak pierwotnie otrzymane rozwinięcia WKB.*

## 1.4. Operatory Stokes'a

Zjawisko Stokes'a wiąże się z normalizacją układów liniowych w otoczeniu nieregularnych punktów osobliwych. Szczegółowa analiza dla ogólnych układów znajduje się w Rozdziale 3. W tym paragrafie zajmiemy się wyznaczeniem operatorów Stokes'a dla asymptotycznych rozwiązań równania (1.1).

Niech  $\{e^t, e^{-t}\}$  będzie bazą rozwiązań równania  $\ddot{x} - x = 0$ . Funkcja  $x(t) := ae^t + be^{-t}$  także jest jego rozwiązaniem. Chcąc teraz opisać asymptotykę  $ae^t + be^{-t}$  dla  $t \in \mathbb{C}$  musimy zauważyć, że dla  $\text{Re } t > 0$  mamy  $x \sim ae^t$ , zaś przy  $\text{Re } t < 0$  zachodzi  $x \sim be^{-t}$ . Podobna sytuacja ma miejsce w przypadku ogólnym; zazwyczaj przy aproksymacji asymptotycznej pewne składniki dominują, zaś inne mogą być pominięte. Dodatkowe komplikacje mają związek z tym, że funkcje jednoznaczne (jak np. rozwiązania równania Bessela  $J_n$ ) mogą mieć szeregi asymptotyczne zawierające takie składniki jak np.  $t^{1/2}$ .

Dla rozwiązań równania (typu) Bessela taka sytuacja również ma miejsce. Rozwiązania asymptotyczne równania (1.13) mają postać

$$G^+ \sim \frac{e^{2i\sigma}}{\sqrt{i\sigma}} \sum_{j \geq 0} a_j (i\sigma)^{-j}, \quad (1.178)$$

$$G^- \sim \frac{e^{-2i\sigma}}{\sqrt{-i\sigma}} \sum_{j \geq 0} a_j (-i\sigma)^{-j}, \quad (1.179)$$

gdzie<sup>13</sup>  $\sigma^2 = \tau$ . Na mocy twierdzenia o normalizacji w sektorach (prównaj [89], [101] oraz Rozdział 3),  $G^+, G^-$  są analityczne w pewnych sektorach, wokół nieskończoności. Oznaczmy przez  $S_1$  i  $S_2$  sektory z wierzchołkami w nieskończoności, o rozwartości  $2\pi - \delta$ , przy pewnym  $\delta > 0$ , względem dwusiecznych, odpowiednio  $\arg \sigma = 0$  i  $\arg \sigma = \pi$ . Te dwusieczne będą dalej nazywane **promieniami podziału**. Niech  $S_u := S_1 \cap S_2$  w górnej półpłaszczyźnie  $\text{Im } \sigma > 0$  i  $S_d := S_1 \cap S_2$  dla  $\text{Im } \sigma < 0$ . Obszary  $S_u$  i  $S_d$  będziemy nazywać **sektorami przejściowymi**, a ich dwusieczne - **liniami Stokes'a**.

Będziemy dalej oznaczać rozwiązania  $G_1^+, G_1^-$  w sektorze  $S_1$  i  $G_2^+, G_2^-$  w sektorze  $S_2$ . Będziemy też pisać  $f \prec g$ , jeśli funkcja  $f$  jest asymptotycznie nieistotna w porównaniu z  $g$ . Mamy np.  $e^{-t} \prec e^t$  dla  $\text{Re } t > 0$  oraz  $G^+ \prec G^-$  dla  $\sigma \in S_u$ . Rozwinięcia<sup>14</sup>  $G_1^+, G_1^-$  i  $G_2^+, G_2^-$  są analityczne w  $S_u$  oraz  $S_d$  i jako takie, dają się zapisać w postaci kombinacji liniowych:  $G_2 = C_u G_1$  i  $G_1 = C_d G_2$ . Operatory liniowe  $C_u, C_d$ , określone odpowied-

<sup>13</sup>W dalszym ciągu, przy pominięciu argumentu, nie będziemy wprowadzać rozróżnienia między  $y(\tau)$  i  $y(\sigma^2)$ . Tak więc  $y$  będzie oznaczać  $y(\tau)$  jak też  $y(\sigma^2)$ .

<sup>14</sup>Dolny indeks oznacza przyporządkowanie rozwiązania asymptotycznego do danego sektora.

nio na  $S_u$  oraz  $S_d$  będziemy nazywać **macierzami Stokes'a**. Mamy

$$C_u = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{21} & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.180)$$

Operatory Stokes'a dla równania Bessela zostały wyznaczone w [95], metodą z książki [46] (patrz także [101]).

Analogiczne, chociaż trudniejsze, jest wyprowadzenie dla równań typu Bessela rzędu trzeciego, rozpatrywane dalej w Rozdziale 2. Dlatego w poniższym przypadku ograniczymy się do sformułowania wyników.

**Stwierdzenie 1.4.1** *Jeśli  $y_1, y_2$  oznaczają rozwiązania równania typu Bessela (1.13), wokół  $t = 0$ , a  $G^+, G^-$  są odpowiadającymi im szeregami asymptotycznymi (1.131), to zachodzą wzory*

$$y_1 \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (G_1^+ + G_1^-), \quad (1.181)$$

$$y_2 \sim -i\sqrt{\pi} G_1^+ \quad \text{mod } y_1, \quad (1.182)$$

w obszarze  $\arg \sigma = 0$  oraz

$$y_1 \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} (G_2^- - G_2^+), \quad (1.183)$$

$$y_2 \sim -i\sqrt{\pi} G_2^+ \quad \text{mod } y_1, \quad (1.184)$$

w obszarze  $\arg \sigma = \pi$ .

**Stwierdzenie 1.4.2** *Analogicznie, jeśli  $y'_1, y'_2$  oznaczają rozwiązania równania typu Bessela (1.14), wokół  $t = 1 = 1 - s$ , a  $H^+, H^-$  są odpowiadającymi im szeregami asymptotycznymi, to zachodzą wzory*

$$y'_1 \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}i} (H_1^- - H_1^+), \quad (1.185)$$

$$y'_2 \sim -\sqrt{\pi} H_1^+ \quad \text{mod } y'_1, \quad (1.186)$$

w obszarze  $\arg \sigma = 0$  oraz

$$y'_1 \sim -\frac{1}{2i\sqrt{\pi}} (H_2^- + H_2^+), \quad (1.187)$$

$$y'_2 \sim -\sqrt{\pi} H_2^- \quad \text{mod } y'_1, \quad (1.188)$$

w obszarze  $\arg \sigma = \pi$ .

*W szczególności otrzymujemy*

$$H_1^+(\sigma) = H_1^-(\sigma) = -y'_2/\sqrt{\pi} \quad \text{mod } y_1 \quad \arg \sigma = 0, \quad (1.189)$$

$$-H_2^+(\sigma) = H_2^-(\sigma) = y'_2/\sqrt{\pi} \quad \text{mod } y_1 \quad \arg \sigma = \pi, \quad (1.190)$$

$$-H_2^+(\sigma) = H_2^-(\sigma) = -y'_2/\sqrt{\pi} \quad \text{mod } y_1 \quad \arg \sigma = -\pi. \quad (1.191)$$

**Operatory Stokes'a dla równania hipergeometrycznego.** Przejdziemy teraz do głównego rezultatu tego rozdziału, czyli opisu asymptotyki równania z parametrem (1.1). Dokładniej, holomorfczne rozwiązanie wokół  $t = 0$  równania (1.1) daje się przedstawić jako

$$x_1(t, \lambda) = a_1(\lambda)x_1'(t, \lambda) + a_2(\lambda)x_2'(t, \lambda). \quad (1.192)$$

Pokażemy, że współczynnik  $a_2$  posiada reprezentację w postaci szeregu WKB dla  $\lambda \sim \infty$ . Podobnie jak w przypadku równań typu Bessela,<sup>15</sup> także dla rozwiązań równania (1.1) istnieją odpowiednie szeregi asymptotyczne, które pozwalają przedstawić je w odpowiednich sektorach wokół  $\infty$ . Stosując teraz operator  $\mathcal{H}_0$  (odpowiadający za określenie równoważności asymptotycznej rozwiązań równania Bessela z rozwiązaniami równania hipergeometrycznego) do wektora  $(G^+, G^-)$ , otrzymujemy wektory

$$\left\{ m_1^+(\lambda)g_u^+ \quad , \quad m_1^-(\lambda)g_u^- + m_1(\lambda)g_u^+ \right\}, \quad (1.193)$$

$$\left\{ n_1^+(\lambda)g_d^+ + n_1(\lambda)g_d^- \quad , \quad n_1^-(\lambda)g_d^- \right\}, \quad (1.194)$$

gdzie  $g_{u/d}^\pm$  oznaczają odpowiednie szeregi WKB dla (1.1) ze Stwierdzenia 1.3.6 i  $m_1^\pm, n_1^\pm$  są funkcjami holomorfcznymi w odpowiednich obszarach. Równość dająca (1.193) zachodzi w

$$D_u \cap \{\lambda\sqrt{t} \in S_1\} \cap \{t < \gamma\}, \quad (1.195)$$

gdzie  $D_u$  jest zbiorem zdefiniowanym w (1.171). Ponadto założmy, że  $\gamma > \epsilon$  (gdzie  $\epsilon$  występuje w definicji  $D_u$ ). Podobnie określamy odpowiedni podzbiór  $D_d$ , w którym (po zadziałaniu operatorem  $\mathcal{H}_0$ ) zachodzi analogiczny do (1.193) wzór na przedstawienie rozwiązań WKB. Przy uwzględnieniu relacji współczynników  $m$  i  $n$ , zachodzących przy sprzężeniu zespolonym oraz normalizacji czynnikiem  $2\sqrt{\pi}$ , otrzymujemy

$$2\sqrt{\pi} x_1 = g_u^+ + g_u^- = g_d^+ + g_d^-. \quad (1.196)$$

Dla  $t, \lambda > 0$  to oznacza, że

$$m_1^- = 1, \quad m_1^+ + m_1 = 1 \quad (1.197)$$

oraz

$$n_1^- = 1, \quad n_1^+ + n_1 = 1. \quad (1.198)$$

Wynika stąd, iż pozostaje tylko wyznaczyć 'wolny' wyraz, który może być wybrany jako  $m_1^+$ .

Analogiczne obliczenia mogą być przeprowadzone w otoczeniu  $t = 1 = 1 - s$ . Otrzymujemy wówczas następujące relacje wiążące rozwinięcia  $h_{u/d}^\pm$  i  $g_{u/d}^\pm$ , gdzie

$$h_{u/d}^\pm(s, \lambda) = \pm i\lambda e^{\mp i\pi\lambda} g_{u/d}^\pm(1 - s, \lambda). \quad (1.199)$$

<sup>15</sup>Jak wspomniano już wcześniej, rozwiązania równania (1.1) są asymptotycznie równoważne z funkcjami typu Bessela od argumentu  $2\lambda\sqrt{t}$ .

Ostatecznie, po stosownej analizie (patrz [95]), otrzymujemy następujący wynik.

**Twierdzenie 1.4.1** *Funkcja tworząca  $f$  ciągu  $\zeta(\{2\}^n)$  posiada reprezentację w postaci sumy*

$$F^+(\lambda) + F^-(\lambda), \quad \text{gdzie} \quad \lambda \sim \infty, \quad (1.200)$$

i gdzie  $F^\pm$  są jednowartościowe w otoczeniu nieskończoności. To implikuje, że  $f$  ma postać

$$\frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda}. \quad (1.201)$$

Ponadto

$$F^\pm(\lambda) = \pm \frac{e^{\pm i\pi\lambda}}{2i\pi\lambda}. \quad (1.202)$$

*Dowód.* Pierwsze stwierdzenie było już udowodnione powyżej (patrz [95]). Aby dowieść drugiego, zauważmy, że zbiorem zer funkcji tworzącej

$$f_2(\lambda) = \prod_{n>0} \left(1 - \frac{\lambda^2}{n^2}\right) \quad (1.203)$$

ciągu  $\zeta(\{2\}^n)$ , jest dokładnie  $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Wobec tego funkcja

$$\frac{f_2(\lambda)\lambda}{\sin \pi \lambda} \quad (1.204)$$

jest całkowita. Ale za sprawą pierwszej części tezy twierdzenia, jest ona ograniczona, zatem, na mocy twierdzenia Liouville'a - stała. Wyznaczenie jej wartości w zerze, równej  $1/\pi$ , kończy dowód twierdzenia.  $\square$

**Uwaga 1.4.1** *Powyższe twierdzenie jest ważne głównie dlatego, że pozwala uniknąć wykorzystania relacji dualności, wiążących rozwiązania równania (1.1) w otoczeniu zera i jedynek. Są to wzory właściwe jedynie dla klasycznych funkcji hipergeometrycznych i wydaje się, iż nie mają one analogów np. dla rozwiązań równań (4) rzędów  $n > 2$ .*

**Uwaga 1.4.2** *Funkcje  $f$  i  $F^\pm$  posiadają jeszcze jedną, ciekawą własność. Mamy*

$$\det \begin{bmatrix} f & \partial_\lambda f & \partial_\lambda^2 f \\ F^+ & \partial_\lambda F^+ & \partial_\lambda^2 F^+ \\ F^- & \partial_\lambda F^- & \partial_\lambda^2 F^- \end{bmatrix} = 0. \quad (1.205)$$

*Jest to meromorficzne równanie z nieregularnym punktem osobliwym w  $\lambda = \infty$ . Dokładniej, równanie to ma postać*

$$\partial_\lambda^2 f + \frac{2\partial_\lambda f}{\lambda} + \pi^2 f = 0, \quad (1.206)$$



którego bazą rozwiązań jest układ

$$\frac{\sin \pi \lambda}{\lambda}, \quad \frac{\cos \pi \lambda}{\lambda}. \quad (1.207)$$

Zauważmy, że  $-(\cos \pi \lambda)/\lambda$  pojawiło się już w Uwadze 1.3.1 jako wartość drugiego rozwiązania  $x_2(t, \lambda) + \varphi(\lambda) x_1(t, \lambda)$  w punkcie  $t = 1$ ; ponadto  $\varphi(\lambda)$  jest prostą funkcją wymierną. Być może analogiczna własność przysługuje innym równaniom hipergeometrycznym związanym z funkcjami tworzącymi wielokrotne wartości zeta.



## Rozdział 2

# Analiza asymptotyczna równania dla funkcji tworzącej związanej z $\zeta(3)$

W tym rozdziale zajmiemy się analizą zachowania rozwiązań równania

$$(1-t)\partial_t (t\partial_t)^2 x + \lambda^3 x = 0, \quad (2.1)$$

dla  $\lambda \sim \infty$ . Tak jak równanie (1.1), jest to równanie hipergeometryczne i jego (holomorficzne w otoczeniu zera) rozwiązanie ma postać

$$\begin{aligned} {}_3F_2 \left( \begin{matrix} -\mu\lambda, -\mu^2\lambda, -\lambda \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| t \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mu\lambda)_n (-\mu^2\lambda)_n (-\lambda)_n}{(n!)^3} t^n \\ &= 1 - \lambda^3 t + \frac{\lambda^6 t^2}{8} - \dots, \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie  $\mu = (-1 + \sqrt{-3})/2$  jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia trzeciego z jedynki. Zbadanie zachowania asymptotycznego rozwiązań równania (2.1) jest przedmiotem pracy [97]. Okazuje się, że przy zastosowaniu metod asymptotycznych analogicznych jak w przypadku równania (1.1), otrzymujemy całkiem inne wyniki. Jest to związane z występowaniem nietrywialnych operatorów Stokes'a, co jest spowodowane niejednoznacznością odpowiednich rozwinięć dla  $\tau = \lambda^3 t$  wokół nieskończoności.

Poniżej przedstawimy analizę asymptotyczną rozwiązań równania (2.1) posługując się metodami teorii całek oscylujących i opiszemy działania oraz amplitudy odpowiednich rozwinięć WKB. W wielu miejscach będziemy się opierać na równoważności asymptotycznej rozwiązań (2.1) z odpowiednimi funkcjami typu Bessela (patrz [96] oraz Twierdzenie 3.3.1 w Rozdziale 3).

W przedostatnim paragrafie zajmiemy się wyznaczeniem operatorów Stokes'a dla równań typu Bessela, a następnie dokonamy analizy rozwinięć WKB dla rozwiązań równania (2.1) względem  $t = 0$  oraz  $t = 1 - s$ . Są

one powiązane diagonalnymi przekształceniami liniowymi. Okazuje się, iż (asymptotycznie) rozwiązanie równania (2.1) posiada przedstawienie  $x_1 = C(\lambda) x'_3 \pmod{(x'_1, x'_2)}$ , gdzie funkcja  $C$  może być przedstawiona za pomocą składników WKB, postaci

$$F_i := \lambda^{-3/2} e^{2\pi\mu^i\sqrt{3}\lambda} \times \{1 + O(\lambda^{-1/2})\}, \quad \text{dla } i \in \{0, 1, 2\}, \quad (2.3)$$

analogicznych jak w wypadku (1.1), ale o innych własnościach asymptotycznych. Ponadto  $C(\lambda)$  spełnia w otoczeniu  $\lambda = \infty$  równanie różniczkowe liniowe<sup>1</sup> szóstego rzędu, z nieregularną osobliwością w  $\lambda = \infty$ . Z uwagi na to, że funkcja  $C$  jest całkowita, jest możliwe, że to równanie ma w zerze regularną osobliwość. Wówczas  $C$  spełniałoby równanie

$$\left( \sum_{j=0}^6 p_j(\lambda) \partial_\lambda^j \right) F_i = 0, \quad (2.4)$$

gdzie współczynniki  $p_j$  są elementami  $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{3})[\lambda^{-1}]$ , określonej postaci.

Na koniec warto wspomnieć, że równania bardzo zbliżone do (2.1), pojawiają się w różnych działach fizyki i matematyki współczesnej, w szczególności w teorii deformacji i geometrii algebraicznej. W pracy [12] autorzy rozważają równanie

$$\begin{aligned} & \left[ (t^4 - 34t^3 + t^2) \partial_t^3 + (6t^3 - 153t^2 + 3t) \partial_t^2 + \right. \\ & \left. (7t^2 - 112t + 1) \partial_t + t - 5 \right] x = 0, \end{aligned} \quad (2.5)$$

związanie ściśle z dowodem Apery'ego niewymierności  $\zeta(3)$ , które okazuje się być równaniem Picarda-Fuchsa wywodzącym się z badania okresów odpowiednich powierzchni K3. Patrz też [3] i [79].

W pracy [68] S.-T. Yau oraz B. Lian, analizując rodzinę jednoparametrowych deformacji powierzchni K3, pochodzące od odwzorowania lustrzanego, rozważają równanie Picarda-Fuchsa

$$\left[ (t\partial_t)^3 - t \sum_{i=0}^3 r_i (t\partial_t)^i \right] x = 0, \quad (2.6)$$

które różni się od (2.1) współczynnikami  $r_i$ .

Autorzy [12] opisali monodromię oraz różniczkowe grupy Galois funkcji hipergeometrycznych typu  ${}_{p+1}F_p$ . W szczególności zbadano, dla jakich wartości parametrów  ${}_{p+1}F_p$  jest algebraiczna. Ograniczenia nałożone na punkty osobliwe (nie dopuszcza się logarytmów) wykluczają jednak równania typu (2.1).

---

<sup>1</sup>Patrz 2.5 oraz [97].

## 2.1. Rozwiązania w otoczeniu punktów osobliwych

Podobnie jak w przypadku równania (1.1), w otoczeniu  $t = 0$  mamy jedno rozwiązanie holomorficzne równania (2.1), którego rozwinięcie można znaleźć podstawiając do (2.1) szereg

$$1 + \sum_{n>0} c_n t^n. \quad (2.7)$$

Otrzymujemy równanie rekurencyjne  $(n+1)^3 c_{n+1} + (\lambda^3 - n^3) c_n = 0$ , którego rozwiązaniem jest

$$x_1(t, \lambda) = {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda, \lambda \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| t \right). \quad (2.8)$$

Pozostałe rozwiązania są postaci

$$x_2(t, \lambda) = \log(\lambda^3 t) \cdot x_1(t, \lambda) + w_2(t, \lambda), \quad (2.9)$$

$$x_3(t, \lambda) = \frac{1}{2} \log^2(\lambda^3 t) \cdot x_1(t, \lambda) + \log(\lambda^3 t) \cdot w_2(t, \lambda) + w_3(t, \lambda), \quad (2.10)$$

gdzie  $w_2$  i  $w_3$  są analityczne w otoczeniu zera.

Równanie (2.1) we współrzędnych  $s = 1-t$ , (oraz  $\partial_s = -\partial_t$ ) przyjmuje postać

$$\left\{ -s\partial_s [(1-s)\partial_s]^2 + \lambda^3 \right\} x = 0. \quad (2.11)$$

Jego (niezależnymi) rozwiązaniami są

$$x'_1(s, \lambda) = \lambda^{3/2} [s + O(s^3)], \quad (2.12)$$

$$x'_2(s, \lambda) = \frac{1}{2} \lambda^3 [s^2 + O(s^4)], \quad (2.13)$$

$$x'_3(s, \lambda) = \log(\lambda^3 s^2) \cdot x'_2 + w'_3 = 4 + O(s), \quad (2.14)$$

gdzie  $w'_3$  jest funkcją analityczną.

**Stwierdzenie 2.1.1** *Mamy  $x' = Mx$ , gdzie macierz  $M \in GL_3(\mathbb{C}) \otimes H(\mathbb{C})$  jest funkcją całkowitą.*

**Stwierdzenie 2.1.2** *Zapiszmy*

$$x_1(t, \lambda) = \sum_{i=1}^3 a_i(\lambda) x'_i(1-t, \lambda). \quad (2.15)$$

Wówczas  $f_3 = 4a_3$ , gdzie  $f_3$  oznacza funkcję tworzącą ciąg  $\zeta(\{3\}^n)$ .

**Uwaga 2.1.1 (Wielokrotne polilogarytmy)** *Jeśli zapiszemy*

$$x_j(t, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \hat{x}_{j,n}(t) x^{3n} \quad (2.16)$$

przy  $j \in \{1, 2, 3\}$ , to wówczas znajdziemy

$$\hat{x}_{1,0}(t) = 1, \quad (2.17)$$

$$\hat{x}_{2,0}(t) = \log t, \quad (2.18)$$

$$\hat{x}_{3,0}(t) = \frac{1}{2} (\log t)^2, \quad (2.19)$$

a kolejne współczynniki są określone przez rekurencję

$$\hat{x}_{j,n+1}(t) = \int_T \frac{dt_1}{t_1} \frac{dt_2}{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \hat{x}_{j,n}(t_3), \quad (2.20)$$

gdzie  $T = \{(t_1, t_2, t_3) : 0 < t_3 < t_2 < t_1 < t\}$ . Łatwe oszacowania pokazują, że  $\hat{x}_{j,n} \sim 1/n!$ . Współczynniki  $x_j$ , podobnie jak w wypadku rozwiązań (1.1), wyrażają się przez wielokrotne polilogarytmy:

$$\hat{x}_{1,n}(t) = \text{Li}_{\{3\}^n}(t), \quad (2.21)$$

$$\hat{x}_{2,n}(t) = \log t \cdot \text{Li}_{\{3\}^n}(t) - 3 \sum_{j=0}^{n-1} \text{Li}_{\{3\}^j, 4, \{3\}^{n-j-1}}(t), \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_{3,n}(t) = & \frac{1}{2} (\log t)^2 \cdot \text{Li}_{\{3\}^n}(t) - 3 \log t \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \text{Li}_{\{3\}^j, 4, \{3\}^{n-j-1}}(t) + \\ & 6 \sum_{j=0}^{n-1} \text{Li}_{\{3\}^j, 5, \{3\}^{n-j-1}}(t), \end{aligned} \quad (2.23)$$

co po podstawieniu  $t = 1$ , daje (z dokładnością do czynnika logarytmicznego) wzory analogiczne jak w przypadku (1.1):

$$\hat{x}_1(1, \lambda) = f_3(\lambda) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \zeta(\{3n\}) \lambda^{3n}, \quad (2.24)$$

$$-\hat{x}_2(1, \lambda) = 3\lambda^3 f_3(\lambda) \cdot \sum_{n > 0} \zeta(3n+1) \lambda^{3n}, \quad (2.25)$$

$$\hat{x}_3(1, \lambda) = 6\lambda^3 f_3(\lambda) \cdot \sum_{n > 0} \zeta(3n+2) \lambda^{3n}. \quad (2.26)$$

Analogiczna sytuacja ma miejsce w otoczeniu  $s = 1 - t = 0$ , gdzie mamy kolejne ciekawe wzory:

$$\hat{x}'_{1,0}(s) = -\log(1-s) = \text{Li}_1(s), \quad (2.27)$$

$$\hat{x}'_{2,0}(s) = \frac{\log^2(1-s)}{2} = \text{Li}_{1,1}(s), \quad (2.28)$$

$$\hat{x}'_{3,0}(s) = 1 \quad (2.29)$$

oraz

$$\hat{x}'_{1,n}(s) = \text{Li}_{\{2,1\}^n,1}(s), \quad (2.30)$$

$$\hat{x}'_{2,n}(s) = \text{Li}_{\{1,2\}^n,1,1}(s), \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}'_{3,n}(s) &= \log s \cdot \text{Li}_{\{1,2\}^n,1,1}(s) - \text{Li}_{\{1,2\}^n,2,1}(s) - \text{Li}_{\{1,2\}^n,1,2}(s) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \text{Li}_{\{1,2\}^j, \{2,2\}, \{1,2\}^{n-j-1}, 1, 1}(s) \\ &\quad - \sum_{j=0}^{n-1} \text{Li}_{\{1,2\}^j, \{1,3\}, \{1,2\}^{n-j-1}, 1, 1}(s). \end{aligned} \quad (2.32)$$

**Uwaga 2.1.2** *Obok (2.1) można rozpatrywać rozwiązania równania*

$$\left\{ [(1-t)\partial_t]^2 t\partial_t + \lambda^3 \right\} z = 0, \quad (2.33)$$

związanego z funkcją tworzącą ciąg  $\zeta(\{1,2\}^n)$ . Holomorficzne w zerze rozwiązanie (2.33) ma postać

$$z_1(t, \lambda) = 1 + \sum_{n>0} (-1)^n \text{Li}_{\{1,2\}^n}(t) \lambda^{3n}. \quad (2.34)$$

Ze wzoru na odbicie (patrz [94], tzw. MZV duality) dla wielokrotnych wartości zeta wynika, że dla każdego  $n$  zachodzi wzór  $\zeta(\{1,2\}^n) = \zeta(\{3\}^n)$ , skąd wynika równość  $f(\lambda) = z_1(1, \lambda)$ .

Między rozwiązaniami równań (2.1) i (2.33) istnieje ponadto relacja

$$z(s, \lambda) = (s\partial_s)^2 x(s, -\lambda). \quad (2.35)$$

Jest ona analogiem wzoru<sup>2</sup>  $x'(s, \lambda) = -s\partial_s x(s, -\lambda)$ , gdzie tym razem  $x$  i  $x'$  oznaczają rozwiązania klasycznego równania hipergeometrycznego (1.1) z Rozdziału 1. Różnica polega na tym, że w drugiej tożsamości mamy do czynienia dwa razy z tym samym równaniem, co odzwierciedla niezmienniczość (1.1) przy działaniu odbicia. Ten fakt był wykorzystany do uzasadnienia wzoru  $f_2(\lambda) = (\pi\lambda)^{-1} \sin \pi\lambda$ . Ta sama własność może posłużyć także do uzyskania tożsamości<sup>3</sup>

$$f_{1,3}(\sqrt{2}\lambda) = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda} \frac{\sinh \pi\lambda}{\pi\lambda} = f_4(\lambda), \quad (2.36)$$

gdzie  $f_2$ ,  $f_4$  i  $f_{1,3}$  oznaczają funkcje tworzące ciągów, odpowiednio  $\zeta(\{2\}^n)$ ,  $\zeta(\{4\}^n)$  oraz  $\zeta(\{1,2\}^n)$ .

**Uwaga 2.1.3** *W pracy [98] znajduje się dowód tożsamości*

$$\zeta(\{3\}^r) = 8^r \sum_{0 < m_1 < n_1 \dots < m_r < n_r} \frac{(-1)^{n_1 + \dots + n_r}}{m_1 n_1^2 \dots m_r n_r^r} := \zeta(\{1, \bar{2}\}^r), \quad (2.37)$$

<sup>2</sup> Jest to dualność dla  ${}_2F_1$  z Rozdziału 1.

<sup>3</sup> Powyższy wzór został zaproponowany przez D. Zagiera, a udowodniony przez Broadhursta. Patrz np. [62].

postulowanej w [15]. Liczby  $\zeta(\{1, \bar{2}\}^r)$  stanowią przykłady tzw. **alternujących sum Eulera**. Ich funkcja tworząca jest związana z (holomorficznym w zerze) rozwiązaniem następującego równania szóstego rzędu

$$\left\{ [(1-t)\partial_t]^2 t \partial_t [(1+t)\partial_t]^2 t \partial_t + \lambda^3 \right\} z = 0. \quad (2.38)$$

Jest to równanie Picarda-Fuchsa, którego każde rozwiązanie jest holomorficzne w  $\mathbb{C}P^1 \setminus \{-1, 0, 1\}$ . Ma ono dwa rozwiązania analityczne w zerze. Jedno, to wspomniana wyżej funkcja  $f_{1, \bar{2}} := z_1$ , a drugie

$$z_2 = \sum_{0 < m < n} \frac{(-t)^n}{mn^2} + O(\lambda^6). \quad (2.39)$$

Zachodzi  $f_{1, \bar{2}}(\lambda) = z_1(1, \lambda) - \lambda^3 z_2(1, \lambda)$ . Wynik z [98] implikuje tożsamość

$$\begin{aligned} f_{1, \bar{2}}(\lambda) &:= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \zeta(\{1, \bar{2}\}) \lambda^{3n} \\ &= f_3\left(\frac{\lambda}{2}\right) = \prod_{n > 0} \left(1 - \frac{\lambda^3}{(2n)^3}\right). \end{aligned} \quad (2.40)$$

W pracy [98] udowodniono także kilka innych, podobnych wzorów.

## 2.2. Rozwinięcia asymptotyczne hipergeometrycznych funkcji konfluentnych typu Bessela i aproksymacja fazy stacjonarnej

Podobnie jak w przypadku rozwiązań równania (1.1), badanie asymptotyki  $x_1$  sprowadza się do porównania z odpowiednimi rozwiązaniami równań typu Bessela (rzędu trzeciego) z regularnym punktem osobliwym w zerze i nieregularnym w nieskończoności.

**Stwierdzenie 2.2.1** Dla  $\lambda \sim \infty$ , ale przy  $\tau = \lambda^3 t$  ograniczonym, zachodzi

$$x_1(t, \lambda) \sim \sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda^3 t)^n}{(n!)^3} = {}_0F_2\left(1, 1 \mid -\lambda^3 t\right) =: y_1. \quad (2.41)$$

Funkcja  ${}_0F_2$  spełnia równanie

$$\left[ (\tau \partial_\tau)^3 + \tau \right] y = 0. \quad (2.42)$$

Pozostałe rozwiązania równania (2.42) są postaci

$$y_2(\tau) = \log \tau y_1(\tau) + z_2(\tau), \quad (2.43)$$

$$y_3(\tau) = \frac{1}{2} \log^2 \tau \cdot y_1(\tau) + \log \tau \cdot z_2(\tau) + z_3(\tau), \quad (2.44)$$

gdzie  $z_2$  i  $z_3$  są funkcjami całkowitymi.



Podobna sytuacja ma miejsce dla  $s = 1 - t$  bliskiego zeru.

**Stwierdzenie 2.2.2** Dla  $\lambda \sim \infty$ , ale przy  $\tau = \lambda^3 s^2$  ograniczonym, zachodzi

$$\begin{aligned} x'_1(s, \lambda) &\sim \sqrt{\lambda^3 s^2} \left( 1 + \sum_{n>0} \frac{(\lambda^3 s^2)^n}{(2n+1)!(2n-1)!!} \right) =: y'_1(\lambda^3 s^2), \\ x'_2(s, \lambda) &\sim 2 \sum_{n>0} \frac{(\lambda^3 s^2)^n}{(2n)!(2n-2)!!} =: y'_2(\lambda^3 s^2). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Funkcje  $y'_1$  i  $y'_2$  spełniają równanie

$$\left[ 8\sqrt{\tau} (\sqrt{\tau} \partial_\tau)^3 - 1 \right] y' = 0. \quad (2.46)$$

Trzecie, liniowo niezależne, rozwiązanie równania (2.46) jest postaci

$$y'_3(\tau) = \log \tau \cdot y_2(\tau) + z'_3(\tau), \quad (2.47)$$

$z'_3$  jest całkowita.

Ma miejsce następujący wynik, analogiczny do Stwierdzenia 1.2.1. Jest on wnioskiem z Twierdzenia 3.3.1.

**Stwierdzenie 2.2.3** Istnieją macierze  $\mathcal{H}_0(t, \lambda^{-1})$  oraz  $\mathcal{H}_1(s, \lambda^{-1})$ , określone i analityczne w otoczeniu  $(0, 0)$  i takie, że

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \mathcal{H}_0 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

oraz

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \mathcal{H}_1 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

**Uwaga 2.2.1** Rozwiązania  $x_j$  oraz  $x'_j$  można uzyskać z  $y_j$  i  $y'_j$  metodą rozwiązania równań w wariacjach ze względu na mały parametr  $\lambda^{-1}$ .

**Wzory całkowe.** Podamy teraz odpowiednie wzory całkowe na funkcje typu Bessela.

**Stwierdzenie 2.2.4** Mamy

$$y_1(\tau) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \exp \left\{ \tau^{1/3} \left( 2ie^{is/2} \sin t + e^{-is} \right) \right\} dt ds \quad (2.50)$$

oraz

$$\begin{aligned}
y_1'(\tau) &= -\frac{\tau^{1/6}}{8\pi} \int_{-\gamma} \frac{dt}{(1-t)^{3/2}} \\
&\quad \times \int_{-\pi}^{\pi} \sinh\left(\tau^{1/3} e^{is/2}\right) \exp\left(\frac{\tau^{1/3} e^{-is}}{2} - \frac{is}{2}\right) ds, \\
y_2'(\tau) &= \frac{\tau^{1/3}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sinh\left(\tau^{1/3} e^{is/2}\right) \exp\left(\frac{\tau^{1/3} e^{-is}}{2} - is\right) ds,
\end{aligned}$$

gdzie  $\gamma$  jest drogą o początku i końcu w zerze oraz obiegającą  $t = 1$ .

Dowód przebiega analogicznie jak w przypadku odpowiadających wzorów na funkcje Bessela i funkcje hipergeometryczne.

Ze wzoru fazy stacjonarnej (patrz dodatek A) otrzymujemy aproksymacje asymptotyczne.

**Stwierdzenie 2.2.5** *Przy  $\tau \sim \infty$  mamy*

$$y_1(\tau) \sim -\frac{\tau^{-1/3}}{\sqrt{3}\pi} \left( e^{-3\tau^{1/3}} + \mu e^{-3\mu\tau^{1/3}} + \mu^2 e^{-3\mu^2\tau^{1/3}} \right) \quad (2.51)$$

oraz

$$y_1'(\tau) \sim \frac{\tau^{1/6}}{\sqrt{3}} \left( e^{3\tau^{1/3}/2} + \mu^2 e^{3\mu\tau^{1/3}/2} + \mu e^{3\mu^2\tau^{1/3}/2} \right), \quad (2.52)$$

$$y_2'(\tau) \sim \sqrt{\frac{8\tau^{1/3}}{3\pi}} \left( e^{3\tau^{1/3}/2} - \mu^2 e^{3\mu\tau^{1/3}/2} - \mu e^{3\mu^2\tau^{1/3}/2} \right), \quad (2.53)$$

gdzie  $\mu = (-1 + \sqrt{-3})/2$ . Tylko dwa składniki dominują dla  $\arg \tau$  ustalonego (i te składniki są prawidłowe).

**Uwaga 2.2.2** *Dominacja asymptotyczna tylko wybranych składników w powyższych wzorach bierze się stąd, iż dla całek z fazą typu **przełęczny**, pewne punkty krytyczne mają istotny wkład, zaś inne (eksponencjalnie) mały. Dokładniej, jeśli w całce oscylującej rozpatrujemy  $e^{i\lambda\phi}$ , gdzie wartościami fazy w punktach krytycznych są np.  $i$ ,  $i\mu$  i  $i\bar{\mu}$ , to wtedy  $e^{i\lambda i} = e^{-\lambda}$  i mamy  $e^{-\lambda} \prec e^{i\mu\lambda}$  oraz  $e^{-\lambda} \prec e^{i\bar{\mu}\lambda}$ .*

Istnieje analogiczny (ale bardziej skomplikowany) wzór dla  $y_3$ . Uzyskuje się go przy zastosowaniu zaburzenia we wzorach całkowych na rozwiązania równań typu Bessela, analogicznie jak w Rozdziale 1.

## 2.3. Rozwinięcia WKB

Poniżej zaprezentujemy trzy sposoby analizy rozwinięć WKB: formalny, z użyciem aproksymacji fazy stacjonarnej oraz za pomocą sprowadzania do postaci normalnej.

Stosując do równania (2.1) metodę WKB, czyli podstawiając

$$x = e^{\lambda S(t)} \cdot \psi(t, \lambda), \quad (2.54)$$

otrzymujemy równanie Hamiltona-Jacobiego:

$$(1-t)t^2 (\dot{S})^3 + 1 = 0, \quad (2.55)$$

którego rozwiązaniami są trzy niekompletne funkcje beta

$$S(t) = -\mu^j \int_0^t \frac{du}{u^{2/3}(1-u)^{1/3}} =: -\mu^j S_3(t), \quad (2.56)$$

gdzie  $j \in \{0, 1, 2\}$  oraz

$$\mu = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad (2.57)$$

jest pierwiastkiem pierwotnym z jedynki, stopnia trzeciego.

Z porównania współczynników przy niższych potęgach<sup>4</sup>  $\lambda$  w

$$\lambda^3 \left[ (1-t)t^2 \dot{S} + 1 \right] \psi + \lambda^2 \frac{1-t}{t} L_1 \psi + \lambda \frac{1-t}{t} L_2 \psi + \frac{1-t}{t} (t\partial_t)^3 \psi = 0, \quad (2.58)$$

otrzymujemy kolejne równania transportu

$$L_1 \psi_0 = 0, \quad (2.59)$$

$$L_1 \psi_1 = L_2 \psi_0, \quad (2.60)$$

$$L_1 \psi_{j+2} = L_2 \psi_{j+1} - (t\partial_t)^3 \psi_j, \quad \text{dla } j \geq 0, \quad (2.61)$$

...

gdzie operatory  $L_1$  i  $L_2$  są zdefiniowane za pomocą wzorów

$$L_1 = 3 \left[ (t\dot{S})^2 \cdot (t\partial_t) + \frac{(t\partial_t)(t\dot{S})^2}{2} \right], \quad (2.62)$$

$$L_2 = 3 \left[ (t\dot{S}) \cdot (t\partial_t)^2 + t^2 \dot{S} + t^3 \ddot{S} + t^2 \ddot{S} \right] + t\dot{S} + t^3 \ddot{S}. \quad (2.63)$$

Podobnie jak w przypadku równania (1.1) wybieramy rozwiązanie równania jednorodnego w formie

$$\psi_0 = \left( \frac{1-t}{t} \right)^{1/3} := \frac{1}{u}. \quad (2.64)$$

<sup>4</sup>Podobnie jak w Rozdziale 1, porównujemy kolejne współczynniki w rozwinięciu  $\psi(t, \lambda) = \psi_0(t) + \psi_1(t)\lambda^{-1} + \dots$

W nowej zmiennej zachodzi wzór

$$\exp \lambda S(t) = \left[ (1+u)(1+\mu u)^{\mu^2}(1+\mu^2 u)^{\mu} \right]^{\lambda}. \quad (2.65)$$

Stosując procedurę rekurencyjną, przy zastosowaniu odpowiedniego operatora całkowego, możemy wyznaczyć wszystkie  $\psi_j$ . Ma miejsce następujący fakt.

**Stwierdzenie 2.3.1** *Dla każdego  $j$  współczynniki  $\psi_j$  można wybrać w postaci wielomianów Laurenta od  $u$ , przy czym poza  $\psi_0$ , nie występuje w nich wyraz  $u^{-1}$ .*

**Definicja 2.3.1** *Otrzymane powyżej szeregi oznaczmy przez*

$$g_0^{\mu^j} = e^{-\mu^j \lambda S_3(t)} \cdot \psi_{\mu^j}(t, \lambda), \quad j \in \{0, 1, 2\} \quad (2.66)$$

*i będziemy je nazywać **testowymi rozwiązaniami WKB**.*

Wykorzystamy teraz odpowiednie wzory całkowe na funkcje hipergeometryczne, w celu zastosowania metody fazy stacjonarnej.

**Stwierdzenie 2.3.2** *Zachodzi wzór*

$$x_1(t, \lambda) = -\frac{1}{4\pi^2} \iint_{\gamma_1 \times \gamma_2} \varphi_t(u, v)^{\lambda} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}, \quad (2.67)$$

gdzie

$$\varphi_t(u, v) := (1 - t^{1/3}u) \left(1 - t^{1/3}v/\sqrt{u}\right)^{\mu} \left(1 - t^{1/3}/v\sqrt{u}\right)^{\mu^2} \quad (2.68)$$

*i gdzie  $\gamma_1 \times \gamma_2$  jest cyklem homologicznym z torusem domkniętym zawartym w brzegu polidysku jednostkowego  $D^1 \times D^1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ .*

*Dowód.* Uzasadnienie powyższego wzoru wynika z formuły<sup>5</sup>

$${}_3F_2 \left( \begin{matrix} x, y, z \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| t \right) = \iint_{\gamma_1 \times \gamma_2} \varphi_1(u, v)^{-x} \cdot \varphi_2(u, v)^{-y} \cdot \varphi_3(u, v)^{-z} \frac{du}{u} \frac{dv}{v}, \quad (2.69)$$

gdzie

$$\varphi_1(u, v) = 1 - t^{1/3}u, \quad (2.70)$$

$$\varphi_2(u, v) = 1 - \frac{t^{1/3}v}{\sqrt{u}}, \quad (2.71)$$

$$\varphi_3(u, v) = 1 - \frac{t^{1/3}}{v\sqrt{u}}, \quad (2.72)$$

<sup>5</sup>Patrz też Dodatek B oraz [97].

i gdzie  $\gamma_1$  i  $\gamma_2$  są krzywymi jak w tezie stwierdzenia, wynikającej z ogólnego wzoru z Rozdziału B oraz z zależności wyniku całkowania funkcji holomorficzej (wielu zmiennych) po nietrywialnym cyklu jedynie od klasy homologii tego cyklu.  $\square$

Całka (2.68) jest typu oscylującego, z fazą

$$\phi(t, \lambda) = \log(1 - t^{1/3}u) + \mu \log(1 - t^{1/3}v) + \mu^2 \log(1 - t^{1/3}w), \quad (2.73)$$

przy warunku  $u \cdot v \cdot w = 1$ . Zakładamy też, że  $0 < t < 1$ .

**Stwierdzenie 2.3.3** *Zdefiniowana powyżej faza  $\phi$  ma trzy (warunkowe) Morse'owskie punkty krytyczne*

$$u_j = \frac{1}{t^{1/3} + \mu^j s^{1/3}}, \quad (2.74)$$

$$v_j = \frac{1}{t^{1/3} + \mu^{j-1} s^{1/3}}, \quad (2.75)$$

$$w_j = \frac{1}{t^{1/3} + \mu^{j+1} s^{1/3}}, \quad (2.76)$$

gdzie  $j \in \{0, 1, 2\}$ . Odpowiadają one sześciu punktom krytycznym fazy w całce (2.68).

Łatwy dowód Stwierdzenia, który można znaleźć w [97], opuszczamy.

Stosując do (2.68) metodę fazy stacjonarnej otrzymujemy dla  $\lambda \sim \infty$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi^2} \iint e^{-\lambda q(x,y)} dx dy &\sim \frac{1}{4\pi^2} e^{-\mu^j \lambda S(t)} \times \frac{2\pi}{\sqrt{\det(\lambda q)}} \\ &= 3 \frac{e^{-\mu^j \lambda S(t)}}{2\sqrt{3}\pi} \times \left\{ \left( \frac{1-t}{t} \right)^{1/3} \frac{1}{\mu^j \lambda} + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (2.77)$$

gdzie  $q$  jest odpowiednią formą kwadratową (patrz [97]).

Wzór ten, z dokładnością do stałej, pozostaje w zgodności z rozwinięciami WKB analizowanymi na początku tego paragrafu.

**Uwaga 2.3.1** *Podobnie jak w wypadku rozwiązań równania (1.1), można obliczyć kolejne współczynniki rozwinięcia poprzez dokonanie odpowiedniej, naturalnej normalizacji oraz zastosowanie aparatu stosowanego przy analizie momentów miar gaussowskich. Oczywiście poziom komplikacji jest tu znacznie większy niż w przypadku (1.1). Wzór Wicka pozwala wyrazić*

wartość średnią  $\langle X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \rangle$  w terminach odpowiednich macierzy kowariancji. Jeśli  $j \in \{0, 1, 2\}$ , to mamy

$$\langle X^2 \rangle = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \mu^j \left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/3} \quad (2.78)$$

$$\langle Y^2 \rangle = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \mu^{j+1} \left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/3} \quad (2.79)$$

$$\langle Z^2 \rangle = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} \mu^{j+2} \left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/3} \quad (2.80)$$

$$\langle XY \rangle = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \mu^{j+2} \left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/3} \quad (2.81)$$

$$\langle XZ \rangle = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \mu^{j+1} \left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/3} \quad (2.82)$$

$$\langle YZ \rangle = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \mu^j \left( \frac{t}{1-t} \right)^{1/3}. \quad (2.83)$$

Tutaj,  $X, Y, Z$  pojawiają się w podstawieniu typu

$$\begin{aligned} u &= u_j \exp\left(\frac{X}{\sqrt{\lambda}}\right), \\ v &= v_j \exp\left(\frac{Y}{\sqrt{\lambda}}\right), \\ w &= w_j \exp\left(\frac{Z}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (2.84)$$

Obliczanie wyższych wyrazów asymptotyki jest karkołomne, chociaż nie występują tu żadne problemy teoretyczne.

Ostatecznie otrzymujemy

$$x_1 \sim \frac{g^1 + g^\mu + g^{\mu^2}}{\sqrt{3\pi}}, \quad (2.85)$$

gdzie  $g_{\mu^j} = D_j \cdot g_j$  i gdzie

$$D_j(\lambda^{-1}) = 1 + \sum_{n>0} d_n \lambda^{-n}, \quad (2.86)$$

są pewnymi szeregami (patrz [97]).

**Definicja 2.3.2** Szeregi  $g_{\mu^j}$ , dla  $j \in \{0, 1, 2\}$ , podobnie jak w przypadku (1.1), nazwiemy **głównymi rozwiązaniami WKB** równania (2.1).

**Uwaga 2.3.2** Należy odnotować, że w przypadku jednowymiarowego równania Schrödingera, gdzie metoda WKB została zastosowana po raz pierwszy, zagadnienie ustalenia stałych w rozwinięciach szeregów WKB prowadzi do tzw. warunku kwantowania Borna-Sommerfelda, z uwagi na to, że funkcje falowe muszą gasnąć w nieskończoności (patrz np. [83]).

W naszym przypadku nie ma takiego warunku, co prowadzi do problemu z wyznaczeniem współczynników w  $g^{\mu^j} = C_j(\lambda^{-1})g_0^{\mu^j}$ , gdzie  $g_0^{\mu^j}$  są testowymi rozwiązaniami WKB z Definicji 2.3.1.

**Uwaga 2.3.3** W analogiczny sposób można znaleźć pozostałe wzory asymptotyczne, dla  $x_2$  oraz  $x_3$ , z użyciem odpowiednich wzorów całkowych oraz metodą zaburzenia, np. równania

$$t \left[ (1-t)\partial(t\partial_t) + \lambda^3 - \frac{\epsilon^3}{t} \right] x = 0, \quad (2.87)$$

którego rozwiązania także mogą zostać wyrażone w terminach odpowiednich funkcji  ${}_3F_2$ .

Wzorów całkowe na rozwiązania wokół  $s = 1-t$ , analogicznych jak w Rozdziale 1, które pozwoliły by na dokonanie odpowiedniej analizy, nie zostały dotychczas znalezione. Podstawowa trudność wynika z tego, że rekurencja

$$b_{n+2} = \frac{2n+1}{n+2} b_{n+1} + \frac{\lambda^3 - n^3}{(n+2)(n+1)n} b_n, \quad (2.88)$$

na współczynniki  $b_n$  szeregu potęgowego

$$\sum_{n \geq 0} b_n s^n \quad (2.89)$$

zadającego rozwiązanie równania, jest rzędu drugiego.

Można zbadać jednak odpowiednie rozwinięcia WKB  $h_0^{\mu^j}$ . Przepiszemy teraz równanie (2.46) jako zaburzenie (2.46). Mamy

$$\begin{aligned} \left[ 2\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}\partial_\tau)^3 - 8\lambda^{-3/2}\tau\partial_\tau(\tau\partial_\tau + \sqrt{\tau}\partial_\tau\sqrt{\tau})\sqrt{\tau}\partial_\tau \right. \\ \left. + 8\lambda^{-3}(\tau\partial_\tau)^3 - 1 \right] x' = 0, \quad (2.90) \end{aligned}$$

gdzie  $\tau = \lambda^3 s^2$ . Przyjmijmy  $\theta_0(\tau) := y'_2(\tau)$  (gdzie  $y'_2$  jest jak w Stwierdzeniu 2.2.5) jako jedno z rozwiązań wokół  $\lambda = \infty$ . Rozwijając w szereg  $x'_2(s, \lambda)$  względem  $\lambda^{-3/2}$  otrzymujemy

$$x'_2(s, \lambda) = \sum_{n \geq 0} \theta_n(\tau) \lambda^{-3n/2}. \quad (2.91)$$

Dostajemy w ten sposób szereg **równań w wariacjach** na współczynniki  $\theta_j$ , z których pierwsze jest postaci

$$\left[ 2\sqrt{\tau}(\sqrt{\tau}\partial_\tau)^3 - 1 \right] \theta_1 = \left[ 8\lambda^{-3/2}\tau\partial_\tau(\tau\partial_\tau + \sqrt{\tau}\partial_\tau\sqrt{\tau})\sqrt{\tau}\partial_\tau \right] \theta_0. \quad (2.92)$$

Jest to niejednorodne równanie liniowe z wiadomą prawą stroną, którą oznaczymy przez  $\rho(\tau)$ . Podobną postać przyjmują także równania na

pozostałe współczynniki. Warunek początkowy w (2.92), ze względu na zachowanie się  $x'_2$  w otoczeniu  $s = 0$ , jest określony przez  $\theta_1(\tau) = O(\tau^{3/2})$ .

Dalsza analiza polega na podstawieniu

$$X = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}, \quad (2.93)$$

skąd dostajemy równanie w postaci macierzowej

$$\dot{X} = A(\tau) X + b. \quad (2.94)$$

Przewidując rozwiązania w formie  $X = \mathcal{G}_1(\tau)D(z)$ , gdzie  $\mathcal{G}_1$  jest macierzą fundamentalną układu z uwagi (2.2.3), otrzymujemy następujące równanie całkowe na  $D$ :

$$D(\tau) = \int_0^\tau \det \mathcal{G}_1^{-1}(u) {}^a\mathcal{G}_1(u) b(u) du, \quad (2.95)$$

gdzie  ${}^a\mathcal{G}_1$  oznacza dopełnienie algebraiczne macierzy  $\mathcal{G}_1$ . Wrońskian  $\det \mathcal{G}_1$  macierzy  $\mathcal{G}_1$  może być wyznaczony ze wzoru Liouville'a, przez co rozwinięcia wyrazów  $\mathcal{G}_1$  są (przynajmniej potencjalnie) znane, podobnie jak i w przypadku  $b$ , w terminach rozwiązań zbliżonych do WKB rozwiązań  $H^{\mu^j}$ . To pozwala zapisać współczynnik  $\theta_1$  w następującej postaci WKB:

$$\theta_1(\tau) = \tau^\alpha \sum_{j=0}^2 e^{-3/2\mu^j\tau^{1/3}} \sum_{n \geq 0} c_n^{\mu^j} \tau^{-n}, \quad (2.96)$$

gdzie  $\alpha$  jest odpowiednim wykładnikiem. Podobne rozwinięcia można wypisać dla  $\theta_i$  dla  $i > 1$ .

Z drugiej strony, możemy przepisać testowe rozwiązania WKB  $h_0^{\mu^j}$  w terminach zmiennych  $\tau$  i  $\lambda^{-1}$ . Mamy, na przykład,

$$\lambda \cdot [S(1) - S(1-s)] = \lambda \int_0^s \frac{du}{u^{1/3}(1-u)^{2/3}} \quad (2.97)$$

$$= \frac{3}{2}\tau^{1/3} + \frac{3}{5}\tau^{5/6} \lambda^{-3/2} + \dots \quad (2.98)$$

Porównując rozwinięcia  $x'_2$  oraz  $h_0^{\mu^j}$  możemy wyznaczyć jednoznacznie współczynniki  $L_2^{\mu^j}$  w formalnym wyrażeniu WKB

$$x'_2 = \sum_{j=0}^2 L_2^{\mu^j} (\lambda^{-1/2}) h_0^{\mu^j}. \quad (2.99)$$

Z jednoznacznością  $L_2^{\mu^j}$  związana jest pewna delikatność, polegająca na wrażliwości na zjawisko Stokes'a (patrz [97]). Powyższy algorytm



rozwiązywania równań w wariacjach jest zgodny wynikiem uzyskanym za pomocą działania odpowiednimi macierzami Stokes'a. Wynika stąd, że  $L_2^{\mu^j} h_0^{\mu^j}$  podlegają tym samym zjawiskom Stokesa, co  $H^{\mu^j}$ .

Analogiczna sytuacja ma miejsce dla  $x'_1$  oraz  $x'_3$ . Ostatecznie otrzymujemy następujący wynik.

**Stwierdzenie 2.3.4** *Baza rozwiązań  $(x'_1, x'_2, x'_3)$  może być przedstawiona za pomocą rozwinięcia*

$$h_0^{\mu^j} = -e^{\mu^j \lambda S(1)} (\mu^j \lambda)^{3/2} g_0^{\mu^j} (1 - s, \lambda), \quad j \in \{0, 1, 2\}, \quad (2.100)$$

ze współczynnikami z  $\mathbb{C}[[\lambda^{-1/2}]]$ , które są określone jednoznacznie, modulo zjawisko Stokes'a.

**Redukcja do postaci normalnej.** Przeprowadzimy teraz analizę asymptotyczną rozwiązań równania (2.1) za pomocą sprowadzenia do formy normalnej. Układ

$$\dot{x} = Ax, \quad (2.101)$$

gdzie  $A(t, \lambda) = A_0(t, \lambda) + \lambda A_1(t)$  i gdzie

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} t^{-2} & -3t^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.102)$$

oraz

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -t^{-2}(1-t)^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.103)$$

jest równoważny równaniu (2.1) poprzez standardowe (tutaj  $x$  oznacza znowu szukaną funkcję) podstawienie  $x =: x_1, x_2 := \lambda^{-1} \partial_t x$  oraz  $x_3 := \lambda^{-2} \partial_t^2 x$ . Wartościami własnymi macierzy  $A_1$  są

$$\eta_i := -\mu^i t^{-2/3} (1-t)^{-1/3} =: \mu^i \eta, \quad i \in \{0, 1, 2\}. \quad (2.104)$$

Stąd otrzymujemy diagonalizację  $A_1$ , po podstawieniu

$$y := Ux, \quad (2.105)$$

gdzie

$$U = \begin{bmatrix} \eta^2 & -\eta & 1 \\ \mu \eta^2 & -\mu \eta & 1 \\ \mu^2 \eta^2 & -\mu^2 \eta & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Mamy

$$\dot{y} = By, \quad (2.107)$$

gdzie  $B(t, \lambda) = \lambda B_1(t) + B_0(t) + \lambda^{-1} B_{-1}(t)$ , przy czym wyrazy diagonalne są postaci

$$B_{jj} = (-\mu)^j \lambda \eta + \left( \frac{\dot{\eta}}{\eta} - \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{3\mu^j \lambda t^2 \eta}. \quad (2.108)$$

Dalsze kroki procedury diagonalizacji układu  $\dot{y} = B y$ , wymagają zastosowania kolejnych przekształceń

$$y := y_0 = (I + U_{-1} \lambda^{-1}) y_{-1} \quad (2.109)$$

$$y_{-1} = (I + U_{-2} \lambda^{-2}) y_{-2} \quad (2.110)$$

$$\dots = \dots$$

$$y_{-n+1} = (I + U_{-n} \lambda^{-n}) y_{-n} \quad (2.111)$$

$$\dots = \dots$$

Podstawienie  $(I + U_{-1} \lambda^{-1}) y_{-1}$  do  $\dot{y} = B y$  daje

$$\dot{y}_{-1} = \left\{ \lambda B_1 + B_0 + [B_1, U_{-1}] + O(\lambda^{-1}) \right\} y_{-1}. \quad (2.112)$$

Tak więc aby otrzymać układ diagonalny z dokładnością do  $\lambda^{-1}$ , należy przyjąć

$$U_{-1}^{i,j} = \frac{B_0^{i,j}}{(-\mu)^i - (-\mu)^j} \frac{1}{\eta}, \quad (2.113)$$

i tak dalej. Ostatecznie, z dokładnością do  $\lambda^{-1}$ , otrzymujemy postać asymptotyczną

$$x \sim \sum_{j=1}^3 K_j \frac{e^{-\mu^j \lambda S(t)} (1-t)^{1/3}}{\mu^j \lambda t^{1/3}}, \quad (2.114)$$

gdzie  $K_j$  są pewnymi stałymi.

**Uwaga 2.3.4** Wzór (2.114) jest zgodny z wynikiem otrzymanym przy zastosowaniu metody fazy stacjonarnej. Prawdopodobnie ma miejsce pełna zgodność. W analogicznym wyniku z Rozdziału 1 rozwinięcia WKB zgadzają się co najmniej do  $\lambda^{-4}$ .

W taki sam sposób, jak wyżej, znajdujemy formy normalne dla równań typu Bessela w otoczeniu  $t = 0$  i  $t = 1 - s = 1$ , dzięki którym możemy wyznaczyć asymptotykę współczynnika  $C$ . Z porównania

$$x_1 \sim \frac{g^1 + g^\mu + g^{\mu^2}}{\sqrt{3}\pi}, \quad (2.115)$$

z formułą<sup>6</sup>

$$-\frac{1}{\sqrt{3}\pi} \left( \lambda^{3/2} e^{-2\pi\lambda/\sqrt{3}} h^1 + \mu^2 \lambda^{3/2} e^{-2\mu^2\pi\lambda/\sqrt{3}} h^{\mu^2} + \mu \lambda^{3/2} e^{-2\mu\pi\lambda/\sqrt{3}} h^\mu \right), \quad (2.117)$$

a następnie uwzględnienia równoważności asymptotycznej rownięć hipergeometrycznych z rozwinięciami typu Bessela, otrzymujemy następujący wynik.

**Stwierdzenie 2.3.5** *Wpółczynnik  $C$ , przy  $\lambda \sim \infty$ , jest kombinacją formalnych rozwinięć WKB postaci*

$$F_j(\lambda) := \frac{\mu^j e^{-2\mu^j\pi\lambda/\sqrt{3}}}{\lambda^{3/2}} \omega_j(\lambda^{-1/2}), \quad (2.118)$$

gdzie  $\omega_j(x) = 1 + O(x)$  są dobrze określonymi szeregami formalnymi. Stąd wynika, że także funkcja tworząca  $f_3$  ciągu  $\zeta(\{3\}^n)$ , jest kombinacją liniową składników  $F_j$ .

**Uwaga 2.3.5** *Powyższa analiza dostarcza rozwinięć będących jedynie szeregami formalnymi. Z Twierdzenia 3.2.1 wynika jednak, że można znaleźć konstruktywnie analityczne (w sektorach) formy normalne. Jest to dokonywane przez doprowadzenie do pewnych równań całkowych, analogicznych do (1.168) z Rozdziału 1. Po szczegóły odsyłamy do [97].*

## 2.4. Operatory Stokes'a

Najpierw zajmiemy się obliczeniem operatorów Stokes'a dla równań typu Bessela. W celu uproszczenia obliczeń zmodyfikujemy równanie (2.42) do postaci

$$\left[ (\sigma\partial_\sigma)^3 + 27\sigma^3 \right] y = 0, \quad (2.119)$$

przez podstawienie  $\tau = \sigma^3$ . Jego analiza asymptotyczna będzie przeprowadzona w dwóch krokach. Po pierwsze,<sup>7</sup> wykorzystując własność symetrii szeregów WKB względem obrotów i własności rozwiązań  $y_j$  uzyskuje się pewną relację pomiędzy wyrazami w podstawowej macierzy Stokesa. Po drugie, można zaburzyć (2.119) do równania z regularnymi punktami osobliwymi i rozważać odpowiednie macierze monodromii i ich zachowanie w przypadku granicznym.

<sup>6</sup>Czynniki  $e^{-2\mu^j\pi\lambda/\sqrt{3}}$  biorą się stąd, że

$$S(1) = B\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi/3} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}, \quad (2.116)$$

gdzie  $B$  oznacza **funkcję Beta Eulera**.

<sup>7</sup>Ten sposób pochodzi od Headinga i został zaczerpnięty z książki [46]. Można stosować tę metodę także do równań hipergeometrycznych, ale np. w wypadku (2.1) jest ona niewystarczająca. W prostrzej sytuacji (1.1), została ona z powodzeniem wykorzystana w pracy [95].

Oznaczmy standardowe rozwiązania równania (2.119) przez

$$y_1 = y_1 \quad (2.120)$$

$$y_2 = \log \sigma^3 y_1 + z_2 \quad (2.121)$$

$$y_2 = \frac{1}{2} \log^2 \sigma^3 \cdot y_1 + \log \sigma^3 z_2 + z_3. \quad (2.122)$$

Ponadto, niech  $G_j^{\mu^i}$  będzie  $i$ -tym rozwiązaniem WKB równania (2.119), reprezentowanym przez funkcję analityczną w sektorze<sup>8</sup>  $S_j$ . Podobnie jak w ogólnym przypadku przyjmujemy notację  $S_{j,j+1} := S_j \cap S_{j+1}$ .

Odpowiednie macierze Stokes'a  $C_{ji}$ , przeprowadzają układ rozwiązań asymptotycznych  $G_i^{\mu^k}$  z sektora  $S_i$  na układ  $G_j^{\mu^k}$  w  $S_j$ . Graficzne przedstawienie odpowiednich sektorów znajduje się na Rysunku 2.1, gdzie  $R_j$  są dwusiecznymi sektorów  $S_j$ .

Przy odpowiednim uporządkowaniu rozwiązań każdy operator  $C_{ji}$  jest górno-trójkątny i na przekątnej ma same jedynki. W przecięciach kolejnych sektorów zachodzą odpowiednie relacje porządku rozwiązań asymptotycznych:

$$G_j^1 \prec G_j^{\mu^2} \prec G_j^\mu \quad \text{dla } j \in \{1, 2\} \quad \text{w sektorze } S_{12}, \quad (2.123)$$

$$G_j^{\mu^2} \prec G_j^1 \prec G_j^\mu \quad \text{dla } j \in \{2, 3\} \quad \text{w sektorze } S_{23}, \quad (2.124)$$

$$G_j^{\mu^2} \prec G_j^\mu \prec G_j^1 \quad \text{dla } j \in \{3, 4\} \quad \text{w sektorze } S_{34}, \quad (2.125)$$

$$G_j^\mu \prec G_j^{\mu^2} \prec G_j^1 \quad \text{dla } j \in \{4, 5\} \quad \text{w sektorze } S_{45}, \quad (2.126)$$

$$G_j^\mu \prec G_j^1 \prec G_j^{\mu^2} \quad \text{dla } j \in \{5, 6\} \quad \text{w sektorze } S_{56}, \quad (2.127)$$

$$G_j^1 \prec G_j^\mu \prec G_j^{\mu^2} \quad \text{dla } j \in \{1, 6\} \quad \text{w sektorze } S_{61}. \quad (2.128)$$

Operator  $C_{21}$  jest postaci

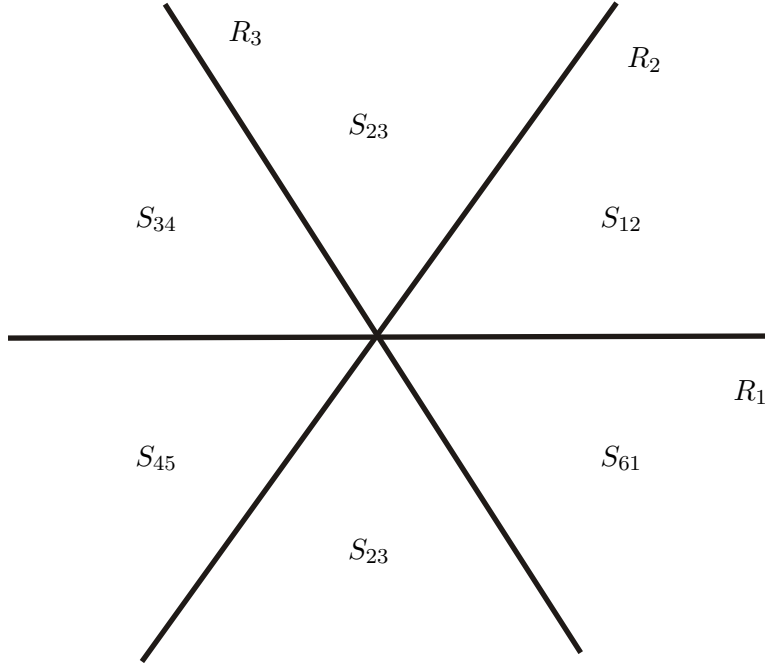
$$C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

Przy przejściu od  $S_1$  do  $S_2$ , w przecięciu  $S_1 \cap S_2$ , zachodzi

$$\mathcal{G}_2 C_{21} = \mathcal{G}_1, \quad (2.130)$$

---

<sup>8</sup>Poniższa analiza jest przypadkiem szczególnym dowodu Twierdzenia 3.4.1 z Rozdziału 3 (patrz też [96] i [97]), gdzie zostało dokładnie opisane, w jaki sposób przebiega konstrukcja sektorów  $S_j$  oraz odpowiadających im promieni podziału. W przypadku analizy związanej z (2.119), dzielimy po prostu otoczenie  $\tau \sim \infty$  na sześć równych sektorów, gdzie linie podziału są wyznaczone w płaszczyźnie zespolonej równaniami  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$  oraz  $y = -\sqrt{3}x$ .



Rysunek 2.1: Linie  $R_1$ ,  $R_2$  i  $R_3$  rozcinają płaszczyznę na kolejne sektory  $S_{12}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{34}$ ,  $S_{45}$ ,  $S_{56}$ , aż do  $S_{61}$ .

gdzie

$$\mathcal{G}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_j^1 \\ \mathcal{G}_j^\mu \\ \mathcal{G}_j^{\mu^2} \end{bmatrix}. \quad (2.131)$$

Przy wyznaczeniu pozostałych<sup>9</sup>  $C_{j+1,j}$  użyjemy niezmienniczości równania (2.119) ze względu na obrót  $\sigma \mapsto \mu\sigma$  oraz na sprzężenie zespolone. I tak operator  $C_{16}$  uzyskujemy z  $C_{21}$  przy wykorzystaniu sprzężenia zespolonego, odwróceniu, a następnie sprzężeniu za pomocą permutacji (1)(23). Macierze  $C_{43}$  i  $C_{65}$  wyznaczamy z  $C_{21}$  sprzężeń z odpowiednimi permutacjami, a operatory  $C_{32}$  i  $C_{54}$  wyliczamy z  $C_{16}$  poprzez sprzężenia

<sup>9</sup>W ten sposób, z wykorzystaniem relacji kocyklu, można wyznaczyć wszystkie operatory  $C_{ji}$ , przy czym procedura ta nie jest wyznaczona jednoznacznie. Poniżej prezentujemy jeden z jej wyborów.

z macierzami permutacji. Ostatecznie otrzymujemy

$$C_{16} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{a}\bar{c} - \bar{b} & -\bar{a} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\bar{c} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.132)$$

$$C_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\bar{c} \\ -\bar{a} & 1 & \bar{a}\bar{c} - \bar{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.133)$$

$$C_{54} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\bar{c} & 1 & 0 \\ \bar{a}\bar{c} - \bar{b} & -\bar{a} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.134)$$

$$C_{43} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & a \\ c & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.135)$$

$$C_{65} = \begin{bmatrix} 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.136)$$

Do wyznaczenia pełnego cyklu Stokes'a, pozostaje obliczyć  $C_{31} = C_{32} C_{21}$ ,  $C_{53} = C_{54} C_{43}$  oraz  $C_{15} = C_{16} C_{65}$ .

Następnie, tak jak w przypadku wyznaczania operatorów Stokes'a w przypadku rozwinięć asymptotycznych równania (1.1), dokonujemy kolejnych obrotów zmiennej niezależnej  $t \rightarrow \mu t$ ,  $\mu t \rightarrow \mu^2 t$  i  $\mu^2 t \rightarrow t$ , porównując zmienianę szeregów  $G^{\mu^j}$  ze zmianami rozwiązań bazowych  $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3$ . Po dokonaniu pełnego obrotu, odpowiedniej eliminacji w równaniach, i porównaniu stronami wyrażeń zawierających  $a_1$ , otrzymujemy

$$f_k(c_{i,j}) \cdot G_1^{\mu^k} = g_k(c_{i,j}) \cdot G_1^{\mu^k}, \quad (2.137)$$

gdzie  $f_k$  i  $g_k$  są wielomianami od wyrazów macierzy  $C_{2,1}$ . Ta procedura pozwala wyznaczyć  $b = 3 + \bar{a} + \bar{c}$ . Użyte powyżej metody pochodzą z monografii [46] i [101].

Obliczenie  $a$  i  $c$  wymaga zastosowania procedury granicznej dla odpowiednich operatorów monodromii zaburzonego równania

$$\left[ (1 - \lambda^{-3} t^3) \partial_t (t \partial_t)^2 + 27 t^2 \right] y = 0. \quad (2.138)$$

Wraz z (2.138), będziemy także rozważać

$$\left[ (1 + \lambda^{-3} t^3) \partial_t (t \partial_t)^2 + 27 t^2 \right] y = 0. \quad (2.139)$$

Równanie (2.138) ma trzy regularne punkty osobliwe

$$\lambda, \mu\lambda, \mu^2\lambda. \quad (2.140)$$

Każdy z nich dąży oczywiście do  $\infty$  przy  $\lambda \rightarrow \infty$ . Punktwi (który, co istotne, leży na promieniu podziału)  $\mu^j \lambda$  możemy przyporządkować odpowiednią macierz monodromii  $M_j$ . Przy  $\lambda \rightarrow \infty$  mamy  $M_1 \rightarrow C_{26}^{-1}$ ,  $M_2 \rightarrow C_{42}^{-1}$  oraz  $M_3 \rightarrow C_{64}^{-1}$  (patrz [40] oraz [101]).

Z drugiej strony, macierze  $M_j$  są równoważne operatorom monodromii  $M'_j$ , związanym z rozwiązaniami wyjściowego równania hipergeometrycznego w otoczeniu jedynek, gdyż te same równania (globalnie, na powierzchni Riemanna) mają izomorficzne grupy monodromii. Macierz  $M'_1$  ma na przekątnej same jedynki i jej rozkład Jordana ma dwie komórki. To wynika ze wzorów (2.12)-(2.14) na rozwiązania w  $t = 1 - s = 1$ . Wykorzystanie tego warunku i porównanie z wielomianem charakterystycznym

$$P(\eta) = (1 - \eta)(\eta^2 - (2 - |c|^2)\eta + 1), \quad (2.141)$$

pozwala stwierdzić, że  $c = 0$ . Mamy więc

$$C_{26} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.142)$$

Powtarzając teraz tą procedurę dla równania sprzężonego (2.139), pozwala wykazać, że  $a = 0$ . Ostatecznie otrzymujemy następujący wynik.

**Stwierdzenie 2.4.1** *Główna macierz Stokes'a związana z przejściem między bazami rozwiązań  $G_1$  i  $G_2$ , ma postać*

$$C_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.143)$$

Ponadto zachodzą przedstawienia

$$y_1 = \frac{-2G_1^1 + G_1^{\mu^2} + G_1^\mu}{\sqrt{3}\pi}, \quad (2.144)$$

$$y_2 = \frac{i(G_1^{\mu^2} - G_1^\mu)}{\sqrt{3}} \pmod{y_1}, \quad (2.145)$$

$$y_3 = \frac{-4\pi G_1^1}{\sqrt{3}} \pmod{y_1, y_2}, \quad (2.146)$$

na linii podziału w  $S_1$  oraz

$$y_1 = \frac{G_6^1 + G_1^{\mu^2} + G_1^\mu}{\sqrt{3}\pi}, \quad (2.147)$$

$$y_2 = \frac{2i(G_6^\mu - G_6^1)}{\sqrt{3}} \pmod{y_1}, \quad (2.148)$$

$$y_3 = \frac{-4\pi G_6^1}{\sqrt{3}} \pmod{y_1, y_2}, \quad (2.149)$$

na linii podziału w  $S_6$ . Analogiczne wzory mogą być uzyskane dla każdego sektora, przy wykorzystaniu operatorów  $C_{ij}$ .

**Uwaga 2.4.1** Powyższa analiza wskazuje na to, iż metoda Headinga (patrz [46]) nie wystarcza do obliczenia wszystkich macierzy Stokes'a, z uwagi na niedookreślenie otrzymanych układów równań.

Z drugiej strony, znajomość rozkładu Jordana w przypadku zaburzenia i zastosowania przejścia granicznego do operatorów monodromii także może okazać się niewystarczająca w przypadku równań wyższych rzędów. Zatem obie metody są nie tylko użytecznym uzupełnieniem, ale także mogą okazać się koniecznością w wypadku równań rzędu  $r > 2$ .

**Uwaga 2.4.2** Analiza asymptotyczna równań różniczkowych jest zjawiskiem występującym w wielu, bardzo różnych sytuacjach i jako taka, jest źródłem intensywnej badań. W pracy [27] A. Duval i C. Mitschi badają zjawisko Stokes'a przy wykorzystaniu innych metod (całki Barnes'a-Mellina), uzyskując takie same wyniki.

W następnej pracy [73] C. Mitschi wykorzystata wyniki [27] do określenia różniczkowych grup Galois dla konfluentnych równań hipergeometrycznych. Analogiczne wyniki uzyskał N. Katz w [58] oraz w monografii [59] używając metod czysto algebraicznych, wykorzystanych po raz pierwszy w [10].

Następnie postępujemy podobnie w wypadku równania (2.46). Najpierw z ogólnych rozważań otrzymujemy pewną relację na wyrazy macierzy  $C_{54}$  (która teraz jest podstawowa).

Następnie obliczamy monodromię zaburzonych równań postaci

$$\left[ 8\tau(1 - \lambda^{-3}\tau^3) \partial_\tau (\tau^{-1/2} \partial_\tau)^2 - 27 \right] y' = 0, \quad (2.150)$$

$$\left[ 8\tau(1 + \lambda^{-3}\tau^3) \partial_\tau (\tau^{-1/2} \partial_\tau)^2 - 27 \right] y' = 0. \quad (2.151)$$

Otrzymujemy następujące

**Stwierdzenie 2.4.2** Główna macierz Stokes'a związana z przejściem między bazami rozwiązań  $H_4$  i  $H_5$ , ma postać

$$C_{54} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.152)$$

Ponadto zachodzą przedstawienia

$$y'_1 = \frac{-2H_4^1 + H_4^{\mu^2} + H_4^\mu}{\sqrt{3}}, \quad (2.153)$$

$$y'_2 = \frac{2\sqrt{2} (H_4^\mu - H_4^{\mu^2})}{\sqrt{3\pi}} \pmod{y'_1}, \quad (2.154)$$

$$y'_3 = \frac{i\sqrt{3}H_4^1}{4\sqrt{2\pi}} \pmod{y'_1, y'_2}, \quad (2.155)$$



na linii podziału w  $S_4$ . Analogiczne wzory mogą być uzyskane dla każdego sektora, przy wykorzystaniu operatorów  $C_{ij}$ . To implikuje, że modulo  $y'_1, y'_2$  mamy

$$H_1^1 = 0, \quad H_1^\mu = -H_1^{\mu^2} = \beta y'_3 \quad (2.156)$$

$$H_2^1 = -H_2^\mu = H_2^{\mu^2} = \beta y'_3 \quad (2.157)$$

$$H_3^\mu = 0, \quad H_3^1 = H_3^{\mu^2} = \beta y'_3 \quad (2.158)$$

$$H_4^1 = H_4^\mu = H_4^{\mu^2} = \beta y'_3 \quad (2.159)$$

$$H_5^{\mu^2} = 0, \quad H_5^1 = H_5^{\mu^2} = \beta y'_3 \quad (2.160)$$

$$H_6^1 = H_6^\mu = -H_6^{\mu^2} = \beta y'_3, \quad (2.161)$$

gdzie  $\beta$  jest stałą zadaną w (C.0.1) poniżej.

**Uwaga 2.4.3** Stałe w powyższych równościach, zawierające  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  i  $\sqrt{\pi}$ , otrzymuje się poprzez przyrównanie odpowiednich rozwinięć do szeregowów asymptotycznych uzyskanych za pomocą aproksymacji fazy stacjonarnej.

**Zjawisko Stokes'a dla równania hipergeometrycznego.** Mamy następującą serię baz dla rozwiązań WKB:

$$\{g_j^{\mu^i}(x)\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 6}, \quad (2.162)$$

oraz

$$\{h_j^{\mu^i}(x')\}_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 6}, \quad (2.163)$$

które pozwalają wyrazić rozwiązania  $x_i$  w otoczeniu zera (odpowiednio  $x'_i$  w otoczeniu jedynki) przy pomocy odpowiednich współczynników, które tym razem zależą od parametry  $\lambda$ . Na przykład (odpowiednio unormowana) funkcja  $\sqrt{3\pi} x_1(t, \lambda)$  posiada przedstawienie asymptotyczne:

$$-2g_1^1 + g_1^\mu + g_1^{\mu^2} \quad \text{w sektorze } S_1, \quad (2.164)$$

$$g_2^1 + g_2^\mu + g_2^{\mu^2} \quad \text{w sektorze } S_2, \quad (2.165)$$

$$g_3^1 + g_3^\mu + 2g_3^{\mu^2} \quad \text{w sektorze } S_3, \quad (2.166)$$

$$g_4^1 + g_4^\mu + g_4^{\mu^2} \quad \text{w sektorze } S_4, \quad (2.167)$$

$$g_5^1 - 2g_5^\mu + g_5^{\mu^2} \quad \text{w sektorze } S_5, \quad (2.168)$$

$$g_6^1 + g_6^\mu + g_6^{\mu^2} \quad \text{w sektorze } S_6. \quad (2.169)$$

Zachodzą także wzory

$$\begin{aligned} g_1^{\mu^j}(1-s, \lambda) &= -(\mu^j \lambda)^{-3/2} e^{\mu^j \lambda S(1)} h^{\mu^j}(s, \lambda) \\ &\quad - D_{\mu^j} \cdot (\mu^j \lambda)^{-3/2} e^{\mu^j \lambda S(1)} h_0^{\mu^j}(s, \lambda), \end{aligned} \quad (2.170)$$

gdzie  $S(1) = 2\pi/\sqrt{3}$ .

Podobnie, na mocy Stwierdzenia 2.153 oraz formalnej równoważności funkcji Bessela i funkcji hipergeometrycznych w otoczeniu  $s = 0$ , dla  $s > 0$ , otrzymujemy następujące relacje (modulo  $x'_1$  i  $x'_2$ ):

$$\begin{aligned}
h^1 = 0, \quad M_\mu h^\mu &= -M_{\mu^2} h^{\mu^2} = \beta x'_3, & \text{w sektorze } S_1, \\
M_1 h^1 &= M_\mu h^\mu = -M_{\mu^2} h^{\mu^2} = \beta x'_3, & \text{w sektorze } S_2, \\
h^{\mu^2} = 0, \quad M_1 h^1 &= M_\mu h^\mu = \beta x'_3, & \text{w sektorze } S_3, \\
M_1 h^1 &= M_\mu h^\mu = M_{\mu^2} h^{\mu^2} = \beta x'_3, & \text{w sektorze } S_4, \\
h^\mu = 0, \quad M_1 h^1 &= M_{\mu^2} h^{\mu^2} = \beta x'_3, & \text{w sektorze } S_5, \\
M_1 h^1 &= -M_\mu h^\mu = M_{\mu^2} h^{\mu^2} = \beta x'_3, & \text{w sektorze } S_6,
\end{aligned} \tag{2.171}$$

gdzie

$$\beta = i\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2\pi}} \tag{2.172}$$

oraz

$$M_{\mu^j} = 1 + O(\lambda^{-1/2}) \tag{2.173}$$

są odpowiednimi szeregami formalnymi.

Stąd funkcja tworząca  $f_3 = 4C$ , ciągu  $\zeta(\{3\}^n)$ , posiada następujące przedstawienie w kolejnych sektorach

$$\frac{i(F^\mu - F^{\mu^2})}{(2\pi)^{3/2}} \quad \text{dla } \lambda \in S_1, \tag{2.174}$$

$$\frac{i(-F^1 + F^\mu - F^{\mu^2})}{(2\pi)^{3/2}} \quad \text{dla } \lambda \in S_2, \tag{2.175}$$

$$\frac{i(-F^1 + F^\mu)}{(2\pi)^{3/2}} \quad \text{dla } \lambda \in S_3, \tag{2.176}$$

$$\frac{i(F^1 + F^\mu + F^{\mu^2})}{(2\pi)^{3/2}} \quad \text{dla } \lambda \in S_4, \tag{2.177}$$

$$\frac{i(F^1 + F^{\mu^2})}{(2\pi)^{3/2}} \quad \text{dla } \lambda \in S_5, \tag{2.178}$$

$$\frac{i(F^1 + F^\mu - F^{\mu^2})}{(2\pi)^{3/2}} \quad \text{dla } \lambda \in S_6. \tag{2.179}$$

Funkcje  $F^{\mu^j}$  są postaci

$$F^{\mu^j}(\lambda) = \mu^j \lambda^{-3/2} e^{2\mu^j \pi \lambda / \sqrt{3}} \times \left\{ \text{szereg od zmiennej } \lambda^{-1/2} \right\}. \tag{2.180}$$

Z uwagi na czynnik  $\lambda^{-3/2}$ , mamy w istocie sześć funkcji  $F_\pm^{\mu^j} := \pm F^{\mu^j}$ . Przedłużenie analityczne wokół  $\lambda = \infty$  prowadzi do operatora monodromii

$$M_\infty : F_\pm^{\mu^j} \mapsto F_\mp^{\mu^j}. \tag{2.181}$$

Ze wzorów (2.174) wynika, że funkcje  $F^{\mu j}$  podlegają zjawisku Stokes'a, przy czym podstawowy operator Stokes'a  $C_{21}$  musi być postaci

$$C_{21} = \begin{bmatrix} 1 & c & d \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.182)$$

gdzie  $c = d + 1$ . Zachodzi zatem następujące

**Twierdzenie 2.4.1** *Rozwinięcia  $\{F_{\pm}^{\mu j}\}$ , typu WKB, podlegają zjawisku Stokes'a, ze stałą macierzą główną<sup>10</sup>  $C_{21}$  jak w (2.182). Funkcja tworząca  $f_3$ , w każdym sektorze jest kombinacją liniową  $\{F_{\pm}^{\mu j}\}$ , o stałych współczynnikach.*

*Ponadto  $\{F^{\mu j}\}_{\pm}$ , a zatem także i  $f_3$ , spełniają (w otoczeniu nieskończoności) równanie różniczkowe szóstego rzędu*

$$\frac{\partial^6 f}{\partial \lambda^6} + \sum_{j=0}^5 a_j \frac{\partial^j f}{\partial \lambda^j} = 0, \quad (2.183)$$

ze współczynnikami analitycznymi

$$a_j(\lambda) = \sum_{i \geq 0} a_{j,i} \lambda^{-i}, \quad (2.184)$$

spełniającymi relacje

$$a_{6,0} = [S(1)]^6, \quad (2.185)$$

$$a_{3,0} = 2[S(1)]^3, \quad (2.186)$$

$$a_{1,1} = a_{4,1}, \quad (2.187)$$

$$a_{2,1} = a_{5,1}, \quad (2.188)$$

$$a_{3,1} = a_{6,1}. \quad (2.189)$$

*Dowód.* Pierwsza część tezy, dotycząca operatora monodromii  $M_{\infty}$  i macierzy Stokes'a, została już dowiedziona.

Przestrzeń rozpięta przez<sup>11</sup>  $\{F^{\mu j}\}_{\pm}$  w otoczeniu nieskończoności jest niezmiennicza ze względu na działanie  $M_{\infty}$ . Z uwagi na to, że zarówno  $M_{\infty}$ , jak i odpowiednie operatory Stokes'a mają stałe współczynniki, także każda przestrzeń rozpięta przez pochodne

$$\left\{ \frac{\partial^j F_{\pm}^{\mu j}}{\partial \lambda^j} \right\}, \quad (2.190)$$

<sup>10</sup>Pozostałe macierze  $C_{ij}$ , podobnie jak w wypadku równania typu Bessela, mogą być otrzymane z  $C_{21}$  poprzez obroty i sprzężenia. Najprawdopodobniej  $c = 0$  w (2.182).

<sup>11</sup>Układ  $\{F_{\pm}^{\mu j}\}$ , w razie potrzeby, może zostać zastąpiony przez odpowiednie układy, które są analityczne w danym obszarze.

dla  $j \leq 6$ , jest niezmiennicza. To prowadzi (porównaj [101]) do równania wyznacznikowego

$$\det \begin{bmatrix} f & \partial f & \dots & \partial^6 f \\ F_-^1 & \partial F_-^1 & \dots & \partial^6 F_-^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_+^{\mu^2} & \partial F_+^{\mu^2} & \dots & \partial^6 F_+^{\mu^2} \end{bmatrix} = 0, \quad (2.191)$$

które jest równoważne z (2.183), przy czym współczynniki  $a_j$  są ilorazami odpowiednich sześciowymiarowych minorów i są holomorfczne (oraz jednowartościowe) w zależności od  $\lambda$ . Postać współczynników  $a_j$  i relacje na  $a_{j,i}$ , są konsekwencją podstawienia w miejsce  $f$  szeregu WKB.  $\square$ .

## 2.5. Uwagi końcowe

**Uwaga 2.5.1** *Jest bardzo ciekawe, czy równanie (2.183) posiada przedłużenie na  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  z zerem, jako **regularnym** punktem osobliwym. Funkcja  $f_3$ , która spełnia (2.183), jest wokół zera analityczna, co może sugerować, że taka sytuacja rzeczywiście ma miejsce.*

*W takim wypadku,  $a_j$  muszą być meromorficzne i pewne (oczywiste) warunki narzucone na nie, w połączeniu z niezmienniczością na  $\lambda \mapsto \mu\lambda$  i  $\lambda \mapsto \mu^2\lambda$ , prowadzą do pewnych ograniczeń na współczynniki  $a_{j,i}$ . Dokładniej, mielibyśmy*

$$L f = 0, \quad (2.192)$$

gdzie

$$\begin{aligned} L := & \frac{\partial^6}{\partial \lambda^6} + \frac{c_5}{\lambda} \frac{\partial^5}{\partial \lambda^5} + \frac{c_4}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial \lambda^4} + \left( \frac{c_3}{\lambda^3} + c'_3 \right) \frac{\partial^3}{\partial \lambda^3} + \\ & \left( \frac{c_2}{\lambda^4} + \frac{c'_2}{\lambda} \right) \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \left( \frac{c_1}{\lambda^5} + \frac{c'_1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} + \\ & \left( \frac{c_0}{\lambda^6} + \frac{c''_0}{\lambda^6} + c''_0 \right), \end{aligned} \quad (2.193)$$

a współczynniki  $c_j$ ,  $c'_j$  i  $c''_0$  są (teoretycznie) możliwe do wyliczenia.

Z uwagi na to, że

$$f_3(\lambda) = 1 - \zeta(3) \lambda^3 + \zeta(3, 3) \lambda^6 + \dots, \quad (2.194)$$

otrzymalibyśmy wzory pozwalające wyznaczyć  $\zeta(\{3\}^n)$  w terminach funkcji algebraicznej o współczynnikach z ciała  $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{3})$ , które jest przestępnym rozszerzeniem  $\mathbb{Q}$  (porównaj [69]).

Jak do tej pory, o stałej  $\zeta(3)$  wiadomo jedynie, że jest ona niewymierna (patrz [3]).

**Uwaga 2.5.2** Z analizy przeprowadzonej w uprzednim paragrafie, wynika, że dla dużych, rzeczywistych  $\lambda$  mamy

$$f_3(\lambda) \sim \frac{i \left( e^{-\mu\lambda S(1)} + e^{-\mu^2\lambda S(1)} \right)}{(2\pi\lambda)^{3/2}}, \quad (2.195)$$

$$f_3(-\lambda) \sim \frac{- \left( e^{-\lambda S(1)} + e^{-\mu\lambda S(1)} + e^{-\mu^2\lambda S(1)} \right)}{(2\pi\lambda)^{3/2}}. \quad (2.196)$$

Powyższe rozwinięcie jest zgodne ze wzorem

$$f_3(\lambda) f_3(-\lambda) = \prod_{n>0} \left( 1 - \frac{\lambda^6}{n^6} \right) = f_2(\lambda) f_2(\mu\lambda) f_2(\mu^2\lambda), \quad (2.197)$$

gdzie

$$f_2(\lambda) = \frac{\sin \pi\lambda}{\pi\lambda}. \quad (2.198)$$

## 2.6. Inne równanie hipergeometryczne związane z $\zeta(3)$

Dotychczas zajmowaliśmy się analizą rozwiązań równania (2.1), związanego z funkcją tworzącą  $f_3$  ciągu  $\zeta(\{3\}^n)$ . Ze wzoru Eulera na reprezentację iloczynową funkcji  $\Gamma$ , mamy

$$f_3(\lambda) = \prod_{n>0} \left( 1 - \frac{\lambda^3}{n^3} \right) \quad (2.199)$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1+\mu\lambda)\Gamma(1+\mu^2\lambda)} \quad (2.200)$$

$$= {}_3F_2 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda, \lambda \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| 1 \right). \quad (2.201)$$

Z  $f_3$  związana jest jeszcze jedna ciekawa funkcja. Zapisując

$$f_3(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(1+\lambda)\Gamma(1-\lambda)} \frac{\Gamma(1-\lambda)}{\Gamma(1+\mu\lambda)\Gamma(1+\mu^2\lambda)}, \quad (2.202)$$

możemy teraz patrzeć na  $f_3$  jako na wartość w  $t = 1$  funkcji

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} \lambda, -\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) \cdot {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right). \quad (2.203)$$

Powyższy wzory wynikają z twierdzenia Gaussa<sup>12</sup> o funkcji hipergeometrycznej:

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} u, v \\ w \end{matrix} \middle| 1 \right) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(w-u-v)}{\Gamma(w-u)\Gamma(w-v)}. \quad (2.204)$$

<sup>12</sup>Wzór Gaussa wynika w prosty sposób ze wzoru całkowego Eulera, gdzie należy przyjąć  $t = 1$ . Istnieją też inne sposoby, wykorzystujące z tzw. całek Barnes'a-Mellina.

Więcej szczegółów można znaleźć np. w [60].

Funkcja

$$x_1 = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) \quad (2.205)$$

spełnia równanie

$$-(1-t)t\partial_t x + (\lambda t + t - 1)\partial_t x + \lambda^2 x = 0, \quad (2.206)$$

którego drugie rozwiązanie jest postaci

$$x_2 = \log(\lambda^2 t) \cdot {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) + \tilde{x}_2, \quad (2.207)$$

gdzie  $\tilde{x}_2$  jest analityczne w  $t = 0$ . Dla  $\lambda \sim \infty$ , ale przy  $\tau = \lambda^2 t$  ograniczonym, mamy

$${}_2F_1 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| t \right) \sim \sum_{n \geq 0} \frac{\tau^n}{(n!)^2} = I_0(2\tau), \quad (2.208)$$

gdzie  $I_0(t) = J_0(it)$ .

W otoczeniu  $s = 1 - t = 0$  równanie (2.206), przepisane w nowych współrzędnych, ma dwa rozwiązania:

$$x'_1 = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} \mu\lambda, \mu^2\lambda \\ \lambda \end{matrix} \middle| s \right), \quad (2.209)$$

$$x'_2 = s^{1-\lambda} {}_2F_1 \left( \begin{matrix} 1 + \mu\lambda, 1 + \mu^2\lambda \\ 1 \end{matrix} \middle| s \right), \quad (2.210)$$

o asymptotyce

$$x'_1 \sim e^{\lambda^2 t}, \quad (2.211)$$

$$x'_2 \sim s^{1-\lambda} I_0(2\lambda\sqrt{s}). \quad (2.212)$$

Jeśli teraz zapiszemy

$$x_1(t, \lambda) = a_1(\lambda) x'_1(t, \lambda) + a_1(\lambda) x'_1(t, \lambda), \quad (2.213)$$

to otrzymamy wzór

$$f(\lambda) = \frac{\sin \pi \lambda}{\pi \lambda} \cdot a_1(\lambda). \quad (2.214)$$

Następnie, stosując metodę WKB, otrzymujemy działania  $S_1$  i  $S_2$  takie, że

$$\dot{S}_1 = \frac{1}{2(1-t)} \left( 1 - \sqrt{\frac{4-3t}{t}} \right), \quad (2.215)$$

$$\dot{S}_2 = \frac{1}{2(1-t)} \left( 1 + \sqrt{\frac{4-3t}{t}} \right). \quad (2.216)$$

Po podstawieniu

$$u = \sqrt{\frac{4-3t}{t}}, \quad (2.217)$$

odpowiednie równania transportu przyjmują postać (dla prostoty zapisu rozważamy tylko przypadek związany z  $S_1$ )

$$\partial_u \psi_j + \frac{1-u}{2u(1+u)} \psi_j = \frac{1-u^2}{8u} \partial_u \left( \frac{3+u^2}{u} \partial_u \psi_{j-1} \right), \quad (2.218)$$

gdzie przyjmujemy, że  $\psi_j = 0$  dla  $j < 0$ . Rozwiązaniem równania jednorodnego jest

$$\psi_0 = \frac{1+u}{\sqrt{u}}, \quad (2.219)$$

a dla kolejnych  $j > 0$ , mamy

$$\psi_j = \frac{1+u}{\sqrt{u}} q(u), \quad (2.220)$$

gdzie  $q \in \mathbb{C}[u, u^{-1}]$ .

Można wypisać odpowiednie wzory całkowe i zastosować do nich metodę fazy stacjonarnej. Następnie można dokonać analizy rozwinięcia WKB oraz znaleźć analityczne formy normalne, analogicznie jak w przypadku równań (1.1) oraz (2.1). Występują tu nowe zjawiska, związane między innymi z brakiem pełnej symetrii, która miała miejsce w wypadku rozwiązań (1.1) i (2.1). Jak dotychczas nie zostały one dokładnie wyjaśnione.





## Rozdział 3

# Uogólnienie Metody WKB

### 3.1. Wstęp

W tym rozdziale zbadamy równania różniczkowe zwyczajne

$$\frac{d^n x}{dt^n} + \sum_{j < n} a_j \frac{d^j x}{dt^j} = 0, \quad (3.1)$$

gdzie  $a_j = a_j(t, \lambda)$  są meromorficzne, a parametr  $\lambda \in \mathbb{C}$  należy do otoczenia  $\infty$ . Zagadnieniem równoważnym jest analiza odpowiednich układów

$$\dot{x} = A(t, \lambda)x \quad (3.2)$$

dla  $x \in \mathbb{C}^n$ , gdzie zakładamy, że wyrazy macierzy  $A$  są funkcjami meromorficznymi (od  $t$ ). Przy dodatkowym założeniu,  $a_j(t) = \lambda^j a_{j,0}(t) + O(\lambda^{j-1})$ , naturalnym jest przewidywanie rozwiązań w postaci

$$x(t, \lambda) = e^{\lambda S(t)} \lambda^\alpha \sum_{k \geq 1} \psi_k(t) \lambda^{-k}, \quad (3.3)$$

gdzie pochodna  $\dot{S}$  po 'czasie'  $t$  'działania'  $S$  spełnia następujące równanie 'Hamiltona-Jacobiego':

$$\dot{S}^n + \sum_{0 < j < n} a_{j,0} \dot{S}^{n-j} = 0. \quad (3.4)$$

'Amplitudy'  $\psi_k$  spełniają natomiast układ tzw. równań transportu

$$\dot{\psi}_k + W \psi_k = z_k, \quad (3.5)$$

gdzie  $w$  i  $z$  są funkcjami  $t$  oraz  $w$  jest określone jednoznacznie przez współczynniki  $a_{j,0}$ , zaś  $z_k$  jest określone jednoznacznie przez  $\psi_j$ ,  $j < k$ .

W przypadku, gdy układ (3.2) jest postaci

$$A(t, \lambda) = \lambda \operatorname{diag} [b_1(t), \dots, b_n(t)] + O(1), \quad (\text{przy } \lambda \sim \infty), \quad (3.6)$$

w spodziewanych rozwiązaniach postaci (3.3), funkcje  $\psi_k$  przyjmują wartości wektorowe.

W związku z teorią jakościową rozwiązań równań postaci (3.1) i (3.2) pojawiają się dwa naturalne i ważne pytania:

- Jak określić stałe całkowania w równaniu Hamiltona-Jacobiego oraz w równaniach na  $\psi_k$ ?
- Czy szereg w równaniu (3.3) jest zbieżny, jeśli zakładamy, iż współczynniki  $a_j$  (lub równoważnie macierz  $A$ ) są analityczne (meromorficzne) ze względu na  $\lambda \in \mathbb{C}P^1$  oraz  $t \in U$ , gdzie  $U$  jest obszarem w  $\mathbb{C}$ ?

Istnieje satysfakcjonująca odpowiedź na pierwsze pytanie, pod warunkiem pewnych dodatkowych założeń. Na przykład dla stacjonarnego równania Schrödingera

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2(V-E)\psi}{\hbar} = 0, \quad (3.7)$$

gdzie  $\psi$  jest funkcją falową reprezentującą stan związany cząstki, warunki brzegowe są określone przez  $\psi(x) \rightarrow 0$ , dla  $x \rightarrow \pm\infty$ . Te warunki implikują możliwe (dyskretne) wartości  $E$ . G. Wentzel [91], H. Kramers [63], L. Brillouin [17] i H. Jeffreys [55] wprowadzili jako pierwsi badanie rozwiązań asymptotycznych w postaci (3.3) dla równania Schrödingera przy  $x \in \mathbb{R}^n$ . Stąd szeregi występujące w (3.3) są nazywane rozwiązaniami WKB (lub czasem WKBJ).

W pracach [95] i [100] metoda WKB została zastosowana do badania równań Picarda-Fuchsa postaci  $(T + \lambda^k)\phi = 0$ , gdzie

$$T := (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{\alpha_1-1} \dots (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{\alpha_k-1}, \quad (3.8)$$

a w szczególności dla

$$T := (1-t)\partial_t t \partial_t \quad (3.9)$$

oraz

$$T := (1-t)\partial_t(t\partial_t)^2. \quad (3.10)$$

Problem wyznaczenia stałych całkowania okazuje się tu być znacznie bardziej subtelny i nie będzie brany pod uwagę w tym rozdziale. W pracy [13] G. Birkhoff udowodnił analityczność rozwiązań WKB ze względu na parametr  $\lambda$  (dla  $\lambda \sim \infty$ ) w sektorach takich, że rozwiązania  $s_j(t)$  (dla  $1 \leq j \leq n$ ) równania (3.4) spełniają

$$\operatorname{Re}(\lambda s_i(t)) \neq \operatorname{Re}(\lambda s_j(t)), \quad \text{dla } i \neq j \quad \text{oraz } t \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

W pracy [14] Birkhoff zastosował ten wynik do analizy równania Schrödingera.

Istnieją nieco inne podejścia do problemu analityczności rozwiązań WKB, jak na przykład te zawarte w pracach [34] i [46]. Dowodzi się analityczności rozwiązań przy założeniu, że  $\lambda \in \mathbb{R}$  oraz że  $t \in U$ , gdzie  $U \subset \mathbb{C}$  jest spójny i gdzie nierówności (3.11) są spełnione. Dowodzi się także, iż rozwiązania WKB mogą być przedłużone na domknięcie  $\bar{U}$ , w przypadku, gdy niektóre nierówności (3.11) stają się równościami dla  $t \in \partial U$ .

Linie (w płaszczyźnie zmiennej  $t$ ) takie, że  $\operatorname{Re}\lambda(s_i(t) - s_j(t)) = 0$  dla pewnych  $i \neq j$  są nazywane w literaturze **liniami Stokes'a** bądź **liniami podziału**. Mają one związek z tzw. **zjawiskiem Stokes'a**, dotyczącym asymptotycznego zachowania układów równań różniczkowych liniowych bez parametru, w otoczeniu nieregularnego punktu osobliwego.

Taki układ można zawsze zapisać w postaci

$$t^r \dot{x} = B(t)x, \quad (3.12)$$

gdzie  $r > 1$ , funkcja (macierzowa)  $B$  jest analityczna i ma w otoczeniu zera rozwinięcie postaci

$$B(t) = \operatorname{diag}(\mu_j) + O(t) = B(0) + O(t), \quad (3.13)$$

przy warunku  $\mu_i \neq \mu_j$  dla  $i \neq j$ . **Promienie podziału** płaszczyzny  $\mathbb{C}$  są tu określone przez warunek

$$R = \{t : \operatorname{Re}(\mu_i - \mu_j)t = 0; \arg t = \text{const}\}. \quad (3.14)$$

W takim przypadku formalne rozwiązania układu (3.12) przyjmują postać

$$x_j(t) = e^{P_j(1/t)} t^\delta \sum_{k \geq 0} c_{j,k} t^k, \quad 0 < j \leq n, \quad (3.15)$$

gdzie  $P_j(u) = \frac{\mu_j}{1-r} u^{r-1} + \dots$  jest wielomianem stopnia  $r-1$  i  $c_{j,k}$  są wektorami stałymi. Rozwinięcia postaci (3.12) są szeregami asymptotycznymi w pewnych sektorach wokół zera, ale ogólne rozwiązanie układu (3.12) nie może być jednoznacznie wyrażone za pomocą kombinacji rozwiązań bazowych. Podczas ruchu wokół punktu osobliwego współczynniki takiej kombinacji zmieniają się w sposób nieciągły przy zmianie sektora. To zachowanie określa się mianem **zjawiska Stokes'a**. Zostało ono zbadań i opisane w literaturze. Na przykład w książce [89] zostało udowodnione **Twierdzenie o normalizacji w sektorach**, które orzeka, że dla każdego otwartego sektora  $S \subset (\mathbb{C}, 0)$ , zawierającego co najwyżej jeden promień podziału, istnieje transformacja cechowania  $x = G_S y$ , analityczna dla  $t \in S$ , która pozwala sprowadzić układ (3.12) do postaci diagonalnej

$$t^r \dot{y} = \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n) y. \quad (3.16)$$

Ponadto, przy odpowiednim  $G_S$  funkcje  $b_j(t) = \mu_j + O(t)$  są wielomianami stopnia  $< r$ . Jeśli sektory  $S$  i  $S'$  mają niepuste przecięcie, to wówczas

$G_{SS'} := G_S \circ G_{S'}^{-1}$  (ten wzór ma sens dla  $t \in S \cap S'$ ) nazywamy **operatorem Stokes'a**. Zachowuje on układ (3.16) odwzorowując rozwiązania bazowe na ich kombinacje liniowe. Odpowiadająca  $G_{SS'}$  macierz  $C_{SS'}$  ma stałe współczynniki. W literaturze nosi ona nazwę **macierzy Stokes'a**.

W pracy [96] twierdzenie o normalizacji w sektorach zostało uogólnione na przypadek układów z parametrem  $\lambda \sim \infty$ . Należy zwrócić uwagę na fakt, iż zarówno w pracach Birkhoffa [13] oraz [14], jak i w książce Fedoruka [34] pojawia się założenie (3.11). W następnym paragrafie znajduje się dowód Twierdzenia 3.2.1, w którym normalizacja układu z parametrem ( $\sim \infty$ ) w  $U \subset \mathbb{C}^2$ , który zawiera pewną powierzchnię  $R_{ij} = \{\operatorname{Re}(\lambda s_i(t)) = \operatorname{Re}(\lambda s_j(t))\}$ . Dowód wymaga kilku dodatkowych założeń, które będą sprecyzowane dalej. Wspomniemy tu tylko o tym, że przedział  $[0, 1)$  należy do dziedziny określoności zmiennej  $t$  i punkt  $t = 0$  jest osobliwością algebraiczną. Dowód opiera się na technikach analogicznych do metod Birkhoffa (z dala od  $R_{ij}$ ) oraz Wasowa (w pobliżu  $R_{ij}$ ).

Książka Wasowa [89] zawiera wynik dotyczący redukcji równania

$$\ddot{x} - \lambda^2 \{t(1 + O(t)) + O(\lambda^{-1})\} x = 0, \quad (3.17)$$

do postaci (równania Airy'ego)

$$\ddot{x} - \lambda^2 t x = 0, \quad (3.18)$$

przy  $t \rightarrow 0$  i  $\lambda \rightarrow \infty$ . Ta procedura jest analityczna zarówno w  $t$  jak i w  $\lambda^{-1}$ . W Twierdzeniu 3.3.1 znajduje się uogólnienie tego wyniku, przy tym z prostym dowodem.

Założenie algebraiczności punktu osobliwego  $t = 0$  ma swoje źródło w badaniu równań (3.9), (3.10) i (3.8). Zwróćmy uwagę, że po zdiagnozowaniu (tzn. po uprzednim sprowadzeniu do postaci układu) równania (3.9) wiodący współczynnik ma postać  $\lambda t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}$ . Z drugiej strony, wprowadzenie zmiennej  $u := \lambda^2 t$ , która 'rownoważy' równanie własne (3.9) w otoczeniu zera, sprowadza układ do układu  $\partial_u u \partial_u x + x = 0$  typu Bessela, z nieregularnym punktem osobliwym w  $u = \infty$ . Twierdzenie (3.3.1) pozwala wówczas na porównanie operatorów Stoksa dla równania odpowiadającego (3.9) z operatorami Stokes'a dla równania Bessela. Opis innych przykładów redukcji równań drugiego rzędu do równań typu Bessela znajduje się w poprzednich rozdziałach (patrz też [64] i [65]).

Znane twierdzenie Hukuhary [53], Levelta [67] i Turritina [87] orzeka, że formalna redukcja układu w otoczeniu nieregularnego punktu osobliwego zazwyczaj wymaga rozgalęzionej zamiany parametru czasowego (patrz też [54], [101] i Rozdział 3.4). Np. dla równania Bessela jest to  $u \mapsto u^2$ . Turritin [87] zaobserwował, że podobna sytuacja ma miejsce w przypadku układów z dużym parametrem oraz, że prawidłowa postać asymptotyczna

powinna zawierać w wykładniku wielomiany zmiennej  $\lambda^{1/q}$  (ze współczynnikami zależnymi od  $t$ ). Taka sytuacja ma miejsce, gdy opisywane wcześniej równanie Hamiltona-Jacobiego na działanie ma rozwiązanie krotności  $> 1$ , co ma miejsce np. dla równania Riemanna

$$t^2(1-t)^2\ddot{x} - 2\lambda t(1-t)\dot{x} + \lambda^2 x = 0. \quad (3.19)$$

Dalsza dyskusja tego zjawiska znajduje się w ostatnim paragrafie tego rozdziału.

### 3.2. Uogólnione twierdzenie o normalizacji oraz uogólnione operatory Stokes'a

W dalszym ciągu będziemy się zajmować układami postaci (3.2), gdzie operator  $A$  jest funkcją meromorficzną względem na  $\lambda^{-1}$ , z biegunem w  $\lambda = \infty$  i wielowartościową, holomorficzną ze względu na  $t \in U$ , gdzie  $U$  jest obszarem zawierającym przedział  $[0, 1)$ . Zakładamy, że  $t = 0$  jest punktem regularnym układu (3.2). Zakładamy również dwa dodatkowe, bardziej szczegółowe warunki.

- (A1) Zachodzi

$$A(\lambda, t) = \lambda t^{-\alpha} \text{diag}(b_j(t)) + O(1), \quad \text{gdym } \lambda \rightarrow \infty, \quad (3.20)$$

gdzie  $1 > \alpha = p/q \in \mathbb{Q}$  oraz

$$b_j(t) = \mu_j + \dots \quad \text{dla } t \rightarrow 0 \quad \text{oraz} \quad \mu_j \neq 0, \quad (3.21)$$

są takie, że działania

$$S_j(t) = \int_0^t u^{-\alpha} b_j(u) du, \quad \text{dla } t \rightarrow 0 \quad \text{przy} \quad 0 < t < 1, \quad (3.22)$$

spełniają warunek:  $n(n-1)$  krzywych różnic poszczególnych działań

$$L_{ij} : (0, 1) \ni t \mapsto \Delta_{ij} S := S_i(t) - S_j(t) \in \mathbb{C} \quad \text{dla} \quad i \neq j, \quad (3.23)$$

są parami rozłączne i mają parami różne kierunki w  $t = 0$ .

- (A2) Wyrazy  $a_{ij}$  macierzy  $A$  są elementami  $\mathbb{C}\{t^{1/q}, \lambda^{-1}\}[t^{-1/q}, \lambda]$ , czyli zbieżnymi szeregami Laurent'a od zmiennych  $t^{1/q}$  i  $\lambda^{-1}$ . Co więcej każdy jednomian postaci  $t^{k/q}\lambda^{-l}$  spełnia:

$$k \geq -K \quad l \geq -1 \quad \text{oraz} \quad \frac{k}{q-p} + l > -\frac{p}{q-p} - 1 \quad (3.24)$$

dla pary  $(k, l) \neq (-p, -1)$ ; (tutaj  $K \geq p$  jest pewną całkowitą stałą).

Do sformułowania głównego twierdzenia tego paragrafu potrzebne będzie jeszcze opisanie kilku podzbiorów  $\mathbb{C}^2$ . Niech  $V$  oznacza obszar określony przez warunki

$$|\arg t| < \delta_1, \quad |t| < 1/2, \quad \tau := \lambda t^{1-p/q} > N, \quad |\lambda| > \Lambda \quad (3.25)$$

oraz

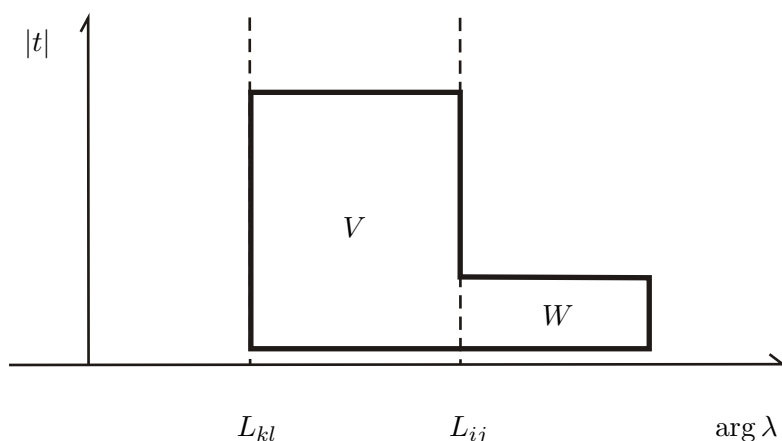
$$\begin{aligned} -\pi/2 + \delta_2 &< \arg \lambda \Delta_{ij} S(t) < \pi/2 - \delta_2 < \pi/2 + \delta_2 \\ &< \arg \lambda \Delta_{kl} S(t) < 3\pi/2 - \delta_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Zbiór  $W$  będzie natomiast oznaczać podzbiór  $\mathbb{C}^2$  określony przez warunki

$$W := \{|t| < \epsilon, \quad |\tau| > N, \quad |\lambda| > \Lambda, \quad |\arg \tau(\mu_i - \mu_j) - \pi/2| < \gamma\}. \quad (3.27)$$

Przyjmujemy, że stałe  $N$  i  $\Lambda$  są duże, zaś  $\delta_j$ ,  $\epsilon$  oraz  $\gamma$  - odpowiednio małe. Ponadto definiujemy

$$U = V \cup W. \quad (3.28)$$



Rysunek 3.1: Na powyższym rysunku zostały schematycznie przedstawione obszary  $V$  i  $W$  oraz linie  $L_{ij}$  oraz  $L_{kl}$ , w zależności od argumentu parametru  $\lambda$  i modułu  $t$ .

**Twierdzenie 3.2.1** *Istnieją stałe  $\Lambda$ ,  $N$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\epsilon$  i  $\gamma$  takie, że dla każdego obszaru  $U$  jak powyżej, istnieje zamiana zmiennych*

$$x = H_U(t, \lambda, \bar{\lambda})y = [I + O(\lambda^{-1})]y \quad \text{dla} \quad (t, \lambda) \in U, \quad (3.29)$$

*analityczna względem  $(t, \lambda, \bar{\lambda})$  i przeprowadzająca układ (3.2), dla którego spełnione są warunki A1 i A2, do postaci diagonalnej*

$$\dot{y} = \text{diag}[b_j(t, \lambda, \bar{\lambda})]y = \text{diag}[\lambda c_j(t) + O(1)]y \quad \text{dla} \quad \lambda \sim \infty. \quad (3.30)$$

Ponadto w obszarze  $V$ , zdefiniowanym powyżej, funkcja  $H_U(t, \lambda, \bar{\lambda})$  jest bliska jednoznacznie wyznaczonej funkcji  $H_U^{\text{an}}(t, \lambda^{-1})$  analitycznej względem  $(t, \lambda) \in V$  (która pochodzi z Twierdzenia Normalizacyjnego Birkhoffa):

$$|H_U(t, \lambda, \bar{\lambda}) - H_U(t, \lambda)| < \alpha_1 e^{-\alpha_2 |\lambda|}. \quad (3.31)$$

W szczególności szeregi formalne (3.3) od  $\lambda^{-1}$  oraz forma normalna (3.16) są jednoznaczne i niezależne od sektora  $U$ .

Dla uproszczenia notacji będziemy pisać  $H_i := H_{U_i}$ . W dalszym ciągu będziemy też zakładać, że obszary  $U_1, \dots, U_M$  są uporządkowane przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Przez  $S_i$  będziemy oznaczać przecięcie  $U_i \cap U_{i+1}$ . Odgrywają one w dalszym ciągu istotną rolę, gdyż zawierają zbiory postaci

$$\{a < t < \epsilon, \quad |\lambda| > \Lambda, \quad \alpha < \arg \lambda < \beta\}. \quad (3.32)$$

Z każdym sektorem  $S_j$  stowarzyszymy operator  $G_j(t, \lambda, \bar{\lambda}) := H_i^{-1} H_{i+1}$  zwany dalej **operatorem Stokes'a**. Bazą stowarzyszoną z tym sektorem będzie układ

$$y_j = \exp \left\{ \int_0^t b_j(t, \lambda, \bar{\lambda}) \right\} e_j, \quad (3.33)$$

rozwiązań (3.30), gdzie  $0 < j \leq n$  i  $(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{C}^n$  oznacza bazę standardową. Bazę związaną z początkowym układem rozwiązań będziemy oznaczać przez

$$z_j = H_i y_j. \quad (3.34)$$

Są to rozwiązania WKB, analityczne w zmiennych  $(t, \lambda, \bar{\lambda})$ , w sektorze  $S_j$ . W dalszym ciągu zapis  $z$  i  $y$  będzie oznaczał wektory złożone ze współrzędnych  $z_j$  lub, odpowiednio,  $y_j$ .

Każdy operator Stokes'a  $G_i$  zachowuje układ w postaci diagonalnej (3.30). Stąd wynika, że  $G_i y_j$  także są rozwiązaniami układu (3.12) i mamy

$$G_i y_j = \sum_k c_i^{j,k}(\lambda, \bar{\lambda}) y_k, \quad (3.35)$$

gdzie współczynniki  $c_i^{j,k}$  nie zależą od  $t$ . Operatory  $C_i$  złożone z  $c_i^{j,k}$  są tzw. **macierzami Sokesa**. Podobnie jak w przypadku klasycznego zjawiska Stokes'a,  $C_i$  są równoważne (poprzez permutację bazy) z macierzami  $I + N$ , gdzie  $I$  oznacza identyczność a operator  $N$  jest nilpotentny.

Operatory  $H_{i+1} H_i^{-1}$  zachowują układ (3.2) i zachodzi

$$\begin{aligned} H_{i+1} H_i^{-1} z_j &= H_{i+1} G_i H_{i+1}^{-1} z_j = H_{i+1} G_i y_j \\ &= \sum_k c_i^{j,k} H_{i+1} y_k = \sum_k c_i^{j,k} x_k. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Te same macierze Stokes'a działają na rozwinięcia WKB (3.34). Równości (3.35) i (3.37) mogą zostać zinterpretowane jako

$$y_j|_{U_{i+1}} = \sum_k c_i^{j,k} y_k|_{U_i} \quad \text{oraz} \quad z_j|_{U_{i+1}} = \sum_k c_i^{j,k} z_k|_{U_i}, \quad (3.37)$$

gdzie  $y_j|_{U_{i+1}}, z_j|_{U_{i+1}}$  itd. oznaczają ograniczenia do odpowiednich obszarów.

*Dowód Twierdzenia 3.2.1.* Dowód przebiegać będzie standardowo i polegać będzie na sprowadzeniu  $A(t, \lambda)$  do postaci blokowo-diagonalnej  $\text{diag}(C_{11}, C_{22})$ , to jest  $C_{12} = C_{21} = 0$ . Macierze  $C_{11}$  i  $C_{22}$  odpowiadają podziałowi wyrazów  $b_j$  na dwa rozłączne zbiory  $\{b_1, \dots, b_m\}$  i  $\{b_{m+1}, \dots, b_n\}$ . Zakładając, że

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

będziemy poszukiwać transformacji  $H$  postaci

$$H = \begin{bmatrix} I & H_{12} \\ H_{21} & I \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Podstawiając do równania na zamianę zmiennych i różniczkując, otrzymujemy tożsamość

$$\dot{H}_{12} = A_{11}H_{12} - H_{12}A_{22} + A_{12} - H_{12}A_{21}H_{12} \quad (3.40)$$

na  $H_{12}$  oraz analogiczną tożsamość na  $H_{21}$ .

Równanie różniczkowe (3.40) jest przypadkiem szczególnym równania

$$\dot{X} = G(t)X + F(t, X), \quad (3.41)$$

gdzie  $G$  jest diagonalna i  $G_{jj}(t) = \lambda t^\alpha (b_{i'}(t) - b_{j'}(t))$ , gdzie  $i' \leq m \leq j'$  lub  $j' \leq m \leq i'$ ; tutaj  $j$  odpowiada  $(i', j')$ . Równoważnie, zachodzi

$$X(t) = \int_{\Gamma} E(t)E^{-1}(u)F(u, X(u)) du, \quad (3.42)$$

gdzie

$$\begin{aligned} E(t) &= \text{diag}(e^{\int G_{jj}}) = \text{diag}(\exp \int \lambda(S_{i'} - S_{j'})(t)) \\ &= \text{diag}[\exp \lambda \Delta_{i'j'} S(t)] \end{aligned} \quad (3.43)$$

jest macierzą fundamentalną części liniowej równania (3.42) i  $\Gamma = (\Gamma_j)$  jest układem dróg w płaszczyźnie zmiennej  $u$  z których każda kończy się w punkcie  $t$ . Drogi  $\Gamma_j$  są dobrane tak, aby czynniki

$$\exp \int_u^t G_{jj}(v) dv = \exp \{ \lambda(\Delta_{i'j'} S(t) - (\Delta_{i'j'} S(u))) \} \quad (3.44)$$

pozostawały ograniczone dla  $u \in \Gamma_j$ .

Aby określić drogi  $\Gamma_j$ , stowarzyszone z parą indeksów  $(i', j')$ , zauważmy, że funkcja  $(t, \lambda) \mapsto \text{Re}(\lambda \Delta_{i'j'} S(t))$  ma stały znak w obszarze  $V$ .



Jeśli  $(i', j') = (i, j)$  lub  $(i', j') = (k, l)$ , to własność ta jest oczywista. W przeciwnym przypadku, wynika zaś z własności **A1**. Stała  $\gamma$  występująca w określeniu obszaru  $W$  jest dobrana tak, że dla  $(i', j') \neq (i, j)$ , wartość  $\operatorname{Re}(\lambda \Delta_{i', j'} S(t))$  ma stały znak w  $W$ .

W dalszym ciągu będziemy rozpatrywać następujące przypadki:

**P1** Jeśli  $\operatorname{Re}(\lambda \Delta_{i', j'} S(t)) < 0$  w  $V$ , to  $\Gamma_j$  jest drogą w  $U$  bez samoprzecięć między  $0$  i  $t$ ;

**P2** Jeśli  $\operatorname{Re}(\lambda \Delta_{i', j'} S(t)) > 0$  w  $V$  oraz  $(i', j') \neq (i, j)$  w  $U$ , to  $\Gamma_j$  jest drogą w  $U$  bez samoprzecięć między  $s_j(t, \lambda, \bar{\lambda})$  i  $t$ ;

**P3** Jeśli  $\operatorname{Re}(\lambda \Delta_{i', j'} S(t)) > 0$  w  $V$  oraz  $(i', j') = (i, j)$  w  $U$ , to  $\Gamma_j$  jest drogą w  $U$  bez samoprzecięć między  $\tilde{s}_j(t, \lambda, \bar{\lambda})$  i  $t$ .

Funkcje  $s$  oraz  $\tilde{s}$  są w  $V$  analityczne i bliskie jedynek. Co więcej, jeśli  $u \in \Gamma_j$ , to wówczas

$$\operatorname{Re} \lambda (\Delta_{i', j'} S(t) - \Delta_{i', j'} S(u)) < 0, \quad (3.45)$$

w przypadku pierwszym, drugim i trzecim, dla  $(t, \lambda) \in V$ ,

$$\operatorname{Re} \lambda (t^{1-p/q} - u^{1-p/q})(\mu_{i'} - \mu_{j'}) < 0, \quad (3.46)$$

w przypadku drugim, dla  $(t, \lambda) \in W \setminus V$  oraz

$$\operatorname{Re} \lambda (t^{1-p/q} - u^{1-p/q})(\mu_{i'} - \mu_{j'}) = 0, \quad (3.47)$$

w przypadku trzecim, dla  $(t, \lambda) \in W \setminus V$ .

Równanie (3.42) rozwiązuje się metodą punktu stałego w odpowiedniej przestrzeni Banacha, analogicznej do wykorzystanej w dowodzie twierdzenia o normalizacji w [89].

W obszarze  $V$  sytuacja jest dosyć typowa, ze względu na mały czynnik  $E(t)E^{-1}(u)$  oraz ograniczoność  $F(u, X(u))$  w (3.42). W obszarze  $W$  należy skorzystać z założenia **A2**, które implikuje bliskość pierwotnego układu do szczególnego układu w postaci diagonalnej.

Z uwagi na (rzeczywisto-analityczną) zależność równań całkowych (3.42) i (3.44) od parametrów  $\lambda$  i  $\bar{\lambda}$ , rozwiązania (3.42) i (3.44) także zależą od tych parametrów w sposób rzeczywisto-analityczny.

W obszarze  $V$ , formy dróg  $\Gamma_j$  zależą analitycznie od  $t$  oraz  $\lambda^{-1}$ . W przypadku pierwszym wynika to wprost z definicji. W przypadku, gdy

$\operatorname{Re}(\lambda \Delta_{\nu_j'} S(t)) > 0$  w  $V$ , wybieramy drogę  $\Gamma_j^a$  łączącą punkty  $u = 1$  z  $u = t$ . W tym wypadku rozwiązanie jest funkcją analityczną zmiennych  $t$  i  $\lambda$ , w tym sensie, że  $\bar{\lambda}$  nie jest w tym wypadku dodatkową zmienną, ale faktycznym sprzężeniem  $\lambda$ .

Różnica między rozwiązaniem zależnym od  $t$ ,  $\lambda$  i  $\bar{\lambda}$  a tym zależnym (holomorficznie) od  $t$  i  $\lambda$ , polega na wyborze dróg  $\Gamma_j^{\text{an}}$  i  $\Gamma_j^{\text{an}}$ , odpowiednio. Mogą one zostać dobrane w taki sposób, że różnią się tylko w otoczeniu punktu początkowego  $u = 1$ . Wówczas różnica wkładów pochodzących od tej części w równaniu całkowym (3.42) jest rzędu  $O(e^{-\text{const} \cdot |\lambda|})$ .  $\square$

**Uwaga** Zjawisko Stokes'a jest powodowane przez różnice w wyborze dróg  $\Gamma_j$  z dowodu twierdzenia o normalizacji. Aby dokładniej zilustrować to zagadnienie, rozpatrzmy układ z książki [101]:

$$t^{k+1} \dot{x} = \begin{bmatrix} -k & t^{k+1} a(t) \\ 0 & bt \end{bmatrix} x, \quad (3.48)$$

gdzie  $a$  jest kielkiem analitycznym. Ogólne rozwiązanie przyjmuje postać

$$x_1(t) = ce^{t^{-k}} + c'e^{t^{-k}} \int_{\Gamma(t)} u^b e^{-u^{-k}} a(u) du \quad (3.49)$$

$$x_2(t) = c't^b. \quad (3.50)$$

W zależności od wyboru drogi  $\Gamma(t)$  otrzymujemy różne gałęzie dla rozwiązania. Przyjmuje się, że  $c = 0$  i  $\Gamma$  ma początek w zerze, w tych sektorach, gdzie  $e^{u^{-k}}$  jest małe. Jest dokładnie  $k$  takich sektorów 'spadku' i tyle samo odpowiadających im dróg.

Normalizacje w odpowiednich sektorach są postaci

$$x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) t^{-b} e^{t^{-k}} \int_{\Gamma(t)} u^b e^{-u^{-k}} a(u) du \quad (3.51)$$

$$x_2'(t) = x_2(t). \quad (3.52)$$

Różnią się one w zależności od wyboru drogi, a macierze Stokes'a są postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma_j \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.53)$$

gdzie

$$\sigma_j = \int_{\Gamma_j(t)} u^b e^{-u^{-k}} a(u) du \quad (3.54)$$

i  $\Gamma_j$  są drogami 'okrążającymi' sektory wzrostu funkcji  $\exp(-u^k)$ , o początku i końcu w zerze (w sąsiednich sektorach spadku).

Na koniec, dodajmy, że Twierdzenie 3.2.1 można uogólnić. Niech

$$A(t, \lambda) = \lambda^p t^{-\alpha} \operatorname{diag}(b_1, \dots, b_n) + O(\lambda^{p-1}) \quad \text{przy} \quad \lambda \sim \infty, \quad (3.55)$$

gdzie zakładamy, że  $0 < p \in \mathbb{Z}$ . W takim wypadku forma normalna przybiera postać

$$\dot{t} = (\lambda^p b y + O(\lambda^{p-1}))y, \quad (3.56)$$

gdzie  $b = (b_1, \dots, b_n)$ . Operatory Stokes'a wyznacza się w sposób analogiczny. Dalsze uogólnienie polega na dopuszczeniu sytuacji  $p \in \mathbb{Q}$ . W takim wypadku wybieramy naturalne  $q$ , dla którego  $pq \in \mathbb{Z}$  i dokonujemy zamiany  $\lambda^{1/q} = \lambda'$ . Należy zaznaczyć, iż w takiej sytuacji normalizacja ma miejsce w sektorach w  $\mathbb{C}P^1$  wokół nieskończoności.

### 3.3. Równoważność z funkcjami konfluentnymi

W tym paragrafie będziemy zakładać, że współczynniki  $a_j$  operatora różniczkowego

$$\sum_j a_j(\lambda, t) \frac{d^j}{dt^j} \quad (3.57)$$

są postaci

$$a_j(\lambda, t) = \frac{\nu_j}{t^j} + \sum_{l,k} a_{l,k} t^l \lambda^k, \quad (3.58)$$

gdzie współczynniki  $\nu_j$  są stałe i zachodzą następujące nierówności:

$$l > -j \quad (3.59)$$

oraz

$$k - \alpha l \leq j\alpha \quad (3.60)$$

gdzie  $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$ . Ponadto zakładamy, że liczba wyrazów, dla których spełniony jest warunek  $\alpha j = k - \alpha l$ , jest skończona. Nierówność (3.59) oznacza, że **równanie indykacyjne**

$$\sum_j (\gamma)_{n-j} \nu_j = 0, \quad (3.61)$$

gdzie  $(x)_n := x(x-1)\dots(x-n+1)$  oznacza symbol Pochhammera, dla wykładników rozwiązań postaci  $\text{const} \cdot t^\gamma$  wokół zera, nie zależy od parametru  $\lambda$ . Nierówność (3.60) pozwala, przy przeskalowanym czasie  $\tau = t\lambda^{p/q}$ , na sprowadzenie wyjściowego operatora (3.57) do postaci bliskiej

$$\sum_j a'_j(\tau) \frac{d^j}{d\tau^j}, \quad (3.62)$$

gdzie  $a'_j$  są wielomianami Laurenta, co wynika z (3.61). Równanie

$$\sum_j a'_j(\tau) \frac{d^j x}{d\tau^j} = 0 \quad (3.63)$$

ma dwa punkty osobliwe: regularny w  $\tau = 0$  oraz osobliwość nieregularną w nieskończoności. Różnica między operatorami (3.57) i (3.62) jest rzędu

$O(\lambda^{-\text{const}})$ .

Przypomnijmy, że konfluentne funkcje hipergeometryczne, to te funkcje  ${}_pF_q$ , dla których  $p \leq q$ . Przykładem funkcji konfluentnych są funkcje Bessela, które są przypadkiem szczególnym klasycznej funkcji konfluentnej  ${}_0F_1$  lub  ${}_1F_1$ . Ogólniejsze funkcje (typu Bessela) były badane w ([97] i w Rozdziale 2) i stanowią dobry przykład ilustrujący działanie poniższej teorii.

**Twierdzenie 3.3.1** *Przy powyższych założeniach, równanie  $Tx = 0$ , gdzie  $T$  jest operatorem (3.57) jest równoważne z analogicznym równaniem dla operatora (3.62), przy czym ta równoważność realizuje się poprzez odpowiadające fundamentalne macierze rozwiązań. Co więcej, macierz tej zamiany zmiennych jest analityczna ze względu na  $t$  i  $\lambda^{-1}$ .*

*Dowód.* Niech  $F$  i  $G$  oznaczają macierze fundamentalne związane odpowiednio z (3.57) oraz z (3.62). Operatory  $F$  i  $G$  są analityczne i wielowartościowe ze względu na  $t$ . Z założenia, odpowiadające im równania typu (3.61), w otoczeniu zera, są takie same. Ze względu na  $\lambda$  zarówno  $F$  jak i  $G$  są holomorfczne (i jednowartościowe), poza punktem  $\lambda = \infty$ , gdzie znajduje się osobliwość istotna. Wynika to z faktu, że w pierścieniu  $C' < |\lambda| < C''$ , przy  $t \sim 0$ , rozwiązania mogą być przedstawione w postaci zbieżnych rozwinięć typu Dulaca (w których mogą występować logarytmy), o współczynnikach zależnych analitycznie od  $\lambda$ .

Niech  $F_0$  będzie macierzą fundamentalną odpowiadającą **równaniu Eulera**

$$\sum_{j=0}^n \nu_j t^{-j} \frac{d^j x}{dt^j} = 0. \quad (3.64)$$

Wiadomo, że układ fundamentalny  $y = (y_1, \dots, y_n)$  dla równania (3.64), składa się z funkcji  $t^\gamma (\log t)^k$ . W szólności **macierz monodromii**  $M$ , zdefiniowane poprzez własność

$$y(\exp(2\pi i)t) =: y(t)M, \quad (3.65)$$

jest dobrze określona. Za sprawą standardowego argumentu, używanego w teorii liniowych, meromorfcznych RRZ, układy fundamentalne  $x(t, \lambda)$  i  $x'(t, \lambda)$ , stowarzyszone odpowiednio z (3.62) i (3.62), mogą być wybrane dowolnie bliskimi  $y$ , o macierzach monodromii równych macierzy  $M$ , odpowiadającej układowi  $y$ , jak w wyrażeniu (3.65). Mamy

$$F(\exp(2\pi i)t, \lambda) = F(t, \lambda)M \quad \text{oraz} \quad G(\exp(2\pi i)t, \lambda) = G(t, \lambda)M, \quad (3.66)$$

skąd wynika, że operator  $H(t, \lambda) = F(t, \lambda) \circ G^{-1}(t, \lambda)$  jest holomorfczny i jednowartościowy dla  $t < \epsilon$  oraz  $|\lambda| < \infty$ .

Następnie pokażemy, że  $|H(t, \lambda)| < K < \infty$  dla  $t \sim 0$ ,  $\lambda \sim \infty$  oraz  $t\lambda^\alpha = \tau \sim \infty$ .

Dla dużych  $\tau$ , rozwiązanie fundamentalne dla zagadnienia związanego z (3.62) jest takie same, jak dla układu liniowego w otoczeniu nieregularnego punktu osobliwego. Z teorii form normalnych, wynika, że mogą być one przedstawione jako

$$y'_j = \exp Q_j(\tau^{1/r})\tau^{\gamma_j}, \quad (3.67)$$

gdzie  $Q_j$  jest wielomianem, a  $r$  oznacza indeks rozgałęzienia. W typowym przypadku  $Q_j(u) = q_j u^k + O(u^{k-1})$ , gdzie  $q_i \neq q_j$ . W sektorach ('wzrostu' i 'spadku') wokół  $\tau = \infty$  są jednak dobrze określone w każdym wypadku.

Równanie odpowiadające (3.57) zapisane w zmiennej  $\tau$  jest zaburzeniem równania (3.62), zatem posiada ono rozwiązania w postaci  $x(\tau, \lambda^{-1/q})$  z głównym wkładem postaci (3.68). Wynika stąd, że odpowiednie macierze fundamentalne (dla przeskalowanego czasu) są bliskie w sektorach i wyrażenie  $|FG^{-1}|$  jest ograniczona. Zatem także  $H$  jest jednostajnie ograniczone, dla małych  $t$  i dużych  $\lambda$ . Wystarczy, jeśli założymy, że

$$|t| < \epsilon \quad \text{i} \quad |\lambda| > \epsilon^{-1/\alpha}, \quad (3.68)$$

dla  $\epsilon > 0$ , odpowiednio małych. Stąd wynika, że  $H$  jest analityczną zamianą układów odpowiadających operatorom (3.57) i (3.62), co kończy dowód Twierdzenia 3.3.1.  $\square$

### Przykład 3.3.1 Równanie

$$\ddot{x} = [\lambda^2 t a(t) + \lambda b(t, \lambda^{-1})] x, \quad (3.69)$$

gdzie  $a$  i  $b$  są kielkami analitycznymi i  $a(0) = 1$ , jest badane w książce [89]. Spełnia ono założenia Twierdzenia 3.3.1. Odpowiadające mu równanie Eulera  $\ddot{x} = 0$  ma macierz fundamentalną postaci

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

Odpowiednim równaniem konfluentnym jest **równanie Airy'ego**  $\ddot{y} = \tau y$ , gdzie  $\tau = t\lambda^{2/3}$  i tym razem różniczkujemy względem  $\tau$ . Rozwiązania fundamentalne równania Airy'ego wyrażają się poprzez funkcje Bessela

$$y_1(\tau) = \sum_{n \geq 0} \frac{\tau^{3n}}{3^{2n}(2/3)_n n!} = \Gamma(2/3) \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}} \tau I_{-1/3}(2\tau^{3/2}/3) \quad (3.71)$$

$$y_2(\tau) = \tau \sum_{n \geq 0} \frac{\tau^{3n}}{3^{2n}(4/3)_n n!} = \Gamma(4/3) \frac{3^{2/3}}{2^{1/3}} I_{1/3}(2\tau^{3/2}/3), \quad (3.72)$$

gdzie  $(u)_n$  oznacza symbol Pochhammera i  $(u)_0 = 1$ .

Następny, ogólniejszy, przykład będzie podany w ostatnim paragrafie tego rozdziału.

Twierdzenie 3.3.1 jest dosyć kluczowym narzędziem w Rozdziałach 1 i 2 (patrz też [95] i [97]), gdzie jest wykorzystywane do analizy równań hipergeometrycznych postaci  $(1-t)\partial t\partial x + \lambda^2 x = 0$  oraz  $(1-t)\partial(t\partial)^2 x + \lambda^3 x = 0$ .

Rozważmy teraz równanie odpowiadające operatorowi (3.62) w przypadku typowym, czyli przy  $Q_j(\tau) = q_j\tau^{1+r} + \dots$  z różnymi współczynnikami przy wiodącej potędze. Wykładnik  $r$  i współczynniki  $q_j$  spełniają relacje

$$r = \max \left\{ j^{-1} \text{ord}_{\tau=\infty} a'_j(\tau) \right\}. \quad (3.73)$$

Jeśli założymy, że  $a'_j(\tau) = c_j\tau^{jr} + \dots$ , to wówczas liczby  $q'_j := (1+r)q_j$  są pierwiastkami równania algebraicznego

$$\sum_{i=0}^n c_{n-i} (q'_j)^i = 0. \quad (3.74)$$

W ogólniejszej sytuacji, kiedy równanie odpowiadające operatorowi (3.57) jest określone w pewnym obszarze  $D \subset \mathbb{C}$ , zakładamy, że rozwiązania WKB

$$x \sim \exp(\lambda^d S_j(t)), \quad (3.75)$$

takie, że działania  $S_j(t) = q_j t^{1+r} + \dots$ , spełniają założenie **A1** z poprzedniego paragrafu. Z Twierdzenia 3.2.1 możemy określić operatory Stokes'a dla rozwinięć WKB. Ogólnie zależą one od zmiennych  $\lambda$  i  $\bar{\lambda}$ . Jednak przy powyższych założeniach można powiedzieć więcej.

**Wniosek 3.3.1** *Macierze Stokes'a odpowiadające rozwiązaniom WKB postaci (3.75), związanymi z równaniem dla operatorów postaci (3.57) określonym dla  $t \in D$ , przy  $|\lambda| > \Lambda$  i przy założeniach analogicznych jak w Twierdzeniu 3.3.1, są równoważne operatorom stałym (jako funkcje od zmiennej  $\lambda$ ).*

### 3.4. Uogólnione rozwinięcia WKB

W tym paragrafie w dalszym ciągu zajmować się będziemy operatorami typu (3.57) oraz stowarzyszonymi równaniami rzędu  $n$ . Ponadto rozwinięcia WKB będziemy traktować czysto formalnie. W taki ogólnym przypadku szeregi WKB przyjmują postać

$$x \sim \exp \left\{ \sum_{j=1}^k S_j(t) \lambda^j \right\} \times \sum_{l \geq 0} \psi_l(t) \lambda^{-l}, \quad (3.76)$$

gdzie przez  $S_k$  będziemy oznaczać główne działanie. Jeśli współczynniki operatora (3.57) są postaci

$$a_j(t, \lambda) = \sum_{i \geq 0} a_{j,kj-i}(t) \lambda^{kj-i}, \quad (3.77)$$

to podstawiając domniemane rozwiązania postaci (3.76) do równania odpowiadającego (3.57), otrzymujemy ciąg równań różniczkowych. Przed wypisaniem go, wprowadzimy pomocnicze oznaczenia. Niech

$$\dot{S}_j = s_j \quad (3.78)$$

oraz

$$Z(z, \lambda) = \sum_{0 < i \leq k} z_i \lambda^i, \quad (3.79)$$

gdzie  $z = (z_1, \dots, z_k)$ . Tożsamość

$$Z^n(z, \lambda) + a_1(t, \lambda)Z^n(z, \lambda) + \dots + a_n(t, \lambda) = \sum_j Q_j(z, t)\lambda^{nk-j}, \quad (3.80)$$

określa wielomiany  $Q_j$  w sposób jednoznaczny. Zauważmy, że  $Q_j$  z reguły zależy od mniej niż  $k$  zmiennych  $z_i$ . Mamy, na przykład,

$$Q_0(z, t) = \sum_i a_{i,ki}(t)z_k^{n-i}, \quad (3.81)$$

który zależy tylko od  $z_k$ . Odpowiedni układ równań Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$Q_j(s(t), t) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \geq j \geq n. \quad (3.82)$$

Odpowiedni układ równań transportu jest następujący:

$$P(t)\dot{\psi}_0(t) + R(t)\psi_0(t) = 0, \quad (3.83)$$

$$P(t)\dot{\psi}_j(t) + R(t)\psi_j(t) = T_j(t) \quad \text{dla} \quad 0 < j \geq n, \quad (3.84)$$

gdzie

$$P = \frac{\partial Q_0}{\partial z_k}, \quad (3.85)$$

$$R = Q_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z_k^2} \dot{s}_k \quad (3.86)$$

i składniki niejednorodne  $T_j$  wyrażają się za pomocą działań, amplitud oraz ich pochodnych.

Główne równanie Hamiltona-Jacobiego (dla  $j = 0$ ) ma  $n$  różnych rozwiązań, w przypadku typowym. Odpowiadające im działania  $S_{k,j}$  zależą od stałych całkowania i w powyższej sytuacji jest to jedyna niejednoznaczność. Założenie typowości implikuje, że  $P$  nie jest tożsamościowo równe zeru, co pozwala na jednoznaczne rozwiązanie odpowiednich równań transportu. Ponadto może się zdarzyć, że pewne działanie  $S_{k,j}$  jest tożsamościowo zerowe. Wtedy odpowiadające rozwiązanie WKB przybiera postać

$$\exp(\lambda^{k-1} S_{k-1,i} + \dots) \times (\dots). \quad (3.87)$$

Wobec tego zachodzi

**Stwierdzenie 3.4.1** *Jeśli rozwiązania  $s_{k,i}$  głównego równania Hamiltona-Jacobiego są proste ( $\partial Q_0/\partial z_k$  nie znika tożsamościowo), to wówczas równanie odpowiadające (3.57) posiada uogólnione rozwiązania WKB postaci (3.76).*

*Jeśli zatem wyróżnik  $Q_0$  nie znika tożsamościowo, to wówczas równania (3.82) i (3.83) posiadają rozwiązania i uogólnione rozwiązania WKB dla równania odpowiadającego (3.57) są postaci (3.76).*

Zilustrujmy powyższe stwierdzenie następującym przykładem.

**Przykład 3.4.1** *Dla równania*

$$\ddot{x} + \sum_{j=0}^2 a_j(t) \lambda^j + \sum_{j=0}^4 b_j(t) \lambda^j \quad (3.88)$$

*mamy*

$$Q_0(z, t) = z_2^2 + a_2(t)z_2 + b_4, \quad (3.89)$$

$$Q_1(z, t) = (2z_2 + a_2(t))z_1 + a_1(t)z_2 + b_3, \quad (3.90)$$

$$P(t) = 2s_2(t) + a_2(t), \quad (3.91)$$

$$R(t) = (z_1^2 + a_1(t) + b_2(t)) + \dot{s}_2(t). \quad (3.92)$$

Rozważmy przypadek nietypowy, czyli kiedy równanie Hamiltona-Jacobiego ma pierwiastki wielokrotne. Sytuacja bez parametru, w otoczeniu nieregularnego punktu osobliwego, była rozważana w pracach [53], [67] oraz [87]. Rozwiązanie opiera się na zastosowaniu szeregu tzw. **przekształceń przycinania** oraz na dopuszczeniu rozwinięć z czsem w postaci  $\tau := t^q$ , gdzie  $q \in \mathbb{Q}$ . O szczegółach można przeczytać w monografii [101].

H. Turritin studiował w [86] zagadnienie asymptotycznych rozwinięć formalnych z parametrem bliskim nieskończoności, w duchu twierdzenia Hukuhary-Levelta-Turritina. Ogólna metoda użyta w [87] jest podobna do metodologii postępowania z układami bez parametrów, z tym, że liczba kroków oraz rozpatrywanych przypadków gwałtownie wzrasta, co powoduje znaczną komplikację algorytmu. Ponadto Turritin nie rozważa osobno równania Hamiltona-Jacobiego i równań transportu na współczynniki.

W przypadku jednego równania rzędu  $n$ , sytuacja jest znacznie prostsza. Okazuje się, że wówczas dla każdego rozwinięcia WKB istnieje tylko skończona liczba rozgałęzionych zamian parametrów  $\lambda_i \mapsto \lambda_{i+1} = \lambda_i^{1/q_i}$  i  $\lambda_0 := \lambda$ , takich, że rozwiązania wyrażają się z użyciem  $\lambda_i$ . Ponadto mamy  $n \geq q_0 \geq q_1 \geq \dots$



W sytuacji gdy  $Q_0(z_k, t) = [z_k - a(t)]^m \tilde{Q}_0$  i  $\tilde{Q}_0(a, t)$  nie znika tożsamościowo, istnieje  $m$  rozwinięć z częścią główną

$$\exp \left\{ \lambda^k \int_{t_0}^t a(u) du \right\}. \quad (3.93)$$

Po zastosowaniu przekształcenia przycinania

$$x \mapsto x \exp \left\{ -\lambda^k \int_{t_0}^t a(u) du \right\}, \quad (3.94)$$

symbol  $Q_0$  głównego operatora Hamiltona-Jacobiego zmienia się na  $z_k^m \tilde{Q}_0$ . W terminach równania (3.77) oznacza to, że wszystkie współczynniki  $a_{i,ki}$ , gdzie  $i > n - j$ , znikają tożsamościowo. Załóżmy, że

$$a_{n-j, k(n-j)-r_j}, \quad \text{przy} \quad 0 \leq j < l, \quad (3.95)$$

jest pierwszym współczynnikiem, który nie znika tożsamościowo. Dopuszczamy  $r_j = \infty$ , jeśli  $a_j = 0$ , ale możemy założyć, że  $r_0 < \infty$ , gdyż w przeciwnym przypadku mielibyśmy po prostu do czynienia z równaniem niższego rzędu.

Poszukujemy rozwiązań postaci

$$x \sim \exp \left\{ -\lambda^{k-r} S_{k-r}(t) + \dots \right\} \times \{ \psi_0(t) + \dots \}, \quad (3.96)$$

gdzie  $r \in \mathbb{Q}$ . Poniżej zachowujemy notację  $\dot{S} = s$ . Po podstawieniu do równania, przy najwyższych potęgach  $\lambda$  (pomijając  $\exp$ ) mamy

$$\lambda^{nk-lr} a_{n-l, k(n-l)} s_{k-r}^l \psi_0 \quad (3.97)$$

oraz

$$\lambda^{nk-(r_j+jr)} a_{n-j, k(n-j)-r_j} s_{k-r}^j \psi_0, \quad (3.98)$$

dla  $0 \leq j < l$ . Stąd widać, że wkłady pochodzące od  $\partial^i x$ , przy  $i > l$  są małe w porównaniu z wkładem wiodącym  $\lambda^{nk-lr} a_{n-l, k(n-l)} s_{k-r}^l \psi_0$ . Wybieramy następnie  $r > 0$  tak, aby w powyższych równaniach zachodziło  $r_j + jr = lr$ , czyli określamy

$$r := \min_{0 \leq j < l} \frac{r_j}{l-j}. \quad (3.99)$$

Na przykład, jeśli  $r_0 = 1$ , to  $r = 1/l$ .

Następnie rozważamy dwa przypadki:

- $r < m$ ,
- $r \geq m$ .

W przypadku  $r < m$ , przedstawimy  $r = p/q$ , gdzie  $p$  i  $q$  są względnie pierwsze. Przyjmujemy  $(\lambda')^q = \lambda$  i modyfikujemy (3.96) do postaci

$$x \sim \exp \left\{ -(\lambda')^{kq-p} S_{kq-p}(t) + \dots + \lambda' S_1(t) \right\} \\ \times \left\{ \psi_0(t) + (\lambda')^{-1} \psi_0(t) + \dots \right\}, \quad (3.100)$$

Porównywanie względem stopnia prowadzi teraz do równania

$$\sum_{r_j + jr = lr} a_{n-j, k(n-j)-r_j}(t) s_{kq-p}^j(t) = 0, \quad (3.101)$$

analogicznego jak w przypadku nierozgałęzionym, które także będziemy **głównym równaniem Hamiltona-Jacobiego drugiego rodzaju**. Kolejne równania Hamiltona-Jacobiego otrzymuje się analogicznie jak równania (3.81). Przy

$$Z(z, \lambda') = z_{kq-p} (\lambda')^{kq-p} + \dots z_1 \lambda', \quad (3.102)$$

mamy

$$Z^n(z, \lambda) + a_1(t, (\lambda')^q) Z^{n-1}(z, \lambda') + \dots \\ + a_n(t, (\lambda')^q) = \sum_j Q_j(z, t) (\lambda')^{nkq-lp-j}, \quad (3.103)$$

gdzie

$$Q_0(z, t) = \sum a_{n-j, k(n-j)-r_j}(t) z^{nk-i} \quad (3.104)$$

oraz

$$Q_j(z, t) = z_{kq-p} \frac{\partial Q_0}{\partial z_{kq-p}} + Q'_j(z, t) \quad (3.105)$$

i suma przebiega zbiór  $\{j : r_j + jr = lr\}$ .

Układ równań Hamiltona-Jacobiego drugiego rodzaju przyjmuje postać

$$Q_j(s(t), t) = 0 \quad \text{dla} \quad 0 \leq j \leq kq - p - 1. \quad (3.106)$$

Analogiczny jest także odpowiedni układ równań transportu.

Po znalezieniu rozwiązań dla każdego równania głównego równania Hamiltona-Jacobiego, możemy potem sukcesywnie rozwiązać kolejne, następnie znaleźć rozwiązania równań transportu i wreszcie wyznaczyć rozwiązanie WKB.

**Przykład 3.4.2** Rozważmy (wspomniane we wstępie rozdziału) równanie Riemanna

$$t^2(1-t)^2 \ddot{x} - 2\lambda t(1-t) \dot{x} + \lambda^2 x = 0. \quad (3.107)$$

Równanie główne Hamiltona-Jacobiego przyjmuje postać

$$\left\{ t(1-t) \dot{S}_1 - 1 \right\}^2 = 0. \quad (3.108)$$

Jego rozwiązanie jest jednoznaczne,  $\dot{S}_1 = \partial_t \log t(1-t)^{-1}$ . Przekształcenie przycinania

$$x = \left( \frac{t}{1-t} \right)^\lambda y \quad (3.109)$$

prowadzi do równania

$$t^2(1-t)^2 \ddot{y} + \lambda(2t-1)y = 0. \quad (3.110)$$

Stąd wynika, że rozgałęziona zmiana parametru jest postaci  $\eta = \lambda^{1/2}$ , i otrzymujemy nowe równanie główne Hamiltona-Jacobiego

$$\left\{ t(1-t)\dot{S}_{1/2} \right\}^2 + 2t - 1 = 0. \quad (3.111)$$

Rozwiązujemy je i otrzymujemy

$$S = \pm e^{i\pi/2} \log \left( \frac{u+1}{u-1} \right) \pm \log \left( \frac{u+i}{u-i} \right), \quad (3.112)$$

gdzie  $u = \sqrt{2t-1}$ . Pierwsza amplituda wyraża się wzorem

$$\psi_0 = \frac{\sqrt{t(1-t)}}{2t-1}, \quad (3.113)$$

skąd możemy już wyznaczyć pierwsze przybliżenie WKB

$$x \sim \left( \frac{t}{1-t} \right)^\lambda \left( \frac{u-1}{u+1} \right)^{\pm i\sqrt{\lambda}} \left( \frac{u-i}{u+i} \right)^{\pm\sqrt{\lambda}} \times \left\{ \frac{\sqrt{t(1-t)}}{2t-1} + O(\lambda^{-1/2}) \right\}. \quad (3.114)$$

W wypadku, gdy wielomian  $Q_0$  ma pierwiastek wielokrotny (dla każdego  $t$ ), powtarza się powyższą procedurę, czyli sukcesywne stosowanie przekształcenia przycięcia i rozgałęzionej zamiany parametru.

**Stwierdzenie 3.4.2** *Krotność  $l_1$  rozwiązania  $z_{mp-q} = b(t)$  jest albo ściśle mniejsza od krotności początkowej  $l$ , lub  $q = 1$ , czyli  $r \in \mathbb{Z}$ .*

*Dowód.* Krotność pierwiastka zerowego musi być mniejsza niż  $l$ , ponieważ  $Q_0$  zawiera co najmniej dwa różne jednomiany. Jeśli założymy, że niezerowe rozwiązanie ma krotność równą  $l$ , to żaden jednomian w rozwinięciu  $Q_0$  nie może tożsamościowo zniknąć. Wówczas mamy  $r_j = (l-j)p/q$  dla każdego  $j$ , gdzie  $r_j \in \mathbb{Z}$ , skąd  $q = 1$ .  $\square$

Jeśli rozwiązanie  $b(t)$  ma krotność  $l$ , należy zastosować ponownie przekształcenie przycięcia

$$x \mapsto x \exp \left\{ -\lambda^{k-1} \int_{t_0}^t b(u) du \right\}, \quad (3.115)$$

bez rozgałęzionej zamiany parametru.

Rozpatrzmy teraz drugi przypadek ze strony 87. Niech teraz  $r \geq m$ .

**Stwierdzenie 3.4.3** *Jeśli wszystkie liczby  $r_j$ , dla  $0 \leq j < l$  spełniają  $r_j \geq m(l - j)$ , to wówczas istnieje  $l$  niezależnych rozwiązań, będących szeregami potęgowymi zmiennej  $\lambda^{-1}$ .*

Dowód. Równanie (3.1) może być przepisane w postaci

$$\lambda^{m(n-l)} \left\{ L_l(t, \partial_t) + O(\lambda^{-1}) \right\} = 0, \quad (3.116)$$

gdzie

$$L_l(t, \partial_t) = a_{n-l, m(n-l)}(t) \partial_t^l + \dots, \quad (3.117)$$

jest liniowym operatorem rzędu  $l$ . Po podstawieniu

$$x = \sum_{j \geq 0} \psi_j(t) \lambda^{-j} \quad (3.118)$$

otrzymujemy układ rzędu  $l$  postaci

$$L_l \psi_0 = 0, \quad (3.119)$$

$$L_l \psi_j = R_j, \quad (3.120)$$

który ma  $l$  niezależnych rozwiązań.  $\square$

**Uwaga 3.4.1** *Z uwagi na brak dodatkowych założeń na współczynnik  $a_{n-l, m(n-l)}$  operatora  $L_l$ , nie można spodziewać się analityczności rozwiązań, ze względu na  $t$ .*

*Dopuszcza się  $l = 1$ , czyli przypadek, gdy rozwiązania głównych równań Hamiltona-Jacobiego są proste. Wiadomo, że w ogólności szereg*

$$\sum_{j > 0} \psi_j(t) \lambda^{-j}, \quad (3.121)$$

*jest rozbieżny. Nie można także oczekiwać, że zbieżne będą rozwiązania z Twierdzenia 3.4.3, przy  $l > 1$ . Jednak gdy  $l = n$ , równanie (3.116) ma analityczną prawą stronę i jego rozwiązania są analityczne ze względu na  $\lambda^{-1}$ .*

Stosując tą procedurę odpowiednią liczbę razy otrzymujemy następujący wynik.

**Twierdzenie 3.4.1** *Dowolne równanie rzędu  $n$  postaci (3.1) o współczynnikach jak w (3.77), przy  $k > 0$ , posiada  $n$  niezależnych rozwiązań WKB*

$$x \sim \exp \left\{ \sum_j^N S_{\alpha_j(t)} \lambda^{\alpha_j} \right\} \times \sum_{l \geq 0} \psi_l(t) \lambda^{-l/q}, \quad (3.122)$$

gdzie albo  $N = 0$  (czyli nie występują czynniki wykładnicze), albo  $\alpha_j$  są liczbami wymiernymi, które można uporządkować w następujący sposób

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{q_1} > \frac{p_2}{q_1 q_2} > \dots > \alpha_N = \frac{p_N}{q_1 \dots q_N} = \frac{p_N}{q} > 0, \quad (3.123)$$

gdzie  $p_i$  i  $q_j$  są takimi liczbami naturalnymi, że  $q_1 \leq n$  i  $\max\{q_i : i < j, q_i > 1\}$ . Funkcjonały działania  $S_{\alpha_j}$  oraz współczynniki  $\psi_l$  są obliczalne algorytmicznie jednoznacznie modulo stałe całkowania.

### 3.5. Przykład zastosowania do równań na funkcje tworzące dla $\zeta(2)$ i $\zeta(3)$ oraz innych równań związanych z wielokrotnymi wartościami zeta

Podamy teraz wybrane zastosowania metod omówionych powyżej do badania funkcji związanych z wielokrotnymi wartościami zeta.

**Przykład 3.5.1** Zastosujemy Twierdzenie 3.2.1 do analizy równania

$$(1-t)\partial(t\partial)^2x + \lambda^3x = 0. \quad (3.124)$$

Punkty osobliwe (regularne) znajdują się w punktach  $0, 1$  i  $\infty$ . Rozwiązania WKB są postaci

$$g_0^\mu(t, \lambda) = e^{-\mu\lambda S(t)} \times \left\{ \left( \frac{1-t}{t} \right)^{1/3} \lambda^{-1} + \dots \right\}, \quad (3.125)$$

gdzie indeks  $\mu$  przebiega pierwiastki stopnia 3 z 1 oraz

$$S(t) = \int_0^t u^{-2/3}(1-u)^{-1/3} du. \quad (3.126)$$

Przykład ten został zbadany w Rodziale 2 (i w pracy [97]). Parametr  $\lambda^3$  określa podział płaszczyzny odpowiadającej  $\lambda$  na sześć przystających sektorów wokół  $\lambda = \infty$ . Wszystkie operatory Stokes'a dają się wyrazić za pomocą 'operatora podstawowego'

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.127)$$

odpowiadającego sektorowi  $0 < \arg \lambda < \pi/3$ . Te same operatory Stokes'a odpowiadają za asymptotyczne zachowanie równania konfluentnego typu Bessela  $\partial(t\partial)^2x + \lambda^2x = 0$ . Wiodący składnik operatora  $A$  dla odpowiedniego, równoważnego układu  $\dot{x} = Ax$  ma postać

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\lambda^3 t^{-2}(1-t)^{-1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.128)$$

zaś odpowiadająca mu macierz diagonalna ma na przekątnej wyrazy

$$-\mu^j \lambda t^{-2/3} (1-t)^{-1/3} \quad j \in \{0, 1, 2\}. \quad (3.129)$$

Równanie hipergeometryczne  $(1-t)\partial(t\partial)^2x + \lambda^3x = 0$  ma inny układ rozwiązań WKB, odpowiadający punktowi osobliwemu  $t = 1$ :

$$h_0^{\mu^j}(t, \lambda) = (\mu t)^{2/3} e^{-\mu\lambda S(1-t)} g_0^{\mu^j}(1-t, \lambda), \quad (3.130)$$

zaś podstawowy operator Stokes'a ma formę

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.131)$$

Widoczna jest wyraźna różnica w analizie asymptotycznej w zależności od wyboru punktu osobliwego.

**Przykład 3.5.2** Rozważmy ogólne równanie (4), czyli

$$(T + \lambda^{|p|})x = 0, \quad (3.132)$$

gdzie  $p = (p_1, \dots, p_k) \in \mathbb{Z}^k$ ,  $|p| = p_1 + \dots + p_k$  oraz

$$T := (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{p_1-1} \dots (1-t)\partial_t(t\partial_t)^{p_k-1}, \quad (3.133)$$

jest tożsamy z (3.8). Odpowiadającym (4) równaniem Eulera jest

$$Lz := \partial_t(t\partial_t)^{p_1-1} \dots \partial_t(t\partial_t)^{p_k-1}z = 0, \quad (3.134)$$

zaś odpowiednim, związanym z (4), hipergeometrycznym równaniem konfluentnym

$$Ly + y = 0. \quad (3.135)$$

Szczególnym przypadkiem opisanej sytuacji jest poprzedni Przykład 3.5.1.

Rozważając teraz równanie (4) w otoczeniu  $s = 1 - t = 0$ , możemy przepisać operator Eulera jako

$$L' := s(\partial_s)^{p_1} \dots s(\partial_s)^{p_k}. \quad (3.136)$$

i odpowiadające mu równania

$$L'z = 0 \quad \text{oraz} \quad [L' + (-1)^{|p|}]y = 0. \quad (3.137)$$

Twierdzenie 3.3.1 jest bardzo ważne w analizie (porównaj [95] oraz [95]) zjawiska Stokes'a dla rozwinięć asymptotycznych typu WKB stowarzyszonych z równaniami typu (4).

## Dodatek A

# Aproksymacja fazy stacjonarnej

Metoda fazy stacjonarnej należy do klasycznych tematów analizy i metod matematycznych fizyki kwantowej. Jej daleko idące uogólnienia są także wykorzystywane w kwantowych teoriach pola, gdzie często nie posiadają ścisłej interpretacji matematycznej. Opisaniu jej poświęconych jest wiele publikacji i monografii (patrz np. [45], [72] i [85]). Wykorzystamy ten dodatek do omówienia podstawowych wyników tej teorii.

Wyrażenie postaci

$$I(\lambda) := \int_X e^{i\lambda\phi(x)} a(x) dx, \quad (\text{A.1})$$

gdzie  $X$  jest rozmaitością (lub ogólniej - pewnym otwartym podzbiorem rozmaitości) oraz  $\phi$  i  $a$  są funkcjami na  $X$ , które dalej będziemy nazywać odpowiednio **fazą** i **amplitudą**. Najistotniejszym założeniem jest, aby każdy punkt krytyczny funkcji  $\phi$  był izolowany i **typu Morse'a**,<sup>1</sup> czyli

---

<sup>1</sup>Jeśli  $\phi$  nie ma punktów krytycznych, to za pomocą zamiany zmiennych możemy zapisać (przynajmniej lokalnie) całkę (A.4) w postaci

$$I(\lambda) = \int_X e^{i\lambda y} a' \circ \phi^{-1}(y) dy, \quad (\text{A.2})$$

która na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a (lub teorii Paleya-Wienera) pozwala na opisanie własności asymptotyki  $I(\lambda)$ . W szczególności (w zależności od gładkości  $a'$ ), mamy  $I(\lambda) \sim \lambda^{-k}$  dla  $\lambda \sim \infty$ . To podejście bywa nazywane **metodą niestacjonarnej fazy**, z uwagi na warunek nieznikania gradientu.

Możemy także założyć, że  $\phi$  jest funkcją z punktami krytycznymi ogólniejszej postaci. Na przykład (patrz też [85]) dla całki

$$I(\lambda) = \int_{-1}^1 e^{i\lambda x^4} dx, \quad (\text{A.3})$$

zachodzi wzór  $I(\lambda) = 2\Gamma(5/4)(-i\lambda)^{-1/4} + O(\lambda^{-1/2})$ .

Takie przypadki są jednak nietypowe i jako takie znajdują znacznie mniej zastosowań.

żeby macierz  $(d^2\phi/dx^2)(x_i)$  była niezdegenerowana tam, gdzie  $d\phi(x_i) = 0$ . Ponadto zakłada się też, ze względów raczej technicznych, że  $a : X \rightarrow \mathbb{C}$  ma zwarty nośnik oraz że  $a$  i  $\phi$  są funkcjami klasy  $C^\infty$ . Mamy wówczas

$$I(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{n/2} \sum_{x \in \text{crit } \phi} e^{i\lambda\phi(x)} a(x) \frac{e^{i\pi \text{sgn}\phi''(x)/4}}{|\det \phi''(x)|^{1/2}} + O(\lambda^{-n/2-1}), \quad (\text{A.4})$$

gdzie  $\text{crit } \phi$  oznacza zbiór punktów krytycznych  $\phi$ , a  $\phi''$  jest drugą pochodną fazy, a  $\text{sgn}\phi''(x)$  oznacza sygnaturę formy kwadratowej wyznaczonej przez  $\phi''(x)$ .

Rozważmy najpierw najprostrzy przypadek, kiedy  $X = (-\infty, \infty)$ ,  $a = 1$  oraz  $\phi(x) = \pm x^2$ . Mamy

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-qx^2} dx = \left(\frac{\pi}{q}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.5})$$

co po przejściu do granicy  $q \rightarrow \pm i\lambda$  daje

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm i\lambda x^2} dx = \left(\frac{\pi}{\pm i\lambda}\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{\pm \lambda}\right)^{1/2} e^{\mp \pi i/4}. \quad (\text{A.6})$$

Jeśli teraz prostą  $\mathbb{R}$  zastąpimy  $n$ -wymiarową przestrzenią  $Y := \mathbb{R}^n$ , to korzystając z twierdzenia Fubini'ego, możemy zapisać całkę (stosujemy konwencję  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  i  $x \cdot y$  oznacza iloczyn skalarny wektorów  $x$  i  $y$ )

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_Y e^{i\lambda x \cdot x} dx \\ &= \int_{-1}^1 e^{i\lambda x_1^2} dx_1 \times \int_{-1}^1 e^{i\lambda x_2^2} dx_2 \times \dots \times \int_{-1}^1 e^{i\lambda x_n^2} dx_n, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

jako iloczyn całek jednowymiarowych postaci (A.6). Ogólny przypadek (A.4) daje się sprowadzić do (A.7) przy wykorzystaniu przeskalowania oraz (pewnego wariantu) rozkładu jedności, gdzie wyizolowujemy pojedyncze punkty krytyczne.

Zilustrujemy teraz omówioną powyżej technikę pięknym i prostym przykładem, który zazwyczaj jest omawiany w innym kontekście.

**Twierdzenie A.0.1 (Aproksymacja Stirlinga)** *Dla  $x \sim \infty$  zachodzi wzór*

$$\Gamma(1+x) \sim \sqrt{2\pi x} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^x. \quad (\text{A.8})$$

*Dowód.* Mamy

$$\Gamma(1+x) = x^{x+1} \int_0^\infty e^{-x(t-\log t)} dt. \quad (\text{A.9})$$



Jedynym punktem krytycznym (typu Morse'a) fazy  $\phi = t - \log t$  jest  $t = 1$ , gdzie  $\phi''(1) = 1$ . Wykorzystując wzór (A.4), otrzymujemy wynik.  $\square$

Na koniec warto wspomnieć o ciekawych zastosowaniach całek oscylujących i metody fazy stacjonarnej we współczesnej matematyce i fizyce teoretycznej.

**Operatory Całkowe Fouriera.** Teoria całek i szeregów Fouriera ma swój początek w próbach rozwiązania liniowych równań fizyki matematycznej. Na przykład równanie Poissona

$$\Delta u = f \quad \text{dla danej funkcji} \quad f \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (\text{A.10})$$

ma rozwiązanie postaci

$$u(x) = -(2\pi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} |\xi|^{-2} \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (\text{A.11})$$

gdzie

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx. \quad (\text{A.12})$$

Do rozwiązywania ogólnych równań eliptycznych, ze zmiennymi współczynnikami, wprowadza się **operatory pseudoróżniczkowe**

$$Af(x) = -(2\pi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi, \quad (\text{A.13})$$

gdzie  $a$  spełnia pewne warunki gładkości i wzrostu w nieskończoności.

Operatory Całkowe Fouriera zostały wprowadzone przez Larsa Hörmandera, na podstawie wcześniejszych prac fizyków teoretycznych, poprzedzających wyniki matematyków rosyjskich [72], [29], [30] i [22]. Uogólniają one pojęcie operatora pseudoróżniczkowego i (w pewnym zakresie) pozwalają także uogólnić pojęcie kwantyzacji z funkcji na odwzorowania (patrz [51]).

**Kwantowy niezmiennik Cherna-Simonsa.** Niech  $S$  będzie powierzchnią zanurzoną w  $\mathbb{R}^3$ , z metryką indukowaną  $g$ . Klasyczny wzór Gaussa-Bonneta

$$2\pi\chi(S) = \int_S K d\mu_g \quad (\text{A.14})$$

oraz jego uogólnienie

$$2\pi\chi(S) = \int_S K d\mu_g + \int_C \kappa, \quad (\text{A.15})$$

gdzie  $C = \partial S$ ,  $K$  jest krzywizną Gaussa i  $\kappa$  oznacza krzywiznę geodezyjną krzywej  $C \subset S$ , jest jednym z pierwszych wyników wiążących niezmienniki lokalne  $K$  i globalne własności topologiczne  $S$ .

Podobne wzory zachodzą także w wyższych wymiarach. Klasyczny niezmiennik Cherna-Simmonsa (formy) koneksji  $A \in \Omega^1(X; \mathfrak{g})$  na płaskiej  $G$ -wiązce głównej  $P \rightarrow X$ , na 3-rozmaitości  $X$

$$S(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_X \text{tr} \left( A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad (\text{A.16})$$

jest uogólnieniem całkowitej krzywizny geodezyjnej. W pracy [92] E. Witten zapostulował nowy niezmiennik topologiczny 3-rozmaitości, skonstruowany na bazie niezmiennika Cherna-Simmonsa. Uniezależnienie od metryki uzyskuje się całkując po przestrzeni koneksji. Mamy

$$QCS_k(X) = \int_{M(X)} \exp ikS(A) dA, \quad (\text{A.17})$$

gdzie  $M(X) := \Omega^1(X; \mathfrak{g})/G$  jest ilorazem przestrzeni koneksji przy działaniu pewnej grupy  $G$ . Liczba  $k$  nosi nazwę **poziomu niezmiennika**. Cudzysłów oznacza, że całka (funkcjonalna) nie jest do końca poprawnie zdefiniowana matematycznie.

Wykorzystanie do całki (A.17) metodę fazy stacjonarnej (a dokładniej jej nieskończenie wymiarowy odpowiednik), pozwala przypuszczać (porównaj [92]), że kwantowy niezmiennik Cherna-Simmonsa spełnia

$$QCS_k(X) \sim \frac{1}{2} e^{3\pi i/4} \sum_{A \in M_0(X)} e^{2\pi i[(k+2)S(A) - I(A)/4]} \sqrt{\tau_X(A)}, \quad (\text{A.18})$$

gdzie  $S$  jest klasycznym niezmiennikiem Cherna-Simmonsa,  $I$  oznacza potok spektralny Atiyah-Patodi-Singera, zaś  $\tau$  jest torsją Franza-Reidemeistera.

Wzór (A.18) został matematycznie, ściśle udowodniony w pewnych przypadkach (patrz np. [2]).

## Dodatek B

# Relacja ortogonalności, splot i wzory całkowe

### B.1. Reprezentacje całkowe funkcji hipergeometrycznych

W teorii szeregów Fouriera (ogólniej - w analizie harmoniczej) bardzo ważną rolę odgrywa ortogonalność w przestrzeniach funkcyjnych z iloczynem skalarnym. Jeśli  $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$  oznacza bazę ortonormalną  $L^2(S^1)$ , gdzie iloczyn skalarny jest określony wzorem

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2(S^1)} := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \overline{\psi(t)} dt, \quad (\text{B.1})$$

to wówczas

$$\langle e^{int}, e^{imt} \rangle_{L^2(S^1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t} dt = \delta_{n,m}, \quad (\text{B.2})$$

gdzie  $\delta_{n,m} = 1$  gdy  $n = m$  i  $\delta_{n,m} = 0$  w p. p. Podobna własność przysługuje ogólnym **układom ortogonalnym**. Większość zawartych w tej pracy wzorów na reprezentacje całkowe rozwiązań równań różniczkowych otrzymujemy poprzez wykorzystanie 'kompleksyfikacji' powyższego przykładu. Dokładniej, układ  $\{t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$  jest ortonormalny<sup>1</sup> na  $GL_1(\mathbb{C}) := \mathbb{C}^*$ , względem iloczynu skalarnego

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2(S^1)} := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \phi(t) \psi(t^{-1}) \frac{dt}{t}, \quad (\text{B.3})$$

gdzie  $\text{ind}(\gamma, 0) = 1$ . W tych terminach, łatwo można uzasadnić wzór całkowy na podniesienie indeksów dla ogólnej funkcji hipergeometrycznej.

---

<sup>1</sup>W zasadzie ortogonalność ma miejsce w przestrzeni  $L^2(\gamma)$  z iloczynem skalarnym indukowanym z zanurzenia  $\gamma \hookrightarrow \mathbb{C}^*$ . Jeśli np.  $\gamma = S^1$ , to otrzymujemy klasyczną teorię szeregów Fouriera.

**Stwierdzenie B.1.1** *Funkcja*

$${}_{p+1}F_{q+1} \left( \begin{matrix} u_1, \dots, u_{p+1} \\ v_1, \dots, v_{q+1} \end{matrix} \middle| t \right) \quad (\text{B.4})$$

jest równa całce

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} {}_pF_q \left( \begin{matrix} u_1, \dots, u_p \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \middle| s \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_{p+1})_n t^n}{(v_{q+1})_n s^n} \frac{ds}{s}. \quad (\text{B.5})$$

Dowód. Oznaczmy przez  $H_v^u$  funkcję podniesienia indeksów

$$H_v^u(t) := \sum_{n \geq 0} \frac{(u)_n}{(v)_n} t^n = {}_2F_1 \left( \begin{matrix} u, 1 \\ v \end{matrix} \middle| t \right). \quad (\text{B.6})$$

Jeśli teraz

$$\phi * \psi(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \phi(s) \psi(ts^{-1}) \frac{ds}{s}, \quad (\text{B.7})$$

to

$$\begin{aligned} {}_pF_q * H_v^u &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1)_n (u_2)_n \dots (u_p)_n s^n}{(v_1)_n (v_2)_n \dots (v_q)_n n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(u_{p+1})_k t^k}{(v_{q+1})_k s^k} \frac{ds}{s} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{k,n=0}^{\infty} \frac{(u_1)_n (u_2)_n \dots (u_p)_n (u_{p+1})_k t^k s^{n-k}}{(v_1)_n (v_2)_n \dots (v_q)_n (v_{q+1})_k n!} \frac{ds}{s} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1)_n (u_2)_n \dots (u_p)_n (u_{p+1})_n t^n}{(v_1)_n (v_2)_n \dots (v_q)_n (v_{q+1})_n n!}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Ostatnia równość zachodzi na mocy twierdzenia o residuach, mamy bowiem

$$\frac{1}{2\pi i} s^n \cdot \frac{t^k}{s^k} \frac{ds}{s} = \text{res}_{s=0} \left( s^{n-k-1} t^k \right) = \delta_{k,n} t^n. \quad (\text{B.9})$$

To kończy dowód Stwierdzenia.  $\square$

Zauważmy, że 'opuszczenie' indeksów, czyli redukcja  ${}_{p+1}F_{q+1} \mapsto {}_pF_q$  odbywa się znacznie prościej. Wystarczy przyjąć np.  $u_p = v_q$ .

Stwierdzenie B.1.1 pozwala użyć różne reprezentacje całkowe rozwiązań równań różniczkowych, które dają się zredukować się do przypadków szczególnych ogólnego równania hipergeometrycznego. Iterując wzory całkowe, można na przykład przedstawić takie funkcje za pomocą całek po  $n$ -wymiarowym torusie  $T \subset \mathbb{C}^n$ . Jeśli  $L \subset \mathbb{R}^n$  jest taką kratą, że  $\mathbb{R}^n \setminus L \simeq T$ , to możemy wówczas uzyskać reprezentację całkową

$${}_{p+1}F_{q+1} \left( \begin{matrix} u_1, \dots, u_{p+1} \\ v_1, \dots, v_{q+1} \end{matrix} \middle| t \right) = \int_P \varphi(x) dx, \quad (\text{B.10})$$

gdzie  $P \subset \mathbb{R}^n$  jest równoległocią fundamenta działania  $L$  na  $\mathbb{R}^n$ , który po utożsamieniu ścian relacją  $\sim_L$  odpowiada torusowi  $T$ .

## B.2. Wielokrotne polilogarytmy i uogólnione całki Drinfelda-Kontsevicha

We wstępie (25) oraz w Rozdziałach 1 i 2, do analizy wielokrotnych wartości zeta, zostały wykorzystane wielokrotne polilogarytmy (C.0.1) oraz całki Drinfelda-Kontsevicha.

Rozważmy całkę

$$\int_0^1 \left(\frac{dt}{t}\right)^{\circ(s_1-1)} \circ \frac{dt}{p_1-t} \circ \dots \circ \left(\frac{dt}{t}\right)^{\circ(s_l-1)} \circ \frac{dt}{p_l-t} \quad (\text{B.11})$$

gdzie  $p_i = x_1 \cdot \dots \cdot x_i$ , dla  $0 < i \leq l$ , którą dalej będziemy oznaczać przez

$$\text{Li}_{s_1, \dots, s_l}(x_1, \dots, x_l) \quad (\text{B.12})$$

i gdzie

$$\int_{t_0}^{t_1} \phi(t) \circ \psi(t) := \int_{t_0}^{t_1} \left( \int_{t_0}^t \phi(s) \right) \psi(t), \quad (\text{B.13})$$

dla 1-form  $\phi$  i  $\psi$ . Wyrażenie (B.12) jest ogólną postacią **wielokrotnego polilogarytmu**, wprowadzoną przez A. B. Goncharova w pracy [43]. Wszystkie występujące w tej pracy wielokrotne polilogarytmy są przypadkami (B.12).

Wzór (B.12) jest pierwotnie określony dla całkowitych  $s_i$ . Jednak może być przedłużony na  $\mathbb{C}$  z wyłączeniem skończonej liczby punktów. Wówczas funkcja  $\zeta$  daje się przedstawić w prosty sposób, jako całka z 1-formy podniesionej do potęgi zespolonej:

$$\zeta(s) = \int_{\gamma} \frac{dt}{1-t} \left(\frac{dt}{t}\right)^{s-1} dt, \quad (\text{B.14})$$

gdzie  $\gamma$  jest drogą łączącą 0 i 1. Patrz [57], gdzie przy użyciu powyższych metod, autor wyznaczył też w nowy, prosty sposób monodromię klasycznych polilogarytmów. Podobne wzory można też znaleźć dla funkcji  $L$  Dirichleta.

Wykorzystując wzór (B.12) dla  $p_i = \mu_k^i$ , gdzie  $\mu_k$  jest pierwiastkiem pierwotnym stopnia  $k$  z jedynki, Goncharov (patrz [42]) opisał własności uogólnionych, alternujących wartości zeta pochodzących od funkcji  $L$  Dirichleta. W pracy [99] Jianqiang Zhao, posługując się podobnymi metodami, znalazł wzory na alternujące sumy Eulera.



## Dodatek C

# Zachowanie rozwiązań meromorficznych równań liniowych w otoczeniu punktów osobliwych i funkcje konfluentne

Z ogólnej teorii RRZ wiadomo, że liniowe RRZ rzędu  $n$  ma dokładnie  $n$  liniowo niezależnych rozwiązań. Na mocy **twierdzenia Fuchsa**, w otoczeniu regularnego punktu osobliwego, istnieje co najmniej jedno rozwiązanie w postaci szeregu potęgowego, a inne rozwiązania wyrażają się jako kombinacje takich szeregów, funkcji potęgowej oraz logarytmów. **Metoda Frobeniusa** służy do ich wyznaczania. Pierwotnie była ona była stosowana do rozwiązywania równań drugiego rzędu,<sup>1</sup> ale z powodzeniem można ją uogólnić na rozwiązywanie dowolnych równań różniczkowych zwyczajnych w otoczeniu regularnych punktów osobliwych. Ogólną metodę zilustrujemy najpierw na przykładzie równania Bessela.

Klasyczna teoria (układów RRZ) pozwala na dokładne określenie zachowania jakościowego rozwiązania równania

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad (\text{C.2})$$

---

<sup>1</sup>Równanie pierwszego rzędu

$$\frac{dx}{dt} + q(t)x = 0, \quad q(t) := \sum_{n \geq -1} q_n t^{n+r}, \quad (\text{C.1})$$

gdzie funkcja  $q(t)$  jest analityczna w otoczeniu zera ma regularny punkt osobliwy w  $t = 0$ . Wstawiając szereg w miejsce pochodnej otrzymuje się liniowe równanie charakterystyczne  $r + q_{-1} = 0$ , które zawsze ma jednoznaczne rozwiązanie, zatem metoda Frobeniusa stosuje się też i w tym wypadku. Zazwyczaj jednak nie stosuje się jej ze względu na dostępność innych sposobów, jak np. tzw. rozdzielanie zmiennych. Niemniej, warto podać ten prosty przykład, dla uzmysłowienia sobie zgodności różnych metod.

w zależności od własności<sup>2</sup>  $A$ . Na przykład gdy  $A$  jest holomorfczne, to rozwiązania także są holomorfczne. Motywowani problemami (także z poza) teorii RRZ, w dalszym ciągu będziemy się jednak zajmować ogólniejszym przypadkiem, gdy  $A$  dopuszcza pewne osobliwości.

W dalszym ciągu będziemy rozróżniać dwa typy punktów osobliwych meromorfcznych RRZ.

**Definicja C.0.1** *Punkt, w którym operator  $A(t)$  ma biegun nazywamy<sup>3</sup> punktem osobliwym równania.*

Wyróżniamy punkty osobliwe **regularne**, dla których (przyjmując, że punktem osobliwym jest zero) rozwiązanie ma następującą własność  $x(t) = o(t^n)$ , dla pewnego  $n \in \mathbb{Z}$  oraz punkty osobliwe **nieregularne**, dla których oszacowanie tego typu nie zachodzi dla żadnego  $n \in \mathbb{Z}$ .

Co ta definicja oznacza w praktyce? Aby się przekonać, rozważmy następującą sytuację.

**Przykład C.0.1** *Niech będzie dane jednowymiarowe równanie*

$$\dot{x}(t) = t^{-r} A(t)x(t), \quad \text{gdzie} \quad A(t) = A_0 + A_1 t + \dots \quad (\text{C.3})$$

*jest holomorfczna i  $A_0 \neq 0$ . Główne rozwiązanie ma postać*

$$x(t) = \exp \left\{ \int_{t_0}^t A(u) u^{-r} du \right\}. \quad (\text{C.4})$$

*Jeśli teraz  $r = 1$ , to*

$$x(t) = t^{A_0} y(t), \quad (\text{C.5})$$

*gdzie  $y$  jest funkcją analityczną z otoczeniu zera. Punkt  $t = 0$  jest więc osobliwy i regularny. W przeciwnym wypadku (czyli dla  $r > 1$ ) otrzymujemy rozwiązanie postaci*

$$x(t) = e^{q(1/t)} y(t), \quad (\text{C.6})$$

*gdzie  $y$  jest analityczna w otoczeniu zera, a  $q$  jest wielomianem różnym od stałej. Ze względu na czynnik  $e^{q(1/t)}$  osobliwość takiego równania jest nieregularna.*

---

<sup>2</sup>W tym wypadku mamy do czynienia z układem na  $\mathbb{C}$ . Ogólnie można rozważać równania na powierzchni Riemanna  $S$  i wtedy należy rozumieć  $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$  jako lokalny opis działania koneksji  $A$  na przekroju  $x$  pewnej wiązki holomorfcznej  $E \rightarrow S$ . W tej rozprawie  $S$  jest zwykle tożsamy z  $\mathbb{C}P^1$ ,  $Y := \mathbb{C}P^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ , lub po prostu z  $\mathbb{C}$ .

<sup>3</sup>W dalszym ciągu będziemy często zakładać, że mamy do czynienia z przypadkiem lokalnym  $(\mathbb{C}, 0)$  i wówczas, często bez jawnego wskazania, przez punkt osobliwy będziemy rozumieć  $t = 0$ .



Na koniec przytoczymy twierdzenie Fuchsa (porównaj [6] i [23]), na którym często, niekiedy milcząco, opieramy rozumowania dotyczące lokalnej analizy rozwiązań układów równań różniczkowych oraz równań wyższych rzędów.

**Twierdzenie C.0.1 (Fuchs)** *Liniowe równanie różniczkowe drugiego rzędu*

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = f, \quad (\text{C.7})$$

gdzie  $p, q$  i  $f$  są analityczne, ma, w otoczeniu regularnego punktu osobliwego, co najmniej jedno rozwiązanie w postaci **szeregu Frobeniusa**

$$x = \sum_{n \geq 0} a_n (t - t_0)^{n+r}, \quad (\text{C.8})$$

gdzie  $a_0 \neq 0$  i  $r \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Drugie rozwiązanie<sup>4</sup> jest albo postaci (C.8), albo postaci

$$x = \log(t - t_0) \sum_{n \geq 0} a_n (t - t_0)^{n+r} + \sum_{n \geq 0} b_n (t - t_0)^{n+s}, \quad (\text{C.9})$$

gdzie  $s \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Promień zbieżności  $x$  jest nie mniejszy, niż minimum promieni zbieżności  $p, q$  i  $f$ .

Jak łatwo można sobie wyobrazić, powyższe twierdzenie uogólnia się w odpowiedni sposób na równania wyższych rzędów.

## C.1. Równanie Bessela: przypadek niezdegenerowany

Zaprezentujemy teraz metodę Frobeniusa na przykładzie równania Bessela

$$t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} + t \frac{dx}{dt} + (t^2 - \alpha^2)x = 0, \quad (\text{C.10})$$

lub równoważnie

$$\left[ \left( t \frac{d}{dt} \right)^2 + t^2 - \alpha^2 \right] x = 0, \quad (\text{C.11})$$

gdzie  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ .

Przewidujemy rozwiązanie w postaci

$$x = \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+r} \quad (\text{C.12})$$

i zakładamy, że  $a_0 \neq 0$ . Następnie obliczamy

$$\dot{x} = \sum_{n \geq 0} (n+r) a_n t^{n+r-1} \quad \text{oraz} \quad \ddot{x} = \sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2}. \quad (\text{C.13})$$

---

<sup>4</sup>Na określenie drugiego rozwiązania używa się niekiedy terminu: **uogólniony szereg Frobeniusa**.

Podstawiając szeregi w miejsce pochodnych do równania Bessela, otrzymujemy

$$\sum_{n \geq 0} \left[ (n+r)(n+r-1) + (n+r) - \alpha^2 \right] a_n t^{n+r} + \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+r+2}. \quad (\text{C.14})$$

Przyjmując współczynnik przy  $n = 0$  do zera, otrzymujemy **równanie indukcyjne**

$$(r^2 - \alpha^2) a_0 = 0. \quad (\text{C.15})$$

Z warunku  $a_0 \neq 0$  wynika, że  $r = \pm \alpha$ . Postępując analogicznie dla  $n = 1$  dostajemy  $a_1(2\alpha + 1) = 0$ , skąd<sup>5</sup>  $a_1 = 0$  i dalej, dla  $n > 1$ , otrzymujemy

$$n a_n (2\alpha + n) + a_{n-2} = 0. \quad (\text{C.17})$$

Szeregi

$$J_\alpha(t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2 + \alpha)_n (2it)^n}{(1 + 2\alpha)_n n!} \quad (\text{C.18})$$

$$= \frac{(t/2)^\alpha e^{-it}}{\Gamma(1 + \alpha)} {}_1F_1 \left( \begin{matrix} 1/2 + \alpha \\ 1 + 2\alpha \end{matrix} \middle| 2it \right) \quad (\text{C.19})$$

$$= \frac{(t/2)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} {}_0F_1 \left( \begin{matrix} \\ 1 + \alpha \end{matrix} \middle| -(t/2)^2 \right) \quad (\text{C.20})$$

oraz  $J_{-\alpha}(t)$  spełniają równanie Bessela i stanowią bazę jego rozwiązań.

## C.2. Równanie Bessela: przypadek zdegenerowany

Jeśli  $\alpha \in \mathbb{Z}$ , to funkcje  $J_\alpha(t)$  i  $J_{-\alpha}(t)$  są zależne liniowo, co wynika z prostej relacji  $J_{-\alpha}(t) = (-1)^\alpha J_\alpha(t)$ . Funkcja  $J_\alpha(t)$  spełnia równanie Bessela dla  $\alpha \in \mathbb{C}$  i dla ustalonego  $t$  jest całkowita ze względu na  $\alpha$ . Poszukujemy zatem drugiego, niezależnego liniowo z  $J_\alpha(t)$  rozwiązania równania Bessela.

Funkcja  $J_{-\alpha}(t) - (-1)^\alpha J_\alpha(t)$  spełnia równanie Bessela i dla  $\alpha \in \mathbb{Z}$  mamy  $J_{-\alpha}(t) - \cos \pi \alpha J_\alpha(t)$ . Jeśli  $\alpha \notin \mathbb{Z}$ , to funkcja<sup>6</sup>  $J_{-\alpha}(t) - \cos \pi \alpha J_\alpha(t)$ ,

<sup>5</sup>Pominęliśmy przypadek, gdy  $\alpha = -1/2$ . W tej sytuacji możemy od razu założyć, że  $a_1 \neq 0$  i rozwiązując równania rekurencyjne otrzymamy (przy wykorzystaniu wzorów  $2^n n!(2n-1)!! = (2n)!$  oraz  $2^n n!(2n+1)!! = (2n+1)!$ , gdzie  $m!! := m(m-2)\dots$  oznacza tzw. **bisilnię**) rozwiązanie ogólne postaci

$$x = t^{-1/2} \left( a_0 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n} + a_1 \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1} \right) = t^{-1/2} (a_0 \cos t + a_1 \sin t). \quad (\text{C.16})$$

<sup>6</sup>Wybór  $\cos \pi \alpha$  został dokonany ze względów technicznych i ilustruje ogólną metodę postępowania.

będąca kombinacją liniową rozwiązań też jest rozwiązaniem odpowiedniego równania Bessla z parametrem  $\alpha$ . Rozważmy wyrażenie

$$Y_\alpha(t) := \frac{J_\alpha(t) - \cos \pi\alpha J_{-\alpha}(t)}{\sin \pi\alpha}. \quad (\text{C.21})$$

Przechodząc do granicy (jeśli  $\alpha \in \mathbb{Z} \sim 0$ ) w powyższym wzorze, otrzymujemy drugie rozwiązanie, niezależne liniowo z  $J_\alpha$ .

Rozwiązanie  $Y_\alpha$  nosi nazwę **funkcji Bessela drugiego rodzaju**.<sup>7</sup>

### C.3. Metoda Frobeniusa

Ogólna metoda Frobeniusa polega na zastosowaniu takich samych kroków jak w powyższych przykładach. Rozważmy równanie

$$\sum_{k=0}^n q_k(t) \frac{d^k x}{dt^k} = 0, \quad (\text{C.22})$$

zakładając, że  $t = 0$  jest regularnym punktem osobliwym i  $q_n = 1$ . Podobnie jak w przypadku równania Bessla, przewidujemy rozwiązanie w postaci

$$x = \sum_{n \geq 0} a_n t^{n+r} \quad (\text{C.23})$$

i zakładamy, że  $a_0 \neq 0$ . Mamy

$$\dot{x} = \sum_{n \geq 0} (n+r) a_n t^{n+r-1} \quad (\text{C.24})$$

$$\ddot{x} = \sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1) a_n t^{n+r-2} \quad (\text{C.25})$$

$$\ddot{x} = \sum_{n \geq 0} (n+r)(n+r-1)(n+r-2) a_n t^{n+r-2} \quad (\text{C.26})$$

...

Podstawiając do równania, i przyjmując  $n = 0$ , wyznaczamy **równanie indukcyjne**

$$P(r) = 0. \quad (\text{C.27})$$

**Stwierdzenie C.3.1** *W zależności od algebraicznych własności równania indukcyjnego możemy mieć do czynienia z następującymi przypadkami.*

- *Jeśli pierwiastki  $r_1, r_2, \dots, r_n$  są różne i dla żadnej pary  $r_j - r_j$  nie jest liczbą całkowitą, to wówczas mamy  $n$  szeregów Frobeniusa z wykładnikami  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .*

<sup>7</sup>Podobnie dla  $I_\alpha := e^{-i\pi\alpha/2} J_\alpha$ , określa się odpowiednie funkcje  $K_\alpha$ . Pojawiają się one w naturalny sposób przy aproksymacji transformaty Fouriera funkcji  $\xi(s) := \text{const} \cdot \pi^{1+it/2} \Gamma(1+it/2) \zeta(1+it/2)$ . Przy użyciu odpowiedniej analizy, z wykorzystaniem funkcji  $K_\alpha$ , D. Hejhal [47] uzyskał nowe, silne wyniki dotyczące proporcji gęstości zer funkcji  $\zeta$  na linii krytycznej  $\text{Re } s = 1/2$ .

- Jeśli występuje pierwiastek  $r_0$  krotności  $k > 1$ , np.  $k = 2$ , to wówczas zaburzenie równania (tak jak w przypadku  $r$ -nia Bessla) daje dla tego pierwiastka rozwiązania  $x(r_0, t)$  oraz  $\partial x / \partial r(r_0, t)$ . Jeśli krotność  $k > 2$ , to należy rozpatrzyć wyższe pochodne.
- Jeśli różnica pierwiastków  $r_0 - r_1$  jest liczbą całkowitą, to wówczas zaburzenie równania prowadzi do rozwiązań  $x(r_0, t)$  oraz  $\partial / \partial r[(r - r_1)x(r_1, t)]$ .

Powyższe stwierdzenie jest jednowymiarowym modelem analizy mikrolokalnej, która stanowi silne narzędzie w badaniu jakościowym rozwiązań równań różniczkowych cząstkowych.

## C.4. Konfluentne funkcje hipergeometryczne

Bezpośrednim, naturalnym uogólnieniem (23) jest tzw. **ogólny szereg hipergeometryczny**

$${}_pF_q \left( \begin{matrix} u_1, \dots, u_p \\ v_1, \dots, v_q \end{matrix} \middle| t \right) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(u_1)_n (u_2)_n \dots (u_p)_n}{(v_1)_n (v_2)_n \dots (v_q)_n} \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{C.28})$$

Podobnie jak w przypadku (23), także (C.28) spełnia równanie różniczkowe

$$[t(D_t + u_1)(D_t + u_2) \dots (D_t + u_p) - D_t(D_t + v_1 - 1) \dots (D_t + v_q - 1)]\phi = 0. \quad (\text{C.29})$$

Dla  $p = q + 1$  posiada ono także trzy regularne punkty osobliwe  $0, 1$  i  $\infty$ . W tym wypadku zagadnienie algebraiczności rozwiązań została rozstrzygnięta w pracy [11].

Jeśli  $p \leq q$ , to funkcję  ${}_pF_q$  nazywa się **konfluentna funkcją Hipergeometryczną**. Przykład stanowią **funkcje typu Bessela**

$${}_0F_q \left( \begin{matrix} \dots \\ 1, \dots, 1 \end{matrix} \middle| t^{q+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^q} \frac{t^{(q+1)n}}{n!}. \quad (\text{C.30})$$

## C.5. Monodromia

Pojęcie **monodromii**, które w w Rozdziałach 2 i 3) jest ważnym narzędziem przy badaniu asymptotyki meromorficznych równań różniczkowych, pojawiło się po raz pierwszy przy badaniu funkcji zespolonych (w pracach Kummera Riemanna) i podobnie jak większość pojęć topologicznych, zostało ono uogólnione na pojęcie przestrzeni topologicznych.

**Definicja C.5.1 (Monodromia)** Niech  $X$  oznacza spójną i lokalnie spójną przestrzeń topologiczną, z punktem bazowym  $x \in X$  i niech  $p : \tilde{X} \rightarrow X$  będzie nakryciem z włóknem  $F := p^{-1}(x)$ . Dla pętli bazowej  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , oznaczmy przez  $\tilde{\gamma}$  podniesienie  $\gamma$ , którego obraz zaczyna

się w  $\tilde{x}$  oraz niech  $\tilde{\gamma}(1) = \tilde{x}.\gamma$ .

Powyższa konstrukcja pozwala określić działanie grupy  $\pi_1(X)$  na  $F$ . Działanie to nazywamy **działaniem monodromii**, a odpowiadający homomorfizm w grupę symetryczną  $\varphi : \pi_1(X) \rightarrow \text{sym}(F)$ , - **monodromią**. Obraz  $\varphi(\pi_1(X))$  jest **grupą monodromii**.

Rozważmy teraz dwa przypadki monodromii równań pierwszego rzędu, które dobrze ilustrują, na czym polega monodromia.

**Przykład C.5.1** Niech  $0 < n \in \mathbb{Z}$ . Równanie różniczkowe

$$t \dot{x} - \frac{1}{n} x = 0, \quad (\text{C.31})$$

którego rozwiązaniem podstawowym jest funkcja  $x(t) = t^{1/n}$ , ma grupę monodromii równą  $\mathcal{M} = \mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ .

**Przykład C.5.2** Niech dane będzie równanie różniczkowe

$$t \ddot{x} + \dot{x} = 0, \quad (\text{C.32})$$

którego rozwiązaniem fundamentalnym jest

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \log t \end{bmatrix}. \quad (\text{C.33})$$

Mamy

$$\begin{bmatrix} x_1(e^{2\pi i} t) \\ x_2(e^{2\pi i} t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \log t + 2\pi i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \log t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.34})$$

Przedłużenie analityczne wzdłuż pętli otaczającej zero jednokrotnie, skutkuje powrotem nie do punktu  $t$ , ale do  $t + 2\pi i$ . Tą procedurę można kontynuować 'w nieskończoność' a także (po zmianie orientacji pętli) 'w minus nieskończoność'. Stąd wynika, że grupa monodromii (C.32) jest równa  $\mathbb{Z}$ .

Zwróćmy uwagę, iż moc zbioru regularnych punktów osobliwych równania danego stopnia jest ograniczona. Wynika stąd, że monodromia komplikuje się wraz ze wsrostem stopnia równania różniczkowego.



# Bibliografia

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, IX ed., New York: Dover, 1972.
- [2] Albeverio, S., Höegh-Krohn, R., Mazzucchi, S., *Mathematical theory of Feynman path integrals: an introduction*, II ed., Lecture Notes in Mathematics nr 523, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [3] R. Apéry, *Irrationabilité de  $\zeta(2)$  et  $\zeta(3)$* ; Asterisque 61 (1979), 11 - 13.
- [4] Appell, P., Kampé de Fériet, J. *Fonctions hypergéométriques et hypersphériques; Polynômes d'Hermite*. Paris: Gauthier-Villars, 1926.
- [5] Arnold, V. I. *Vassiliev's Theory of Discriminants and Knots*. First European Congress of Mathematics, Vol. 1 (Paris, 1992) (Ed. A. Joseph, F. Mignot, F. Murat, B. Prum, and R. Rentschler). Basel, Switzerland: Birkhäuser, 1994, str. 3 - 29.
- [6] Asmar, N. H. *Partial differential equations with Fourier series and boundary value problems*; Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [7] W. Balsler, *From divergent power series to analytic functions*. Lect. Notes in Math., vol. 1582, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [8] G. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, tom I, Mc Graw Hill Book, C., New York, 1953.
- [9] G. Bateman and A. Erdelyi, *Higher transcendental functions*, tom II, Mc Graw Hill Book, C., New York, 1953.
- [10] Beukers F., Bornawell D., Heckman G., *Siegel normality*. Ann. Math. 127 (1988), 279 - 308.
- [11] Beukers F., Heckman G., *Monodromy for the hypergeometric function  ${}_nF_{n-1}$* . Invent. Math. 95 (1989), 325-354,
- [12] Beukers F., Peters C. A. M., *A family of K3 surfaces and  $\zeta(3)$* . J. reine angew. Math. 351 (1984) 42 - 54,

- [13] G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain differential equations containing a parameter*. Trans. Amer. Math. Soc. 9 (1908), 219 - 230.
- [14] G. D. Birkhoff, *Quantum mechanics and asymptotic series*, Bull. Amer. Math. Soc. 32 (1933), 681 - 700.
- [15] J. M. Borwein, D. M. Bradley and D. J. Broadhurst, *Evaluations of  $k$ -fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary  $k$* , Electronic J. Combinat. 4 (1997), No 2. # R5.
- [16] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisonèk, *Combinatorial aspects of multiple zeta values*, Electronic J. Combinat. 5 (1998), # R38.
- [17] L. Brillouin, *La mécanique ondulatoire de Schrödinger: une méthode générale de résolution par approximations successives*, C. R. Acad. Sci. Paris 183 (1926), 24 - 26.
- [18] Broadhurst D. J., Kreimer D. *Association of multiple zeta values with positive knots via Feynman diagrams up to 9 loops*. Physics Lett. B 393 (1997), 403-412,
- [19] Broadhurst D. J. *On the enumeration of irreducible  $k$ -fold Euler sums and their roles in knot theory and field theory*. preprint.
- [20] Broadhurst D. J. *Conjectured enumeration of irreducible multiple zeta values, from knots and Feynman diagrams*. preprint.
- [21] Broadhurst D. J. *Massive 3-loop Feynman diagrams reducible to  $SC^*$  primitives of algebras of the sixth root of unity*. European Phys. J. C (Fields) 8 (1999), 311-333.
- [22] Buslaev, V. S., *The generating integral and the canonical Maslov operator in the WKB method*. Funkt. Anal. i Ego Pril., 3:3 (1969), 17-31 (po rosyjsku). Wersja angielska: J. Funct. Anal. Appl., 3 (1969), 181-193.
- [23] Butkov, E. *Mathematical Physics*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1995.
- [24] Conway, J. H., i Guy R. K., *Księga liczb*. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.
- [25] Cresson, Fischler, Rivoal, *Phénomènes de symétrie dans des formes linéaires en polyzetas*. J. reine angew. Math. 617 (2008), str. 109 - 152.
- [26] Cresson, Fischler, Rivoal, *Séries hypergéométriques multiples et polyzetas*. Bull. SMF 136.1 (2008), str. 97 - 145.



- [27] A. Duval, C. Mitschi, *Matrices de Stokes et groupe de Galois des equations hypergeometriques confluentes generalizes*. Pacific J. Math. 138 (1989), 25 - 56.
- [28] Dwork B. *Generalized hypergeometric functions*. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, New York, 1990.
- [29] Egorov, Yu. V., *On canonical transformations of pseudo-differential operators*. Uspehi Mat. Nauk, 25 (1969), 235-236.
- [30] Egorov, Yu. V., *On non-degenerate hypoelliptic pseudo-differential operators*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 186 (1969), 1006-1007. (po rosyjsku), tłumaczenie ang.: Soviet Math. Doklady, 10 (1969), 697-699.
- [31] Erdélyi, Arthur; Magnus, Wilhelm; Oberhettinger, Fritz; Tricomi, Francesco G., *Higher transcendental functions, I*. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1953.
- [32] Euler L., *Meditationes circa singulare serierum genus*. Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. 20 (1775), 140-186. Reprinted in Opera Omnia, ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin, 1927, str. 217-267
- [33] Euler L., *Opera Omnia*. Ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin, 1927.
- [34] M. B. Fedoryuk, *Asymptotic analysis. Linear ordinary differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1993
- [35] Fox, Charles, *The G and H functions as symmetrical Fourier kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. 98, (1961), 395-429.
- [36] Gauss, Carl Friedrich, *Disquisitiones generales circa seriam infinitam  $1 + \frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)} + etc.$* . Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores (Gottingen) 2 (1813).
- [37] Gelfand I. M., Graev M. I., *Holonomic systems of equations and series of hypergeometric type*. Doklady Akad. Nauk SSSR 295 (1987), 14-19.
- [38] Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V., *Generalized Euler integrals and A-hypergeometric functions*. Adv. in Math 84 (1990), 255-271.
- [39] Gelfand I.M., Kapranov M.M., Zelevinsky A.V. *Hypergeometric functions and toric varieties*. Funkt. Anal. i Priloz. 23 (1989), 12-26.
- [40] A. A. Glyutsuk, *Stokes operators via limit monodromy of generic perturbation*. J. Dynam. Control Syst. 5 (1999), 101 - 135.

- [41] Goncharov A.B, *Multiple  $\zeta$ -values, Galois groups, and geometry of modular varieties*. European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000), Vol. I, Progr. Math. 201, Birkhäuser, Basel, 2001, str. 361-392
- [42] Goncharov A.B, *The dihedral Lie algebras and Galois symmetries of  $\pi_1^{(l)}(P^1 - (\{0, \infty\} \cup \{\mu_N\}))$* . Duke Math. J. 110 (2001), 397-487
- [43] Goncharov A.B, *Polylogarithms in arithmetic and geometry*. Proc. ICM, Zürich, Vol. I, Birkhäuser, 1994, str. 374-387.
- [44] Goncharov A.B i Manin Yu. I. *Multiple  $\zeta$ -motives and moduli spaces  $M_{0,n}$* . Compositio Math. 140 (2004), 1-14
- [45] Guillemin, V., Sternberg, S. *Geometric Assymptotics*. Mathematical Surveys and Monographs Nr 14. Amer. Math. Soc., Providence, 1990.
- [46] Heading, J. M. A., *An introduction to phase-integral methods* J. Wiley & Sons, New York, 1977.
- [47] Hejhal, D. A., *On a result of G. Pólya concerning the Riemann  $\xi$ -function*. J. d'Analyse Mathématique 55 (1990), 59-95.
- [48] Hoffman, M. E., *Quasi-Shuffle product*. J. Alg. Comb. 11 (2000), 49 - 68.
- [49] Hoffman, M. E., *Multiple harmonic series*. Pacific J. Math. 152 (1992), 275-290.
- [50] Hoffman, M. E., *Referencje i spis wybranej literatury na temat wielokrotnych wartości zeta*. Dostępny na stronie: <http://www.usna.edu/Users/math/meh/biblio.html>
- [51] Hörmander, L. *Fourier Integral Operators*. Acta Math., 127 (1971), 79-183.
- [52] Horn, J. *Hypergeometrische Funktionen zweier Veränderlichen*. Math. Ann. 105 (1935), 381-407.
- [53] Hukuhara, M. *Sur les points singuliers des équations différentielles lineaires. II*. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 5 (1937), 123 - 166.
- [54] Ilyashenko Yu., Yakovenko S., *Lectures in analytic differential equations*. Graduate Texts in Math. 86, Amer. Math. Soc., Providence, 2008.
- [55] H. Jeffreys, *On certain approximate solutions of linear differential equations of the second order*. Proc. London Math. Soc. 23 (1924), 428-436.
- [56] Joni S. A., Rota, G. C., *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*. W (Morris, R. ed.) Umbral Calculus and Hopf Algebras, Contemp.Math., Amer. Math. Soc., 1978, str. 1 - 48.

- [57] Joyner, S., *On a generalization of Chen's iterated integrals*. J. Number Theory, Vol. 130, (2010), 254 - 288.
- [58] Katz, N. *On the calculation of some differential Galois groups*. Invent. Math., Vol. 87, (1987), 13 - 61.
- [59] Katz, N. *Exponential sums and differential equations*. Annals of Math. Studies, v. 124, Princeton Un-ty Press, Princeton, 1990.
- [60] M. Kohno, *Global analysis in linear differential equations*. Mathematics in Applications, Kluwer Academic Publications, Dordrecht, 1999.
- [61] Kontsevich, M. *Vassiliev's Knot Invariants* Adv. Soviet Math. 16, Part 2, 1993, str. 137 - 150.
- [62] Kontsevich, M. and Zagier D., *Periods w "Mathematics Unlimited - 2001 and beyond"*, Springer, Berlin 2001, str. 771 - 808
- [63] H. A. Kramers, *Wellenmechanik und halbzählige Quantisierung* Zeit. Physik 39 (1926), 828 - 840.
- [64] Langer, R. E., *On the asymptotic solutions of differential equations with an application to the Bessel functions of large complex order*. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932), 447 - 480.
- [65] Langer, R. E., *The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order*. Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), 90 - 106.
- [66] Lauricella, G. *Sulla funzioni ipergeometriche a piu variabili*. Rend. Circ. Math. Palermo 7 (1893), 111 - 158.
- [67] Levelt, A. H. M., *Jordan decomposition for a class of singular differential operators*. Arkiv Mat. 13 (1975), 1 - 27.
- [68] B. H. Lian, S.-T. Yau, *Arithmetic properties of mirror map and quantum coupling*, Comm. Math. Phys. 176 (1996), 163 - 291.
- [69] Lindemann, F., *Über die Zahl  $\pi$ .*, Math. Ann. 20 (1882), str. 213 - 225.
- [70] Loeb, D. E. *The iterated logarithmic algebra*. Adv. Math., 86 (1991), 155 - 234.
- [71] Loeb, D. E. i Rota, G. C. *Recent advances in the calculus of finite differences*. W (Coen, S. ed.) Geometry and Complex Variables, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, vol. 132, Marcel Dekker, 1991, str. 239 - 276.
- [72] Maslov, V. P., *Theory of pertubations and asymptotic methods*. Moskov. Gos. Univ., Moscow, 1965 (po rosyjsku).

- [73] C. Mitschi, *Differential Galois groups of confluent generalized hypergeometric equations: an approach using Stokes multipliers*. Pacific J. Math. 176 (1996), 365 - 405.
- [74] Mathai, A. M.; Saxena, Ram Kishore; Haubold, Hans J, *The H-function*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 2010.
- [75] Meijer, C. S., *On the G-functions*. Indag. Math. 8 (1946), I: 124 - 134; II: 213 - 225; III: 312- 324; IV: 391 - 400; V: 468 - 475; VI: 595 - 602; VII: 661 - 670; VIII: 713 - 723.
- [76] Meyer, R. E., *A Simple Explanation of the Stokes Phenomenon*. SIAM Review, Vol. 31, (1989), 435-445
- [77] H. N. Minh, M. Petitot and J. van der Hoeven, *Shuffle algebra and polylogarithms*. in: "Formal Series and Algebraic Combinatorics, Toronto 98", Discrete Math. 225 (2000), 217 - 230.
- [78] H. N. Minh, M. Petitot and J. van der Hoeven, *Shuffle algebra and polylogarithms*, in: 'Formal Series and Algebraic Combinatorics, Toronto 98', Discrete Math. 225 (2000), 217 - 230.
- [79] A. van der Poorten, *A proof that Euler missed... Apéry's proof of the irrationality of  $\zeta(3)$* , Math. Intelligencer 1 (1978/79), No 4, 195 - 203.
- [80] T. Rivoal, *Hypergeometric constructions of rational approximations for (multiple) zeta values*. Algebraic and analytic aspects of zeta functions and L-functions, MSJ Mem. 21, Math. Soc. Japan, Tokyo, (2010), str. 167-183.
- [81] Roman, S. *The Umbral Calculus*. Dover Publications, 2005.
- [82] Roman, S. i Rota, G. C. *The Umbral Calculus*. Advances in Mathematics, vol. 27 (1978), str. 95 - 188.
- [83] Schiff L. I., *Quantum mechanics*. McGraw-Hill Book Comp., New York, 1968.
- [84] Stokes G. G., *On the discontinuity of arbitrary constant that appear as multipliers of semi-convergent series*. Acta Math. 26 (1902), 393 - 397.
- [85] Tao, T. *Graduate Fourier analysis, F '06 and W '07*. preprint dostępy na stronie <http://www.math.ucla.edu/~tao/>
- [86] Turrittin T., *Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary differential equations containing a parameter, z* "Contributions to the theory of nonlinear oscillations", Annals of Mathematical Studies 29, Princeton University Press, Princeton, 1952, str. 81 - 116.

- [87] Turritin T., *Convergent solutions of ordinary differential equations in the neighborhood of an irregular singular point*. Acta Math. 93 (1955), 27 - 66.
- [88] Vassiliev, V. A., *Cohomology of Knot Spaces*. Theory of Singularities and Its Applications (Ed. V. I. Arnold). Adv. Soviet Math. 1 (1990), str. 23 - 69.
- [89] Wasow, W. *Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations*. Dover Phoenix Editions, 2002.
- [90] Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Second Edition, Cambridge University Press, 1995.
- [91] G. Wentzel, *Eine Verangemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Wellen-mechanik*. Zeit. Physik 38 (1926), 518.
- [92] Witten, E., *Quantum field theory and the Jones polynomial*. Comm. Math. Phys. 121 (1989), no. 3, 351–399.
- [93] Yoshida Masaaki, *Hypergeometric Functions, My Love: Modular Interpretations of Configuration Spaces*. Friedrich Vieweg & Son., 1997.
- [94] Zagier D., *Values of zeta functions and their applications*. in First European Congress of Mathematics (Paris, 1992), Vol. II, A. Joseph et. al. (eds.), Birkhäuser, Basel, 1994, str. 497-512
- [95] Zakrzewski M., Żołądek H. *Linear meromorphic differential equations and multiple zeta-values I. Zeta (2)*. Fund. Math. 210, (2010), 207 - 242.
- [96] Zakrzewski M., Żołądek H. *Linear meromorphic differential equations and multiple zeta-values II. Generalization of the WKB method*. J. Math. An. Appl. (w druku)
- [97] Zakrzewski M., Żołądek H. *Linear meromorphic differential equations and multiple zeta-values III. Zeta (3)*. preprint, 2011
- [98] Zhao Jianqiang, *Analytic continuation of multiple zeta functions*. Proc. AMS, Vol. 128, Nr 5 (1999), 1275 - 1283.
- [99] Zhao Jianqiang, *On a conjecture of Borwein, Bradley and Broadhurst*. J. reine angew. Math. 639 (2010), strony 223 - 233.
- [100] Żołądek H. *Note on multiple zeta values*. Bull. Acad. Stiinte Rep. Mold. Matem. 41 (2003), 78 - 82.
- [101] Żołądek H. *The monodromy group*. Birkhäuser, Basel, 2006.